Université Sorbonne Paris Nord - Institut Galilée
Master 1 Mathématiques fondamentales

Année universitaire 2025-2026

Dualité.
Opérateurs bornés et compacts.
Théorème spectral.

H. Boumaza

Le 19 octobre 2025

Bibliographie

[1] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2007.

[2] F. Klopp, *Équation de Schrödinger et théorie spectrale*, https ://webusers.imj-prg.fr/ frederic.klopp/cours/m2-17-18/coursEqSch-ThSpec.pdf

[3] P. Lax, *Functional Analysis*, Pure and Applied Mathematics : A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, Wiley.

[4] J.P. Marco et autres, *Mathématiques L3, Analyse* , Pearson Education France.

[5] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod.

[6] B. Simon et M. Reed, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York-London, 1974.

Table des matières

Chapitre 1

Dualité et convergence faible

Pour avoir de la compacité en dimension infinie (où les fermés bornés ne sont pas forcément compacts), on peut soit renforcer l'hypothèse comme dans le théorème d'Ascoli, soit chercher à affaiblir la conclusion. C'est cette deuxième approche que l'on va considérer dans ce chapitre en étudiant la notion de convergence faible et de compacité faible. L'un des buts de ce chapitre est de montrer le résultat suivant : sous des hypothèses convenables sur l'espace vectoriel normé E, la boule unité fermée de E est faiblement séquentiellement compacte.

Dans toute la suite, $|\cdot|$ désigne soit la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou le module sur $\mathbb{C}$.

1.1 Dual topologique d'un espace vectoriel normé

Définition 1.1.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique de E, noté E', l'ensemble des formes linéaires continues sur E.*

Rappelons que le noyau d'une forme linéaire non nulle et continue est un hyperplan fermé de E.

Définition 1.1.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in E'$. La norme de u est par définition le réel positif défini par :*

$$||u||_{E'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|u(x)|}{||x||} = \sup_{||x||=1} |u(x)|.$$

Théorème 1.1.3. *Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé. Alors $(E', ||\ ||_{E'})$ est un espace de Banach.*

Démonstration : Le fait que ce soit un espace vectoriel normé est clair. Il suffit de montrer qu'il est complet. Soit donc $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E'.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, $||u_m - u_n||_{E'} \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \neq 0$ dans E et pour tout $m, n \geq N$, on a

$$|u_m(x) - u_n(x)| = |(u_m - u_n)(x)| \leq ||u_m - u_n||_{E'}\ ||x|| \leq \varepsilon ||x||.$$

Donc la suite $(u_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) qui est complet, donc elle y converge. On note, pour tout $x \in E$,

$$u(x) = \lim_{m \to +\infty} u_m(x).$$

Alors, $u \in E'$ car chaque u_m est dans E' (et par passage à la limite dans les égalités de la linéarité et dans l'inégalité large de la continuité). Soit $x \in E$, $||x|| = 1$. Alors pour tout $m, n \geq N$,

$$|u_m(x) - u_n(x)| \leq ||u_m - u_n||_{E'} \leq \varepsilon$$

et en fixant m et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\forall m \geq N, \ |u_m(x) - u(x)| \leq \varepsilon.$$

Puisque ε ne dépend pas de x, $||u_m - u||_{E'} \leq \varepsilon$ et on a obtenu que $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $(E', ||\,||_{E'})$.

□

Exemple 1.1.4. *Si E est un espace de dimension finie, $E' = E^*$, le dual algébrique de E.*

Exemple 1.1.5. *Si H est un espace de Hilbert, son dual topologique H' s'identifie à H d'après le théorème de représentation de Riesz pour les formes linéaires.*

1.2 Théorème de Hahn-Banach

1.2.1 Théorème de Hahn-Banach analytique

Définition 1.2.1 (Fonctionnelle sous-linéaire)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle fonctionnelle sous-linéaire sur E une fonction $q : E \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *$q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ pour tous $x, y \in E$;*
2. *$q(\alpha x) = \alpha q(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\alpha \geq 0$.*

Exemple 1.2.2. *Une semi-norme $\|.\|$ sur E est une fonctionnelle sous-linéaire. Une forme linéaire sur E est une fonctionnelle sous-linéaire. Les jauges de parties convexes de E sont des fonctionnelles sous-linéaires (voir TD1).*

Dans la définition ci-dessus, il convient de remarquer que q peut prendre des valeurs négatives et que la condition $q(\alpha x) = \alpha q(x)$ n'est requise que pour $\alpha \geq 0$.

Théorème 1.2.3 (Théorème de Hahn-Banach)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit q une fonctionnelle sous-linéaire sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $u : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $u(x) \leq q(x)$ pour tout $x \in F$. Alors, il existe une forme linéaire $v : E \to \mathbb{R}$ telle que $v|_F = u$ et $v(x) \leq q(x)$ pour tout $x \in E$.*

Remarquons qu'un tel v est en particulier un prolongement de u. Un tel prolongement peut toujours être obtenu en complétant une base de F en une base de E, mais il s'agit ici de démontrer qu'il existe un prolongement v vérifiant $v \leq q$ sur E tout entier. Contrairement aux théorèmes de prolongement rencontrés en analyse, nous n'avons besoin ici d'aucune hypothèse sur E (pas même E normé). Remarquons également que le théorème de Hahn-Banach porte sur les espaces vectoriels *réels*, ne serait-ce que pour que l'inégalité $u \leq q$ ait un sens. Les conséquences que nous allons en donner à la section suivante sont cependant vraies pour des espaces vectoriels complexes aussi bien que réels. Pour démontrer le théorème de Hahn-Banach, nous aurons besoin du lemme suivant, qui démontre le théorème dans le cas où F est de codimension 1 dans E.

Lemme 1.2.4. *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de codimension 1 d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose E muni d'une fonctionnelle sous-linéaire q et on se donne $u : F \to \mathbb{R}$ telle que $u(x) \leq q(x)$ pour tout $x \in F$. Alors, il existe une forme linéaire $v : E \to \mathbb{R}$ telle que $v|_F = u$ et telle que $v(x) \leq q(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration : Soit $x_0 \in E \backslash F$, de sorte que $E = \mathbb{R}x_0 \oplus F$. Supposons que la forme linéaire cherchée v existe et posons $\alpha_0 = v(x_0)$. Alors, pour tout $y_1 \in F$, $v(x_0) + v(y_1) = v(x_0 + y_1) \leq q(x_0 + y_1)$, donc, pour tout $y_1 \in F, \alpha_0 \leq -v(y_1) + q(x_0 + y_1)$. De plus, pour tout $y_2 \in F$, $v(-x_0) + v(y_2) = v(-x_0 + y_2) \leq q(-x_0 + y_2)$, donc, pour tout $y_2 \in F, \alpha_0 \geq v(y_2) - q(-x_0 + y_2)$. On doit donc avoir, pour tous $y_1, y_2 \in F$,

$$v(y_2) - q(-x_0 + y_2) \leq \alpha_0 \leq -v(y_1) + q(x_0 + y_1). \tag{1.1}$$

En particulier $v(y_2) - q(-x_0 + y_2) \leq -v(y_1) + q(x_0 + y_1)$. Montrons que cette condition nécessaire est bien remplie. Elle est équivalente à $v(y_1 + y_2) \leq q(x_0 + y_1) + q(-x_0 + y_2)$ pour tous $y_1, y_2 \in F$. Or, pour tous $y_1, y_2 \in F$, on a

$$v(y_1 + y_2) \leq q(y_1 + y_2) = q(y_1 + x_0 - x_0 + y_2) \leq q(y_1 + x_0) + q(-x_0 + y_2).$$

On a donc bien, pour tous $y_1, y_2 \in F$, $v(y_2) - q(-x_0 + y_2) \leq -v(y_1) + q(x_0 + y_1)$. Donc

$$a := \sup_{y_2 \in F} \{v(y_2) - q(-x_0 + y_2)\} \leq \inf_{y_1 \in F} \{-v(y_1) + q(x_0 + y_1)\} =: b.$$

Remarquons que comme $y_1, y_2 \in F$ dans les inf et sup ci-dessus, on a $v(y_2) = u(y_2)$ et $-v(y_1) = -u(y_1)$ donc a et b ne dépendent pas de v mais seulement de u.

Soit alors $\alpha_0 \in [a, b]$ quelconque; *posons* $v(tx_0 + y) := t\alpha_0 + u(y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $y \in F$. Alors v est une forme linéaire sur $E = \mathbb{R}x_0 \oplus F$, qui coïncide avec u sur F. Le réel $\alpha_0 = v(x_0)$ ainsi défini vérifie l'encadrement (1.1) et, pour tout $t \geq 0$ et tout $y \in F$, on a donc, en écrivant (1.1) pour $y_1 = \frac{y}{t}$ et $y_2 = \frac{y}{t}$,

$$v\left(\frac{y}{t}\right) - q\left(-x_0 + \frac{y}{t}\right) \leq v(x_0) \leq -v\left(\frac{y}{t}\right) + q\left(x_0 + \frac{y}{t}\right).$$

Donc, d'une part, $v(tx_0 + y) \leq q(tx_0 + y)$ pour tout $t \geq 0$ et tout $y \in F$ et, d'autre part, $v(-tx_0 + y) \leq q(-tx_0 + y)$ pour tout $t \geq 0$ et tout $y \in F$, donc $v(tx_0 + y) \leq q(tx_0 + y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $y \in F$, soit $v \leq q$ sur $E = \mathbb{R}x_0 \oplus F$. □

Remarquons que ce raisonnement permet, par une récurrence simple, de démontrer le théorème de Hahn-Banach lorsque F est de codimension finie dans E, en particulier lorsque E est de dimension finie. Nous pouvons alors utiliser le lemme pour démontrer le théorème de Hahn-Banach en toute généralité.

Démonstration : (Démonstration du théorème de Hahn-Banach). Soit Δ l'ensemble des couples (G, v) où G est un sous-espace vectoriel de E contenant F et v une forme linéaire sur G telle que $v|_F = u$ et $v \leq q$ sur G. Soit $\leq$ la relation d'ordre sur Δ définie par $(G, v) \leq (G', v')$ si $G \subset G'$ et $v'|_G = v$. Montrons que cet ordre est inductif. Si $(G_i, v_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de Δ, posons $G = \cup_{i \in I} G_i$. Puisque $(G_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée pour l'inclusion, $\cup_{i \in I} G_i$ est un sous-espace vectoriel de E. Soit $v : G \to \mathbb{R}$ définie par $v(x) = v_i(x)$ si $x \in G_i$. Puisque $(G_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée pour l'inclusion et puisque, si $i \leq j$ alors $v_j|_{G_i} = v_i$, v est bien définie. De plus, pour tout $x \in G$, on a $v(x) \leq q(x)$ puisque $v_i \leq q$ pour tout $i \in I$. Par ailleurs, on a bien $v|_F = u$ par définition de v. Donc $(G, v) \in \Delta$ et est un majorant pour la famille totalement ordonnée $(G_i, v_i)_{i \in I}$ (c'est-à-dire que $(G_i, v_i) \leq (G, v)$ pour tout $i \in I$). Donc, d'après le lemme de Zorn, Δ possède un élément maximal, que nous noterons (H, w). Supposons $H \subsetneq E$. Alors, il existe $x \in E \backslash H$ et, d'après le lemme 1.2.4, w peut être prolongée à $H \oplus \mathbb{R}x$ tout en conservant la condition de majoration par q, ce qui contredit la maximalité de (H, w). Donc, $H = E$ et w est le prolongement cherché de u. □

Nous rappelons le lemme de Zorn.

Lemme 1.2.5 (Lemme de Zorn.). *Si tout sous-ensemble totalement ordonné d'un ensemble $(E, \leq)$ (partiellement) ordonné admet un majorant dans E, alors $(E, \leq)$ admet un élément maximal.*

Rappelons qu'un sous-ensemble $(A, \leq)$ totalement ordonné est une partie de E dans laquelle on peut comparer deux éléments quelconques : $\forall a, b \in A,\ a \leq b$ ou $b \leq a$.

Un majorant de A est un élément $m \in E$ tel que pour tout $a \in A$, $a \leq m$.

Un élément maximal de E est un élément a de E tel que pour tout $x \in E$, $a \leq x \ \Rightarrow\ x = a$. Si l'ordre est total, la notion d'élément maximal coïncide avec celle de plus grand élément.

1.2.2 Prolongement des formes linéaires définies sur un espace semi-normé

Dans toute la suite, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les énoncés qui suivent sont tous des corollaires du théorème de Hahn-Banach.

Proposition 1.2.6 (Un théorème général de prolongement.). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une semi-norme P. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $u : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que $|u(x)| \leq P(x)$ pour tout $x \in F$. Alors, il existe une forme linéaire $v : E \to \mathbb{K}$ telle que $v|_F = u$ et $|v(x)| \leq P(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration : *Premier cas* : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in F$, on a $u(x) \leq |u(x)| \leq P(x)$. Comme une semi-norme est une fonctionnelle sous-linéaire, le théorème de Hahn-Banach montre qu'il existe $v : E \to \mathbb{R}$ telle que $v|_F = u$ et $v(x) \leq P(x)$ pour tout $x \in E$. Donc, $-v(x) = v(-x) \leq P(-x) = P(x)$ car P est une semi-norme. Donc, $|v(x)| \leq P(x)$ pour tout $x \in E$.
Second cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Posons $u_1 = \operatorname{Re} u$. Alors $|u_1| \leq |u| \leq P$ sur F. Donc, d'après le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire $v_1 : E \to \mathbb{R}$ telle que $v_1|_F = u_1$ et $|v_1| \leq P$ sur E. Posons $v := \widetilde{v_1} : x \mapsto v_1(x) - iv_1(ix)$. Alors, v est une forme $\mathbb{C}$-linéaire qui vérifie $|v| \leq P$ sur E et $v|_F = \widetilde{u_1} = u$.

□

Corollaire 1.2.7 (Prolongement des formes linéaires continues.). *Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et soit $u : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue définie sur un sous-espace vectoriel F de E. Alors, il existe une forme linéaire continue $v : E \to \mathbb{K}$ telle que $v|_F = u$ et $||v||_{E'} = ||u||_{F'}$.*

Démonstration : On utilise la proposition 1.2.6 avec $P(x) = ||u||_{F'}\|x\|$: u possède donc un prolongement v vérifiant $|v(x)| \leq ||u||_{F'}\|x\|$ pour tout x dans E de sorte que $||v||_{E'} \leq ||u||_{F'}$. Mais, comme v est un prolongement de u, on a aussi $||u||_{F'} \leq ||v||_{E'}$, d'où l'égalité.

□

Corollaire 1.2.8. *Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de vecteurs de E et soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ quelconques. Alors il existe une forme linéaire continue telle que $v(e_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.*

Le point important de l'énoncé est que l'on souhaite obtenir une forme linéaire v qui soit *continue* sur E.

Démonstration : Soit $F := vect(e_1, ..., e_n) \subset E$; posons $u(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j$. Comme $(e_1, ..., e_n)$ est une base de F, u est une application linéaire bien définie et u est continue *car F est de dimension finie*. D'après le corollaire 1.2.7, il existe une forme linéaire continue $v : E \to \mathbb{K}$ qui prolonge u et qui vérifie donc en particulier $v(e_i) = u(e_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

□

1.2.3 Quelques conséquences géométriques du théorème de Hahn-Banach dans les espaces vectoriels normés

Rappelons que, si E est un espace vectoriel normé, la notation E' désigne l'espace vectoriel des formes linéaires *continues* sur E. On appelle E' le dual topologique de E.

Théorème 1.2.9. *Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sup\left\{|u(x)| \;:\; u \in E' \text{ et } ||u||_{E'} \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{|u(x)| \;:\; u \in E' \text{ et } ||u||_{E'} = 1\right\}. \end{aligned}$$

De plus, cette borne supérieure est atteinte.

Démonstration : Pour tout $u \in E'$ vérifiant $||u||_{E'} \leq 1$, on a $|u(x)| \leq ||u||_{E'}\,\|x\| \leq \|x\|$, donc

$$\sup\left\{|u(x)| \;:\; u \in E' \text{ et } ||u||_{E'} = 1\right\} \leq \sup\left\{|u(x)| \;:\; u \in E' \text{ et } ||u||_{E'} \leq 1\right\} \leq \|x\|.$$

Posons maintenant $F = \mathbb{K}x$ et $v : F \to \mathbb{K}$ définie par $v(\lambda x) = \lambda\|x\|$. Alors, v est une forme linéaire sur F qui vérifie $|v(\lambda x)| = |\lambda|\|x\|$ pour tout $(\lambda x) \in F$, donc $||v||_{F'} = 1$. D'après le corollaire 1.2.7, il existe donc $w \in E'$ telle que $||w||_{E'} = 1$ et $|w(x)| = |v(x)| = \|x\|$, de sorte que l'on a bien

$$\|x\| = \sup\left\{|u(x)| \;:\; u \in E' \text{ et } ||u||_{E'} = 1\right\}.$$

Les inégalités ci-dessus sont donc toutes des égalités et on vient de plus de voir que ces bornes supérieures étaient bien atteintes. □

Corollaire 1.2.10. *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et soit F un sous-espace vectoriel* fermé *de E. Soit $x_0 \in E\backslash F$; notons $d = dist(x_0, F) > 0$. Alors, il existe $u : E \to \mathbb{K}$ linéaire et continue telle que $u(x_0) = 1$, $u(x) = 0$ pour tout $x \in F$ et $\|u\| = \frac{1}{d}$.*

Démonstration : Soit $\pi : E \to E/F$ la projection canonique. Rappelons que l'espace vectoriel quotient E/F est muni de la norme $\|y + F\| = dist(y, F)$ pour tout $y \in E$: la topologie associée à cette norme est la topologie quotient de E/F et la projection π vérifie $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ car $\|x + F\| = \inf_{y \in F} \|x - y\| \leq \|x\|$ puisque $0 \in F$. D'après la proposition 1.2.9, il existe $v : E/F \to \mathbb{K}$ linéaire et continue telle que $\|v\| = 1$ et $v(x_0 + F) = \|x_0 + F\| = d$. Posons $u = \frac{1}{d}(v \circ \pi) : E \to \mathbb{K}$. Alors u est linéaire et continue et vérifie $u(x_0) = \frac{1}{d}v(x_0 + F) = 1$ et $u(x) = 0$ pour tout $x \in F$. De plus, $|u(x)| = \frac{1}{d}|v(x+F)| \leq \frac{1}{d}\|v\|\|x+F\| \leq \frac{1}{d}\|x\|$, donc $\|u\| \leq \frac{1}{d}$. Enfin, puisque $\|v\| = 1$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\|y_n + F\| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} |v(y_n + F)| = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $dist(y_n, F) < 1$, il existe $x_n \in F$ tel que $\|y_n - x_n\| \leq 1$. Alors $|u(y_n - x_n)| = \frac{1}{d}|v(y_n + F)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{d}$ avec $\|y_n - x_n\| \leq 1$, de sorte que $\|u\| = \frac{1}{d}$. □

On en déduit la caractérisation suivante de l'adhérence d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé. En particulier, lorsque l'on a affaire à un sous-espace fermé, on obtient une description de ce sous-espace comme intersection de noyaux de formes linéaires continues, résultat déjà connu en dimension finie.

Théorème 1.2.11. *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors,*

$$\overline{F} = \bigcap_{u \in E', F \subset \operatorname{Ker} u} \operatorname{Ker} u.$$

Démonstration : Notons

$$G = \bigcap_{u \in E', F \subset \operatorname{Ker} u} \operatorname{Ker} u.$$

Cette intersection est non vide puisque la forme linéaire nulle vérifie les conditions demandées. Pour toute forme linéaire continue $u : E \to \mathbb{K}$, $\operatorname{Ker} u$ est fermé dans E, donc G est fermé dans E comme intersection de fermés. De plus, $G \supset F$, donc $G = \overline{G} \supset \overline{F}$. Réciproquement, soit $x \in G$. Supposons que $x \notin \overline{F}$. Alors, d'après le corollaire 1.2.10, il existe $u : E \to \mathbb{K}$ linéaire et continue telle que $u(x) = 1$ et $\overline{F} \subset \operatorname{Ker} u$. Mais, puisque $x \in G$ et $\operatorname{Ker} u \supset \overline{F} \supset F$, on a $u(x) = 0$, ce qui contredit le fait que $u(x) = 1$. Donc, $x \in \overline{F}$ et on a bien $\overline{F} = G$. □

Corollaire 1.2.12. *Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue sur E et nulle sur F est nulle sur E.*

Démonstration : Une forme linéaire continue sur E et nulle sur F est nulle sur $\overline{F}$, donc, si $\overline{F} = E$, on a bien que toute forme linéaire continue nulle sur F est nulle sur E. Réciproquement, si toute forme linéaire continue sur E et nulle sur F est nulle sur E, alors le noyau d'une telle forme est $\operatorname{Ker} u = E$. D'après le théorème 1.2.11, on a donc

$$\overline{F} = \bigcap_{u \in E', F \subset \operatorname{Ker} u} \operatorname{Ker} u = \bigcap_{u \in E', F \subset \operatorname{Ker} u} E = E.$$

□

1.3 Convergence faible dans les espaces de Banach

Définition 1.3.1. *Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge faiblement *vers $x \in E$ lorsque pour toute $u \in E'$,*

$$\lim_{n\to+\infty} u(x_n) = u(x).$$

On note alors $x_n \rightharpoonup x$.

Pour ne pas confondre avec la notion classique de convergence dans E, on dira que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement* vers x lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x|| = 0$$

et on note $x_n \to x$.

Proposition 1.3.2. *Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.*

1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $x \in E$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x.*
2. *La limite faible d'une suite faiblement convergente est unique.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fortement bornée.*
4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ alors*

$$||x|| \leq \liminf ||x_n||.$$

Démonstration : 1. Soit $u \in E'$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u(x_n) - u(x)| = |u(x_n - x)| \leq ||u||_{E'} \, ||x_n - x||$$

et puisque (x_n) converge fortement vers x, $||x_n - x|| \to 0$. D'où la convergence faible de (x_n) vers x.

2. Supposons que $x_n \rightharpoonup x_1$ et $x_n \rightharpoonup x_2$. Alors, pour toute $u \in E'$,

$$u(x_1) = \lim_{n\to+\infty} u(x_n) = u(x_2).$$

Or, par le théorème 1.2.9, il existe $v \in E'$, $||x_1 - x_2|| = v(x_1 - x_2)$. D'où, par linéarité de v et par ce que l'on vient de montrer appliqué à $u = v$, $||x_1 - x_2|| = v(x_1) - v(x_2) = 0$. D'où $x_1 = x_2$.

3. Soit $u \in E'$. Puisque $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée par une constante $M_u \geq 0$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la forme linéaire

$$l_n : \begin{array}{ccc} E' & \to & \mathbb{K} \\ u & \mapsto & u(x_n) \end{array}$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in E',\ |l_n(u)| \leq M_u$. Par le théorème de Banach-Steinhaus (E' et $\mathbb{K}$ sont des Banach), il existe $M \geq 0$,

$$\forall u \in E',\ ||u||_{E'} = 1,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |l_n(u)| \leq M.$$

Or, par le théorème 1.2.9, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in E'$, $|l_n(u_n)| = ||x_n||$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||x_n|| = |l_n(u_n)| \leq M.$$

4. D'après le théorème 1.2.9, il existe $u \in E'$ telle que $|u(x)| = ||x||$ et $||u||_{E'} = 1$. Puis, pour cet u et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u(x_n)| \leq ||u||_{E'}||x_n|| = ||x_n||$. Puisque $|u(x_n)| \to |u(x)| = ||x||$, en passant à la liminf dans l'inégalité précédente, $||x|| \leq \liminf ||x_n||$. □

Attention, la réciproque du premier point n'est pas vraie en général. Par exemple, toute famille dénombrable orthonormée dans un espace de Hilbert converge faiblement vers 0, mais elle ne converge bien entendu pas fortement vers 0.

Par contre, en dimension finie l'équivalence entre convergence forte et faible est vérifiée.

Proposition 1.3.3. *Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $x \in E$ si et seulement si elle converge faiblement vers x.*

Démonstration : Nous venons de voir le sens direct qui est valide aussi en dimension infinie. Pour la réciproque, comme toutes les formes linéaires sont continues en dimension finie cela implique que $E' = E^*$ le dual algébrique de E. On applique alors la définition de $x_n \rightharpoonup x$ avec les formes linéaires coordonnées sur E pour obtenir que pour tout $i \in \{1, \ldots d\}$, $x_n^i \to x^i$ (convergence coordonnée par coordonnée). Pour montrer la convergence forte sur E il suffit alors de la montrer pour une norme bien choisie, les normes étant équivalentes en dimension finie. Par exemple, la convergence coordonnée par coordonnée implique la convergence en norme sup ou en norme euclidienne (on identifie ici E à $\mathbb{R}^d$). D'où le résultat voulu. □

Proposition 1.3.4. *Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E'. Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans E'. Alors $(u_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(x)$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_0$, $||u_n - u||_{E'} \leq \varepsilon$. Par ailleurs, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, $|u(x_n) - u(x)| \leq \varepsilon$. De plus, puisque $x_n \rightharpoonup x$, la suite $(||x_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mettons par $M \geq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\forall n \geq \max(N_0, N_1),\ |u_n(x_n) - u(x)| &\leq |u_n(x_n) - u(x_n)| + |u(x_n) - u(x)| \\ &\leq ||u_n - u||_{E'}||x_n|| + |u(x_n) - u(x)| \\ &\leq M\varepsilon + \varepsilon.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 1.3.5. *Soit $A \subset E$ une partie de E séquentiellement faiblement fermée. Alors A est aussi fortement fermée.*

Démonstration : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $x_n \to x$. Montrons que $x \in A$. Puisque la convergence forte implique la convergence faible, $x_n \rightharpoonup x$ et puisque A est faiblement fermée, $x \in A$. Donc A est fortement fermée. □

1.4 Espaces réflexifs

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et soit $x \in E$. Alors, l'application

$$J_x : \begin{array}{ccc} E' & \to & \mathbb{K} \\ u & \mapsto & u(x) \end{array}$$

est une forme linéaire sur E', continue et de norme $||x||$ d'après le théorème 1.2.9. C'est donc un élément de E''. Ainsi, l'application

$$J : \begin{array}{ccc} E & \to & E'' \\ x & \mapsto & J_x \end{array}$$

est bien définie et est une isométrie de E dans E''. En particulier, J est injective.

Définition 1.4.1. *L'espace E est dit* réflexif *lorsque l'application J est de plus surjective. On peut alors identifier isométriquement E et son bidual topologique E''.*

Proposition 1.4.2 (Réflexivité des espaces de Hilbert)**.** *Tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est réflexif. Plus précisément, l'application canonique*

$$J : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathcal{H}'' \\ x & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{H}' & \to & \mathbb{K} \\ u & \mapsto & u(x) \end{array}\right) \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique surjectif.

Démonstration : Par le théorème de représentation de Riesz, pour tout $u \in \mathcal{H}'$, il existe un unique $y \in \mathcal{H}$ tel que

$$u(x) = (x|y) \quad \text{et} \quad \|u\| = \|y\|.$$

Ainsi, l'application

$$\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}', \quad \forall y \in \mathcal{H},\ \Phi(y) : x \mapsto (x|y)$$

est un isomorphisme isométrique linéaire.

Pour $v \in \mathcal{H}''$, définissons $\tilde{v} = v \circ \Phi \in \mathcal{H}'$. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $z \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{H},\ \tilde{v}(x) = (x|z).$$

On obtient ainsi un isomorphisme isométrique $\Psi : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$, $\Psi(v) = z$.

Enfin, pour $x \in \mathcal{H}$ et $u_y = \Phi(y)$, on a $(J(x))(u_y) = u_y(x) = (x|y)$, d'où $\Psi(J(x)) = x$. L'application J est donc bijective et isométrique.

□

Exemple 1.4.3. *L'espace* $(C = C([-1,1],\mathbb{R}), || \ ||_\infty)$ *n'est pas réflexif.*

S'il l'était, on aurait $C = C''$ *et d'après le théorème 1.2.9, pour toute forme linéaire* $u \in C'$*, il existerait* $f \in C'' = C$ *telle que*

$$||u||_{C'} = u(f) \quad \text{avec} \quad ||f||_\infty = 1.$$

On définit alors la forme linéaire u par :

$$\forall g \in C,\ u(g) = \int_{-1}^{0} g(t)\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} g(t)\mathrm{d}t.$$

Alors, pour tout $g \in C$, $|u(g)| < 2||g||_\infty$*. Mais, pour tout* $\varepsilon > 0$*, on peut choisir g de sorte que*

$$|u(g)| > (2-\varepsilon)||g||_\infty.$$

Cela prouve que $||u||_{C'} = 2$*. Pour* $g = f$ *comme ci-dessus, on a alors* $2 < 2 \times 1$*, d'où une contradiction.*

Proposition 1.4.4. *Tout espace réflexif est de Banach.*

Démonstration : En effet, un tel espace est en bijection isométrique avec son bidual. Le bidual étant le dual d'une espace vectoriel normé, il est de Banach, donc l'espace de départ l'est aussi.

□

Proposition 1.4.5. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Si* $(E', || \ ||_{E'})$ *est séparable, alors* $(E, \|.\|)$ *est séparable.*

Démonstration : Puisque E' est séparable, il existe une famille dénombrable $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans E'. Par définition de la norme $|| \ ||_{E'}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in E$ tel que $||x_n|| = 1$ et $|u_n(x_n)| > \frac{1}{2}||u_n||_{E'}$. Montrons que l'espace engendré par les x_n est dense dans E. Pour cela, il suffit de vérifier que toute forme linéaire qui s'annule sur cet espace s'annule sur E tout entier.

Supposons par l'absurde qu'il existe $u \in E'$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(x_n) = 0 \quad \text{et} \quad ||u||_{E'} = 1.$$

Par densité de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans E', il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $||u_n - u|| < \frac{1}{3}$. Puisque $||u||_{E'} = 1$, on obtient que $||u_n||_{E'} > \frac{2}{3}$.

Or, puisque $u(x_n) = 0$, on a

$$\frac{1}{3} > |(u-u_n)(x_n)| = |u_n(x_n)| > \frac{1}{2}||u_n||_{E'}$$

et $||u_n||_{E'} < \frac{2}{3}$ ce qui contredit le point précédent. Donc une telle forme linéaire u ne peut exister et on a bien que le sous-espace engendré par les x_n est dense dans E. Alors, les combinaisons linéaire finies à coefficients rationnels sont aussi denses dans E. Comme celles-ci forment une famille dénombrables de vecteurs de E, on vient de montrer que E est séparable.

□

Proposition 1.4.6. *Tout sous-espace fermé d'un espace réflexif est refléxif.*

Démonstration : Soit E un espace de Banach réflexif et soit F un sous-espace fermé de E. Soit $u \in E'$. Alors $u_0 = u|_F \in F'$. Puisque d'après le théorème de Hahn-Banach, toute forme linéaire continue sur F peut être prolongée en une forme linéaire continue sur E, l'application

$$\begin{array}{ccc} E' & \to & F' \\ u & \mapsto & u_0 \end{array}$$

est surjective. Cette surjection induit l'application suivante de F'' dans E'' : pour tout $\eta \in F''$ on définit $\zeta \in E''$ en posant, pour toute $u \in E'$,

$$\zeta(u) = \eta(u_0).$$

Puisque E est réflexif, l'application ζ peut être identifiée à un élément $x \in E : \zeta(u) = u(x)$. Alors, $u(x) = \eta(u_0)$.

Montrons que $x \in F$. Si u s'annule sur F, alors $u_0 = 0$ et $u(x) = \eta(0) = 0$. Alors, $x \in \mathrm{Ker}(u)$ et $x \in \overline{F}$ d'après le théorème 1.2.11. Or, F est fermé, donc $x \in F$. Mais alors, $u(x) = u_0(x)$ et on a $u_0(x) = \eta(u_0)$. Puisque toute forme linéaire dans F' est la restriction d'une forme linéaire de E', cela prouve que tout élément η de F'' peut être représenté par un vecteur $x \in F$, d'où la réflexivité de F. □

Ces deux propositions permettent de démontrer le principal résultat de ce chapitre, la compacité faible de la boule unité dans un espace réflexif.

Théorème 1.4.7. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace réflexif. Alors, de toute suite d'éléments dans la boule unité de E, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers un point de la boule unité de E.*

Démonstration : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans la boule unité de E. Soit F l'adhérence du sous-espace engendré par les x_n. C'est un sous-espace fermé dans E. Puisque E est réflexif, F l'est aussi d'après la proposition 1.4.6. De plus, F'' est aussi séparable car, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, F est séparable et $F'' = F$.

Par la proposition 1.4.5, on en déduit que F' est séparable. Soit alors $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense de F'. Pour chaque m fixé, par Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, il existe une extraction $\varphi_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $(u_m(x_{\varphi_m(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Par procédé diagonal (on pose pour tout n, $\varphi(n) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$), on obtient une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite , $(u_m(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Or, la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée (par 1) et comme la famille $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ est dense dans F', on en déduit que pour toute $u \in F'$, la suite $(u(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Cette limite est linéaire en u et on pose,

$$\forall u \in F', \lim_{n\to+\infty} u(x_{\varphi(n)}) = \tilde{x}(u).$$

Puisque, pour toute $u \in F'$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u(x_{\varphi(n)})| \leq ||u||_{F'} \, ||x_{\varphi(n)}|| \leq ||u||_{F'},$$

$\tilde{x}$ est une forme linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1. C'est donc un élément de F''. Comme F est réflexif, il existe $x \in F$ tel que pour tout $u \in F'$, $\tilde{x}(u) = u(x)$, avec $\|x\| \leq 1$.

Ainsi, pour toute $u \in F'$, $(u(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(x)$. Puisque la restriction à F de tout élément de E' est un élément de F', nous venons de montrer que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x et que x est dans la boule unité de E. D'où le résultat voulu. □

On peut par ailleurs montrer que si K est un convexe fermé d'un espace vectoriel normé E et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de K qui converge faiblement vers x, alors x est dans K. On en déduit le théorème suivant.

Théorème 1.4.8. *Dans un espace réflexif, tout ensemble convexe, fermé et borné est faiblement séquentiellement compact.*

1.5 Dualité et réflexivité dans les espaces L^p

Soit μ une mesure quelconque sur $\mathbb{R}^d$.

On dit que deux réels p et q non nuls sont conjugués lorsque

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Proposition 1.5.1. *Soit (p,q) un couple d'exposants conjugués, avec p et q dans $]1,+\infty[$. Soit $g \in L^q(\mu)$. L'application φ_g, qui à un élément f de $L^p(\mu)$ associe*

$$\varphi_g(f) = \int_X f\, g \,\mathrm{d}\mu,$$

est une forme linéaire continue sur $L^p(\mu)$, de norme $\|g\|_q$.

Démonstration : L'application φ_g est bien définie d'après l'inégalité de Hölder, et sa linéarité provient de la linéarité de l'intégrale. L'inégalité de Hölder entraîne

$$|\varphi_g(f)| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \,,$$

ce qui démontre que φ_g est continue et que sa norme vérifie $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$. Si g est la (classe de la) fonction nulle, alors φ_g est nulle, et l'égalité des normes est évidente. Si g n'est pas nulle, choisissons un représentant de g, que nous noterons encore g, vérifiant $\mu(\{g \neq 0\}) \neq 0$. Définissons une fonction f par $f(x) = 0$ si $g(x) = 0$, et

$$f(x) = \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|^{2-q}},$$

si $g(x) \neq 0$. Alors f est mesurable et vérifie

$$f(x)\, g(x) = |f(x)|^p = |g(x)|^q.$$

On voit en particulier que $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, puisque $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. On obtient donc

$$\varphi_g(f) = \int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q \, \left(\int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu \right)^{1-1/q} = \|g\|_q \, \|f\|_p \,.$$

Comme $f \neq 0$ est dans $L^p(\mu)$, il en résulte que $\|\varphi_g\| \geq \|g\|_q$, ce qui démontre l'égalité des normes.
□

Théorème 1.5.2. *Soit (p,q) un couple d'exposants conjugués, avec p et q dans $]1,+\infty[$. L'application $\Phi\,:\, L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$ définie par $\Phi(g) = \varphi_g$ est une isométrie linéaire qui est une bijection. Ainsi,*

$$(L^p(\mu))' \simeq L^q(\mu).$$

Démonstration : Par linéarité de l'intégrale, Φ est une application linéaire. C'est une isométrie par la proposition 1.5.1. Elle est donc injective.

Admettons la réflexivité des espaces $L^p(\mu)$, qui peut être obtenue par un argument général de convexité (tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif). Dans ce cas, montrons la surjectivité de Φ.

Si Φ n'est pas surjective, comme $L^q(\mu)$ est fermé, par le théorème 1.2.11, il existe $u \in (L^p(\mu))''$, non nulle, telle que $u(v) = 0$, pour tout $v \in L^q(\mu)$. Comme $L^p(\mu)$ est réflexif, $u \in L^p(\mu)$ et ainsi, pour tout $v \in L^q(\mu)$, $\int uv = 0$ et par caractérisation de la norme, $||u||_p = 0$ et $u = 0$, d'où une contradiction.

Montrons le résultat voulu dans le cas où $p < 2$ et pour $\mu(X) = 1$ (pour simplifier), sans avoir recours à un résultat général d'uniforme convexité.

Soit $f \in L^2(\mu)$. Appliquons Hölder à f et 1 pour $p' = \frac{2}{p}$ et $q' = \frac{2}{2-p}$:

$$||f||_p^p = \int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) \leq ||1||_{\frac{2}{2-p}} ||f^p||_{\frac{2}{p}} = \mu(X)||f||_2^p = ||f||_2^p.$$

Ainsi, pour toute $f \in L^2(\mu)$, $||f||_p \leq ||f||_2$.

Soit u une forme linéaire définie sur $L^2(\mu)$ qui est bornée en norme L^p :

$$\exists C \geq 0,\ \forall f \in L^2(\mu),\ |u(f)| \leq C \cdot ||f||_p.$$

Alors, u est aussi bornée pour la norme $||\ ||_2$. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $g \in L^2(\mu)$ telle que,

$$\forall f \in L^2(\mu),\ u(f) = \int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Montrons que g appartient en fait à $L^q(\mu)$. Pour cela, on se donne $k \in \mathbb{N}$ et on applique l'égalité précédente avec $f = f_k$ définie par :

$$\forall x \in X,\ f_k(x) = |g_k|^{q-1}(x)\mathrm{sign}(g(x)),$$

où $|g_k|(x) = \min\{|g(x)|, k\}$. Alors,

$$u(f_k) = \int_X f_k(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X |g_k|^{q-1}(x)|g(x)|\mathrm{d}\mu(x) \geq \int_X |g_k|^q(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

D'autre part,

$$||f_k||_p^p = \int_X |g_k|^{(q-1)p}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X |g_k|^q(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Puisque par hypothèse sur u, $|u(f_k)| \leq C||f_k||_p$, on obtient

$$\int_X |g_k|^q(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq C\left(\int_X |g_k|^q(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où,

$$||g_k||_q \leq C.$$

En faisant tendre k vers l'infini et en utilisant le théorème de convergence monotone (ou le lemme de Fatou), on en déduit que g est dans $L^q(\mu)$. Cela démontre le résultat de dualité voulu dans le cas $p < 2$ et $\mu(X) = 1$.

$\square$

Corollaire 1.5.3. *Pour tout $p \in]1, +\infty[$, l'espace $L^p(\mu)$ est réflexif.*

Les résultats précédents ne se généralisent que partiellement au cas $p = +\infty$.

Proposition 1.5.4. *Soit $g \in L^\infty(\mu)$. L'application φ_g de $L^1(\mu)$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\varphi_g(f) = \int_X f\, g \,\mathrm{d}\mu$$

est une forme linéaire continue sur $L^1(\mu)$ vérifiant $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_\infty$. Si l'espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est σ-fini, on a de plus $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Démonstration : Par le cas limite de l'inégalité de Hölder, on voit que φ_g est bien définie et vérifie $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_\infty$. De plus, elle est linéaire par linéarité de l'intégrale. Supposons que l'espace $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est σ-fini. L'inégalité inverse est évidente dans le cas où $g = 0$, supposons donc $g \neq 0$. Soit $\alpha \in]0, \|g\|_\infty[$ donné. Notons encore g un représentant quelconque de la classe g. L'ensemble $A = \{|g| > \alpha\}$ est mesurable et de mesure non nulle. Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X, mesurables et de mesures finies, de réunion X. Pour au moins un n, $X_n \cap A$ est de mesure non nulle et finie. Notons $B = X_n \cap A$. Définissons une fonction f par $f(x) = 0$ si $x \notin B$ et $f(x) = g(x)/|g(x)|$ si $x \in B$. Alors f est mesurable et intégrable, avec $\|f\|_1 = \mu(B)$. On en déduit

$$\varphi_g(f) = \int_X f\, g \,\mathrm{d}\mu = \int_B |g| \,\mathrm{d}\mu \geq \alpha\mu(B) = \alpha \|f\|_1 ,$$

donc $\|\varphi_g\| \geq \alpha$. L'arbitraire sur α montre enfin que $\|\varphi_g\| \geq \|g\|_\infty$, ce qui démontre l'égalité des normes. □

Voyons enfin le cas où $p = 1$.

Proposition 1.5.5. *Soit $g \in L^1(\mu)$. L'application φ_g de $L^\infty(\mu)$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\varphi_g(f) = \int_X f\, g \,\mathrm{d}\mu$$

est une forme linéaire continue sur $L^\infty(\mu)$, de norme $\|g\|_1$.

Démonstration : Comme dans les propositions précédentes, φ_g est linéaire et continue, et sa norme vérifie $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_1$. L'inégalité inverse est évidente si $g = 0$ dans $L^1(\mu)$. Sinon, g étant un représentant fixé de la classe g, l'ensemble $A = \{g \neq 0\}$ est mesurable et de mesure non nulle. On définit une fonction f par $f = \mathbf{1}_A.(\bar{g}/|g|)$. Alors, $f \in L^\infty(\mu)$ et $\|f\|_\infty = 1$ (puisque A n'est pas négligeable). De plus, on vérifie que

$$\varphi_g(f) = \int_X |g| \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_1 = \|g\|_1 \, \|f\|_\infty ,$$

ce qui montre que $\|\varphi_g\| \geq \|g\|_1$ et termine la démonstration. □

On peut montrer que le dual topologique de $L^1(\mu)$ s'identifie à $L^\infty(\mu)$. Mais, contrairement au cas précédent, on ne peut plus identifier en général le dual topologique de $L^{\infty(\mu)}$ à $L^1(\mu)$, on a seulement l'inclusion $L^1(\mu) \subset (L^\infty(\mu))'$ (voir TD1).

Chapitre 2

Opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert

$(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. Par convention, lorsque $(\cdot|\cdot)$ sera un produit hermitien, il sera semi-linéaire à droite.

2.1 Opérateurs bornés

Nous commençons par définir l'espace des opérateurs bornés entre espaces vectoriels normés et nous définissons ensuite plusieurs topologies sur cet espace.

Définition 2.1.1. *Si $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ sont des espaces vectoriels normés, un opérateur borné de E dans F est une application linéaire continue $T : E \to F$, donc, telle que*

$$\exists C > 0,\ \forall u \in E,\ \|Tu\|_F \leq C\,\|u\|_E\,.$$

Notation. On désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs bornés de E dans F. Lorsque $E = F$, on notera $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.

$\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel sur lequel on introduit la norme,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\|u\|_E = 1} \|Tu\|_F\,.$$

La topologie induite par cette norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ est appelée *topologie uniforme des opérateurs*. Si $(F, \| \|_F)$ est un espace de Banach, $(\mathcal{L}(E,F), \| \|_{\mathcal{L}(E,F)})$ est aussi un espace de Banach. De plus, la norme $\| \|_{\mathcal{L}(E,E)}$ est une norme d'algèbre sur $(\mathcal{L}(E), +, ., \circ)$ et, plus généralement, si $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$ et $(G, \| \|_G)$ sont des espaces vectoriels normés et si $T_1 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(E,G)$ et

$$\|T_2 \circ T_1\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|T_2\|_{\mathcal{L}(F,G)}\ \|T_1\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,.$$

Notation. Dans toute la suite, nous noterons T_2T_1 la composée $T_2 \circ T_1$ de deux opérateurs $T_1 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(F,G)$.

Nous introduisons maintenant deux topologies plus faibles sur $\mathcal{L}(E,F)$. Tout d'abord, la *topologie forte des opérateurs*. C'est la plus petite topologie rendant continues les applications $\mathrm{ev}_u : \mathcal{L}(E,F) \to F$, $\mathrm{ev}_u(T) = Tu$. Pour cette topologie, une suite d'opérateurs bornés $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un opérateur borné T si et seulement si, pour tout $u \in E$, $\|T_nu - Tu\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On notera alors $T_n \to T$.

La seconde topologie est la *topologie faible des opérateurs*. Nous pourrions la définir pour E et F des espaces de Banach quelconques, mais dans la suite nous nous restreindrons aux opérateurs bornés de $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ dans lui-même, nous supposerons donc que $E = F = \mathcal{H}$. Alors la topologie faible sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est la plus petite topologie rendant continues les applications $\mathrm{ev}_{u,v} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$, $\mathrm{ev}_{u,v}(T) = (Tu|v)$. Pour cette topologie, une suite d'opérateurs bornés $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un opérateur borné T si et seulement si, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $(T_n u|v) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (Tu|v)$ dans $\mathbb{C}$. On notera alors $T_n \rightharpoonup T$.
La topologie faible des opérateurs est plus faible que la topologie forte des opérateurs, elle-même plus faible que la topologie uniforme des opérateurs. Les exemples suivants illustrent les différences entre ces topologies sur $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Exemple 2.1.2. *Soit $T_n : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, $T_n(x_0, x_1, \ldots) = (\frac{1}{n}x_0, \frac{1}{n}x_1, \ldots)$. Alors $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, l'opérateur nul.*

Exemple 2.1.3. *Soit $S_n : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, $S_n(x_0, x_1, \ldots) = (0, \ldots, 0, x_n, x_{n+1}, \ldots)$. Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers 0, mais pas uniformément.*

En effet, pour toute $x \in \ell^2(\mathbb{N})$,

$$||S_n x||_{\ell^2}^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} |x_k|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puis, pour toute $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, $||S_n x||_{\ell^2} \leq ||x||_{\ell^2}$ donc $||S_n||_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))} \leq 1$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||S_n e_n||_{\ell^2} = 1$ où e_n est la suite valant 0 pour tout $k \neq n$ et 1 au n-ième terme. Donc pour tout n, $||S_n||_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))} = 1$ et (S_n) ne tend pas uniformément vers 0.

Exemple 2.1.4. *Soit $W_n : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, $W_n(x_0, x_1, \ldots) = (0, \ldots, 0, x_0, x_1, \ldots)$ avec n fois 0 au début de la suite. Alors $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0, mais pas fortement ni uniformément.*

Dans la suite, nous considèrerons souvent des opérateurs bornés entre espaces de Hilbert. Nous donnons, dans ce cadre hilbertien, une caractérisation de la norme d'opérateur.

Proposition 2.1.5. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Soit $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un opérateur borné. Alors,*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} = \sup\{|(Tu|v)_{\mathcal{H}_2}| \mid \|u\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1 \text{ et } \|v\|_{\mathcal{H}_2} \leq 1\}.$$

Démonstration : Notons S le membre de droite de l'égalité. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(Tu|v)| \leq \|Tu\|_{\mathcal{H}_2} \|v\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} \|u\|_{\mathcal{H}_1} \|v\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)}$$

lorsque $\|u\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1$ et $\|v\|_{\mathcal{H}_2} \leq 1$. Donc, $S \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)}$. Réciproquement, soit M un réel positif ; supposons que $S \leq M$. Alors, pour tout $u \in \mathcal{H}_1$, $\|Tu\|_{\mathcal{H}_2} \leq M\|u\|_{\mathcal{H}_1}$. En effet, si $u = 0$ ou $Tu = 0$, l'inégalité est vérifiée. Sinon, $u' = u/\|u\|_{\mathcal{H}_1}$ et $v' = Tu/\|Tu\|_{\mathcal{H}_2}$ sont de norme 1 et, comme $S \leq M$, $|(Tu'|v')| \leq M$. Or, $|(Tu'|v')| = \|Tu\|_{\mathcal{H}_2}/\|u\|_{\mathcal{H}_1}$, donc on a bien $\|Tu\|_{\mathcal{H}_2} \leq M\|u\|_{\mathcal{H}_1}$. Par définition de $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)}$, on obtient $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} \leq S$. □

2.2 Adjoint d'un opérateur borné

Nous allons maintenant définir l'adjoint d'un opérateur borné qui généralise à la dimension quelconque la transposée d'une matrice réelle ou la transconjuguée d'une matrice complexe.

Proposition 2.2.1. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que*

$$\forall u \in \mathcal{H},\ \forall v \in \mathcal{H},\ (Tu|v) = (u|T^*v). \tag{2.1}$$

Démonstration : Soit $v \in \mathcal{H}$. Alors, $\ell_v : u \mapsto (Tu|v)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$. En effet, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on utilise le caractère borné de T. Par le théorème de Riesz de représentation des formes linéaires continues, il existe un unique vecteur $w \in \mathcal{H}$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $\ell_v(u) = (u|w)$. Posons $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $T^*v = w$.

T^* est linéaire. En effet, si $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, alors soit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ et $w_1 = T^*(v_1)$, $w_2 = T^*(v_2)$, $T^*(v) = w$. Alors,

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathcal{H},\ (u|w) &= (Tu|v) = (Tu|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)\\ &= \overline{\lambda}_1 (Tu|v_1) + \overline{\lambda}_2 (Tu|v_2)\\ &= \overline{\lambda}_1 (u|w_1) + \overline{\lambda}_2 (u|w_2)\\ &= (u|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2).\end{aligned}$$

Donc, $w - \lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2 \in \mathcal{H}^\perp = \{0\}$ et $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ et T^* est linéaire.

T^* est borné. En effet, soient $u, v \in \mathcal{H}$, $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ et $\|v\|_{\mathcal{H}} \leq 1$. Alors,

$$|(u|T^*v)| = |(Tu|v)| \leq \|Tu\|_{\mathcal{H}}\ \|v\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Donc, en prenant $u = \frac{T^*v}{\|T^*v\|_{\mathcal{H}}}$, pour tout $v \in \mathcal{H}$, $\|v\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ et $T^*v \neq 0$, $\|T^*v\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$. Si $v \in \mathcal{H}$ est tel que $T^*v = 0$, l'inégalité est encore vérifiée. On obtient donc $\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ et T^* est borné.

Enfin, si T_1^* et T_2^* vérifient (2.1), pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $(u|(T_1^* - T_2^*)v) = 0$ et $T_1^* - T_2^* = 0$. □

Définition 2.2.2 (Adjoint). *L'opérateur borné $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est appelé adjoint de l'opérateur T.*

Exemple 2.2.3. *Pour tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$.*

Nous énonçons les premières propriétés vérifiées par l'adjoint d'un opérateur borné.

Proposition 2.2.4 (Propriétés algébriques de l'adjoint). *Soient $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors,*

1. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$;
2. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$;
3. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$;
4. $(T^*)^* = T$;
5. *si T a un inverse borné T^{-1}, T^* a aussi un inverse borné et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Démonstration : Les deux premiers points proviennent de la semi-linéarité à droite du produit scalaire. Pour le troisième point, on écrit, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $(T_1 T_2 u|v) = (T_2 u|T_1^* v) = (u|T_2^* T_1^* v)$. Le quatrième point s'obtient en remarquant que, dans (2.1), les vecteurs u et v jouent le même rôle et $(Tu|v) = (u|T^*v)$ pour tous $u, v \in \mathcal{H}$ si et seulement si $(T^*u|v) = (u|Tv)$ pour tous $u, v \in \mathcal{H}$ en passant aux conjugués. Enfin, de $TT^{-1} = I = T^{-1}T$ on déduit par passage à l'adjoint que $T^*(T^{-1})^* = I^* = I = I^* = (T^{-1})^* T^*$. □

Proposition 2.2.5 (Propriétés métriques de l'adjoint)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors,*

1. $\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$;
2. $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|T\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

Démonstration : D'après la démonstration de la proposition 2.2.1, $\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$. Puis, en appliquant cette inégalité à l'opérateur borné T^* et en utilisant le fait que $(T^*)^* = T$, on obtient bien $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, ce qui prouve le premier point. Pour le second point, on a tout d'abord, $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|T\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$. Réciproquement, si $u \in \mathcal{H}$, $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$,

$$\|Tu\|^2_{\mathcal{H}} = (Tu|Tu) = (T^*Tu|u) \leq \|T^*T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},$$

donc $\|T\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|T^*T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$. □

Proposition 2.2.6 (Propriétés géométriques de l'adjoint)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors,*

1. $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ *et* $(\operatorname{Ker} T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$;
2. *si $F \subset \mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel stable par T, alors $F^\perp$ est stable par T^*.*

Démonstration : u appartient à $(\operatorname{Im} T)^\perp$ si et seulement si, pour tout $v \in \mathcal{H}$, $(u|Tv) = 0$, ce qui équivaut à ce que, pour tout $v \in \mathcal{H}$, $(T^*u|v) = 0$. C'est équivalent à $T^*u = 0$, soit encore $u \in \operatorname{Ker} T^*$. La seconde propriété provient des propriétés sur les espaces orthogonaux dans les espaces de Hilbert.

Pour le second point, soit $v \in F^\perp$ et $u \in F$. Alors $Tu \in F$, donc $(T^*v|u) = (v|Tu) = 0$. Donc $T^*v \in F^\perp$. □

Définition 2.2.7. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit auto-adjoint lorsque $T = T^*$.*

Les opérateurs auto-adjoints sont la généralisation des matrices symétriques à la dimension infinie. Ils jouent un rôle majeur en analyse fonctionnelle et en physique mathématique. Un théorème de structure sur ces opérateurs affirme que tout opérateur auto-adjoint est diagonalisable, en un sens à préciser en dimension infinie. Un premier exemple d'opérateur auto-adjoint est celui de projecteur orthogonal.

Définition 2.2.8. *Un opérateur $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est appelé un projecteur lorsque $P^2 = P$. Si de plus $P^* = P$, on dit que P est un projecteur orthogonal.*

On remarque que l'image d'un projecteur est un sous-espace fermé sur lequel P agit comme l'identité. Si de plus P est orthogonal, P agit comme l'opérateur nul sur $(\operatorname{Im} T)^\perp$. Le théorème de projection sur les sous-espaces fermés dans les espaces de Hilbert nous assure alors qu'il y a une bijection entre les projecteurs orthogonaux dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et les sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$.

Exemple 2.2.9. ***(Opérateur de multiplication).*** *Soit (X, μ) un espace mesuré σ-fini et soit $\mathcal{H} = L^2(\mu)$. Si $\varphi \in L^\infty(\mu)$, on définit l'opérateur de multiplication par φ, $M_\varphi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $M_\varphi u = \varphi u$.*
Alors M_φ est dans $\mathcal{L}(L^2(\mu))$ et $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Ici, $\|\varphi\|_\infty$ désigne le supremum μ-essentiel, $\|\varphi\|_\infty = \inf\{c > 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |\varphi(x)| > c\}) = 0\}$. Donc, quitte à changer de représentant dans la classe de φ, on peut supposer que φ est une fonction bornée.
Puis, comme $\|\varphi u\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty \|u\|_2$, M_φ est un opérateur borné et $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme μ est σ-finie, il existe un ensemble mesurable A tel que $0 < \mu(A) < +\infty$ tel que $|\varphi(x)| \geq \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$ pour tout $x \in A$. Si on pose $u = \mu(A)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_A$, alors $u \in L^2(\mu)$ et $\|u\|_2 = 1$. Donc $\|M_\varphi\|^2 \geq \|\varphi u\|_2^2 = \mu(A)^{-1}\int_A |\varphi|^2 \mathrm{d}\mu \geq (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty$.
On a de plus, pour toute $\varphi \in L^\infty(\mu)$, $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$ où $\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}$ pour tout x dans X. En particulier, si φ est à valeurs réelles, $M_\varphi^* = M_\varphi$ et M_φ est auto-adjoint.

Pour les opérateurs bornés auto-adjoints, la proposition 2.1.5 peut être raffinée.

Proposition 2.2.10. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint. Alors, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $(Tu|u) \in \mathbb{R}$ et*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup\{|(Tu|u)| \mid \|u\|_{\mathcal{H}} = 1\}.$$

Démonstration : Soit S le membre de droite de l'égalité. D'après la proposition 2.1.5, $S \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$. Pour démontrer l'autre inégalité, on commence par démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $(Tu|u) \in \mathbb{R}$. En effet, comme $T = T^*$, $(Tu|u) = (u|Tu) = \overline{(Tu|u)}$ et $(Tu|u) \in \mathbb{R}$. Puis, en utilisant l'identité de polarisation, on a

$$\forall u, v \in \mathcal{H},\ \mathrm{Re}\ (Tu|v) = \frac{1}{4}\left((T(u+v)|u+v) - (T(u-v)|u-v)\right).$$

Or, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $|(Tu|u)| \leq S\|u\|^2$ donc, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$,

$$|\mathrm{Re}\ (Tu|v)| \leq \frac{S}{4}\left(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\right).$$

Puis par l'identité du parallélogramme, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $|\mathrm{Re}\ (Tu|v)| \leq \frac{S}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$. Donc, si on suppose que $\|u\| \leq 1$ et $\|v\| \leq 1$, on obtient $|\mathrm{Re}\ (Tu|v)| \leq S$. Quitte à remplacer v par $e^{-\mathrm{i}\theta}v$, avec $e^{\mathrm{i}\theta}(Tu|v) = |(Tu|v)|$, on obtient que, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $|(Tu|v)| = (Tu|e^{-\mathrm{i}\theta}v) = |\mathrm{Re}\ (Tu|e^{-\mathrm{i}\theta}v)| \leq S$. Alors, par la proposition 2.1.5, $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq S$, ce qui termine la démonstration. □

Nous terminons cette section par un résultat qui ouvre la voie au formalisme des opérateurs non bornés.

Théorème 2.2.11 (Hellinger-Toeplitz)**.** *Soit $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur tel que, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $(u|Tv) = (Tu|v)$. Alors $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Démonstration : Par le théorème du graphe fermé, il suffit de démontrer que $\Gamma(T)$, le graphe de T, est fermé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ qui converge vers $u \in \mathcal{H}$ et telle que $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $v \in \mathcal{H}$. Il nous suffit de démontrer que $v = Tu$. Or, pour tout $w \in \mathcal{H}$,

$$(w|v) = \lim_{n\to\infty}(w|Tu_n) = \lim_{n\to\infty}(Tw|u_n) = (Tw|u) = (w|Tu),$$

donc $v = Tu$. □

Ce résultat affirme donc qu'il ne peut y avoir d'opérateur non borné qui soit défini sur $\mathcal{H}$ tout entier et qui soit auto-adjoint (ou symétrique en général). Cela pose problème en mécanique quantique où l'on souhaite définir des opérateurs comme l'énergie (qui fait intervenir une dérivée) qui sont non bornés tout en étant symétriques au sens où $(u|Tv) = (Tu|v)$.

Chapitre 3

Spectre des opérateurs bornés

Une valeur propre λ d'une matrice A est un scalaire tel qu'il existe un vecteur x non nul tel que $Ax = \lambda x$. Cela se traduit par la non-injectivité de la matrice $A - \lambda I$. Or, en dimension finie, une application linéaire entre deux espaces de même dimension est injective si et seulement si elle est bijective. Ainsi on peut aussi caractériser les valeurs propres d'une matrice comme les scalaires λ tels que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible. Nous souhaitons conserver cette caractérisation pour définir la notion de spectre pour un opérateur borné sur un espace de Banach. Un problème survient en dimension infinie, il existe des applications linéaires injectives mais non surjectives, par exemple l'application qui à une suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite bornée $(0, x_0, \ldots)$. Il existe aussi des applications linéaires surjectives et non injectives, par exemple l'application qui à une suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite bornée $(x_1, \ldots)$. Cela nous conduira à faire une distinction entre le spectre d'un opérateur et l'ensemble de ses valeurs propres. Certains scalaires dans le spectre ne sont pas des valeurs propres.

3.1 Spectre

Nous commençons par donner la définition du spectre d'un opérateur borné. Dans toute la suite, $(E, \| \ \|_E)$ est un $\mathbb{C}$-espace de Banach. Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la notation, nous noterons, pour $T \in \mathcal{L}(E)$, $\|T\| := \|T\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Notation. Pour $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $T - \lambda := T - \lambda \mathrm{Id}_E$ où Id_E est l'application linéaire identité de $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de T est la partie de $\mathbb{C}$ définie par*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(E)\}.$$

Les éléments de $\sigma(T)$ sont appelés valeurs spectrales.

On remarque que, par le théorème de l'isomorphisme, T est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si T est bijectif. En effet, si T est borné et bijectif, son application réciproque est automatiquement continue. On en déduit la caractérisation suivante du spectre d'un opérateur borné.

Proposition 3.1.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ n'est pas bijectif}\}$.*

Définition 3.1.3. *L'ensemble des valeurs propres de $T \in \mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda$ n'est pas injectif. L'ensemble des valeurs propres de T est appelé spectre ponctuel de T et est noté $\sigma_p(T)$. Un vecteur $u \in E$ non nul tel que $Tu = \lambda u$ est appelé vecteur propre de T associé à la valeur propre λ. Enfin, on appelle multiplicité de la valeur propre λ, la dimension (finie ou infinie) de* $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda)$.

On a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. Toute valeur propre est une valeur spectrale, mais ces deux ensembles ne sont pas égaux en général, comme le montre le premier exemple de l'introduction.
Avant de prouver les premières propriétés du spectre d'un opérateur borné, nous démontrons le lemme suivant, dit « de la série de Neumann ».

Lemme 3.1.4 (Lemme de la série de Neumann). *Soit $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|S\| < 1$. Alors $\mathrm{Id}_E - S$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et $(\mathrm{Id}_E - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} S^n$. Ainsi, le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(E)$, noté $\mathrm{GL}(E)$, est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration : Comme $\|S\| < 1$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|S^n\| \leq \|S\|^n$, la série $\sum \|S^n\|$ converge dans $\mathbb{R}$. Donc, comme $(\mathcal{L}(E), \|\ \|_{\mathcal{L}(E)})$ est un espace complet, la série $\sum S^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$. Soit

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} S^n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} S^n.$$

Alors, pour tout $N \geq 1$,

$$(\mathrm{Id}_E - S)\left(\sum_{n=0}^{N} S^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{N} S^n\right)(\mathrm{Id}_E - S) = \mathrm{Id}_E - S^{N+1}$$

et $\mathrm{Id}_E - S^{N+1}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers Id_E. Donc $(\mathrm{Id}_E - S)U = U(\mathrm{Id}_E - S) = \mathrm{Id}_E$.
Soit maintenant T_0 inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Alors, pour $S \in \mathcal{L}(E)$, $T_0 + S = T_0(\mathrm{Id}_E + T_0^{-1}S)$, donc $T_0 + S$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Id}_E + T_0^{-1}S$ l'est. Or, c'est le cas pour S tel que $\|T_0^{-1}S\| < 1$, donc $B(T_0, \|T_0^{-1}\|^{-1})$ est contenu dans $\mathrm{GL}(E)$. Cet ensemble est donc voisinage de chacun de ses points, c'est un ouvert. □

Proposition 3.1.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.*

Démonstration : L'ensemble $\sigma(T)^c$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathrm{GL}(E)$ par l'application continue $\mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)$, $\lambda \mapsto T - \lambda$. C'est donc un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sigma(T)$ est donc fermé dans $\mathbb{C}$. De plus, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$. Alors $T - \lambda = -\lambda\left(\mathrm{Id}_E - \frac{1}{\lambda}T\right)$ et $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$. Donc $\mathrm{Id}_E - \frac{1}{\lambda}T \in \mathrm{GL}(E)$ et $T - \lambda$ est aussi inversible. Donc $\lambda \notin \sigma(T)$. Donc $\sigma(T) \subset \overline{D}(0, \|T\|)$ et $\sigma(T)$ est borné. Le spectre de T est donc un fermé borné de $\mathbb{C}$, donc un compact de $\mathbb{C}$. □

3.2 Résolvante

Nous introduisons maintenant une application clef dans l'étude du spectre d'un opérateur, la résolvante.

Notation. L'ensemble $\sigma(T)^c$ est appelé *ensemble résolvant* de T et est noté $\rho(T)$. C'est un ouvert non borné de $\mathbb{C}$.

Définition 3.2.1. *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ et $z \in \mathbb{C}$. L'application $R(T) : \rho(T) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $R(T)(z) = (T - z)^{-1}$ est appelée résolvante de l'opérateur T. Pour $z \in \rho(T)$, l'application linéaire $R_z(T) := R(T)(z)$ est appelée résolvante de T au point z.*

Proposition 3.2.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. La résolvante de T, $z \mapsto R_z(T)$ est holomorphe sur l'ouvert $\rho(T)$. De plus, $\lim_{|z| \to +\infty} \|R_z(T)\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$.*

Démonstration : Soit $z_0 \in \rho(T)$. Alors, pour tout $z \in \rho(T)$, $(T-z)^{-1} = (T - z_0 - (z-z_0))^{-1} = (T-z_0)^{-1}(\mathrm{Id}_E - (z-z_0)(T-z_0)^{-1})^{-1}$. Or, $\|(z-z_0)(T-z_0)^{-1}\| = |z-z_0|\|(T-z_0)^{-1}\|$ et $\|(T-z_0)^{-1}\| > 0$. Alors, si on suppose que $z \in \rho(T)$ est tel que $|z-z_0| < \|(T-z_0)^{-1}\|^{-1}$, on a

$$(T-z)^{-1} = (T-z_0)^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (z-z_0)^n (T-z_0)^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-z_0)^n (T-z_0)^{-(n+1)}.$$

Donc, $z \mapsto R_z(T)$ est holomorphe au point z_0. Elle est donc holomorphe sur $\rho(T)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons $|z| > \|T\|$. Alors $z \in \rho(T)$ et

$$(T-z)^{-1} = \left(-z\left(\mathrm{Id}_E - \frac{1}{z}T\right)\right)^{-1} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}T^n,$$

d'où

$$\left\|(T-z)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|z|}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{|z|^n}\|T\|^n \leq \frac{1}{|z|-\|T\|} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0,$$

ce qui prouve la seconde assertion de la proposition.

□

Corollaire 3.2.3. *Si $E \neq \{0\}$ et si $T \in \mathcal{L}(E)$, $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Démonstration : Si $\sigma(T) = \emptyset$, alors $\rho(T) = \mathbb{C}$ et $R(T) : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)$ est holomorphe et, par la proposition 3.2.2, $\lim_{|z|\to+\infty} \|R_z(T)\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$. $R(T)$ est donc une fonction entière et bornée sur $\mathbb{C}$, donc, par le théorème de Liouville, elle est constante sur $\mathbb{C}$. Comme sa limite en l'infini est nulle, cette constante ne peut être que 0. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(T-z)^{-1} = 0$. Mais l'application nulle n'est bijective que lorsque $E = \{0\}$. Donc, si $E \neq \{0\}$, $\sigma(T) \neq \emptyset$.

□

La preuve de la non-vacuité du spectre repose sur un résultat d'analyse complexe, le théorème de Liouville. C'est aussi le cas pour la preuve de la non-vacuité du spectre en dimension finie qui est une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss dont une preuve repose aussi sur le théorème de Liouville.

Proposition 3.2.4 (Identité de la résolvante)**.** *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$, z et z' dans $\rho(T)$. Alors, $R_z(T) - R_{z'}(T) = (z-z')R_z(T)R_{z'}(T)$ et $R_z(T)$ et $R_{z'}(T)$ commutent.*

Démonstration : Pour tous $z, z' \in \rho(T)$, on a

$$\begin{aligned}
R_z(T) - R_{z'}(T) &= (T-z)^{-1} - (T-z')^{-1} \\
&= (T-z)^{-1}(T-z')(T-z')^{-1} - (T-z)^{-1}(T-z)(T-z')^{-1} \\
&= (T-z)^{-1}(T-z'-T+z)(T-z')^{-1} \\
&= (T-z)^{-1}(z-z')(T-z')^{-1} = (z-z')R_z(T)R_{z'}(T),
\end{aligned}$$

d'où l'identité de la résolvante. En interchangeant z et z', on en déduit que $R_z(T)$ et $R_{z'}(T)$ commutent.

□

3.3 Rayon spectral

Comme pour $T \in \mathcal{L}(E)$, $\sigma(T)$ est un compact inclus dans $\overline{D}(0, \|T\|)$, la borne supérieure dans la définition suivante est bien définie.

Définition 3.3.1 (Rayon spectral)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On appelle rayon spectral de T le réel positif $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.*

Proposition 3.3.2 (Formule du rayon spectral)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

$$r(T) = \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration : Tout d'abord, comme $\sigma(T) \subset \overline{D}(0, \|T\|)$, $r(T) \leq \|T\|$. Soit $n \geq 1$. Prouvons que $\sigma(T^n) = \{\lambda^n \mid \lambda \in \sigma(T)\}$. Pour cela, on utilise la relation $T^n - \lambda^n = (T - \lambda)(T^{n-1} + \ldots + \lambda^{n-1})$. Notons $Q_n = T^{n-1} + \ldots + \lambda^{n-1}$. Q_n commute avec $T - \lambda$. Supposons que $\lambda^n \notin \sigma(T^n)$. Alors, il existe $S_n \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(T^n - \lambda^n)S_n = S_n(T^n - \lambda^n) = \mathrm{Id}_E$. En particulier, Q_n et S_n commutent. En effet, Q_n commute avec T et avec $\lambda \mathrm{Id}_E$ donc avec $T^n - \lambda^n$ donc avec $(T^n - \lambda^n)^{-1} = S_n$ (dans un groupe, si A et B commutent et si B est inversible, A et B^{-1} commutent). Alors, $(T - \lambda)Q_n S_n = S_n Q_n (T - \lambda) = Q_n S_n (T - \lambda) = \mathrm{Id}_E$. Donc $T - \lambda$ est inversible et $\lambda \notin \sigma(T)$. Donc, par contraposée, si $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ et $\{\lambda^n \mid \lambda \in \sigma(T)\} \subset \sigma(T^n)$.

Réciproquement, soit $\mu \in \sigma(T^n)$. Alors $T^n - \mu = (T - \lambda_1) \ldots (T - \lambda_n)$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les racines n-ièmes de μ. Si, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $T - \lambda_i$ est inversible, $T^n - \mu$ l'est aussi, donc $\mu \notin \sigma(T^n)$. Donc il existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $\lambda_i \in \sigma(T)$. Or, $\lambda_i^n = \mu$ par définition. Donc, pour tout $\mu \in \sigma(T^n)$, il existe $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $\mu = \lambda^n$. Donc $\sigma(T^n) \subset \{\lambda^n \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

On en déduit que, pour tout $n \geq 1$, $r(T)^n = r(T^n) \leq \|T^n\|$, donc $r(T) \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Donc

$$r(T) \leq \liminf_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Pour $\xi \in \mathbb{C}$, $0 < |\xi| < \frac{1}{r(T)}$, posons $F(\xi) = R_{\xi^{-1}}(T)$. Alors, F est holomorphe sur l'ouvert $\{\xi \mid 0 < |\xi| < \frac{1}{r(T)}\}$ par la proposition 3.2.2. De plus, sur cet ouvert, d'après les calculs effectués dans la démonstration de la proposition 3.2.2, $F(\xi) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \xi^{n+1} T^n$. F s'étend donc en une fonction holomorphe sur $D(0, r(T)^{-1})$. D'après les inégalités de Cauchy,

$$\forall r < \frac{1}{r(T)},\ \|T^n\| = \left\| -\frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \right\| \leq \frac{1}{r^{n+1}} \max_{|\xi| \leq r} \|F(\xi)\|.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M(r)^{\frac{1}{n}} r^{-1-\frac{1}{n}}$ où $M(r) = \max_{|\xi| \leq r} \|F(\xi)\|$, d'où,

$$\forall r < \frac{1}{r(T)},\ \limsup_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{r},$$

donc

$$\limsup_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(T) \leq \liminf_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Donc, la suite $(\|T^n\|^{\frac{1}{n}})_{n \geq 1}$ converge et sa limite vaut $r(T)$. □

Nous terminons cette section par deux résultats reliant le spectre d'un opérateur borné à celui de son adjoint dans le cas où E est un espace de Hilbert.

Proposition 3.3.3. *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$. De plus, pour tout $z \in \rho(T)$, $R_{\bar{z}}(T^*) = R_z(T)^*$.*

Démonstration : En effet, d'après le point 5 de la proposition 2.2.4, $T - \lambda$ est inversible si et seulement si $(T-\lambda)^*$ l'est. Or $(T-\lambda)^* = T^* - \overline{\lambda}$. Donc

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow T - \lambda \text{ non inversible} \Leftrightarrow (T-\lambda)^* \text{ non inversible} \Leftrightarrow T^* - \overline{\lambda} \text{ non inversible} \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^*),$$

d'où la première assertion. Puis, si $z \in \rho(T)$,

$$R_{\bar{z}}(T^*) = (T^* - \bar{z})^{-1} = ((T-z)^*)^{-1} = ((T-z)^{-1})^* = R_z(T)^*,$$

toujours d'après le point 5 de la proposition 2.2.4. □

Le second résultat concerne les opérateurs auto-adjoints.

Proposition 3.3.4. *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Alors,*

1. *$\sigma(T) \subset \mathbb{R}$;*
2. *les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de T sont orthogonaux.*

Démonstration : Soient λ et μ deux nombres réels. Alors, on a, pour tout $u \in H$,

$$\begin{aligned}\|(T-(\lambda+\mathrm{i}\mu))u\|^2 &= ((T-(\lambda+\mathrm{i}\mu))u|(T-(\lambda+\mathrm{i}\mu))u) \\ &= ((T-\lambda)u|(T-\lambda)u) + \mathrm{i}\mu\left[((T-\lambda)u|u) - (u|(T-\lambda)u)\right] - \mathrm{i}^2\mu^2||u||^2 \\ &= \|(T-\lambda)u\|^2 + \mu^2\|u\|^2\end{aligned}$$

car T est auto-adjoint et λ est réel, d'où l'on tire que $((T-\lambda)u|u) = (u|(T-\lambda)u)$.
Donc, pour tout $u \in H$, $\|T-(\lambda+\mathrm{i}\mu))u\|^2 \geq \mu^2\|u\|^2$. Si $\mu \neq 0$, $T-(\lambda+\mathrm{i}\mu)$ est injectif. Supposons par l'absurde $T-(\lambda+\mathrm{i}\mu)$ non bijectif, donc non surjectif, soit encore Im $(T-(\lambda+\mathrm{i}\mu)) \neq H$. Alors,

$$\mathrm{Ker}(T^* - (\lambda - \mathrm{i}\mu)) = \mathrm{Ker}((T-(\lambda+\mathrm{i}\mu))^*) = (\mathrm{Im}(T-(\lambda+\mathrm{i}\mu)))^\perp \neq \{0\}$$

et $\lambda - \mathrm{i}\mu \in \sigma_p(T^*)$. Or, $\sigma_p(T^*) = \sigma_p(T)$ car $T = T^*$.
Mais, on a également $\|T-(\lambda-\mathrm{i}\mu))u\|^2 \geq \mu^2\|u\|^2$ et $\lambda - \mathrm{i}\mu \notin \sigma_p(T)$ si $\mu \neq 0$ (car alors $T-(\lambda-\mathrm{i}\mu)$ est injectif). D'où une contradiction. Donc $T-(\lambda+\mathrm{i}\mu)$ est bijectif dès que $\mu \neq 0$ et si $\mu \neq 0$, $\lambda + \mathrm{i}\mu \in \rho(T)$ ce qui prouve le premier point.
Pour démontrer le second point, on se donne λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de T. Soient u_1 un vecteur propre associé à λ_1 et u_2 un vecteur propre associé à λ_2. On a

$$\lambda_1(u_1|u_2) = (\lambda_1 u_1|u_2) = (Tu_1|u_2) = (u_1|Tu_2) = (u_1|\lambda_2 u_2) = \overline{\lambda}_2(u_1|u_2) = \lambda_2(u_1|u_2),$$

et, comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on doit avoir $(u_1|u_2) = 0$. □

3.4 Le laplacien discret en dimension un

Nous introduisons le laplacien discret en dimension un. C'est l'opérateur Δ défini sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (\Delta u)_n = -(u_{n-1} + u_{n+1}).$$

L'opérateur Δ est l'analogue discret de la dérivée seconde.

Tout d'abord, Δ est borné. En effet, si $\|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq 1$, alors $\|\Delta u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq 2\|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq 2$, donc $\|\Delta\| \leq 2$. Puis, Δ est auto-adjoint. Soient $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Alors

$$\begin{aligned}(\Delta u|v) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\Delta u)_n \overline{v_n} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{n-1}\overline{v_n} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{n+1}\overline{v_n} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \overline{v_{n+1}} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \overline{v_{n-1}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \overline{(-v_{n-1} - v_{n+1})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \overline{(\Delta v)_n} = (u|\Delta v).\end{aligned}$$

Donc, Δ *est un opérateur borné auto-adjoint*.

Nous allons maintenant calculer le spectre de Δ. Pour cela, on introduit l'opérateur de Fourier $\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2([0, 2\pi])$ défini pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et tout $x \in [0, 2\pi]$ par $(\mathcal{F}u)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}$. On pose alors $S = \mathcal{F} \circ \Delta \circ \mathcal{F}^{-1}$. Calculons S. Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$. Supposons que, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\mathcal{F}^{-1}f)_n = \hat{f}(n)$. Alors, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}(Sf)(x) &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\hat{f}(n-1) + \hat{f}(n+1))e^{inx} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{\mathrm{i}(n+1)x} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{\mathrm{i}(n-1)x} \\ &= -(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx} = (-2\cos(x))f(x).\end{aligned}$$

Donc, si on pose pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\varphi(x) = -2\cos(x)$, $S = M_\varphi$ où M_φ est l'opérateur de multiplication par φ. Or, comme $\mathcal{F}$ est une transformation unitaire, on a $\sigma(\Delta) = \sigma(M_\varphi)$ et $\sigma_p(\Delta) = \sigma_p(M_\varphi)$. Alors, $\sigma(M_\varphi) = \varphi([0, 2\pi]) = [-2, 2]$. Donc

$$\sigma(\Delta) = [-2, 2].$$

De plus, comme φ n'est constante sur aucun sous-intervalle de $[0, 2\pi]$, M_φ n'admet pas de valeur propre. En effet, si $u \in L^2([0, 2\pi])$, l'équation $\varphi(x)u(x) = \lambda u(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$ impose $u = 0$. Donc

$$\sigma_p(\Delta) = \emptyset.$$

Remarque 3.4.1. *L'utilisation faite dans cet exemple de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est très courante pour les calculs de spectres d'opérateurs, surtout pour les opérateurs différentiels. Cela tient au fait que, $\mathcal{F}$ étant unitaire, la conjugaison par $\mathcal{F}$ laisse invariants le spectre et le spectre ponctuel. Or, $\mathcal{F}$ a la particularité de transformer une dérivation (ici discrète) en une multiplication. Donc, conjuguer l'opérateur étudié par $\mathcal{F}$ permet de ramener le calcul de son spectre au calcul du spectre d'un opérateur de multiplication.*

Chapitre 4

Opérateurs compacts

L'objectif de ce chapitre est de construire un cadre dans lequel on puisse retrouver nombre des propriétés des applications linéaires en dimension finie. Pour cela, nous introduisons les opérateurs compacts qui forment une famille d'opérateurs dont les propriétés seront très proches de celles des applications linéaires en dimension finie. En particulier, la résolution des équations linéaires en dimension infinie qui sont représentées par un opérateur compact sera analogue à celle des équations linéaires en dimension finie. C'est l'objet de l'alternative de Fredholm pour les opérateurs compacts que nous allons démontrer dans ce chapitre.

4.1 Opérateurs compacts

Dans cette section, nous allons revenir au début au cadre plus général des opérateurs entre espaces de Banach. Nous nous restreindrons ensuite au cas des opérateurs entre espaces de Hilbert.

Définition 4.1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur. On note B_E la boule unité de E. On dit que T est compact si $\overline{T(B_E)}$ est une partie compacte de F.*

Notation. On note $\mathcal{B}_\infty(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

On remarque que $\mathcal{B}_\infty(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$. En effet, si $T \in \mathcal{B}_\infty(E,F)$ puisque $T(B_E)$ est relativement compacte (c'est-à-dire d'adhérence compacte), c'est une partie bornée de F. Donc T est un opérateur borné.

Nous rappelons que, par le théorème de Riesz, un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte. La propriété topologique de compacité est donc directement liée à la propriété algébrique de dimension finie. Cela explique pourquoi le fait de supposer que l'image par T de la boule unité de l'espace de départ soit d'adhérence compacte va donner à T des propriétés proches d'une application linéaire en dimension finie.

Exemple 4.1.2. *Si $E = F$ est de dimension infinie, l'identité $Id : E \to E$ n'est pas compacte. En effet, par le théorème de Riesz, B_E n'est pas compacte. Pourtant Id est continue. Donc, tous les opérateurs bornés ne sont pas compacts.*

Exemple 4.1.3. *Soit X un espace métrique compact et soit $E = F = C(X,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles. Soient μ une mesure positive finie sur $(X,\mathcal{B}(X))$ et $K \in C(X \times X,\mathbb{R})$. On pose, pour $u \in E$,*

$$Tu(x) = \int_X K(x,y)u(y)\mathrm{d}\mu(y).$$

Un tel opérateur est un exemple d'opérateur à noyau intégral. Démontrons que T ainsi défini est un opérateur compact. Soit $u \in B_E$. Pour $x, x' \in X$,

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tu(x')| &\leq \int_X |(K(x,y) - K(x',y))u(y)|\mathrm{d}\mu(y) \\ &\leq \|u\|_\infty \,\mu(X) \max_{y \in X} |K(x,y) - K(x',y)|. \end{aligned}$$

Or, K est uniformément continue sur le compact $X \times X$ car elle est continue, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, x' \in X$,

$$(d(x,x') \leq \delta) \Rightarrow (\forall u \in B_E,\ |Tu(x) - Tu(x')| \leq \mu(X)\varepsilon).$$

Donc, $T(B_E)$ est une partie équicontinue de $C(X)$. De plus, $\|Tu\|_\infty \leq \|K\|_\infty \mu(X) \|u\|_\infty$, donc $T(B_E)$ est ponctuellement bornée. Par le théorème d'Ascoli, $T(B_E)$ est relativement compacte dans $C(X)$, donc T est compact.

Définition 4.1.4. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dit de rang fini si* $\operatorname{Im} T$ *est de dimension finie.*

Exemple 4.1.5. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang fini est compact. En effet, par continuité de T, $T(B_E)$ est borné dans* $\operatorname{Im} T$. *Donc, $\overline{T(B_E)}$ est fermé borné dans* $\operatorname{Im} T$ *qui est de dimension finie ; c'est donc un compact de F.*

Nous allons voir que ce dernier exemple est essentiel dans le cadre des opérateurs entre espaces de Hilbert. En effet, nous allons montrer que tout opérateur compact entre espaces de Hilbert est limite, pour la topologie de la norme d'opérateur, d'une suite d'opérateurs de rangs finis. Avant de nous limiter aux espaces de Hilbert, nous donnons encore deux propriétés des opérateurs compacts valables pour les opérateurs entre espaces de Banach.

Proposition 4.1.6. *Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F convergeant vers T dans $\mathcal{L}(E,F)$. Alors T est compact. $\mathcal{B}_\infty(E,F)$ est donc fermé dans $\mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration : Tout d'abord, comme dans un espace complet, les compacts sont les fermés précompacts, T est compact si et seulement si $T(B_E)$ est une partie précompacte de F. Soit donc $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|T - T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, par précompacité de $T_n(B_E)$, il existe des vecteurs $v_j \in E$ tels que

$$T_n(B_E) \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(v_j, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Or, si $u \in B_E$, $\|Tu - T_n u\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, il existe j_0 tel que $T_n u \in B(v_{j_0}, \frac{\varepsilon}{2})$, d'où $Tu \in B(v_{j_0}, \varepsilon)$ donc $T(B_E) \subset \cup_{j=1}^{p} B(v_j, \varepsilon)$. Donc $T(B_E)$ est précompact. □

Proposition 4.1.7. *Soient E, F et G trois espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,G)$. Si T ou S est compact, alors ST est compact. En particulier, $\mathcal{B}_\infty(E)$ est un idéal de $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration : Supposons que T est compact. Alors $ST(B_E) = S(T(B_E))$, $T(B_E)$ est relativement compacte et S est continue. Donc $ST(B_E)$ est relativement compacte. Si S est supposé compact, $T(B_E)$ étant bornée, il existe un réel R tel que $T(B_E) \subset RB_F$. Soit encore $ST(B_E) \subset RS(B_F)$. Or $S(B_F)$ est relativement compacte, donc $\overline{ST(B_E)}$ est fermée dans le compact $\overline{S(B_F)}$; c'est donc une partie compacte. □

Nous allons maintenant quitter le cadre général des opérateurs entre espaces de Banach pour nous restreindre au cas des opérateurs entre espaces de Hilbert. Nous allons pouvoir ainsi démontrer que tout opérateur compact d'un espace de Hilbert séparable dans lui-même est limite d'opérateurs de rang fini. Nous commençons par démontrer une propriété utile des opérateurs compacts.

Proposition 4.1.8. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite faiblement convergente dans H, alors $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans H pour la topologie de la norme sur H.*

Démonstration : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite faiblement convergente dans H vers u. Rappelons que cela signifie que, pour tout $w \in H$, $(u_n|w) \to (u|w)$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, la suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Posons $v_n = Tu_n$ et $v = Tu$. Pour tout $w \in H$, $(v_n - v|w) = (u_n - u|T^*w)$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi faiblement dans H vers $v = Tu$. Supposons par l'absurde, que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en norme vers v. Alors, il existe un $\eta > 0$ et une sous-suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|v_{n_k} - v\| \geq \eta$. Or, puisque $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme sur H et que T est compact, on peut extraire de $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ telle que $(Tu_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\tilde{v}$ pour la norme sur H. Mais cette sous-suite $(v_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ converge aussi faiblement vers $\tilde{v}$ et, par unicité de la limite faible, $\tilde{v} = v$. Cela contredit le fait que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\|v_{n_{k_l}} - v\| \geq \eta$. Donc $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme vers v. □

De la proposition 4.1.6, on déduit en particulier que toute limite d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact. Nous démontrons maintenant que, dans les espaces de Hilbert séparables, la réciproque est vraie.

Proposition 4.1.9. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Tout opérateur compact sur H est limite, pour la topologie uniforme des opérateurs, d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Démonstration : Soit $(u_j)_{j\geq 1}$ une base hilbertienne dans H. Soit T un opérateur compact sur H. Posons, pour $n \geq 1$,

$$\lambda_n = \sup\{\|Tv\| \mid \|v\| = 1 \text{ et } v \in \text{vect}(u_1, \dots, u_n)^\perp\}.$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs, elle converge donc vers un réel $\lambda \geq 0$. Montrons que cette limite est nulle. On choisit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{vect}(u_1, \dots, u_n)^\perp$, tels que $\|v_n\| = 1$ et $\|Tv_n\| \geq \frac{\lambda}{2}$. Puisque la famille $(u_j)_{j\geq 1}$ est totale, (v_n) converge faiblement vers 0 dans H. Par la proposition 4.1.8, la suite $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc en norme vers 0. Donc $\lambda = 0$. Or, par le théorème de projection dans les espaces de Hilbert,

$$\lambda_n = \sup_{\|u\|=1} \left\| Tu - \sum_{j=1}^{n} (u|u_j) Tu_j \right\|.$$

Donc, comme $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0,

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} (.|u_j) Tu_j \right\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0.$$ □

Ainsi, un opérateur sur un espace de Hilbert est compact si et seulement s'il est limite d'opérateurs de rang fini. Avant d'exploiter cette caractérisation des opérateurs compacts pour l'étude d'équations linéaires, nous terminons par une propriété parfois utile pour démontrer la compacité d'un opérateur.

Proposition 4.1.10. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors T est compact si et seulement si T^* est compact.*

Démonstration : Supposons T compact. En reprenant les notations de la démonstration de la proposition 4.1.9 et en posant P_n le projecteur sur le sous-espace vect$(u_1, \ldots, u_n)$, on peut écrire que $P_nT = \sum_{j=1}^{n}(.|u_j)Tu_j$. Donc, on a prouvé à la proposition 4.1.9 que $\|P_nT - T\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0$ lorsque n tend vers l'infini. Mais alors, comme $(P_nT - T)^* = T^*(P_n - I)^* = T^*(P_n - I)$, on obtient que

$$\|P_nT - T\|_{\mathcal{L}(H)} = \|(P_nT - T)^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T^*P_n - T^*\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0.$$

Comme T^*P_n est de rang fini, T^* est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini ; il est donc compact. Si on suppose T^* compact, alors $T = (T^*)^*$ est lui aussi compact, d'où l'équivalence.

□

4.2 L'alternative de Fredholm

Nous avons jusque-là présenté plusieurs propriétés des opérateurs compacts sans encore donner de résultat présentant l'intérêt de leur introduction. Nous présentons donc maintenant un résultat essentiel pour la résolution d'équations linéaires en dimension infinie, l'alternative de Fredholm. Celle-ci affirme que si T est un opérateur compact, alors soit $Tu = u$ possède une solution non triviale, soit $(I - T)^{-1}$ existe. Nous retrouvons la même alternative que pour les systèmes linéaires de dimension finie et l'équivalent du résultat sur les endomorphismes en dimension finie qui affirme que leur injectivité implique la bijectivité. Elle permet en pratique de démontrer l'existence de solutions à des équations linéaires de manière fort simplifiée. L'alternative de Fredholm nous dit que si, pour tout $v \in H$, il existe au plus une solution $u \in H$ de l'équation linéaire $Tu + v = u$, alors il en existe exactement une. En effet, s'il existe au plus une solution, $I - T$ est injectif, donc $Tu = u$ ne possède pas de solution non triviale. Donc $(I - T)^{-1}$ existe et, pour tout $v \in H$, l'unique solution de $Tu + v = u$ est donnée par $u = (I - T)^{-1}v$. La compacité de l'opérateur et l'unicité *a priori* de la solution impliquent l'existence de la solution. L'alternative de Fredholm n'est pas vérifiée en général par tous les opérateurs bornés. Par exemple, l'opérateur de multiplication défini sur $L^2([0, 2])$ par $Tu(x) = xu(x)$ pour tout $x \in [0, 2]$ ne la vérifie pas. En effet, $Tu = u$ n'a pas de solution non triviale mais $(I - T)^{-1}$ n'est pas pour autant un opérateur borné sur $L^2([0, 2])$.
Comme l'alternative de Fredholm est vérifiée pour les opérateurs sur un espace de dimension finie, l'idée pour la démontrer dans le cas des opérateurs compacts agissant sur un espace de Hilbert est d'utiliser le fait qu'ils sont limites de suites d'opérateurs de rang fini. On pourra ainsi écrire un tel opérateur compact sous la forme $T = P + R$ où P sera un opérateur de rang fini et R un opérateur de petite norme, une perturbation.

Théorème 4.2.1 (Fredholm analytique)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f : D \to \mathcal{L}(H)$ une fonction analytique telle que, pour tout $z \in D$, $f(z)$ soit un opérateur compact. Alors il ne se produit qu'un et un seul des cas suivants :*

1. *$(I - f(z))^{-1}$ n'existe pour aucun $z \in D$;*
2. *$(I - f(z))^{-1}$ existe pour tout $z \in D \setminus \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble discret de D. Dans ce cas, $(I - f(z))^{-1}$ est méromorphe sur D, analytique dans $D \setminus \mathcal{S}$ et les résidus aux pôles sont des opérateurs de rang fini. Enfin, si $z \in \mathcal{S}$, alors l'équation $f(z)u = u$ possède une solution non triviale dans H.*

Démonstration : Tout d'abord, comme D est connexe et, par prolongement analytique, il suffit de démontrer le théorème au voisinage de tout point de D. Soit $z_0 \in D$. Par continuité de

f en z_0, il existe $r > 0$ tel que, pour $z \in D$ tel que $|z - z_0| < r$, on ait $\|f(z) - f(z_0)\|_{\mathcal{L}(H)} < \frac{1}{2}$. Puisque l'opérateur $f(z_0)$ est compact, il existe P un opérateur de rang fini tel que $\|f(z_0) - P\|_{\mathcal{L}(H)} < \frac{1}{2}$. Alors, pour $z \in D(z_0, r)$, $\|f(z) - P\|_{\mathcal{L}(H)} < 1$. On peut donc utiliser le lemme de la série de Neumann pour démontrer l'existence de $(I - f(z) + P)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ et le fait que $z \mapsto (I - f(z) + P)^{-1}$ est analytique sur $D(z_0, r)$.

Comme P est de rang fini, il existe une famille libre $(u_1, \ldots, u_N)$ de N vecteurs et des vecteurs $v_1, \ldots, v_N$ tels que, pour tout $u \in H$, $Pu = \sum_{i=1}^{N} (u|v_i) u_i$. Pour $z \in D(z_0, r)$, on pose $v_i(z) = ((I - f(z) + P)^{-1})^* v_i$ et on définit l'opérateur $g(z)$ par

$$\forall w \in H,\ g(z)w = P(I - f(z) + P)^{-1} w = \sum_{i=1}^{N} (w|v_i(z)) u_i.$$

On remarque que, pour tout $z \in D(z_0, r)$, $(I - g(z))(I - f(z) + P) = I - f(z)$. Donc, pour $z \in D(z_0, r)$, $I - f(z)$ est inversible dans $\mathcal{L}(H)$ si et seulement si $I - g(z)$ l'est. De même, l'équation $f(z)u = u$ admet une solution non identiquement nulle si et seulement si $g(z)w = w$ en admet une.

Supposons qu'il existe $w \in H$ tel que $g(z)w = w$. On peut décomposer w en $w = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n$, et les coefficients α_n vérifient, par liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_N)$,

$$\forall n \in \{1, \ldots, N\},\ \alpha_n = \sum_{m=1}^{N} (u_m | v_n(z)) \alpha_m. \tag{4.1}$$

Inversement, si pour z fixé le système (4.1) admet une solution $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, alors le vecteur $w = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n$ est une solution de $g(z)w = w$. Ainsi, nous nous sommes ramenés à l'étude d'un système linéaire en dimension finie et l'équation $g(z)w = w$ admet une solution non identiquement nulle si et seulement si le déterminant $d(z) = \det(I - [(u_m|v_n(z))]_{m,n}) = 0$. Comme $(u_m|v_n(z))$ est analytique sur $D(z_0, r)$, $d(z)$ l'est aussi, donc l'ensemble $\mathcal{S}_r = \{z \in D(z_0, r) \mid d(z) = 0\}$ des zéros de $d(z)$ est soit discret dans $D(z_0, r)$ soit égal à $D(z_0, r)$. Dans le second cas, $(I - f(z))^{-1}$ n'existe pour aucun $z \in D(z_0, r)$ et nous sommes dans le cas 1 de l'alternative de Fredholm.

Supposons maintenant que $\mathcal{S}_r \neq D(z_0, r)$, cas qui correspond au cas 2 de l'alternative de Fredholm. Si $z \in \mathcal{S}_r$, l'équation $f(z)u = u$ possède une solution non triviale dans H, ce qui prouve la dernière assertion du théorème.

Supposons enfin que $z \notin \mathcal{S}_r$. Alors $d(z) \neq 0$. En se donnant $u \in H$, on peut résoudre l'équation $(I - g(z))w = u$ en posant $w = u + \sum_{n=1}^{N} \beta_n u_n$ si et seulement si les β_n vérifient le système

$$\forall n \in \{1, \ldots, N\},\ \beta_n = (u|v_n(z)) + \sum_{n=1}^{N} (u_m|v_n(z)) \beta_m. \tag{4.2}$$

Or, comme on a supposé que $d(z) \neq 0$, le système (4.2) admet une unique solution. Donc, $(I - g(z))^{-1}$ existe dans $\mathcal{L}(H)$. De plus, on peut résoudre explicitement le système linéaire (4.2) à l'aide des formules de Cramer, ce qui permet d'exprimer $(I - g(z))^{-1}$, donc $(I - f(z))^{-1}$, comme une fonction méromorphe dont les résidus aux pôles sont des polynômes en P, donc des opérateurs de rang fini. Le cas 2 de l'alternative de Fredholm est donc prouvé. $\square$

Corollaire 4.2.2 (Alternative de Fredholm). *Soient H un espace de Hilbert et T un opérateur compact sur H. Alors soit $(I - T)^{-1}$ existe et est borné, soit $Tu = u$ possède une solution non identiquement nulle.*

Démonstration : On applique le théorème 4.2.1 à la fonction analytique $f(z) = zT$ au point $z = 1$. On sait que pour $z = 0$, $I - f(z) = I$ est inversible donc on est forcément dans le cas 2 de l'alternative de Fredholm analytique. Puis, si $I - T$ n'est pas inversible alors $z = 1 \in \mathcal{S}$ donc $f(1)u = u$ possède une unique solution non identiquement nulle. D'où le résultat. $\square$

4.3 Problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^3$

Nous terminons ce chapitre en donnant un exemple d'équation linéaire que l'on peut traiter à l'aide de l'alternative de Fredholm. Nous traitons du problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^3$.
Soit D un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière ∂D est une surface C^∞ de $\mathbb{R}^3$. Le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace est le suivant : étant donné une fonction continue f sur ∂D, trouver une fonction u de classe C^2 dans D et continue sur $\overline{D}$ qui vérifie

$$\forall x \in D,\ \Delta u(x) = 0 \text{ et } \forall x \in \partial D,\ u(x) = f(x).$$

Pour résoudre ce problème, on introduit le noyau $K(x,y) = (x-y|n_y)/|x-y|^3$ défini sur $D \times \partial D$, où n_y est la normale extérieure à ∂D au point $y \in \partial D$. La fonction $x \mapsto K(x,y)$ est harmonique, $\Delta_x K(x,y) = 0$ pour tout $x \in D$ et pour tout $y \in \partial D$. Cela nous conduit à chercher une solution u sous la forme d'une superposition,

$$u(x) = \int_{\partial D} K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}S(y),$$

où φ est une fonction continue sur ∂D et $\mathrm{d}S$ est la mesure surfacique sur ∂D. En effet, pour $x \in D$, l'intégrale est bien définie et $\Delta u(x) = 0$. Voyons maintenant comment étendre u à ∂D. Soit $\varepsilon > 0$. Si $x_0 \in \partial D$ et que $x \to x_0$, $x \in D$, alors, on peut démontrer que

$$u(x) \to -\varphi(x_0) + \int_{\partial D} K(x_0,y)\varphi(y)\mathrm{d}S(y). \tag{4.3}$$

Puis, si $x \to x_0$, $x \in \overline{D}^c$, on peut aussi démontrer que

$$u(x) \to \varphi(x_0) + \int_{\partial D} K(x_0,y)\varphi(y)\mathrm{d}S(y). \tag{4.4}$$

Donc $\int_{\partial D} K(x_0,y)\varphi(y)\mathrm{d}S(y)$ existe et est une fonction continue de x_0 sur ∂D. En effet, comme ∂D est une surface C^∞, pour tous $x, y \in \partial D$, $(x-y|n_y) = c|x-y|^2 + o(|x-y|^2)$ lorsque $x \to y$. On veut vérifier la condition au bord $u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \partial D$. On doit donc démontrer l'existence d'une fonction φ continue sur ∂D telle que $\forall x \in \partial D$, $f(x) = -\varphi(x) + \int_{\partial D} K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}S(y)$. Pour cela, on introduit l'opérateur $T : C(\partial D) \to C(\partial D)$ défini par

$$\forall \varphi \in C(\partial D),\ \forall x \in \partial D,\ T\varphi = \int_{\partial D} K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}S(y).$$

Alors T est un opérateur compact. En effet, soit pour $\delta > 0$, $K_\delta(x,y) = (x-y|n_y)/(|x-y|^3+\delta)$. Alors, K_δ est continu et, d'après l'exemple 4.1.3, l'opérateur T_δ associé est compact. De plus, nous avons l'estimation

$$|(T_\delta u)(x) - (Tu)(x)| \leq \|u\|_\infty \int_{\partial D} |K_\delta(x,y) - K(x,y)|\mathrm{d}S(y). \tag{4.5}$$

Or, si on fixe $\varepsilon > 0$, on peut séparer l'intégrale en deux membres,

$$\int_{\partial D} |K_\delta(x,y) - K(x,y)|\mathrm{d}S(y) = \int_{|x-y|\geq\varepsilon} |K_\delta(x,y) - K(x,y)|\mathrm{d}S(y) + \int_{|x-y|<\varepsilon} |K_\delta(x,y) - K(x,y)|\mathrm{d}S(y).$$

Dans la première intégrale, $K_\delta(x, y)$ converge uniformément en x vers $K(x, y)$ lorsque δ tend vers 0. L'intégrabilité de K permet de rendre arbitrairement petite la seconde intégrale, uniformément en x, en choisissant ε assez petit. Donc, on vient de démontrer que $T_\delta u$ tend uniformément en x vers Tu lorsque δ tend vers 0. Puis de par (4.5), on obtient que $\|T_\delta - T\|_{\mathcal{L}(C(\partial D))} \to 0$ lorsque δ tend vers 0. L'opérateur T est donc compact comme limite d'opérateurs compacts.

Comme T est compact, on peut lui appliquer l'alternative de Fredholm. Soit il existe $\psi \in C(\partial D)$ non identiquement nulle telle que $T\psi = \psi$, soit, pour tout $f \in C(\partial D)$, l'équation $-f = (I - T)\varphi$ admet une unique solution. Supposons que nous soyons dans le cas de la première alternative. Posons, pour tout $x \in D \cup \partial D$, $u(x) = \int_{\partial D} K(x, y)\psi(y)\mathrm{d}S(y)$. Alors, pour tout $x \in \partial D$, $u(x) = T\psi(x) = \psi(x)$. Ainsi, pour tout $x \in D \cup \partial D$, $u(x) = \int_{\partial D} K(x, y)u(y)\mathrm{d}S(y)$. Mais alors, $u = 0$ dans D par le principe du maximum (rappelons que u est harmonique dans D). De plus, $\frac{\partial u}{\partial n}$ est continue sur ∂D et est donc égale à 0 sur ∂D. Par intégration par parties, cela implique que u est aussi identiquement nulle sur ∂D. Par (4.3) et (4.4), il vient que $2\psi(x) = 0$ pour tout $x \in \partial D$ et ψ est identiquement nulle. Donc la première alternative n'a pas lieu, donc, pour tout $f \in C(\partial D)$, l'équation $-f = (I - T)\varphi$ admet une unique solution, d'où la résolution du problème d'existence et d'unicité pour le problème de Dirichlet de l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 5

Spectre des opérateurs compacts

Les opérateurs compacts possèdent des propriétés analogues aux opérateurs en dimension finie. C'était le cas pour la résolution de systèmes linéaires en étudiant l'alternative de Fredholm. Nous allons maintenant explorer les propriétés spectrales des opérateurs compacts. En particulier, nous allons voir que tant le spectre des opérateurs compacts que les propriétés de diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints sont des « passages à la limite » des résultats correspondant en dimension finie. Nous obtenons aussi une classification des opérateurs compacts auto-adjoints à équivalence unitaire près.

5.1 Spectre des opérateurs compacts

Nous allons commencer en donnant un résultat général de structure du spectre des opérateurs compacts.

Théorème 5.1.1 (Riesz-Schauder). *Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Alors, $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est un ensemble discret de $\mathbb{C}$ formé de valeurs propres de T de multiplicités finies. De plus, si H est de dimension infinie, $0 \in \sigma(T)$.*

Remarquons que, lorsque $0 \in \sigma(T)$, 0 peut ne pas être une valeur propre de T. Par ailleurs, 0 peut être un point d'accumulation de $\sigma(T)$, comme nous allons le voir par la suite.

Démonstration : Posons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = zT$. Alors f est une application holomorphe sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{B}_\infty(H)$. Soit $\mathcal{S} = \{z \neq 0 \mid zTu = u$ admet une solution $u \neq 0\}$. Alors, si $z \in \mathcal{S}$, $\frac{1}{z}$ est valeur propre de T. Puis, comme $z = 0 \notin \mathcal{S}$, par le théorème 4.2.1, $\mathcal{S}$ est un ensemble discret. Si $\frac{1}{z} \notin \mathcal{S}$, alors

$$(T - z)^{-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}T - \mathrm{Id}_E\right)^{-1}$$

existe, toujours par le théorème 4.2.1. Donc, $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\frac{1}{z} \mid z \in \mathcal{S}\}$ et $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est un ensemble discret formé de valeurs propres de T par définition de $\mathcal{S}$.

Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, posons $F = \mathrm{Ker}\,(T - \lambda)$. Alors, si B_F désigne la boule unité de F et B_H celle de H, on a

$$B_F = \frac{1}{\lambda}\lambda B_F = \frac{1}{\lambda}T(B_F) \subset \frac{1}{\lambda}T(B_H).$$

Or, comme T est compact, $T(B_H)$ est relativement compacte et B_F l'est aussi. Donc, par un théorème de Riesz, F est de dimension finie. Donc chaque valeur propre non nulle de T est de multiplicité finie.

Supposons que H est de dimension infinie. Si $0 \notin \sigma(T)$, alors T est bijective et T^{-1} est continue. Donc $B_H = T^{-1}(T(B_H))$ est relativement compacte car $T(B_H)$ l'est par compacité de T. Donc, là encore, par le même théorème de Riesz, H est de dimension finie. Cela contredit notre première hypothèse, donc $0 \in \sigma(T)$. □

La démonstration du théorème de Riesz-Schauder repose sur l'alternative de Fredholm analytique. Nous nous sommes restreints au cas des espaces de Hilbert car nous n'avons pas prouvé l'alternative de Fredholm analytique (voir théorème 4.2.1) en toute généralité, mais seulement pour les espaces de Hilbert. Pourtant, le théorème de Riesz-Schauder est encore valable pour des opérateurs compacts sur un espace de Banach quelconque. L'alternative de Fredholm analytique est encore vraie dans le cadre des espaces de Banach, mais sa démonstration est alors plus difficile.

5.2 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints

Dans cette section, nous présentons la généralisation aux opérateurs compacts auto-adjoints du résultat qui affirme que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable en base orthonormée. Dans toute la suite, H sera un espace de Hilbert complexe.

Lemme 5.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Si T est compact et auto-adjoint, alors $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est une valeur propre de T.*

Démonstration : Si $T = 0$, 0 est valeur propre de T et $\|T\| = 0$. Supposons $T \neq 0$. Alors, par la proposition 2.2.10, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires telle que $|(Tu_n|u_n)| \to \|T\|$ lorsque n tend vers l'infini. Quitte à en extraire une sous-suite (par compacité de l'ensemble $\overline{D(0, \|T\|)}$, puisque $|(Tu_n|u_n)| \leq \|T\|$), on peut supposer que $(Tu_n|u_n) \to \lambda$ lorsque n tend vers l'infini, où $|\lambda| = \|T\|$. Alors,

$$0 \leq \|(T-\lambda)u_n\|_H^2 = \|Tu_n\|_H^2 - 2\lambda(Tu_n|u_n) + \lambda^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda(Tu_n|u_n) \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini. Donc, $\|(T-\lambda)u_n\|_H \to 0$ lorsque n tend vers l'infini. Alors, par compacité de T, il existe $u \in H$ et une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\|Tu_{n_k} - u\|_H \to 0$ lorsque k tend vers l'infini. Or, $u_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)u_{n_k} + \frac{1}{\lambda}Tu_{n_k}$ converge alors vers $\frac{1}{\lambda}u$. Donc $1 = \|\lambda^{-1}u\|_H = |\lambda|^{-1}\|u\|_H$ et $u \neq 0$. On a aussi $Tu_{n_k} \to \frac{1}{\lambda}Tu$ par continuité de T. Donc, par unicité de la limite, $u = \lambda^{-1}Tu$ et $Tu = \lambda u$, $u \neq 0$. Donc $\lambda \in \sigma_p(T)$. □

Proposition 5.2.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint. Alors,*

$$H = \mathrm{Ker}\, T \oplus \widehat{\bigoplus}_{\lambda\in\sigma(T)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}\,(T-\lambda).$$

Démonstration : Rappelons que, pour $\lambda \neq \mu$ dans $\sigma_p(T)$, $\mathrm{Ker}\,(T-\lambda) \perp \mathrm{Ker}\,(T-\mu)$. Posons $F = \widehat{\oplus}_{\lambda\in\sigma(T)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}\,(T-\lambda)$. Alors F est fermé et stable par T. En effet, si $u = \sum_{\lambda\in\sigma(T)\setminus\{0\}} u_\lambda$ avec $\sum \|u_\lambda\|_H^2$ convergente, on a $Tu = \sum_{\lambda\in\sigma(T)\setminus\{0\}} \lambda u_\lambda \in F$. De plus, comme T est auto-adjoint, $F^\perp$ est aussi stable par T (voir proposition 2.2.6).

Soit $T_0 : F^\perp \to F^\perp$ la restriction de T à $F^\perp$. Alors T_0 est auto-adjoint et compact. On a alors $r(T_0) = \|T_0\|$. De plus, si $r(T_0) > 0$, T_0 admet une valeur propre non nulle λ_0 car, par le théorème de Riesz-Schauder, tout élément non nul de $\sigma(T_0)$ est une valeur propre puisque T_0 est compact. Mais alors, comme $\mathrm{Ker}\,(T_0 - \lambda_0) \subset \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_0)$, on aurait $\mathrm{Ker}\,(T-\lambda_0) \cap F^\perp \neq \{0\}$, ce qui est absurde car, pour tout $\lambda \neq 0$, $F^\perp \perp \mathrm{Ker}\,(T-\lambda)$. Donc $r(T_0) = 0$ et $\|T_0\| = 0$ et T_0 est l'opérateur nul.

Donc $F^\perp \subset \mathrm{Ker}\, T$. D'autre part, $\mathrm{Ker}\, T \subset (\mathrm{Ker}\,(T-\lambda))^\perp$ pour tout $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{Ker}\, T \subset F^\perp$. Donc $\mathrm{Ker}\, T = F^\perp$.
Or F est fermé, donc $H = F \oplus F^\perp$ et on a bien

$$H = \mathrm{Ker}\, T \oplus \widehat{\bigoplus}_{\lambda \in \sigma(T)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}\,(T-\lambda).$$

□

Nous allons maintenant pouvoir démontrer le théorème de diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints, que l'on nomme aussi « théorème spectral des opérateurs compacts ».

Théorème 5.2.3 (Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints). *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint. Notons $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ les valeurs propres de T non nulles et P_n la projection de H sur $\mathrm{Ker}\,(T-\lambda_n)$. Alors, pour $n \neq m$, $P_nP_m = P_mP_n = 0$ et P_n est de rang fini. De plus, si T est de rang fini, l'ensemble des valeurs propres de T est fini et si T n'est pas de rang fini, $\lambda_n \to 0$ lorsque n tend vers l'infini. Enfin,*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

où la série converge au sens de la norme d'opérateur (ou est, si T est de rang fini, une somme finie).

Démonstration : D'après le lemme 5.2.1, il existe un nombre réel $\lambda_1 \in \sigma_p(T)$ tel que $|\lambda_1| = \|T\|$. Soient $F_1 = \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_1)$ et P_1 la projection de H sur F_1. On pose $H_2 = F_1^\perp$. Comme T laisse stable F_1 et est auto-adjoint, il laisse aussi stable H_2. Soit $T_2 = T|_{H_2}$ la restriction de T à H_2. Alors T_2 est un opérateur compact auto-adjoint. Soit donc, par le lemme 5.2.1, un nombre réel $\lambda_2 \in \sigma_p(T_2)$ tel que $|\lambda_2| = \|T_2\|$. Soit $F_2 = \mathrm{Ker}\,(T_2-\lambda_2)$. Alors $F_2 = \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_2)$ et, comme $F_2 \subset F_1^\perp$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Soit alors P_2 la projection de H sur F_2 ; posons $H_3 = (F_1 \oplus F_2)^\perp$. Alors, comme $\|T_2\| \leq \|T\|$, on a $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

Par récurrence, on construit une suite de valeurs propres de T telles que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$. Si T est de rang fini, cette construction s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes. Si T n'est pas de rang fini, on construit une suite infinie. De plus, si, pour tout $n \geq 1$, on pose $F_n = \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_n)$, alors $|\lambda_{n+1}| = \|T|_{(F_1\oplus\cdots\oplus F_n)^\perp}\|$. On note aussi, pour tout $n \geq 1$, P_n la projection de H sur F_n. La relation $P_nP_m = P_mP_n = 0$ pour $n \neq m$ vient du fait que les F_n sont deux à deux orthogonaux. Enfin, par le théorème 5.1.1, le spectre de T est au plus dénombrable, et la construction faite ici nous montre que $\{\lambda_1, \dots\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$.

On suppose dans la suite de la démonstration que T n'est pas de rang fini. Prouvons que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ ainsi définie converge vers 0. Tout d'abord, comme $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$, la suite $(|\lambda_n|)_{n\geq 1}$ est convergente, mettons vers α. Puis, pour tout $n \geq 1$, on choisit $u_n \in F_n$, $\|u_n\|_H = 1$. Comme T est compact, il existe $u \in H$ et une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $\|Tu_{n_k} - u\|_H \to 0$ lorsque k tend vers l'infini. Or, pour $n \neq m$, $u_n \perp u_m$ et, pour tout $k \geq 1$, $Tu_{n_k} = \lambda_{n_k} u_{n_k}$. Donc, pour $k, l \geq 1$, on a $\|Tu_{n_k} - Tu_{n_l}\|_H^2 = \lambda_{n_k}^2 + \lambda_{n_l}^2 \geq 2\alpha^2$. Mais, comme $(Tu_{n_k})_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy, on doit avoir $\alpha = 0$.

Soient $k \in \{1, \dots, n\}$ et $u \in F_k$. Alors $(T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j)u = Tu - \lambda_k u = 0$. Donc, $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n \subset \mathrm{Ker}\,(T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j)$. Si maintenant $u \in (F_1 \oplus \cdots \oplus F_n)^\perp$, alors $P_j u = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $(T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j)u = Tu$. Comme de plus T laisse stable $(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n)^\perp$, on obtient

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j \right\| = \left\| T|_{(F_1\oplus\cdots\oplus F_n)^\perp} \right\| = |\lambda_{n+1}| \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini. Donc, la série $\sum \lambda_n P_n$ converge en norme d'opérateur vers T. □

De ce théorème, on peut déduire le corollaire suivant qui donne l'existence d'une base hilbertienne de diagonalisation pour T compact auto-adjoint.

Corollaire 5.2.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact et auto-adjoint. Il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel λ_n tel que $T\phi_n = \lambda_n\phi_n$ et $\lambda_n \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.*

Démonstration : Par la proposition 5.2.2, on peut construire une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H en recollant les bases des $\mathrm{Ker}\,(T-\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma(T)$. Alors, quitte à renuméroter les valeurs propres de T, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T\phi_n = \lambda_n\phi_n$ où les λ_n sont donnés par le théorème 5.2.3. Alors, toujours par le théorème 5.2.3, $\lambda_n \to 0$ lorsque n tend vers l'infini. □

5.3 Réduction des opérateurs compacts auto-adjoints

Le théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints affirme que tout opérateur compact auto-adjoint est diagonalisable en base hilbertienne. Ainsi, en un sens que l'on va maintenant définir, tout opérateur compact auto-adjoint est *unitairement équivalent* à une matrice diagonale infinie. En dimension finie, deux matrices diagonalisables sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Ce résultat va se généraliser pour les opérateurs compacts auto-adjoints.

Définition 5.3.1. *Soient H et K deux espaces de Hilbert. Soient $S \in \mathcal{L}(H)$ et $T \in \mathcal{L}(K)$. S et T sont dits unitairement équivalents s'il existe un isomorphisme d'espace de Hilbert $U : H \to K$ tel que $USU^{-1} = T$.*

Définition 5.3.2. *Soit $T \in \mathcal{B}_\infty(H)$. La fonction multiplicité de T est la fonction $m_T : \mathbb{C} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie par $m_T(\lambda) = \dim \mathrm{Ker}\,(T-\lambda)$.*

Alors, $m_T(\lambda) > 0$ si et seulement si λ est une valeur propre de T. De plus, si $\lambda \neq 0$, par le théorème de Riesz-Schauder, $m_T(\lambda) < +\infty$.

Proposition 5.3.3. *Si T et S sont deux opérateurs compacts unitairement équivalents, soit $U : H \to K$ un isomorphisme tel que $USU^{-1} = T$. Alors, $\mathrm{Ker}\,(T-\lambda) = U\mathrm{Ker}\,(S-\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. En particulier $m_T = m_S$.*

Démonstration : En effet, si $v \neq 0$ est tel que $Sv = \lambda v$, alors $TUv = USv = \lambda Uv$, donc $Uv \in \mathrm{Ker}\,(T-\lambda)$. Donc $U\mathrm{Ker}\,(S-\lambda) \subset \mathrm{Ker}\,(T-\lambda)$. Réciproquement, si $w \in \mathrm{Ker}\,(T-\lambda)$ et si $v = U^{-1}w$, alors $Sv = SU^{-1}w = U^{-1}Tw = \lambda v$. Donc $\mathrm{Ker}\,(T-\lambda) \subset U\mathrm{Ker}\,(S-\lambda)$. Comme U est en particulier un isomorphisme d'espaces vectoriels, on obtient $m_T = m_S$. □

On déduit de cette proposition que l'égalité des fonctions de multiplicité est une condition nécessaire pour que deux opérateurs compacts soient unitairement équivalents. Nous allons maintenant démontrer que, pour les opérateurs compacts auto-adjoints, elle est suffisante.

Théorème 5.3.4. *Deux opérateurs compacts auto-adjoints sont unitairement équivalents si et seulement s'ils ont la même fonction de multiplicité.*

Démonstration : Soient $S \in \mathcal{L}(H)$ et $T \in \mathcal{L}(K)$ deux opérateurs compacts et auto-adjoints. Si S et T sont unitairement équivalents, nous venons de démontrer à la proposition 5.3.3 que $m_T = m_S$. Supposons maintenant que $m_T = m_S$ et construisons un isomorphisme $U : H \to K$ tel que $UTU^{-1} = S$.

Par le théorème spectral pour les opérateurs compacts, on peut écrire $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ et $S = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n Q_n$ avec pour $m \neq n$, $\lambda_n \neq \lambda_m$ et $\mu_n \neq \mu_m$ et les projecteurs P_n et Q_n sont de rang fini. Soit P_0 le projecteur de H sur $\operatorname{Ker} T$ et soit Q_0 le projecteur de K sur $\operatorname{Ker} S$. Posons aussi $\lambda_0 = \mu_0 = 0$. Comme $m_T = m_S$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_S(\lambda_n) = m_T(\lambda_n) > 0$. Donc les λ_n sont aussi valeurs propres de S. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique μ_j tel que $\mu_j = \lambda_n$. On définit $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\mu_{\pi(n)} = \lambda_n$ et on pose $\pi(0) = 0$. Comme de plus $m_T(\mu_n) = m_S(\mu_n) > 0$, tous les μ_n sont aussi valeurs propres de T et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $j \in \mathbb{N}$, $\pi(j) = n$. Ainsi, π est une bijection.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, dim Im $P_n = m_T(\lambda_n) = m_S(\mu_{\pi(n)}) =$ dim Im $Q_{\pi(n)}$ (égalité de dimensions hilbertiennes), il existe un isomorphisme d'espaces de Hilbert $U_n : P_n H \to Q_{\pi(n)} K$. On définit $U : H \to K$ en posant $U = U_n$ sur $P_n H$ et en prolongeant par linéarité. Alors, U est bien un isomorphisme car $\widehat{\bigoplus}_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}\ P_n = H$. De plus, si $v \in P_n H$, alors $UTv = \lambda_n Uv = \mu_{\pi(n)} Uv = SUv$. Donc, on a bien $UTU^{-1} = S$. $\square$

En général, la fonction de multiplicité ne suffit pas à caractériser l'équivalence unitaire de deux opérateurs compacts quelconques. Par exemple, si V est l'opérateur de Volterra, $m_V = 0$ et pourtant V et l'opérateur nul ne sont pas unitairement équivalents. Il n'y a pas de conditions nécessaires et suffisantes connues pour que deux opérateurs compacts soient unitairement équivalents. En fait, même en dimension finie, il n'existe pas de conditions nécessaires et suffisantes connues pour que deux opérateurs quelconques soient unitairement équivalents.

Chapitre 6

Théorème spectral

Nous allons généraliser au cadre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert le résultat classique qui affirme que toute matrice symétrique réelle se diagonalise en base orthonormée. Une bonne façon d'énoncer ce théorème sur les matrices est d'écrire que pour toute matrice symétrique réelle $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et des projecteurs orthogonaux $P_1, \ldots, P_n$ tels que :

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n.$$

C'est cette formulation que nous allons généraliser à la dimension infinie, en transformant la somme en une intégrale contre des mesures à valeurs projecteurs.

6.1 Familles spectrales

Définition 6.1.1. *Une famille spectrale (ou résolution de l'identité) sur $\mathcal{H}$ est une application $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que :*

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est une projection orthogonale,* i.e. $E(t)^2 = E(t)$ *et* $E(t)^* = E(t)$.
2. *Monotonie : $\forall s \leq t$, $E(s) \leq E(t)$,* i.e. $\forall u \in \mathcal{H}, (E(s)u|u) \leq (E(t)u|u)$.
3. *Continuité forte à droite : $\forall u \in \mathcal{H},\ E(t+\varepsilon)u \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} E(t)u$.*
4. *Normalisation à l'infini : $\forall u \in \mathcal{H},\ E(t)u \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$ et $E(t)u \xrightarrow[t \to +\infty]{} u$.*

En particulier, les points 1 et 2 impliquent que $E(t)E(s) = E(s)E(t)$ pour tous s, t et si $s \leq t$, $E(s)E(t) = E(s)$.

On a aussi : $\forall u \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathbb{R},\ (E(t)u|u) = ||E(t)u||^2 \geq 0$ (ou avec 2 et en faisant tendre s vers $-\infty$ à t fixé).

Remarque 6.1.2. *La notion de famille spectrale est un analogue de la fonction de répartition d'une variable aléatoire en probabilités.*

Exemple 6.1.3. *Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ mesurable et soit $g : M \to \mathbb{R}$ mesurable. On pose $M(t) = \{x \in M \mid g(x) \leq t\}$. Alors $M(t)$ croît vers M au sens de l'inclusion. On pose alors pour $u \in L^2(M)$ et $t \in \mathbb{R}$, $E(t)u = \chi_{M(t)}u$. Alors, $E : t \mapsto E(t)$ est une famille spectrale.*

Exemple 6.1.4. *Si T est un opérateur auto-adjoint, de spectre discret et tel que pour tout $u \in \mathcal{H}$, $(Tu|u) \geq C||u||^2$, alors il existe une suite λ_i de réels qui croît vers l'infini et une base hilbertienne $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telles que*

$$\forall u \in \mathcal{H},\ Tu = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i (u|u_i) u_i.$$

Cela rappelle le théorème spectral pour les opérateurs compacts auto-adjoints. On pose alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ le projecteur orthogonal sur $Vect\{u_0, \dots u_j | \lambda_j \leq t\}$. Alors $t \mapsto E(t)$ est une famille spectrale.

6.2 Théorème spectral

Soient $u, v \in \mathcal{H}$. Par l'identité de polarisation, la fonction $F_{u,v}(\lambda) = (E(\lambda)u|v)$ est alors une combinaison linéaire complexe de quatre fonctions croissantes continues à droite en tout point :

$$F_{u,v}(\lambda) = \frac{1}{4}\left(\|E(\lambda)(u+v)\|^2 - \|E(\lambda)(u-v)\|^2 + \mathrm{i}\,\|E(\lambda)(u+\mathrm{i}v)\|^2 - \mathrm{i}\,\|E(\lambda)(u-\mathrm{i}v)\|^2\right),$$

et l'on note cette expression $F_{u,v}(\lambda) = \alpha_1 F_1(\lambda) + \dots + \alpha_4 F_4(\lambda)$. D'après la théorie de l'intégration de Stieljes, il existe donc quatre mesures de Borel $\mu_1, \dots, \mu_4$ correspondant aux F_i telles que l'on puisse définir, pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu_1 + \dots + \mu_4)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) \mathrm{d}F_{u,v}(\lambda) = \alpha_1 \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) \mathrm{d}\mu_1 + \dots + \alpha_4 \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) \mathrm{d}\mu_4.$$

Les mesures μ_i dépendent de u et v et, par la propriété de normalisation des familles spectrales, chaque μ_i est une mesure finie. En effet, on a $\mu_1(\mathbb{R}) \leq \|u+v\|^2, \dots, \mu_4(\mathbb{R}) \leq \|u - \mathrm{i}v\|^2$.

Exemple 6.2.1. *On reprend le second exemple de la section précedente. Si $u \in \mathcal{H}$ alors $F_{u,u}(\lambda) = (E(\lambda)u|u)$. Si $u = u_0$, alors pour $\lambda < \lambda_0$, $F_{u_0,u_0}(\lambda) = 0$ et pour $\lambda \geq \lambda_0$, $F_{u_0,u_0}(\lambda) = ||u_0||^2 = 1$. Donc $\mathrm{d}F_{u_0,u_0} = \delta_{\lambda_0}$. Si $u = au_0 + bu_1$, alors $\mathrm{d}F_{u,u} = |a|^2\delta_{\lambda_0} + |b|^2\delta_{\lambda_1}$. Plus généralement, si $u = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i u_i$ avec $\sum |a_i|^2 < +\infty$, alors $\mathrm{d}F_{u,u} = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|^2 \delta_{\lambda_i}$.*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints.

Théorème 6.2.2 (Théorème spectral des opérateurs auto-adjoints.)**.** *Soit T un opérateur auto-adjoint. Il existe une unique famille spectrale $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que*

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$$

au sens où, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$,

$$(Tu|v) = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}F_{u,v}(\lambda).$$

Démonstration : Nous donnons juste les grandes étapes de la construction.

On commence par définir pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, et $u \in \mathcal{H}$, $F(z) = (R_z(T)u|u)$. Alors F est holomorphe sur le demi-plan complexe supérieur et on vérifie que $\operatorname{Im} F(z) > 0$. C'est donc une fonction de Herglotz qui vérifie par ailleurs l'inégalité

$$|F(z)| \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} z|}.$$

On peut donc lui associer une mesure de Borel positive de masse finie, de fonction de répartition w_u telle que

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-\lambda} dw_u(\lambda).$$

Par polarisation on obtient alors une mesure de Borel complexe $\mathrm{d}w_{u,v}$ qui représente de même $(R_z(T)u|v)$ pour tous $u, v \in \mathcal{H}$. De plus, par des résultats d'analyse harmonique,

$$w_{u,v}(\lambda) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} ((R_{s-i\varepsilon}(T) - R_{s+i\varepsilon})u, v) \mathrm{d}s.$$

Or, $(u,v) \mapsto w_{u,v}(\lambda)$ est une forme sesquilinéaire continue donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique opérateur $E(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que

$$w_{u,v}(\lambda) = (E(\lambda)u|v).$$

On montre alors que $\lambda \mapsto E(\lambda)$ est une famille spectrale qui vérifie la formule voulue de représentation pour T. □

6.3 Calcul fonctionnel

Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une application borélienne localement bornée sur $\mathbb{R}$ et si T est un opérateur auto-adjoint, on peut définir l'opérateur $\phi(T)$ par :

$$\forall u,v \in \mathcal{H},\ (\phi(T)u|v) = \int_{\sigma(T)} \phi(\lambda)\mathrm{d}F_{u,v}(\lambda),$$

où $F_{u,v}$ provient de la famille spectrale associée à T par le théorème spectral. Cela permet de développer un calcul fonctionnel sur les opérateurs auto-adjoints.
Notons que si ϕ est à valeurs réelles, alors $\phi(T)$ est aussi auto-adjoint. Nous avons alors la propriété suivante.

Proposition 6.3.1. *Soient f et g deux fonctions boréliennes bornées et T un opérateur auto-adjoint. Alors pour tous $u,v \in \mathcal{H}$,*

$$(f(T)u|g(T)v) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\mathrm{d}F_{u,v}(\lambda),$$

où $F_{u,v}(\lambda) = (E(\lambda)u|v)$ avec E la famille spectrale associée à T.

Démonstration : Cela se démontre en prenant pour f et g des fonctions indicatrices de boréliens, puis des combinaisons linéaires de telles fonctions (fonctions étagées) puis par passage à la limite. □

Une première application du calcul fonctionnel est la formule suivante pour la résolvante d'un opérateur auto-adjoint.

Proposition 6.3.2. *Soit T un opérateur auto-adjoint. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \sigma(T)$. Alors*

$$R_z(T) = (z-T)^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-\lambda}\mathrm{d}E(\lambda)$$

où E est la famille spectrale associée à T. De plus,

$$||(z-T)^{-1}|| \leq \frac{1}{\mathrm{dist}(z,\sigma(T))}.$$

Démonstration : Le premier point est immédiat par définition du calcul fonctionnel. Puis, pour $u \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
||(z-T)^{-1}u||^2 &= ((z-T)^{-1}u|(z-T)^{-1}u) \\
&= \int_{\sigma(T)} (z-\lambda)^{-1}\overline{(z-\lambda)^{-1}}\mathrm{d}(E(\lambda)u|u) \\
&= \int_{\sigma(T)} |(z-\lambda)|^{-2}\mathrm{d}(E(\lambda)u|u) \\
&\leq \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |z-\lambda|^{-2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}(E(\lambda)u|u) = \frac{1}{(\mathrm{dist}(z,\sigma(T)))^2}||u||^2.
\end{aligned}$$

□

Le théorème spectral permet aussi de definir la notion de projecteur spectral sur un borélien B de $\mathbb{R}$ via la formule :

$$E_B = \mathbb{1}_B(T).$$

En particulier, si B est un intervalle et si E est la famille spectrale associée à T, notons

$$E_{(a,b)} = E(b^-) - E(a^+) \quad \text{et} \quad E_{[a,b]} = E(b^+) - E(a^-).$$

Proposition 6.3.3 (Formule de Stone.)**.** *Soit T un opérateur auto-adjoint. Pour tous $a < b$,*

$$s - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_a^b (R_{s-i\varepsilon}(T) - R_{s+i\varepsilon}(T))\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(E_{[a,b]} + E_{(a,b)}\right).$$

Démonstration : Pour une démonstration complète et détaillée, voir [2], Théorème 2.13, page 37.

□

A l'aide du théorème spectral et du calcul fonctionnel qu'il induit, on peut définir pour $t \in \mathbb{R}$ et T un opérateur auto-adjoint, l'opérateur unitaire $U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tT}$. Résumons les propriétés de cet opérateur.

Proposition 6.3.4.

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t)$ est unitaire et si $s, t \in \mathbb{R}$, $U(t+s) = U(t)U(s)$.*
2. *Si $\psi \in \mathcal{H}$ alors $U(t)\psi \xrightarrow[t \to t_0]{} U(t_0)\psi$.*
3. *Si $\psi \in \mathcal{H}$, alors $\frac{U(t)\psi - \psi}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \mathrm{i}T\psi$.*

Démonstration : Voir Theorem VIII.7 dans [6].

□

L'opérateur unitaire $U(t)$ permet de résoudre l'équation de Schrödinger :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \psi & = & \mathrm{i}T\psi \\ \psi|_{t=0} & = & \psi_0 \end{array} \right. \quad \text{avec } \psi_0 \in D(T).$$

En effet on a alors pour tout $t \geq 0$, $\psi(t) = U(t)\psi_0$.