M1 - 2025/2026
Analyse Fonctionnelle
Option Fondamentale

TD 1 - Dualité - Correction

Exercice 1

1

1. $\Rightarrow$ Supposons que $x_n \rightharpoonup x$. Alors : $\forall u \in H'$, $u(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)$.

Soit $y \in H$. Alors $u_y : \begin{array}{l} H \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \langle x | y \rangle \end{array} \in H'$ car :

$\forall x \in H, |\langle x|y\rangle| \leq \underbrace{\|y\|}_{\text{cste}} \|x\|$ par Cauchy-Schwarz.

Donc : $\langle x_n | y \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x|y\rangle$

$\Leftarrow$ Soit $u \in H'$. Par le théorème de représentation de Riesz :

$\exists y \in H, \forall x \in H, u(x) = \langle x|y\rangle$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(x_n) = \langle x_n | y\rangle \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ \uparrow \\ \text{par hypothèse}}]{} \langle x|y\rangle = u(x)$. Donc $x_n \rightharpoonup x$.

(2)

2. On remarque tout d'abord que si $y \in H$ est orthogonal à tous les x_n, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle x_n | y \rangle = 0$ et cette suite tend bien vers $0 = \langle 0 | y \rangle$. Puis par linéarité à gauche du produit scalaire, si y est orthogonal à toute combinaison linéaire des x_n, on a encore le résultat. Enfin par C^0 du produit scalaire :

$$\forall y \in \overline{\mathrm{Vect}((x_n))}^{\perp}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \langle x_n | y \rangle = 0 = \langle 0 | y \rangle.$$

Cela nous conduit à introduire $F = \overline{\mathrm{Vect}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})}^{\perp}$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H. D'où :

$$H = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}.$$

③ Soit alors $y \in H$. Il existe un unique couple $(y_F, y_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $y = y_F + y_{F^\perp}$.

On vient de démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \langle x_n | y_{F^\perp} \rangle = 0$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \langle x_n | y \rangle = \langle x_n | y_F \rangle + \langle x_n | y_{F^\perp} \rangle = \langle x_n | y_F \rangle$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $y_F \in F$, il existe $y_\varepsilon \in \mathrm{Vect}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tel que $\| y_F - y_\varepsilon \| \leq \varepsilon$. Or il existe aussi $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $x_{n_1}, \dots, x_{n_p}$ tels que :

$$y_\varepsilon = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, x_{n_i}$$

Si $n > \max(n_1, \dots, n_p)$ on a par orthogonalité de la famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\langle x_n | y_\varepsilon \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{\langle x_n | x_{n_i} \rangle}_{=0} = 0$$

4

Il vient enfin : $\forall n > \max(n_1, \dots, n_p)$,

$$|\langle x_n | y \rangle| = |\langle x_n | y_F \rangle| = |\langle x_n | y_F - y_\varepsilon + y_\varepsilon \rangle|$$

$$\leq |\langle x_n | y_F - y_\varepsilon \rangle| + \underbrace{|\langle \cancel{x_n} | y_\varepsilon \rangle|}_{=0}$$

$$\overset{CS}{\leq} \underbrace{\|x_n\|}_{=1} \underbrace{\|y_F - y_\varepsilon\|}_{\leq \varepsilon}$$

$$\leq \varepsilon.$$

D'où

$$\langle x_n | y \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{i.e.} \quad x_n \rightharpoonup 0.$$

5

Exercice 2 :

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x\|^2 = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\xrightarrow{} \|x\|^2} - 2\mathrm{Re}\underbrace{(x_n | x)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} (x|x) = \|x\|^2} + \|x\|^2$

par cv faible de x_n vers x.

D'où :

$$\|x_n - x\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0$$

i.e. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

6

Exercice 3 :

1. Tout espace de Hilbert est réflexif, on peut donc y appliquer le théorème de sélection : la boule unité de H est séquentiellement faiblement compacte. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normée, elle est dans la boule unité de H, donc on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente et dont la limite faible x est dans la boule unité de H.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x_n|x) + \|x\|^2$

$$= 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(x_n|x) + \|x\|^2.$$

Or $x_n \rightharpoonup x$ donc $(x_n|x) \longrightarrow (x|x) = \|x\|^2$

et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\|^2 = 1 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 1 - \|x\|^2.$

7

3. a. Par définition : $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$

Donc, il existe une suite $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normée telle que

$\|T\tilde{x}_n\| \to \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$. Par 1. on peut extraire de $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite faiblement convergente. Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite pour obtenir l'existence voulue.

b. Tout d'abord :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|Tx_n - Tx\|^2 \leq \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} \|x_n - x\|^2 \quad (1)$$

Or : $\|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} \|x_n - x\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} (1 - \|x\|^2)$ par 2.

D'autre part :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|Tx_n - Tx\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(Tx_n | Tx) + \|Tx\|^2$$
$$= \|Tx_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x_n | T^*Tx) + \|Tx\|^2$$

8

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} - 2\operatorname{Re}(x \mid T^*Tx) + \|Tx\|^2$$

$$= \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} - 2\operatorname{Re}(Tx \mid Tx) + \|Tx\|^2$$

$$= \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} - \|Tx\|^2$$

D'où en passant à la limite dans (1) :

$$\|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} - \|Tx\|^2 \leq \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} (1 - \|x\|^2)$$

$$\iff -\|Tx\|^2 \leq -\|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} \|x\|^2$$

$$\iff \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} \|x\|^2 \leq \|Tx\|^2.$$

Or : $\|Tx\|^2 \leq \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} \|x\|^2$ d'où : $\|Tx\|^2 = \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} \|x\|^2$

soit encore $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ si $x \neq 0$ i.e. $\|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ est atteinte. Ceci étant absurde, $x = 0$!

9

Exercice 4 :

1. On a : $\forall f \in E$, $|u(f)| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$

Donc $u \in E'$ et $\|u\|_{E'} \leq 1$.

De plus, pour $f \equiv 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $|u(f)| = 1$

donc $\|u\|_{E'} = \sup_{\|f\|_\infty} |u(f)| \geq 1$. Finalement $\|u\|_{E'} = 1$.

Soit $n \geq 1$ et soit $f \in E$.

$$|u_n(f)| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Donc $u_n \in E'$ et $\|u_n\|_{E'} \leq 1$.

Pour $f \equiv 1$ on a encore $\|f\|_\infty = 1$ et $|u_n(f)| = 1$ donc comme précédement, $\|u_n\|_{E'} = 1$.

10

2. Soit $f \in E$. Par les sommes de Riemann :

$$u_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx = u(f).$$

Donc : $\forall f \in E,\ u_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(f)$.

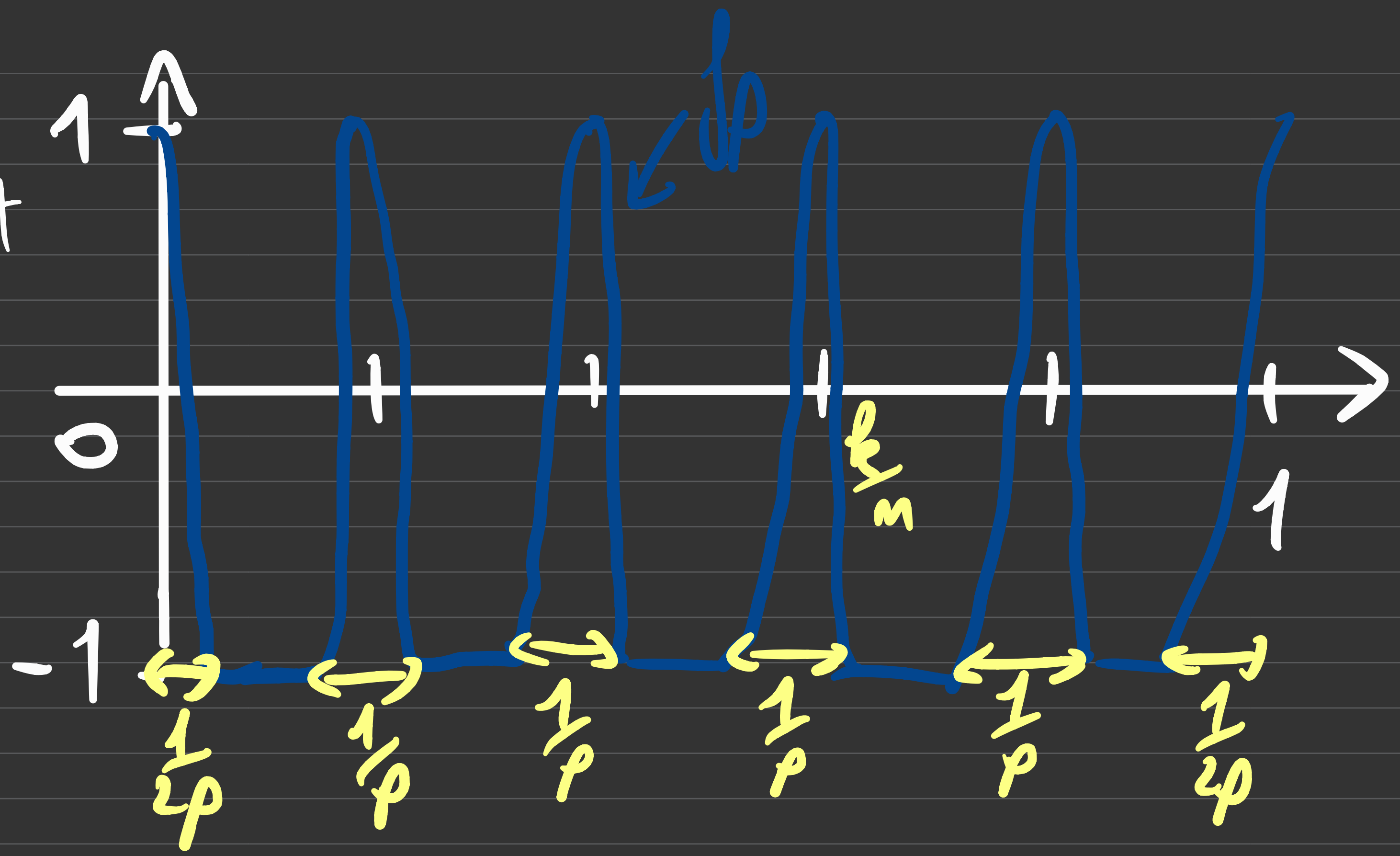
Puis : $\forall n \geq 1,\ \forall f \in E,\ |u_n(f) - u(f)| = \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right)\right|$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2\|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty$$

D'où : $\|u_n - u\|_{E'} \leq 2$.

(11) Fixons $n \geq 1$.

Pour $p \geq 1$ on définit $f_p \in E$:



Alors : $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_n(f_p) = 1$ et $u(f_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} -1$.

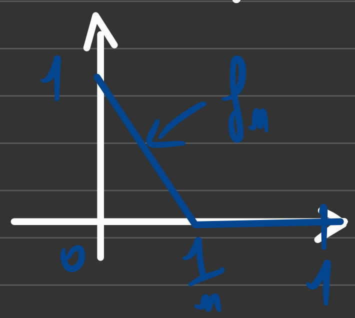
Donc $|u_n(f_p) - u(f_p)| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 2$

et $\|u_n - u\|_{E'} = 2$.

12

Exercice 5 :

1. Soit μ une mesure de Radon sur $[0,1]$.



On remarque que : $\forall x \in]0,1]$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Alors, (f_n) est décroissante et partout convergente donc μ-pp cv, vers $\mathbb{1}_{\{0\}}$. Par le théorème de cv monotone (ou TCD car $0 \leq f_n \leq 1$) on a :

$$\mu(f_n) = \int_0^1 f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \mathbb{1}_{\{0\}} \, d\mu = \mu(\{0\}).$$

Donc $(\mu(f_n))_{n\geq 1}$ est cv donc elle est de Cauchy.

13

2. Supposons par l'absurde que (f_n) cv faiblement vers g dans E. Alors, en particulier :

$$\forall t \in [0,1], \quad \delta_t(f_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \delta_t(g)$$

i.e. $\forall t \in [0,1]$, $f_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(t)$ et par unicité de la limite simple, $g = \mathbb{1}_{\{0\}} \notin E$.

Exercice 6 : Hahn-Banach géométrique.

1. • Soit $x \in K$. Comme $0 \in \mathrm{Int}(K)$, on a $\frac{x}{a} \in K$ pour $a>0$ assez grand. Donc $J_K(x) < +\infty$ et $J_K : E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.

• Soient $x, y \in E$ et $a, b > 0$ des réels strictement positifs tels que $\frac{x}{a} \in K$ et $\frac{y}{b} \in K$. Par convexité de K :

$$\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b} \in K \quad \text{car} \quad \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

D'où : $\frac{x+y}{a+b} \in K$. Donc $J_K(x+y) \leqslant a+b$.

Cela étant valable pour tout $a>0$, $\frac{x}{a} \in K$, par passage à l'inf en a : $J_K(x+y) \leqslant J_K(x) + b$.

(15) Cette inégalité étant valable pour tout $b>0$, $\frac{y}{b} \in K$, par passage à l'inf en b :

$$J_K(x+y) \leq J_K(x) + J_K(y).$$

- Soient $x \in E$ et $\alpha > 0$. Soit $a>0$ et posons $a' = \alpha a$.

Alors : $\frac{\alpha x}{a'} \in K \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha a} \in K \Leftrightarrow \frac{x}{a} \in K$.

D'où : $J_K(\alpha x) = \inf\left\{ a'>0,\ \frac{\alpha x}{a'} \in K \right\}$

$$= \inf\left\{ \alpha a > 0,\ \frac{x}{a} \in K \right\} = \alpha J_K(x)$$

car $\alpha > 0$.

On a bien montré que J_K, la jauge du convexe K, est une fonctionnelle sous-linéaire sur E.

(16)

2. Soit $y \in E$. $\Rightarrow$ Si $y \in \mathrm{Int}(K)$, il existe $\varepsilon > 0$, $(1+\varepsilon) y \in K$

et $J_K(y) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

$\Leftarrow$ Si $J_K(y) < 1$, il existe $a \in]0,1[$, $\frac{y}{a} \in K$.

Puisque $0 \in K$ et que K est convexe : $[0, \frac{y}{a}] \subset K$

On $a < 1$ donc $y \in [0, \frac{y}{a}] \subset K$. et $y \in K$.

3. Soit $x_0 \in \mathrm{Int}(C)$ et soit K tel que $C = x_0 + K$,
de sorte que $0 \in \mathrm{Int}(K)$.

Soit alors $x \notin \mathrm{Int}(C)$ et soit $z = x - x_0 \notin \mathrm{Int}(K)$.

Par 2. $J_K(z) \geq 1$.

Considérons $\tilde{\ell} : \mathbb{R}z \to \mathbb{R}$ l'unique forme linéaire sur $\mathbb{R}z$

17

(de dimension 1) telle que $\tilde{\ell}(z)=1$.

Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}z$, $\tilde{\ell}(x) \leq J_K(x)$.

Si $x \in \mathbb{R}z$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $x=\lambda z$.

Pour $\lambda \leq 0$: $\tilde{\ell}(\lambda z) = \lambda \tilde{\ell}(z) = \lambda \leq 0 \leq J_K(x)$.

Pour $\lambda > 0$: $\tilde{\ell}(\lambda z) = \lambda \tilde{\ell}(z) = \lambda \times 1 \underset{\text{car } J_K(z) \geq 1}{\leq} \lambda \times J_K(z) \underset{\text{car } \lambda > 0}{=} J_K(\lambda z)$

Donc tous les cas : $\tilde{\ell}(x) \leq J_K(x)$.

J_K étant une fonctionnelle sous-linéaire, par Hahn-Banach analytique, il existe une forme linéaire sur E, notée ℓ, telle que : $\forall y \in E$, $\ell(y) \leq J_K(y)$.

En particulier : $\forall y_K \in \mathrm{Int}(K)$, $\ell(y_K) \leq J_K(y_K) < 1$

On : $\ell(z) = \tilde{\ell}(z) = 1$.

Posons : $\alpha = \ell(x_0 + z) = \ell(x_0) + \ell(z) = \ell(x_0) + 1$.

Alors $\alpha = \ell(x)$ et pour tout $y \in \mathrm{Int}(C) = x_0 + \mathrm{Int}(K)$,

$$\ell(y) = \ell(x_0 + \underbrace{y_K}_{\in K}) = \ell(x_0) + \underbrace{\ell(y_K)}_{<1} < \ell(x_0) + 1 = \alpha.$$

Donc ℓ et α ainsi construits conviennent.

19

<u>Exercice 7</u>

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{L^1} = \int_\Omega |f_n| = \frac{1}{\text{Vol}(B(0,\frac{1}{n}))} \int_{B(0,\frac{1}{n})} 1 \, dx = 1$

2. Supposons par l'absurde $L^1(\Omega)$ réflexif. Par le théorème de sélection, sa boule unité est séquentiellement faiblement compacte. Comme (f_n) est dans la boule unité de $L^1(\Omega)$ par 1, on peut donc en extraire une sous-suite (f_{n_k}) qui cv faiblement vers $f \in L^1(\Omega)$ avec $\|f\|_{L^1} \leq 1$.

Cela signifie que : $\forall u \in (L^1(\Omega))'$, $u(f_{n_k}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} u(f)$

20

On $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$ d'où :

$$\forall g \in L^\infty(\Omega),\ \int_\Omega f_{n_k} g \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_\Omega fg.$$

3. Si $g \in \mathcal{C}_c(\Omega\setminus\{0\})$ alors $0 \notin \operatorname{supp} g$ et $\operatorname{supp} g$ étant compact : $\exists \varepsilon > 0$, $B(0,\varepsilon) \subset \Omega$ et $\forall x \in B(0,\varepsilon)$, $g(x) = 0$.

4. Soit $k_0 \geq 0$, $\frac{1}{n_{k_0}} < \varepsilon$ où ε est obtenu à la question 3.

Alors : $\forall k \geq k_0$, $\displaystyle\int_\Omega f_{n_k} g = \int_\Omega \frac{1}{\operatorname{vol}(B(0,\frac{1}{n_k}))} \underbrace{\mathbb{1}_{B(0,\frac{1}{n_k})} g}_{=0} = 0$

$=0$ car g est nulle sur $B(0,\varepsilon)$ et $B(0,\frac{1}{n_k}) \subset B(0,\varepsilon)$

En faisant tendre k vers $+\infty$:

$$\int_\Omega fg = 0.$$

21

5. Par le lemme de Du Bois-Reymond (que vous venez dans le cours de Distribution), $f=0$ pp sur $\Omega\setminus\{0\}$ donc sur Ω.

6. On a :

$$\forall g \in L^\infty(\Omega),\ \int_\Omega f_{n_k} g \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_\Omega f g = 0$$

car $f=0$ pp sur Ω.

En particulier, pour $g\equiv 1$ sur Ω, $g\in L^\infty(\Omega)$ et

$\int_\Omega f_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Or $f_{n_k}\geq 0$ pour tout k d'où :

$\forall k\in\mathbb{N},\ \int_\Omega f_{n_k} = \|f_{n_k}\|_{L^1} = 1$ par 1.

et $\int_\Omega f_{n_k} \centernot{\xrightarrow[k\to+\infty]{}} 0$. D'où une contradiction et $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif.

(22)

Exercice 8 :

1. On a pour tout $z \in D$, $|z| > R$,

$\forall \xi \in K$, $(z-\xi)^{-1} = z^{-1}\left(1-\frac{\xi}{z}\right)^{-1} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\xi}{z}\right)^n$

Or si $|z| > R$, $\left|\frac{\xi}{z}\right| < \frac{R}{|z|} < 1$ et la série géométrique $\sum \left(\frac{R}{|z|}\right)^n$ cv

Donc $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\xi}{z}\right)^n$ cv normalement sur K et on a :

$$(z-\xi)^{-1} = \lim_{N \to +\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{z^{n+1}} \xi^n}_{\text{polynomiale en } \xi} \quad \text{avec CVU sur } K.$$

2. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur K. On veut montrer que pour tout $z \in D \setminus K$, $\xi \mapsto (z-\xi)^{-1} \in \overline{\mathcal{P}}$ où l'adhérence est prise dans $(C(K), \| \|_\infty)$,

23

$C(K)$ étant l'espace des fonctions continue sur K et $\| \|_\infty$ étant :

$$\forall f \in C(K), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

On : $\overline{\mathcal{P}} = \bigcap_{\substack{u \in (C(K))' \\ \mathcal{P} \subset \operatorname{Ker} u}} \operatorname{Ker} u.$

Soit donc $u \in (C(K))'$ qui s'annule sur $\mathcal{P}$. Montrons que pour tout $z \in D \setminus K$, si $f_z : \begin{array}{l} K \to \mathbb{C} \\ \xi \mapsto (z-\xi)^{-1} \end{array}$, $u(f_z) = 0$.

On aura alors le résultat voulu.

Posons $g : \begin{array}{l} D\setminus K \to \mathbb{C} \\ z \mapsto u(f_z) \end{array}$

Remarquons que pour $z \notin K$, f_z est dans $C(K)$ et qu'elle dépend analytiquement du paramètre z. Donc g est bien définie et est analytique sur $D \setminus K$.

Par 1., si $|z| > R$, $f_z \in \overline{\mathcal{P}}$. Comme $\operatorname{Ker} u \subset \mathcal{P}$ et que u est C^0 : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R, u(f_z) = 0$.

Donc : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R, g(z) = 0$. Comme D et K sont simplement connexe, $D \setminus K$ est connexe et g est, par prolongement analytique, nulle sur $D \setminus K$.

D'où le résultat voulu.

3. Comme D est simplement connexe, tout compact de D est contenu dans un compact K simplement connexe.

25

Soit γ un lacet dans $D \setminus K$ dont l'indice par rapport à tout point de K vaut 1. Soit $\xi \in K$. Alors par la formule de Cauchy

$$f(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\xi} dz$$

Mais, cette intégrale de Riemann est limite uniforme en $\xi \in K$ d'une suite de sommes de Riemann. Chacune de ces sommes de Riemann est combinaison linéaire de fonctions $f_z : \xi \mapsto (z-\xi)^{-1}$ pour z dans l'image de γ.

Or l'image de γ est incluse dans $D \setminus K$ et par 2. chacune de ces f_z, $z \in \mathrm{Im}\,\gamma$ est limite uniforme sur K d'une suite de polynômes en ξ.

D'où le théorème de Runge.