

①

Feuille de TD2 : Distributions - Exemples, ordre et support.Exercice 1 :

a. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$.
L'application $T: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx \right| = \left| \int_a^b \varphi(x^2) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x^2)| dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_{x^2 \in [a, b]} dx$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre exactement 0. Déterminons son support.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^*)$. Alors $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx = 0$ car $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^*$ implique que $\varphi(y) = 0$ pour $y \geq 0$.

Donc $(\text{supp } T)^c \supset \mathbb{R}_+^*$ et $\text{supp } T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta > 0$ et soit $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Soit φ une fonction "pic", $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. En particulier, φ est strictement positive sur $V_{\delta'} =]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$ avec $0 < \delta' < \delta$ et $V_{\delta'} \subset V_\delta$, $x_0 \in V_{\delta'}$. On a de plus :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx = \int_{x^2 \in V_\delta} \varphi(x^2) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi(y) dy \geq \int_{x_0 - \delta'}^{x_0 + \delta'} \varphi(y) dy > 0$$

Donc T est non nulle au voisinage de x_0 . Donc $\mathbb{R}_+^* \subset \text{supp } T$. Comme $\text{supp } T$ est fermé, on a $\mathbb{R}_+ \subset \text{supp } T$. Donc : $\text{supp } T = \mathbb{R}_+$.

② b. L'application $T: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$.
 Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$. Alors:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx \right| &= \left| \underbrace{\left[\varphi(x) e^{x^2} \right]_a^b}_{=0 \text{ car } \varphi(a)=\varphi(b)=0} - \int_a^b \varphi(x) \times 2xe^{x^2} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |\varphi(x)| |2xe^{x^2}| dx \leq \|\varphi\|_\infty (e^{b^2} - e^{a^2}) = C \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre 0. Calculons le support de T . Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\delta > 0$ tel que $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Par ailleurs, $f: x \mapsto 2xe^{x^2}$ a un signe constant sur V_δ , disons strictement positif. Donc:

$$\exists \epsilon < \delta, \quad \langle T, \varphi \rangle \geq \int_{V_\delta} \varphi(x) f(x) dx > 0. \quad (\text{cf a.})$$

Donc $\mathbb{R}^* \subset \text{supp } T$ et comme $\text{supp } T$ est fermé, $\mathbb{R} \subset \text{supp } T$.
 Donc $\text{supp } T = \mathbb{R}$.

(3)

Exercice 2 :

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. L'application $T: \varphi \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$. Alors :

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx \right| = \left| \int_{[a, b] \cap \mathbb{R}_+^*} \varphi'(x) \log x dx \right| \leq \|\varphi'\|_\infty \underbrace{\left| \int_{[a, b] \cap \mathbb{R}_+^*} \log x dx \right|}_{\text{constante car } x \mapsto \log x \text{ est intégrable en } 0}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

2. a. Avec φ_m comme dans l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi_m \rangle| &= \left| \int_{\frac{1}{2m}}^2 \varphi'_m(x) \log x dx \right| = \left| \underbrace{[\varphi_m(x) \log x]_{\frac{1}{2m}}^2}_{=0} - \int_{\frac{1}{2m}}^2 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx \right| \\ &\geq \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{dx}{x} = \log m. \end{aligned}$$

Donc : $\forall m \geq 1, |\langle T, \varphi_m \rangle| \geq \log m. \left(\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty \right)$

- b. Or, $\|\varphi_m\|_\infty = 1$ pour tout $m \geq 1$. Donc, avec $[a, b] = [0, 2]$, il existe $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tel que pour tout $C > 0$ et tout $m \geq 1$, il existe $\varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi_m \subset [0, 2]$ et : $|\langle T, \varphi_m \rangle| \geq C \|\varphi_m\|_\infty = C$. (car $\log m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$).

Donc T n'est pas d'ordre 0, elle est donc d'ordre 1.

3. Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log x dx = 0 \quad \text{car } \varphi \equiv 0 \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Donc $\text{supp } T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Alors :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi'(x) \log x dx = - \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{\varphi(x)}{x} dx < 0. \text{ Donc } \langle T, \varphi \rangle \neq 0.$$

Donc $x_0 \in \text{supp } T$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \text{supp } T$. Comme $\text{supp } T$ est fermé, $\mathbb{R}_+ \subset \text{supp } T$. Donc $\text{supp } T = \mathbb{R}_+$.

4

Exercice 3 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$.

1. On a: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t) dt$. On pose $t = xu$.

Alors: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(xu) du$.

Posons $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu) du$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, comme $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $[0, 1]$ est compact, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ par le théorème de dérivation sous le signe $\int$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + x \psi(x)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{a > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{a > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) dx \\ &= \underbrace{\int_{a > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{a > |x| > \varepsilon} \psi(x) dx \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\substack{\text{can } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \\ a > |x| > 0}} \int_{a > |x| > 0} \psi(x) dx \end{aligned}$$

Donc la limite existe et vaut $\int_{a > |x| > 0} \psi(x) dx$.

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$. Alors: $\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et: $\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \left| \int_{-a}^a \psi(x) dx \right| = \left| \int_{-a}^a \left(\int_0^1 \varphi'(xu) du \right) dx \right|$
 $\leq \|\varphi'\|_\infty \left| \int_{-a}^a \left(\int_0^1 du \right) dx \right| = 2a \|\varphi'\|_\infty$.

Donc $\text{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre au plus 1.

4. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$ assez grand pour que $\varepsilon \geq \frac{1}{2m}$.

$$\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi_m \rangle \geq \int_{\frac{1}{2m}}^2 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2m}}^2 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx \geq \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{dx}{x} = \log m.$$

Alors on fait tendre m vers l'infini: $|\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi_m \rangle| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$, et $\|\varphi_m\|_\infty = 1$ pour tout m .

Donc $\text{vp}(\frac{1}{x})$ n'est pas d'ordre 0. C'est donc une distribution d'ordre 1.

(5)

Exercice 4

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a:

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(x + i\varepsilon)\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx$$

Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$, tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$.

Alors:
$$\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) = \int_{-a}^a \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx$$

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu) du$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

et $\operatorname{supp} \psi \subset [-a, a]$. Alors:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) &= \underbrace{\int_{-a}^a \frac{x\varphi(0)}{x^2 + \varepsilon^2} dx}_{= 0 \text{ par imparité}} + \int_{-a}^a \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathbb{1}_{[-a, a]}(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{On: } \forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathbb{1}_{[-a, a]}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi(x) \mathbb{1}_{[-a, a]}(x)$$

$$\text{et } \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathbb{1}_{[-a, a]}(x) \right| \leq |\psi(x)| \mathbb{1}_{[-a, a]}(x) \in L_{bc}^1(\mathbb{R}).$$

⑥

Donc, par le théorème de convergence dominée, on a:

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \varphi(x) dx = \langle \nu_p(\frac{1}{x}), \varphi \rangle$$

Donc la limite existe et vaut $\langle \nu_p(\frac{1}{x}), \varphi \rangle$.

- Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On a, pour $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$, tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$,

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon \varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-a}^a \frac{\varepsilon \varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx$$

Si on pose $y = \frac{x}{\varepsilon}$, alors $dx = \varepsilon dy$ et:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) &= \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varepsilon \varphi(\varepsilon y)}{(\varepsilon y)^2 + \varepsilon^2} \varepsilon dy = \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} \mathbb{1}_{[-a/\varepsilon, a/\varepsilon]}(y) dy \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \forall \varepsilon > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} \mathbb{1}_{[-a/\varepsilon, a/\varepsilon]}(y) \right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+y^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\text{et } \forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} \mathbb{1}_{[-a/\varepsilon, a/\varepsilon]}(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(0)}{1+y^2}$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)}{1+y^2} dy = \pi \varphi(0) = \pi \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Donc la limite existe et vaut $\pi \langle \delta_0, \varphi \rangle$.

2. On en déduit que l'expression $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx$ est bien définie et vaut:
- $$\langle T, \varphi \rangle = \langle \nu_p(\frac{1}{x}), \varphi \rangle + i\pi \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Soit encore $T = \nu_p(\frac{1}{x}) + i\pi \delta_0$ qui est une distribution d'ordre 1.

7

Exercice 5:

1. Soit $[-a, a]^2 \subset \mathbb{R}^2$ un compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]^2$.

Alors:

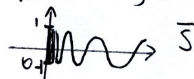
$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_0^{+\infty} \left(\varphi\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) - \varphi(0, \sin t) \right) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} \int_0^1 \partial_x \varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right) \frac{ds}{t^2} dt \right|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \left| \int_0^1 \partial_x \varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right) ds \right| \frac{dt}{t^2} = \left[\varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right) \right]_0^1$$

$$\leq \|\partial_x \varphi\|_\infty \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \|\partial_x \varphi\|_\infty \left[-\frac{1}{t} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{a} \|\partial_x \varphi\|_\infty.$$

Comme T est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, cette estimation de $|\langle T, \varphi \rangle|$ nous dit que T est une distribution d'ordre au plus 1.

2. Montrons que si $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0\}$, alors $\text{supp } T = \bar{S} = S \cup (\{0\} \times [1, 1])$.



• Soit $x_0 \notin \bar{S}$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$, $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subset \bar{S}^c$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset \bar{B}(x_0, \varepsilon)$. Alors par définition de T , $\langle T, \varphi \rangle = 0$ car: $\forall t > 0$, $(\frac{1}{t^2}, \sin t) \notin \bar{B}(x_0, \varepsilon)$ et $(0, \sin t) \notin \bar{B}(x_0, \varepsilon)$.

Donc $x_0 \notin \text{supp } T$ et $\text{supp } T \subset \bar{S}$.

• Réciproquement, soit $x_0 \in S$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \cap (\{0\} \times [1, 1]) = \emptyset$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\text{supp } \varphi \subset B(x_0, \varepsilon)$, $\varphi = 1$ sur $\bar{B}(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ et $\varphi \geq 0$. Alors:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) dt \geq t_2 - t_1 > 0$$

où t_1 est tel que $x_0 = (\frac{1}{t_1^2}, \sin t_1)$ et $t_2 = \inf \{t > t_1, (\frac{1}{t^2}, \sin t) \notin \bar{B}(x_0, \frac{\varepsilon}{2})\}$.

Alors, T est non nulle au voisinage de x_0 et $S \subset \text{supp } T$. Comme $\text{supp } T$ est fermé, $\bar{S} \subset \text{supp } T$ et finalement, $\text{supp } T = \bar{S}$.

8

Exercice 6 :

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $S_{x_0} = T_f$.

Alors: $\forall \varphi \in C^\infty_0(I)$, $\int_I f(x) \varphi(x) dx = \varphi(x_0)$ (*).

En particulier: $\forall \varphi \in C^\infty_0(I)$, $x_0 \notin \text{supp } \varphi$, $\int_I f(x) \varphi(x) dx = 0$.

Soit $J = I \cap \{x < x_0\}$ et supposons $\text{supp } \varphi \subset J$.

Alors $\int_J f \varphi = 0$ et $f = 0$ sur J d'après l'exercice 4 de la Feuille de TD 1.

De même, $f = 0$ sur $J' = I \cap \{x > x_0\}$. Comme $I = J \cup \{x_0\} \cup J'$,

$f = 0$ presque partout sur I ($\text{Leb}(\{x_0\}) = 0$) et :

$\forall \varphi \in C^\infty_0(I)$, $\int_I f(x) \varphi(x) dx = 0$ (**),

Mais, si $\varphi \in C^\infty_0(I)$ est telle que $\varphi(x_0) \neq 0$, alors (**) contredit (*).

Donc, il ne peut exister $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $S_{x_0} = T_f$.

(9)

Exercice 7 - Distribution d'ordre infini.

- $T: \varphi \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$ est une forme linéaire sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, continue.

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet si $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$, on pose

$$p_0 = E(a) + 1, \text{ on a:}$$

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi^{(p)}(p) \right| = \left| \sum_{p=0}^{p_0} \varphi^{(p)}(p) \right| \leq \underbrace{\sum_{p=0}^{p_0} \|\varphi^{(p)}\|_{\infty}}_{\text{somme finie}}.$$

- Supposons par l'absurde que T est d'ordre fini m .

Soit $\varphi_0 \in C_0^{\infty}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, égale à 1 sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, positive. Soit $\lambda > 1$

Posez $\varphi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \varphi_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \varphi(\lambda(x - (m+1)))$.

On considère le compact $K = [m + \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}]$ de $\mathbb{R}$. Comme $\lambda > 1$, φ est à support dans K et est C^{∞} . D'autre part, par la formule de Leibnitz,

$$\text{on a: } \varphi^{(m+1)}(0) = \varphi_0(0) = 1.$$

Puis, comme $\text{supp } \varphi \subset K$, on a: $\langle T, \varphi \rangle = \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1} \varphi^{(m+1)}(0) = \lambda^{m+1}$.

D'autre part, pour $j \leq m$, on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \sup |\psi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \|\psi^{(j)}\|_{\infty}.$$

Or, T est supposée d'ordre m , donc pour $K = [m + \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}]$, il existe $C_K \in \mathbb{R}_+^*$

telles que: $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{0 \leq j \leq m} \|\varphi^{(j)}\|_{\infty}$, soit ici:

$$\lambda^{m+1} \leq C_K \sum_{j=0}^m \lambda^j \|\psi^{(j)}\|_{\infty} \leq C_K \left(\sum_{j=0}^m \|\psi^{(j)}\|_{\infty} \right) \lambda^m$$

Or, cela est impossible si $\lambda \rightarrow +\infty$ car on a: $\lambda \leq C_K \left(\sum_{j=0}^m \|\psi^{(j)}\|_{\infty} \right) \lambda^m$.

Donc T ne peut pas être d'ordre fini.



Exercice 8 - Partie finie de x^α

1. Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$.

Pour $\alpha \in]-2, -1[$ et $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(0) + x^{\alpha+1} \psi(x) dx$$

$$\text{avec } \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu) du \text{ et donc } \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x).$$

$$\text{Alors : } \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(0) dx + \int_{\varepsilon}^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx.$$

$$\text{On : } \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(0) dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0) \right]_{\varepsilon}^a = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0) - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0)$$

$$\text{On pose } A_\varphi = -\frac{\varphi(0)}{\alpha+1} \text{ et } R_\varepsilon = \int_{\varepsilon}^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1}$$

Comme $\alpha \in]-2, -1[$, $x \mapsto x^{\alpha+1}$ est intégrable au voisinage de 0, donc comme ψ est $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et bornée, $x \mapsto x^{\alpha+1} \psi(x)$ est aussi intégrable au voisinage de 0. Donc R_ε possède une limite lorsque ε tend vers 0 :

$$\int_0^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1}.$$

$$\text{On a bien : } \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon \text{ avec } R_\varepsilon \text{ possédant une limite en } 0^+.$$

$$2. \text{ On pose : } \langle p_f(x^\alpha), \varphi \rangle = \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1} + \int_0^a x^{\alpha+1} \left(\int_0^1 \varphi'(xu) du \right) dx.$$

$$\text{Alors : } |\langle p_f(x^\alpha), \varphi \rangle| \leq C_0 \|\varphi\|_\infty + C_1 \|\varphi'\|_\infty$$

et $p_f(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

$$\text{De plus : } \text{supp } p_f(x^\alpha) = \mathbb{R}_+.$$

11

Exercice 9

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Soit $M > 0$ tel que
 $\text{supp } \varphi \subset \{x : |x| \leq M\}$.

La fonction $u\varphi$ est alors intégrable sur l'ensemble $\{x : |x| \geq \varepsilon\}$.

Posons $x = n\omega$ où $n \in [\varepsilon, +\infty[$ et $\omega \in S^{m-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad I_\varepsilon &= \int_{|x| \geq \varepsilon} u(x) \varphi(x) dx = \int_\varepsilon^M \int_{S^{m-1}} u(n\omega) \varphi(n\omega) n^{m-1} dn d\omega \\ &= \int_\varepsilon^M \frac{1}{n} \left(\int_{S^{m-1}} u(\omega) \varphi(n\omega) d\omega \right) dn \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse faite sur u . On applique ensuite la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 à φ :

$$\varphi(n\omega) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^m n \omega_j \int_0^1 \psi_j(t n \omega) dt \quad \text{avec } \psi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

D'où :

$$I_\varepsilon = \underbrace{\varphi(0) \left(\int_\varepsilon^M \frac{dn}{n} \right) \left(\int_{S^{m-1}} u(\omega) d\omega \right)}_{A_\varepsilon} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \int_\varepsilon^M \int_{S^{m-1}} \omega_j u(\omega) \psi_j(t n \omega) dt dn d\omega}_{B_\varepsilon}$$

Or, comme $u \in C^0(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$, il existe pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$ une constante $C_j > 0$ telle que :

$$\sup_{n \in [0, M]} \sup_{\omega \in S^{m-1}} \sup_{t \in [0, 1]} |\omega_j u(\omega) \psi_j(t n \omega)| \leq C_j$$

(12)

Par convergence dominée, B_ε admet une limite lorsque ε tend vers 0. Ainsi, I_ε admet une limite lorsque ε tend vers 0 si et seulement si A_ε en admet une.

Si $\int_{S^{m-1}} u(\omega) d\omega = 0$, alors $A_\varepsilon = 0$ pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ et tout $\varepsilon > 0$.

Si $\int_{S^{m-1}} u(\omega) d\omega \neq 0$, A_ε n'admet pas de limite pour les φ telles que $\varphi(0) \neq 0$ car $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^M \frac{dr}{r} = +\infty$.

D'où l'équivalence voulue.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. On a :

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &= \left| \sum_{j=1}^m \int_0^M \int_{S^{m-1}} \int_0^1 \omega_j u(\omega) \psi_j(t\omega) dt d\omega dr \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \int_0^M \int_{S^{m-1}} \int_0^1 |\omega_j u(\omega) \psi_j(t\omega)| dt d\omega dr \\ &\leq C \sum_{j=1}^m \sup_{|x| \leq M} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|, \quad C \text{ constante indépendante de } \varphi. \end{aligned}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 11

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{-A}^A \frac{\sin(nt)}{\pi t} \varphi(t) dt.$$

On décompose φ en : $\varphi(t) = \varphi(0) + t\psi(t)$ avec $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

$$\text{Alors: } \forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi \rangle = \varphi(0) \int_{-A}^A \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \psi(t) \sin(nt) dt.$$

D'après Riemann-Lebesgue, la seconde intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Puis en faisant le changement de variable $u = nt$ dans la première intégrale, on obtient : $\int_{-nA}^{nA} \frac{\sin u}{\pi u} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$. Donc : $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

14

Exercice 12

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On écrit : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) dt$.
 Alors : $\forall m \in \mathbb{N}, \langle T_m, \varphi \rangle = m(\varphi(\frac{1}{m}) - \varphi(-\frac{1}{m}))$

$$\begin{aligned} &= m(\varphi(\frac{1}{m}) - (\varphi(0) - \frac{1}{m}\psi(-\frac{1}{m}))) \\ &= \psi(\frac{1}{m}) + \psi(-\frac{1}{m}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 2\psi(0) = 2 \int_0^1 \varphi'(0) du \\ &= 2\varphi'(0) \end{aligned}$$

Donc : $\forall m \in \mathbb{N}, \langle T_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 2\varphi'(0) = \langle 2\delta_0', \varphi \rangle$

Donc $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $2\delta_0'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Or, pour tout m , T_m est d'ordre 0 et $2\delta_0'$ est d'ordre 1. En général, il n'y a pas de lien entre l'ordre des éléments de la suite et l'ordre de la limite.

Exercice 10

(i) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \langle A_m, \varphi \rangle &= \int_{-A}^A \sin(mx) \varphi(x) dx \\ &= \underbrace{\left[-\frac{\cos(mx)}{m} \varphi(x) \right]_{-A}^A}_{=0} + \int_{-A}^A \frac{\cos(mx)}{m} \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \forall m \in \mathbb{N}, |\langle A_m, \varphi \rangle| \leq \frac{1}{m} \int_{-A}^A |\varphi'(x)| dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \langle B_m, \varphi \rangle &= \int_{-A}^A m g(mx) \varphi(x) dx = \int_{-mA}^{mA} g(u) \varphi(\frac{u}{m}) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(u) \varphi(\frac{u}{m}) \mathbb{1}_{[-mA, mA]}(u) du. \end{aligned}$$

$$\text{On : } g(u) \varphi(\frac{u}{m}) \mathbb{1}_{[-mA, mA]}(u) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} g(u) \varphi(0), \forall u \in \mathbb{R}.$$

$$\text{et : } |g(u) \varphi(\frac{u}{m}) \mathbb{1}_{[-mA, mA]}(u)| \leq |g(u)| \|\varphi\|_\infty \in L^1(\mathbb{R})$$

15

Donc, par le théorème de convergence dominée :

$$\langle B_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} g(u) du$$

Donc $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $\left(\int_{\mathbb{R}} g(u) du \right) \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors :

$$\langle C_m, \varphi \rangle = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \varphi\left(\frac{p}{m}\right) \xrightarrow{\text{somme de Riemann}} \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx.$$

Donc $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la distribution associée à $\mathbb{1}_{[0,1]}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iv) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle D_m, \varphi \rangle &= \langle e^{inx} \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \varphi \rangle = \langle \varphi\left(\frac{1}{n}\right), e^{inx} \varphi \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{e^{inx} \varphi(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\cos(mx)}{x} \varphi(x) dx + i \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\sin(mx)}{x} \varphi(x) dx \right] \end{aligned}$$

Pour la partie réelle :

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x \psi(x)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \psi \subset [-A, A]$.

$$\text{On a : } \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\cos(mx)}{x} \varphi(x) dx = \varphi(0) \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\cos(mx)}{x} dx + \int_{A > |x| > \varepsilon} \cos(mx) \psi(x) dx$$

$= 0$ par imparité

$$\text{Donc : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\cos(mx)}{x} \varphi(x) dx = \int_{-A}^A \cos(mx) \psi(x) dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Pour la partie imaginaire : } \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\sin(mx)}{x} \varphi(x) dx = \varphi(0) \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\sin(mx)}{x} dx + \int_{A > |x| > \varepsilon} \psi(x) \sin(mx) dx$$

$$\text{Donc : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\sin(mx)}{x} \varphi(x) dx = \varphi(0) \underbrace{\int_{-A}^A \frac{\sin(mx)}{x} dx}_{\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \pi \text{ par exercice 5}} + \underbrace{\int_{-A}^A \sin(mx) \psi(x) dx}_{\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0} \rightarrow \pi \varphi(0) + 0$$

Donc $\langle D_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} i\pi \varphi(0)$ et $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $i\pi \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(16)

Exercice 13.

1. Soit $t \neq 0 [2\pi]$. Alors: $\sum_{k=-N}^N e^{ikt} = e^{-iNt} + \dots + 1 + \dots + e^{iNt}$

$$= e^{-iNt} [1 + \dots + e^{2iNt}]$$

$$= e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= \underbrace{e^{-iNt} e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t} e^{-it/2}}_{=1} \frac{e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t} - e^{-i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$$

Donc: $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}.$

17

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-(2N+1)\pi, (2N+1)\pi]$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle T_N, \varphi \rangle &= \int_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi} F_N(t) \varphi(t) dt = \sum_{m=-M}^M \int_{2m\pi-\pi}^{2m\pi+\pi} F_N(t) \varphi(t) dt \\ &\xrightarrow{u=t-2m\pi} \sum_{m=-M}^M \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \varphi(u-2m\pi) du \\ &\quad \text{par } 2\pi \text{ p\'eriodicit\'e de } F_N \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}u\right)}{\sin \frac{u}{2}} \underbrace{\sum_{m=-M}^M \varphi(u-2m\pi)}_{=\varphi(u)} du \end{aligned}$$

3. On \'ecrit $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. D'o\`u :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \langle T_N, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \psi(t) \sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right) dt$$

Or, $t \mapsto \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \psi(t) \in L^1([-\pi, \pi])$, donc par Riemann-Lebesgue la seconde int\'egrale tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{\phi(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} dt &= \phi(0) \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = \frac{\phi(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikt} dt \\ &= \frac{\phi(0)}{2\pi} \times 2\pi = \phi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \langle T_N, \varphi \rangle &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \phi(0) = \sum_{k=-M}^M \varphi(2k\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2k\pi) \\ &= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Donc $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On en d\'eduit la formule de Poisson :

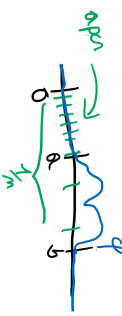
$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{imx} = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}.$$

Exercice 5:

1. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ et soit $q \in C_0^\infty([0, +\infty[)$.

Donc : $\exists 0 < a < b$, $\text{supp } q \subset [a, b]$.

Alors : $\forall N > 1$ $\left\langle \sum_{n=1}^N a_n \delta_{\frac{1}{n}}, q \right\rangle = \sum_{n=1}^N a_n q\left(\frac{1}{n}\right)$



Donc : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0, q\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ car

$\frac{1}{n} \in]0, a[\subset \mathbb{R} \setminus \text{supp } q$.

Alors : $\forall n > N_0, \sum_{n=1}^N a_n q\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N_0} a_n q\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc pour toute fonction test q , la série $\left\langle \sum_{n=1}^\infty a_n \delta_{\frac{1}{n}}, q \right\rangle$

converge vers la somme finie $\sum_{n=1}^{N_0} a_n q\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $\sum a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ cv dans $\mathcal{D}'([0, +\infty[)$.

2. On suppose que

$\sum_{n \geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ cv dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Alors : $\forall q \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \sum_{n \geq 1} a_n q\left(\frac{1}{n}\right)$ cv.

On veut prouver $q=1$ pour avoir que $\sum a_n$ cv. Difficile : la fonction constante égale à 1 n'est pas à support compact. On va prouver une brachature :

comme : $\forall n \geq 1, \frac{1}{n} \in [0, 1]$:



Alors : $\left\langle \sum_{n \geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}, \chi \right\rangle = \sum_{n \geq 1} a_n \chi\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n \geq 1} a_n$

cv par hyp $\Rightarrow$ $\sum_{n \geq 1} a_n$ cv

Donc : $\sum_{n \geq 1} a_n$ cv.

TD3: Exercice 5:

3. b. Soit $q \in C^0(\mathbb{R})$. Soit $N \geq 1$.

$$\sum_{n=1}^N A_n \left(q\left(\frac{1}{n}\right) - q\left(\frac{1}{n+1}\right) \right) = \sum_{n=1}^N A_n q\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^N A_n q\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^N A_n q\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=2}^{N+1} A_{n-1} q\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= A_1 q(1) + \sum_{n=2}^N \underbrace{(A_n - A_{n-1})}_{a_n} q\left(\frac{1}{n}\right) - A_N q\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

On : $N \geq 1$, $A_N = \sum_{n=1}^N a_n$ donc par hypothèse (A_n) cv.

Donc $A_n q\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) q(0)$.

De plus : $\sum_{n=2}^N (A_n - A_{n-1}) q\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^N a_n q\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\text{Et : } N \geq 1, \sum_{n=1}^N a_n q\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^N A_n \left(q\left(\frac{1}{n}\right) - q\left(\frac{1}{n+1}\right) \right)}_{\text{cv par 3.a.}} + \underbrace{A_N q\left(\frac{1}{N+1}\right)}_{\text{cv}}$$

Donc : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q\left(\frac{1}{n}\right)$ cv i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n d_1^q$ cv
d'où ad (R).

3. a. On sait que $(A_n)_{n \geq 0}$ est bornée et cv.

cv puisque par hypothèse $\sum a_n$ cv.

Donc : $\exists M > 0$, $\forall n \geq 0$, $|A_n| \leq M$.

Puis on écrit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $q(x+1) = q(1) + x q'(1) + O(x^2)$

$$\forall n \geq 1, q\left(\frac{1}{n}\right) - q\left(\frac{1}{n+1}\right) = q(1) + \frac{1}{n} q'(1) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(q(1) + \frac{1}{n+1} q'(1) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) q'(1) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n(n+1)} q'(1) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc : $\forall n \geq 1, |A_n (q\left(\frac{1}{n}\right) - q\left(\frac{1}{n+1}\right))| \leq M \times C \times \frac{1}{n^2} / \frac{1}{n^2} d_{\text{une}} \sum$ cv.

Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (q\left(\frac{1}{n}\right) - q\left(\frac{1}{n+1}\right))$ cv.

$$\left(\text{On peut le TAF : } \left| q\left(\frac{1}{n}\right) - q\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| \leq \frac{1}{n(n+1)} \|q'\|_{\infty} \right)$$