

2025-2026
Distributions
MACS2

TD1 : Conventions:

①

Exercice 1:

Supposons cela par l'absurde. Alors par le TCD:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} m e^{-m|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{m \rightarrow +\infty} m e^{-m|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$$

On peut calculer direct:

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbb{R}} m e^{-m|x|} dx &= \int_{-\infty}^0 m e^{mx} dx + \int_0^{+\infty} m e^{-mx} dx \\ &= \left[e^{mx} \right]_{-\infty}^0 + \left[-e^{-mx} \right]_0^{+\infty} = 1 - 0 + (-0 + 1) = 2. \end{aligned}$$

Exercice 2:

1. Par changement de variable en coordonnées polaires généralisées,

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx = \int_{n=0}^1 \int_{\omega \in S(0,1)} \frac{1}{n^\alpha} n^{d-1} dn d\omega$$

$$= \underbrace{\text{Aire}(S(0,1))}_{\frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}} \int_0^1 n^{-\alpha+d-1} dn$$

$$= \left[\frac{1}{d-\alpha} n^{d-\alpha} \right]_0^1 \quad \text{cv en 0 ssi } d > \alpha$$

2. De même:

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx = \int_1^{+\infty} \int_{\omega \in S(0,1)} \frac{1}{n^\alpha} n^{d-1} dn d\omega$$

$$= \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} \left[\frac{1}{d-\alpha} n^{d-\alpha} \right]_1^{+\infty} \quad \text{cv en } +\infty \text{ ssi } d < \alpha$$

③

Exercice 3:

1. Ok car: $\forall x \in \mathbb{R}, |e^{-itx} e^{-at^2}| = e^{-at^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

2. Cela relève directement du théorème de dérivation/§:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} e^{-itx} e^{-at^2} \right| = |-ite^{-itx} e^{-at^2}| = |t| e^{-at^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

Donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-itx} e^{-at^2} dt$$

on lie $\frac{1}{2a} e^{-at^2} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[i e^{-itx} \frac{1}{2a} e^{-at^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2a} e^{-at^2} (-ix) e^{-itx} dt \\ &= 0 - 0 + \frac{i^2}{2a} x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-itx} dt \\ &= -\frac{x}{2a} F(x). \end{aligned}$$

(4)

3. On résout $y' = -\frac{x}{2a} y$. On a donc:

$$\exists C \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = C e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

En particulier $F(0) = C x e^{-\frac{0}{4a}} = C$

$$\text{On } F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

$u = \sqrt{a}t$
 $du = \sqrt{a} dt$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

Exercice 4:

1. Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$, $\text{supp } f \subset [a, b]$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R}) \neq$
pour $x \in \mathbb{R}$ fixe, $y \mapsto f(x-y)$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc
Tf est bien définie. De plus comme f est C^0 , $x \mapsto f(x-y)$ est

⑤

pour tout y et: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [0, 1], |f(x-y)| \leq M \mathbb{1}_{[a-1, b+1]}(y)$

On $y \mapsto M \mathbb{1}_{[a-1, b+1]}(y) \in L^1(\mathbb{R})$ et cette majoration est uniforme en x . On applique alors la C^0 IS à

$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \mathbb{1}_{[0, 1]}(y) dy$ pour obtenir la C^0 de Tf sur $\mathbb{R}$.

2. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe bien par densité de $C(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x-y) - f(x-y)| dy \leq \|f_n - f\|_1$$

$$\text{et } \sup_{x \in \mathbb{R}} |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{\text{notée}} 0 \text{ par hypothèse.}$$

Donc (Tf_n) cvu vers Tf sur $\mathbb{R}$. Comme par o, chaque Tf_n est C^0 , Tf l'est aussi.

(6)

3. On a: $Tf = f * 1_{[0,1]}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que: $\forall f \in L^1(\mathbb{R}), f * u = f$.

Alors $Tu = u * 1_{[0,1]} = 1_{[0,1]}$. Mais Tu est C^∞ par $\underline{2}$, alors que $1_{[0,1]}$ ne l'est pas.

Exercice 5:

1. (i) $\exists K$ compact de Ω , $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{supp } \varphi_n \subset K$
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v. $\partial^\alpha \varphi$ sur K .

2. Si $\|x\| > 1$, alors: $|\chi_n(x)| \leq e^{-n|x|^1} \|x\|_\infty^{\text{ind de } x} \xrightarrow{\text{not } \infty} 0$

Si $\|x\| \leq 1$ alors: $|\chi_n(x)| \leq 1 \times |\chi(x - m_n)|$.

Soit $R > 0$, $\text{supp } \chi \subset B(0, R)$. Si $\|x - m_n\| > R$, $\chi(x - m_n) = 0$ et cela est vérifié dès que $n \geq \frac{R-1}{\|x\|}$ ind de x . Donc: $\forall n \geq \frac{R-1}{\|x\|}$, $\chi_n(x) = 0$.
 $\forall x \in B(0, 1)$

(7)

D'où la cv uniforme sur $\mathbb{R}^d$ vers 0 de $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pon contre $\text{supp } \chi_n = m + \text{supp } \chi$ et il n'existe pas de compact $K \subset \mathbb{R}^d$ fixe tel que:
 $\forall n \in \mathbb{N}, \text{supp } \chi_n \subset K$.

3. On a: $\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathcal{F}_n * \chi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}_n(x-y) \chi(y) dy$
On $\text{supp } \mathcal{F}_n \subset B(0, \frac{1}{n}) \subset B(0, 1)$ et il existe $R > 0, \text{supp } \chi \subset B(0, R)$.
Donc: $\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathcal{F}_n * \chi(x) = \int_{B(0, R)} \mathcal{F}_n(x-y) \chi(y) dy$
et si $\|x\| > R+1$ alors $\|x-y\| > 1$ pour tout $y \in B(0, R)$
et $\mathcal{F}_n(x-y) = 0$. Donc $\text{supp}(\mathcal{F}_n * \chi) \subset B(0, R+1), \forall n \in \mathbb{N}$.

(8)

De plus, par propriété de régularisation vue dans le cours:
 $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, (\partial^\alpha \phi_m * \chi)_{m \in \mathbb{N}}$ cv vers χ lorsque m tend vers l'infini

D'où le fait que $(\phi_m * \chi)_{m \in \mathbb{N}}$ cv vers χ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On peut raffiner la preuve:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \partial^\alpha (\phi_n * \chi)(x) - \partial^\alpha \chi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x-y) \partial^\alpha \chi(y) dy - \partial^\alpha \chi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} n^d \phi(n(x-y)) \partial^\alpha \chi(y) dy - \partial^\alpha \chi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z) \partial^\alpha \chi(x - \frac{z}{n}) dz - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) \partial^\alpha \chi(x) dy$$

$$\frac{z}{n} = x-y$$

$$z = n(x-y)$$

$$dz = n^d dy$$

⑨

$$= \int_{\mathbb{R}^d} p(z) \left(\partial^\alpha \chi \left(x - \frac{z}{m} \right) - \partial^\alpha \chi(x) \right) dz$$

Or, $\partial^\alpha \chi$ est C^0 à support compact donc uniformément C^0 ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \|x - x'\| < \delta_\varepsilon, |\partial^\alpha \chi(x) - \partial^\alpha \chi(x')| \leq \varepsilon$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $N \geq 1$ tel que $\| \frac{z}{N} \| < \delta_\varepsilon$. Alors :

$$\forall n \geq N, |\partial^\alpha (p_n * \chi)(x) - \partial^\alpha \chi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} p(z) \varepsilon dz = \varepsilon$$

D'où la CUV voulue.

□

⑩ Exercice 6:

1. On a: $\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$

et $\text{suppess } f = \{x \in \Omega \mid \exists V \in \mathcal{V}(x), f = 0 \text{ pp sur } V\}^c$

2. • On a: $\text{supp } 1_A = \bar{A}$

• Si A est de mesure nulle, $\text{suppess } 1_A = \emptyset$ et

$\text{suppess } 1_{\Omega \setminus A} = \Omega$. (fermé relatif dans Ω)
 $\Omega = \Omega \cap \mathbb{R}^d!$

3. Soit $\varphi \in C^0(\Omega)$.

Soit $x \in (\text{supp } f)^c$. Alors: $\exists V \in \mathcal{V}(x), \forall y \in V, f(y) = 0$
et en particulier f est nulle pp sur V . Donc
 $x \in (\text{suppess } f)^c$. Donc $\text{suppess } f \subset \text{supp } f$.

91

Si $x \in (\text{supp} f)^c$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$, $f=0$ pp sur V .
Mais si f est C^0 et nulle pp sur V alors f est nulle sur V .
Donc $x \in (\text{supp} f)^c$ et $\text{supp} f \subset \text{suppess} f$.

4. $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\text{supp} f \cap \text{supp} g = \emptyset$.

- Soit $x \in \Omega$. Si $x \in \text{supp} f$ alors $x \notin \text{supp} g$ et $g(x)=0$.

$$\text{Donc } (fg)(x) = f(x)g(x) = f(x) \times 0 = 0.$$

Si $x \notin \text{supp} f$, $f(x)=0$ et $(fg)(x) = 0 \times g(x) = 0$.

Donc tous les cas: $(fg)(x) = 0$ i.e. $fg=0$.

- Si $f = 1_{\mathbb{Q}}$ et $g = 1_{\mathbb{R}}$ alors $fg = 1_{\mathbb{Q}} \neq 0$ mais
 $\text{suppess} f \cap \text{suppess} g = \emptyset \cap \mathbb{R} = \emptyset$ et les supports essentiels
sont disjoints.