

Feuille de TD 3 : Distributions - Opérations.

I. Multiplication par une fonction C^∞

Exercice 1

Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $fT = 0$, alors le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}$.
2. On suppose de plus que T est d'ordre 0. Montrer qu'alors la réciproque est vraie : si le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}$ alors $fT = 0$.
3. En prenant $T = \delta'$, montrer que la réciproque est fautive en général si T n'est pas d'ordre 0.
4. Caractériser les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que $f\delta' = 0$.

Exercice 2

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $(\sin x)T = 0$ si et seulement s'il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que,

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_{n\pi}.$$

On pourra s'aider des résultats obtenus en cours sur la distribution $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

II. Dérivation dans $\mathcal{D}'$

Exercice 3

Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = \text{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

où, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \text{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right).$$

Exercice 4

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$.
2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$xT' + T = 0.$$

Exercice 5

Soit $I =]a, b[$ et f et g deux fonctions de classe C^∞ sur I . On se propose de montrer que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' + fT = g$ au sens des distributions, alors T est donnée par une fonction C^∞ sur I qui vérifie cette équation différentielle au sens usuel.

1. Trouver une solution u_0 de $u' + fu = g$ qui soit de classe C^∞ sur I .
2. Conclure en mettant toute solution de $T' + fT = g$ sous la forme $T = u_0 + Se^{-F}$ où F est une primitive de f et S une distribution à déterminer.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -2 \\ 5 & \text{si } x \in]-2, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note T_f la distribution associée à f .
2. Calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 7

On considère l'opérateur différentiel $P = \frac{d^2}{dx^2} + a \frac{d}{dx} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, agissant sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que $Pf = Pg = 0$, $f(0) = g(0)$ et $f'(0) - g'(0) = 1$. On considère la fonction h définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soit enfin T la distribution définie par,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi(x) dx.$$

Montrer que $PT = \delta_0$, au sens des distributions.

Exercice 8

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.
 - a. Calculer T_1 et T_2 .
 - b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.

d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.

3. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

Exercice 9

Soit h un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, h(x)) dx.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?
2. Déterminer le support de T .
3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.
4. Calculer, au sens des distributions, $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T$.

Exercice 10 - Équation de Cauchy-Riemann

On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la fonction donnée par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, f(x, y) = (x + iy)^{-1}.$$

1. Montrer que $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $\bar{\partial}$ l'opérateur de Cauchy-Riemann défini par : $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Calculer $\bar{\partial}f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Indication : on pensera à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires.

Exercice 11

Calculer les dérivées partielles de la distribution

$$\mathbf{1}_{x+y>0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

III. Convolution dans $\mathcal{D}'$

Exercice 12

1. Calculer $\delta'_0 \star \delta'_0$ pour $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\delta'_a \otimes \delta'_b$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, à support compact, telle que $E \star T = T^{(k)}$.
4. Soient T et S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, S étant supposée à support compact. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X^n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Démontrer la formule suivante :

$$X^n(T \star S) = \sum_{k=0}^n C_n^k (X^k T) \star (X^{n-k} S).$$

Exercice 13

On note $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \text{supp } T \subset [0, +\infty[\}$. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, $\chi = 1$ sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$ et $\chi = 0$ sur $] -\infty, -1[$.

1.a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'application

$$\varphi^\Delta : (x, y) \mapsto \chi(x)\chi(y)\varphi(x+y),$$

est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

b. Soient $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. On définit

$$\langle T \star S, \varphi \rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi^\Delta \rangle.$$

Montrer que $T \star S$ est bien définie et est indépendante du choix de χ .

c. Montrer que $T \star S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

2. On dit que $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est inversible, s'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T \star S = \delta_0$. On note $S = T^{-1}$.

- a. Montrer que δ'_0 est inversible et calculer son inverse.
- b. Montrer que, si $T \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, T n'est pas inversible.