École Sup Galilée **2025-2026**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Feuille de TD 2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

Exercice 1

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre et le support :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit φ_n une fonction plateau valant 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2n}, 2]$.
a. Minorer $| < T, \varphi_n > |$.
b. En déduire que T est une distribution d'ordre exactement 1.
3. Déterminer le support de T.

Exercice 3 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
1. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
2. Montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

existe.
3. Montrer que cette expression définit une distribution d'ordre au plus 1, appelée *valeur principale de* $\frac{1}{x}$ et notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
4. En considérant φ_n comme à l'exercice 1, montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre exactement 1.

Exercice 4

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
1. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
2. Montrer que les limites

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right) \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right)$$

existent.
3. En déduire que l'expression

$$< T, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x$$

définit une distribution T dont on identifiera la partie réelle et la partie imaginaire. Donner l'ordre de T.

Exercice 5

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$< T, \varphi >= \int_0^\infty \big(\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

2. Calculer le support de T.

Exercice 6

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ telle que $T_f = \delta_{x_0}$.

Exercice 7 - Distribution d'ordre infini

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression

$$< T, \varphi >= \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$, d'ordre infini.

Exercice 8 - Partie finie de x^α

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
1. Pour $\alpha \in]-2, -1[$, montrer que :

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$

où $A_\varphi \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de ε et où R_ε tend vers une limite lorsque ε tend vers 0^+.
2. On pose : $< \mathrm{pf}(x^\alpha), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} R_\varepsilon$. Montrer que $\mathrm{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 9

Soit u une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ u(tx) = t^{-n}\ u(x).$$

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|x|\geq\varepsilon} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$ existe pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\int_{|\omega|=1} u(\omega)\mathrm{d}\omega = 0. \tag{1}$$

Indication : Passer en coordonnées polaires $(r,\omega) \in]0,+\infty[\times S^{n-1}$ *pour* $|x| \geq \varepsilon$. *Puis utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* 1.

2. On suppose que la condition (1) est satisfaite. On pose alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$< T, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi).$$

Montrer que T définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre au plus 1.

Exercice 10

Calculer les limites, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, des suites de distributions suivantes :

$$A_n = \sin(nx), \quad B_n = ng(nx) \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{inx}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 11

On note T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution associée à la fonction localement intégrable $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution δ_0. *Indication : on pourra se servir de l'identité* $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

Exercice 12

Montrer que la suite de distributions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$\forall n \geq 1,\ T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre m est-il toujours m ?

Exercice 13

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose :

$$F_N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} \end{array} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

On note T_N la distribution associée à F_N.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}.$$

2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ dont le support est inclus dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que :

$$< T_N, \varphi >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}\phi(t)\ \mathrm{d}t,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \sum_{k=-M}^{M} \varphi(t + 2k\pi)$.

3. En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$ où ψ est de classe C^∞, montrer que la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.

Exercice 14

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Une série de distributions $\sum T_n$ est dite convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque la suite des sommes partielles l'est.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n\delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(]0,+\infty[)$.

2. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} a_n\delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors la série numérique $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

3. On suppose désormais que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. On pose pour tout $N \geq 1$, $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ et $A_0 = 0$, de telle manière que $a_n = A_n - A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

a. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}$ alors la série numérique

$$\sum_{n\geq 1} A_n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

converge.

b. En déduire que $\sum_{n\geq 1} a_n\delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.