

Feuille de TD3 : Conctions

①

Exercice 1:

1. Supposons que $fT=0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp } \varphi \subset Z(f)^c$.

Alors $\frac{\varphi}{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ et on a: $\langle T, \varphi \rangle = \langle fT, \frac{\varphi}{f} \rangle = 0$.

Donc T s'annule sur $Z(f)^c$ et donc $\text{supp } T \subset Z(f)$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ d'ordre 0 et supposons que $\text{supp } T \subset Z(f)$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^m$. Comme T est d'ordre 0, il existe $C > 0$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp } \varphi \subset K$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_\infty.$$

On, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $f\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ avec $\text{supp } (f\varphi) \subset K$.

$$\text{Donc: } |\langle fT, \varphi \rangle| = |\langle T, f\varphi \rangle| \leq C \|f\varphi\|_\infty.$$

On, comme $\text{supp } T \subset Z(f)$, $f\varphi$ est nulle sur $\text{supp } T$ et donc

$$|\langle fT, \varphi \rangle| = 0. \text{ Donc } fT = 0.$$

3. Supposons $T = \delta'$ qui n'est pas d'ordre 0. Prenons $f(x) = x$ par exemple. Alors $\text{supp } T \subset Z(f)$ car $\text{supp } T = \{0\}$, mais si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\text{avec } \varphi(0) \neq 0: \quad \langle x\delta'_0, \varphi \rangle = \langle \delta'_0, x\varphi \rangle = (x\varphi)'(0) = \varphi(0) \neq 0.$$

Donc $x\delta'_0$ n'est pas la distribution nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a: $\langle f\delta'_0, \varphi \rangle = \langle \delta'_0, f\varphi \rangle = f'(0)\varphi(0) + f(0)\varphi'(0)$

Alors $\langle f\delta'_0, \varphi \rangle$ est nul pour φ quelconque si et seulement si:

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Alors $f(x) = x^2 g(x)$ avec $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2)

Exercice 2:

- (i) Soit $O_m =]-\frac{3\pi}{4} + m\pi, \frac{3\pi}{4} + m\pi[$. Alors $(O_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ est un recouvrement localement fini de $\mathbb{R}$. Soit $(\chi_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ une partition de l'unité associée à $(O_m)_{m \in \mathbb{Z}}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On décompose φ en :

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi \chi_m := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m.$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, chaque φ_m s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_m(x) = \varphi(m\pi) + (x - m\pi) \eta_m(x)$ avec $\eta_m \in C_0^\infty(O_m)$.

On remarque par ailleurs que $x \mapsto \frac{x - m\pi}{\sin x}$ est C^∞ sur O_m . Enfin, si η_m est une fonction plateau valant 1 sur O_m et à support dans $] -\pi + m\pi, \pi + m\pi[$, alors on écrit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi_m(x) &= \varphi_m(x) \eta_m(x) = \varphi(m\pi) \eta_m(x) + \sin x \cdot \underbrace{\frac{x - m\pi}{\sin x} \eta_m(x) \eta_m(x)}_{= 0_m \in C_0^\infty(\mathbb{R})} \\ &= 0_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \langle T, \varphi \rangle &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\langle T, \eta_m \rangle \varphi(m\pi) + \underbrace{\langle (\sin x) T, 0_m \rangle}_0 \right] \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle T, \eta_m \rangle \varphi(m\pi) \end{aligned}$$

$$\text{Si on pose } c_m = \langle T, \eta_m \rangle, \text{ on a bien : } T = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \delta_{m\pi}.$$

- (ii) Réciproquement, si $T = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \delta_{m\pi}$, comme $\sin(m\pi) = 0$, on a bien : $(\sin x) T = 0$.

(3)

Exercice 3:

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Alors:

$$\langle \varphi(\frac{1}{x})', \varphi \rangle = - \langle \varphi(\frac{1}{x}), \varphi' \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{On: } - \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx &= \left[\frac{\varphi(x)}{x} \right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \\ &= - \frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{On, } \varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \psi(\varepsilon) \text{ avec } \psi(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon \tilde{\psi}(\varepsilon) \text{ avec } \tilde{\psi}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Donc: } - \frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = -2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \underbrace{[\psi(\varepsilon) + \tilde{\psi}(-\varepsilon)]}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0}$$

$$\text{D'où: } \langle \varphi(\frac{1}{x})', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right] := \mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(4)

Exercice 4:

1. On a: $(xT)' = xT' + T$.

2. Par 1., l'équation $xT' + T = 0$ devient $(xT)' = 0$.

Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que $xT = C_1$. Or, $C_1 \nu_p(1/x)$ est solution de cette équation. Donc: $xT = C_1 \Leftrightarrow x(T - C_1 \nu_p(1/x)) = 0$.

Donc il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que:

$$T - C_1 \nu_p(1/x) = C_2 \delta_0$$

soit encore: $T = C_1 \nu_p(1/x) + C_2 \delta_0$.

(5)

Exercice 5.

1. Soit $x_0 \in I$ et $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ une primitive de f . Alors, F est C^∞ sur I . De plus, l'équation différentielle $u' + fu = g$ est équivalente à $\frac{d}{dx}(e^F u) = e^F g$ qui a pour solution C^∞ ,
 $u_0(x) = e^{-F(x)} \left(\int_{x_0}^x e^{F(t)} g(t) dt + C \right)$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Posons $T = u_0 + e^{-F} S$. Alors, on a:

$$\begin{aligned} g &= T' + fT = u_0' + fu_0 + e^{-F}(S' - fS) + e^{-F}fS \\ &= g + e^{-F} S' \end{aligned}$$

D'où, $e^{-F} S' = 0$ et $S' = 0$. Alors S est une constante et $T = u_0 + Ce^{-F}$. Donc T est donnée par une fonction C^∞ qui vérifie l'équation au sens usuel.

Exercice 6

1. f est constante par morceaux donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. On a formule des sauts:

$$\begin{aligned} (T_f)' &= 5 - (-2) \delta_{-2} + (1-5) \delta_0 \\ &= 7\delta_{-2} - 4\delta_0 \end{aligned}$$

(6)

Exercice 7.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $R > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-R, R]$.

On a :

$$\begin{aligned}
 \langle PT, \varphi \rangle &= \langle T'', \varphi \rangle + a \langle T', \varphi \rangle + b \langle T, \varphi \rangle \\
 &= \langle T, \varphi'' \rangle - a \langle T, \varphi' \rangle + b \langle T, \varphi \rangle \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi''(x) dx + a \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi'(x) dx - b \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi(x) dx \\
 &= - \int_{-R}^R h(x) \varphi''(x) dx + a \int_{-R}^R h(x) \varphi'(x) dx - b \int_{-R}^R h(x) \varphi(x) dx \\
 &= - \int_{-R}^0 f(x) \varphi''(x) dx - \int_0^R g(x) \varphi''(x) dx + a \left(\int_{-R}^0 f(x) \varphi'(x) dx + \int_0^R g(x) \varphi'(x) dx \right) \\
 &\quad - b \left(\int_{-R}^0 f(x) \varphi(x) dx + \int_0^R g(x) \varphi(x) dx \right)
 \end{aligned}$$

Puis, on intègre par parties pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 \langle PT, \varphi \rangle &= - \left([f(x) \varphi'(x)]_{-R}^0 - \int_{-R}^0 f'(x) \varphi'(x) dx \right) - \left([g(x) \varphi'(x)]_0^R - \int_0^R g'(x) \varphi'(x) dx \right) \\
 &\quad + a \left([f(x) \varphi(x)]_{-R}^0 - \int_{-R}^0 f'(x) \varphi(x) dx + [g(x) \varphi(x)]_0^R - \int_0^R g'(x) \varphi(x) dx \right) \\
 &\quad - b \left(\int_{-R}^0 f(x) \varphi(x) dx + \int_0^R g(x) \varphi(x) dx \right)
 \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
&= - \left(\cancel{f(0)} \cancel{\varphi'(0)} - \cancel{f(-R)} \times 0 - \left([f'(x) \varphi(x)]_{-R}^0 - \int_{-R}^0 f''(x) \varphi(x) dx \right) \right) \\
&\quad - \left(\cancel{g(R)} \times 0 - \cancel{g(0)} \varphi'(0) - \left([g'(x) \varphi(x)]_0^R - \int_0^R g''(x) \varphi(x) dx \right) \right) \\
&+ a \left(\cancel{f(0)} \varphi(0) - \cancel{f(0)} \times 0 - \int_{-R}^0 f'(x) \varphi(x) dx + \cancel{g(R)} \times 0 - \cancel{g(0)} \varphi(0) - \int_0^R g'(x) \varphi(x) dx \right) \\
&- b \left(\int_{-R}^0 f(x) \varphi(x) dx + \int_0^R g(x) \varphi(x) dx \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\cancel{f(0)} \cancel{\varphi'(0)} + \cancel{f'(0)} \varphi(0) + \cancel{g(0)} \cancel{\varphi'(0)} - \cancel{g'(0)} \varphi(0) - a \cancel{g(0)} \varphi(0) + a \cancel{f(0)} \varphi(0) \\
&\quad - \int_{-R}^0 f''(x) \varphi(x) dx - a \int_{-R}^0 f'(x) \varphi(x) dx - b \int_{-R}^0 f(x) \varphi(x) dx \\
&\quad - \int_0^R g''(x) \varphi(x) dx - a \int_0^R g'(x) \varphi(x) dx - b \int_0^R g(x) \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant les propriétés 1., 2. et 3. :

$$\begin{aligned}
\langle PT, \varphi \rangle &= \cancel{\varphi'(0)} (\cancel{f(0)} - \cancel{f(0)}) + a \varphi(0) (\cancel{f(0)} - \cancel{f(0)}) + \varphi(0) \underbrace{(\cancel{f'(0)} - \cancel{g'(0)})}_{=1} \\
&\quad - \int_{-R}^0 \underbrace{(f''(x) + a f'(x) + b f(x))}_{=(Pf)(x)=0} \varphi(x) dx - \int_0^R \underbrace{(g''(x) + a g'(x) + b g(x))}_{=(Pg)(x)=0} \varphi(x) dx \\
&= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc, on a bien: $PT = \delta_0$.

Exercice 8:

1. Comme l'équation différentielle $2xu' - u = 0$ est singulière en 0, on cherche ses solutions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on trouve comme solutions: $u(x) = C_1 \sqrt{x}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on trouve comme solutions: $u(x) = C_2 \sqrt{x}$.

On pose $x_+ = \max(x, 0)$ et $x_- = \max(-x, 0)$.

Les fonctions localement intégrables $u: x \mapsto C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-}$ sont donc solutions de $2xu' - u = 0$.

2.a. Les distributions associées aux fonctions $u: x \mapsto C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-}$ sont solutions de $2xT' - T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis, soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $S_1 = \frac{T_1}{\sqrt{x}}$.

$$\text{Alors: } S_1' = \frac{T_1'}{\sqrt{x}} - \frac{T_1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2xT_1' - T_1}{2x\sqrt{x}} = 0$$

Comme S_1 est définie sur un intervalle (ouvert), il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que $S_1 = C_1$. D'où $T_1 = C_1 \sqrt{x_+}$.

De même: $T_2 = C_2 \sqrt{x_-}$.

(9)

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$
 $= \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - 0$
 $= 0$

Et si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$
 $= \langle T_2, \varphi \rangle - 0 - \langle T_2, \varphi \rangle$
 $= 0$.

Donc $\mathbb{R}_+^* \subset \text{supp } S$ et $\mathbb{R}_-^* \subset \text{supp } S$, donc $\text{supp } S \subset \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$.

Donc : $\text{supp } S \subset \{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Si $R=0$ alors $2xR' - R = 0$.

Réciproquement, supposons que $2xR' - R = 0$ et montrons que $R=0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \langle 2x(\delta^{(k)})', \varphi \rangle &= -\langle \delta^{(k)}, (2x\varphi)' \rangle \\ &= -\langle \delta^{(k)}, 2\varphi \rangle - \langle \delta^{(k)}, 2x\varphi' \rangle \\ &= 2(-1)^{k+1} (2\varphi^{(k)}(0) + (2x\varphi')^{(k)}(0)) \\ &= 2(-1)^{k+1} (k+1) \varphi^{(k)}(0) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2xR' - R = \sum_{k=0}^p (2(-1)^{k+1}(k+1) - 1) a_k \delta^{(k)}$$

Or $2xR' - R = 0$, donc $a_k = 0$ pour tout k et $R=0$.

d. Comme par b., $\text{supp } S \subset \{0\}$, S s'écrit $S = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)}$.

Si T est solution de $2xT' - T = 0$, alors S aussi et donc par c., $S=0$.

Ainsi, $T = T_1 + T_2 = C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-}$ sont les solutions de $2xT' - T = 0$.

3.

La forme du second membre de nous incite à chercher une solution particulière qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Or, par c., il suffit de prendre une masse de Dirac en 0 et en injectant cette distribution $a_0 \delta$ dans l'équation, on en tire : $(2(-1)^{(1)} - 1)a_0 = 1$ soit $a_0 = -\frac{1}{3}$.

(10)

Exercice 9

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset K$.

Posons $K_1 = \{(x, h(x)) \mid (x, h(x)) \in K\}$ qui est compact car K l'est et h est une C^1 -diffé.

$$\text{Alors: } |\langle T, \varphi \rangle| \leq \left(\int_{K_1} dx \right) \sup_{(x,y) \in K} |\varphi(x,y)| \leq C \|\varphi\|_\infty.$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D la courbe $D = \{(x, h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\text{supp } T = D$.

Tout d'abord, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$. Alors $\varphi(x, h(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Donc $D^c \subset (\text{supp } T)^c$ et $\text{supp } T \subset D$.

Réciproquement, montrons que tout point $M_0 = (x_0, h(x_0)) \in D$ est dans $\text{supp } T$.

Soit $\delta > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive, avec $\text{supp } \varphi \subset B(M_0, \delta)$ et $\varphi(x, y) = 1$ pour tout $(x, y) \in B(M_0, \delta/2)$. Soit $K_\delta = \{(x, h(x)) \mid (x, h(x)) \in B(M_0, \delta)\}$.

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_{K_\delta} \varphi(x, h(x)) dx \right| \geq \int_{K_{\delta/2}} \varphi(x, h(x)) dx = \int_{K_{\delta/2}} 1 dx = \text{Leb}(K_{\delta/2}) > 0$$

où $K_{\delta/2} = \{(x, h(x)) \mid (x, h(x)) \in B(M_0, \delta/2)\}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive. Donc T est non nulle au voisinage de M_0 , donc $M_0 \in \text{supp } T$.
Ainsi $D \subset \text{supp } T$ et $D = \text{supp } T$.

3. Si T est la distribution T_f associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ f , alors $\text{supp } T = \text{supp } f$ où $\text{supp } f$ est le support de f au sens des fonctions continues. Alors, f serait nulle en dehors de D qui est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$, donc T_f serait nulle. Or T est non nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $\phi(x) = \varphi(x, h(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors: } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, h(x)) + h'(x) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, h(x))$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \langle \partial_x T + h'(x) \partial_y T, \varphi \rangle &= - \int_{\mathbb{R}} (\partial_x \varphi + h'(x) \partial_y \varphi)(x, h(x)) dx = - \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) dx \\ &= [\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad \text{car } \phi \text{ est à support compact.} \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } (\partial_x T + h'(x) \partial_y T) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

11

Exercice 10 - Equation de Cauchy - Riemann.

1. On a: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, |f(x, y)| = \frac{1}{|x+iy|} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

car dans $\mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable en 0 si $\alpha < n$ (se voit en passant en coordonnées polaires).

2. Soit $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$. On a:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\partial} f, \varphi \rangle &= \frac{1}{2} \langle \partial_x f, \varphi \rangle + \frac{i}{2} \langle \partial_y f, \varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle f, \partial_x \varphi \rangle - \frac{i}{2} \langle f, \partial_y \varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle f, \partial_x \varphi + i \partial_y \varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy} (\partial_x \varphi + i \partial_y \varphi)(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

$$\times \frac{x-iy}{x-iy} \text{ dans } \Rightarrow -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2} (x \partial_x \varphi + y \partial_y \varphi)(x, y) dx dy - \frac{1}{2} i \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2} (x \partial_y \varphi - y \partial_x \varphi) dx dy$$

$$\text{en passant } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r^2} r \partial_r \tilde{\varphi}(r, \theta) \times r dr d\theta - \frac{1}{2} i \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \tilde{\varphi}(r, \theta)) r dr d\theta$$

et $\tilde{\varphi}(r, \theta) = \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\begin{aligned} \text{car } \partial_r \tilde{\varphi}(r, \theta) &= \partial_r \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \partial_x \varphi + \sin \theta \partial_y \varphi \\ &= \frac{1}{r} (x \partial_x \varphi + y \partial_y \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \partial_\theta \tilde{\varphi}(r, \theta) &= \partial_\theta \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = -r \sin \theta \partial_x \varphi + r \cos \theta \partial_y \varphi \\ &= x \partial_y \varphi - y \partial_x \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \varepsilon > 0: \langle \bar{\partial} f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{+\infty} \partial_r \tilde{\varphi}(r, \theta) dr d\theta - \frac{1}{2} i \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \partial_\theta \tilde{\varphi}(r, \theta) r d\theta dr \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\varepsilon, \theta) d\theta - \frac{1}{2} i \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{r} (\tilde{\varphi}(r, 2\pi) - \tilde{\varphi}(r, 0)) dr \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\varepsilon, \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(0, 0) d\theta = \pi \varphi(0, 0).$$

par convergence dominée car $|\tilde{\varphi}(\varepsilon, \theta)| \leq M$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et $\tilde{\varphi}(\varepsilon, \theta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(0, 0)$.

D'où $\langle \bar{\partial} f, \varphi \rangle = \pi \varphi(0, 0) = \langle \pi \delta_0, \varphi \rangle$ i.e. $\bar{\partial} f = \pi \delta_0$.

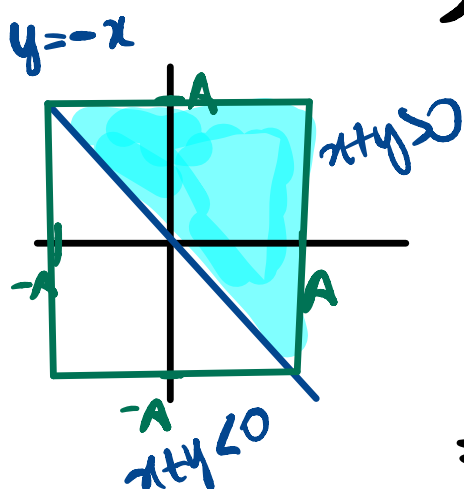
(12)

Exercice 11

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $A > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]^2$. On a:

$$\langle \partial_x \mathbb{1}_{x+y>0}, \varphi \rangle = - \langle \mathbb{1}_{x+y>0}, \partial_x \varphi \rangle$$

$$= - \iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y>0\}} \partial_x \varphi(x,y) \, dx \, dy.$$



$$= - \iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y>0\} \cap [-A,A]^2} \partial_x \varphi(x,y) \, dx \, dy$$

$$= - \int_{-A}^A \left(\int_{-x}^A \partial_x \varphi(x,y) \, dy \right) dx$$

Fubini

$$\downarrow$$

$$= - \int_{-A}^A \int_{-y}^A \partial_x \varphi(x,y) \, dx \, dy$$

$$= - \int_{-A}^A [\varphi(\cdot, y)]_{-y}^A \, dy$$

$$= - \int_{-A}^A 0 - \varphi(-y, y) \, dy$$

$$= \int_{-A}^A \varphi(-y, y) \, dy$$

On retrouve la distribution de simple couche $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(-x, x) \, dx$ rencontrée à l'exercice 9

(73)

Le calcul de ∂_y est similaire :

$$\begin{aligned} \langle \partial_y \mathbb{1}_{x+y>0}, \varphi \rangle &= - \langle \mathbb{1}_{x+y>0}, \partial_y \varphi \rangle \\ &= - \int_{-A}^A \left(\int_{-x}^A \partial_y \varphi(x, y) dy \right) dx \\ &= - \int_{-A}^A [\varphi(x, \cdot)]_{-x}^A dx \\ &= - \int_{-A}^A 0 - \varphi(x, -x) dx \\ &= \int_{-A}^A \varphi(x, -x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x) dx. \end{aligned}$$

On retrouve exactement la distribution étudiée
à l'exercice 9 pour $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -x$.

14

Exercice 12:

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a: $\langle \delta_0' * \delta_0', \varphi \rangle = \langle \delta_0' \otimes \delta_0', \varphi^A(x, y) \rangle$
 $= \langle \delta_0', -\langle \delta_0, \partial_y \varphi^A(x, y) \rangle \rangle$
 $= \langle \delta_0', -\varphi'(x) \rangle$
 $= \varphi''(0).$

où $\varphi^A(x, y) = \varphi(x+y)$.
 Donc $\delta_0' * \delta_0' = \delta_0''$.

On peut aussi dériver l'égalité: $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, deux fois.

2. $E = \mathcal{S}_0^{(\mathbb{R})}$ convient. En effet si on dérive k fois l'identité $\delta_0 * T = T$ on obtient
 $\mathcal{S}_0^{(k)} * T = T^{(k)}.$

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a:

$$\begin{aligned} \langle X^m(T \star S), \varphi \rangle &= \langle T \star S, X^m \varphi \rangle = \langle T \otimes S, (x+y)^m \varphi^A(x, y) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k \langle T \otimes S, x^k y^{m-k} \varphi^A(x, y) \rangle \\ \text{où } \varphi^A(x, y) &= \varphi(x+y) \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k \langle x^k T \otimes (y^{m-k} S), \varphi^A(x, y) \rangle = \sum_{k=0}^m C_m^k \langle X^k T \star X^{m-k} S, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Exercice 13:

1. a. Comme φ est à support compact, il existe $a > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$.

Alors, si $\chi(x)\chi(y)\varphi(x+y) \neq 0$, on a $x \geq -1, y \geq -1$ et $x+y \leq a$.

D'où: $x \in [-1, a+1]$ et $y \in [-1, a+1]$. Ainsi:

$$\text{supp } (\varphi^\Delta) \subset [-1, a+1]^2 \quad \text{et } \varphi^\Delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

b. Par a., la distribution $T*S$ est bien définie. Soit χ_1 une autre fonction vérifiant les mêmes hypothèses que χ . On a:

$$\begin{aligned} \langle T_x \otimes S_y, \varphi^\Delta(x, y) \rangle &= \langle T_x \otimes S_y, \chi_1(x)\chi_1(y)\varphi(x+y) \rangle = \langle T_x \otimes S_y, (\chi(x)-\chi_1(x))\chi(y)\varphi(x+y) \rangle \\ &\quad + \langle T_x \otimes S_y, \chi_1(x)(\chi(y)-\chi_1(y))\varphi(x+y) \rangle \end{aligned}$$

Or, $\text{supp } (\chi - \chi_1) \subset]-\infty, -\frac{1}{2}]$ donc $(\text{supp } T) \cap \text{supp } (\chi - \chi_1) = \emptyset$, ce qui implique que le premier crochet est nul. Puis, comme $(\text{supp } S) \cap \text{supp } (\chi - \chi_1) = \emptyset$, le second crochet est lui aussi nul. Ainsi:

$$\langle T_x \otimes S_y, \varphi^\Delta \rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi_1^\Delta \rangle \quad \text{et } T*S \text{ ne dépend pas du choix de } \chi.$$

$\nwarrow$ correspondant à χ_1

c. Soit $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ et soit $\chi_\delta \equiv 1$ sur $] -\delta, +\infty[$ et $\chi_\delta \equiv 0$ sur $] -\infty, -2\delta[$.

D'après b., on a:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle T*S, \varphi \rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x+y)\chi_\delta(x)\chi_\delta(y) \rangle.$$

On choisit φ à support dans $] -\infty, 0[$. Alors, il existe $a > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset] -\infty, -a[$. Ainsi, $(x, y) \mapsto \chi_\delta(x)\chi_\delta(y)\varphi(x+y)$ est non nulle uniquement si $x+y \leq -a, x \geq -2\delta, y \geq -2\delta$ soit encore $x \leq -a+2\delta$ et $y \leq -a+2\delta$.

Mais, pour δ assez petit, $-a+2\delta < 0$ et comme $\text{supp } T \subset [0, +\infty[$ et $\text{supp } S \subset [0, +\infty[$, on obtient: $\langle T*S, \varphi \rangle = 0$. Donc: $\text{supp } (T*S) \subset [0, +\infty[$.

(16)

2. a. Soit H la distribution de Heaviside, i.e. la fonction indicatrice de $]0, +\infty[$. Alors $H \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et

$$H * \delta'_0 = H' * \delta_0 = \delta_0 * \delta_0 = \delta_0.$$

Donc H est l'inverse de δ'_0 dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

b. Supposons par l'absurde qu'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que

$T * S = \delta_0$. Comme $T \in C^\infty$, on devrait avoir que $T * S$ est la distribution associée à une fonction C^∞ . Or δ_0 ne l'est pas.

Contradiction et résultat : si $T \in C^\infty_0(]0, +\infty[)$, T n'est pas inversible dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.