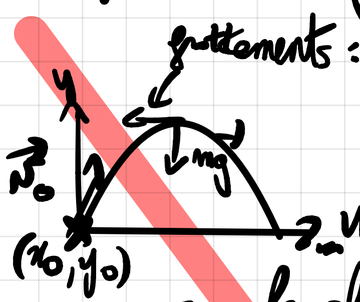
Chapitre 1 : Introduction aux équations différentielles ordinaires

I Quelques modèles physiques

Indissociable de la théorie de la mécanique de Newton (Principia Mathematica 1687)

Exemple 1 : Trajectoire d'un boulet de canon



Le boulet de canon est ramené à un point matériel qui subit deux forces :

- le champ de gravité de la Terre : $m\vec{g}$
- les frottements de l'air : $-\alpha\vec{v}$ avec $\alpha > 0$

Alors la seconde loi de Newton nous donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}(t) = -\dfrac{\alpha}{m}\dfrac{dx}{dt}(t) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}(t) = -g - \dfrac{\alpha}{m}\dfrac{dy}{dt}(t) \end{cases}$$

ou en "variable vitesse" :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_x(t) = -\dfrac{\alpha}{m}v_x(t) \\ \dfrac{d}{dt}v_y(t) = -g - \dfrac{\alpha}{m}v_y(t) \end{cases}$$

Deux EDOs indépendantes d'ordre 1 en la vitesse et linéaires !

La connaissance de $v_x(0)$ et $v_y(0)$ permet de résoudre ce système puis celle de $(x(0), y(0))$ permet d'obtenir la trajectoire sous forme de courbe paramétrée :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix} - \alpha \frac{d}{dt}\vec{X} \\ \vec{X}(0) = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}(0) = \begin{pmatrix}v_x(0)\\v_y(0)\end{pmatrix} \end{cases}$$

C'est ce que l'on appellera un problème de Cauchy. La solution est connue de manière unique à partir des conditions initiales : c'est le déterminisme de la mécanique Newtonienne.

Exemple 2 : Datation au ^{14}C

Soit le nombre $n(t)$ de noyaux présents dans un échantillon d'isotopes radioactifs à un instant t. La vitesse de désintégrations nucléaires spontanées est proportionnelle à n :

$$\frac{d}{dt}n(t) = -\lambda n(t), \quad \lambda \geq 0.$$

Le ^{14}C est un isotope radioactif du carbone obtenu par le bombardement par rayons cosmiques de l'azote contenu dans la haute atmosphère. Sa demi-vie est de l'ordre de 5730 années. La végétation absorbe le ^{14}C en absorbant le CO_2 dans l'air, puis les animaux absorbent

③ le ^{14}C au cours de la chaîne alimentaire.
Le carbone contenu dans un être vivant aura la même proportion de ^{14}C que celle que l'on trouve dans l'atmosphère. A sa mort, un être vivant cesse de renouveller le carbone en lui et le ^{14}C démarre sa désintégration radioactive.
Un fragment de parchemin contient du ^{14}C dans une proportion égale à 74% de ce que contient un organisme vivant sur Terre actuellement.

On a : $n(t) = n(0)e^{-\lambda t}$

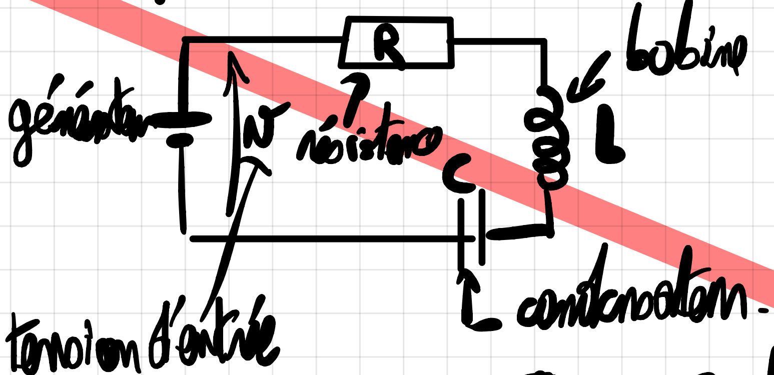
et si $T_{1/2}$ est la demi-vie du ^{14}C :

$$\cancel{n(0)}\, e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{\cancel{n(0)}}{2} \Leftrightarrow -\lambda T_{1/2} = -\ln 2$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730}$$

D'où si T_0 est l'âge recherché :

$$\cancel{n(0)}\, e^{-\frac{\ln 2}{5730} T_0} = 0{,}74\, \cancel{n(0)}$$
$$\Rightarrow \quad T_0 = -\frac{5730}{\ln 2} \ln 0{,}74 \simeq 2488 \text{ ans.}$$

Exemple 3 : Circuit RLC en série



Loi des mailles :

$$v = u_C + u_L + u_R$$
$$= u_C + L\frac{dI}{dt} + RI$$

On $I = C\dfrac{du_C}{dt}$.

④

D'où :

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R\frac{du_c}{dt} + u_c = v$$

Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

<u>Exemple 4</u> : Schrödinger 1d.

On étudie la diffusion d'une particule de type e^- ou photon dans un milieu donné.

L'énergie totale E de la particule est la somme de son énergie cinétique $\frac{p^2}{2m}$ où p est sa quantité de mouvement et de l'énergie potentiel V qui reflète l'environnement dans lequel il évolue.

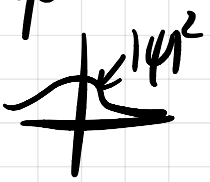
D'où :

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

En mécanique quantique, les observables (position, quantité de mvt, énergie, etc...) sont des opérateurs sur un espace de Hilbert (dont les vecteurs propres forment une base Hilbertienne).

D'où : $p \to -i\hbar \frac{d}{dx}$ et $V \to$ op de multip° V

Les fonctions d'ondes sont les fonctions propres de l'énergie : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi + V\psi = E\psi$



5 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants.

Exemple 5 : Cinétique chimique

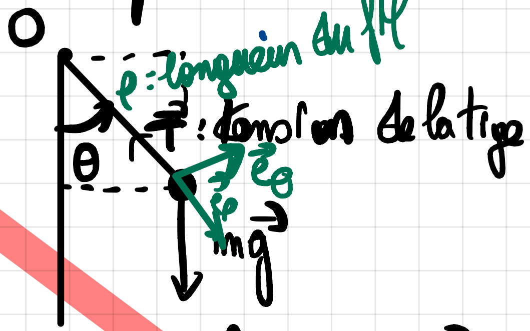
Dans une réaction chimique élémentaire d'ordre m du type $A \rightarrow$ produits, la vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration de A à la puissance m :

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^m.$$

Equation différentielle non linéaire mais à variables séparées donc intégrable.

Pour des réactions non élémentaires on les décompose en réactions élémentaires ce qui peut conduire à un système de plusieurs EDOs non linéaires en les concentrations des éléments présents.

Exemple 6 : Le pendule



En coordonnées polaires : $\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2 \vec{e}_\ell + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

D'où : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$

$$\Leftrightarrow -m\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_\ell + m\ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = mg\cos\theta\,\vec{e}_\ell - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta - T\vec{e}_\ell$$

⑥ D'où l'équation du mouvement :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

Soit en notant $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$

EDO non linéaire très compliquée à étudier.

Pour les petites oscillations :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$ EDO linéaire simple à résoudre

Question : dans quelle mesure les solutions de l'équation linéarisée nous informent sur le comportement de l'équation initiale.

II Vocabulaire des équations différentielles

1. Equations différentielles d'ordre 1 :

On se donne : (i) $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide

(ii) $\Phi : U \to \mathbb{R}$ une application.

On appelle équation différentielle d'ordre 1 en x relativement à la variable t, toute équation d'inconnue $x : p_1(U) \to \mathbb{R}^n$ de la forme

$$\Phi(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)) = 0$$

Une solution de cette équation est la donnée d'un couple (V, x) où $V \subset p_1(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $x : V \to \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable sur V vérifiant

$$\forall t \in V, \Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

7 Sous cette forme générale il est difficile d'obtenir un résultat d'existence de solution à une telle équation.

On se donne alors : (i) $J \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert avec J intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ non vide

(ii) $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application

On étudie alors l'équation différentielle résolue d'ordre 1

$$(E) : X'(t) = f(t, X(t)) \quad , t \in J$$

où $X : J \to \mathbb{R}^n$ est une application dérivable sur J.

(E) peut s'écrire sous forme de système différentiel d'ordre 1 :

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad \text{pour } t \in J.$$

On peut alors définir la notion de solution pour (E).

Définition : Une solution de (E) est un couple (I, X) où $I \subset J$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ inclus dans J et $X : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable vérifiant :

(i) $\forall t \in I, \ (t, X(t)) \in U$;

(ii) $\forall t \in I, \ X'(t) = f(t, X(t))$.

8

Afin d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité, il nous faut rajouter une condition initiale.

<u>Définition</u>: Avec les notations précédentes, on appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et d'une donnée initiale :

$$(C) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in J \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in U$.

<u>Vocabulaire</u>: Dans le cas où $n=1$ on parlera d'équation différentielle scalaire

Dans le cas où $n \geq 2$ on parlera de système différentiel.

2. Equations différentielles d'ordre $m \geq 1$

On se donne $m, n \geq 1$ deux entiers et :

(i) $J \times \Omega \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^m$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et Ω un ouvert de $(\mathbb{R}^n)^m$ non vide

(ii) $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application

On appelle équation différentielle d'ordre m résolue

9

Toute équation d'inconnue $X : J \to \mathbb{R}^n$ de la forme
(E_m) $X^{(m)} = f(t, X, X', \dots, X^{(m-1)})$
pour $(t, X, X', \dots, X^{(m-1)}) \in \Omega$ et $t \in J$.

Définition : Une solution de (E_m) est un couple (I, X) où $I \subset J$ est un intervalle non vide et $X : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction m fois dérivable sur I telle que :
(i) $\forall t \in I$, $(t, X(t), \dots, X^{(m-1)}(t)) \in \Omega$
(ii) $\forall t \in I$, $X^{(m)}(t) = f(t, X(t), \dots, X^{(m-1)}(t))$

Un problème de Cauchy d'ordre n prendra la forme suivante :

$$(C_m) \begin{cases} X^{(m)} = f(t, X, \dots, X^{(m-1)}) \\ \begin{pmatrix} X(t_0) \\ X'(t_0) \\ \vdots \\ X^{(m-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Exemple : $\begin{cases} m\vec{x}'' = \vec{F}(t, x, x') \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_0' \end{cases}$: équations du mouvement en mécanique du point.

On peut toujours ramener une équation différentielle d'ordre m résolue à un système différentiel d'ordre 1.

On considère l'équation différentielle d'ordre m (E_m).
Pour $X : J \to \mathbb{R}^n$, on pose

$$Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X' \\ \vdots \\ X^{(m-1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(t, Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{m-1} \\ f(t, Y) \end{pmatrix}$$

Alors (E_m) est équivalente à l'EDO d'ordre 1 :

$$Y' = F(t, Y)$$

3. Solutions maximales

On commence par définir la notion de prolongement et celle de prolongement strict.
On considère l'équation

$$(E) : \quad X' = f(t, X)$$

Définition : Soient (I_1, X_1) et (I_2, X_2) deux solutions de (E).
On dit que (I_2, X_2) est un prolongement (resp. un prolongement strict) de (I_1, X_1) lorsque $I_1 \subset I_2$ (resp $I_1 \subsetneq I_2$) et si $X_2|_{I_1} = X_1$.

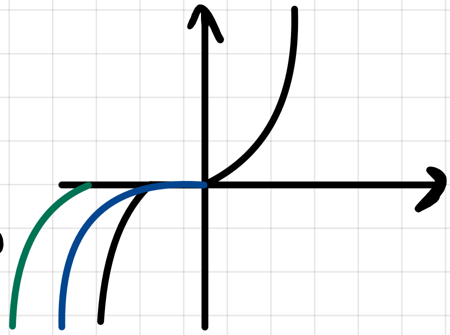
Une même fonction peut avoir plusieurs prolongements distincts sur un même intervalle, tous solutions de la même EDO.

Exemple : On considère $x' = 3(x^2)^{1/3}$ donc

$z : \begin{array}{l} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^3 \end{array}$ est une solution.

Pour $k < 0$ on pose : $z_k(t) = \begin{cases} (t-k)^3 & \text{si } t \leq k \\ 0 & \text{si } k < t < 0 \\ t^3 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Les z_k prolongent z à $\mathbb{R}$ tout entier et on vérifie qu'elles sont solutions de $x' = 3(x^2)^{1/3}$



car $\dfrac{z_k(t) - z_k(k)}{t-k} = \begin{cases} (t-k)^2 & \text{si } t \leq k \\ 0 & \text{si } k < t \leq 0 \end{cases} \xrightarrow[t \to k]{} 0$

et $\dfrac{z_k(t) - z_k(0)}{t-0} = \begin{cases} t^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } k < t < 0 \end{cases} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

Définition (solution maximale) : On dit que (I, X) est une solution maximale de (E) lorsqu'elle n'admet pas de prolongement strict.

Remarque : Il faut distinguer cette notion de celle de solution globale i.e de solution de la forme (J, X).

Une solution globale est toujours maximale mais la réciproque n'est pas vraie en général comme le montre l'exemple :

$$x' = x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ avec } x(0) = x_0 > 0.$$

Alors $t \mapsto x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ est solution sur $]-\infty, \frac{1}{x_0}[$

mais $x(t) \xrightarrow[t \to \frac{1}{x_0}^-]{} +\infty$ donc ne peut être prolongée de manière continue au-delà de $\frac{1}{x_0}$. Cette solution est maximale mais non globale.

Remarque : La question de l'unicité dans un problème de Cauchy se posera dans l'ensemble des solutions maximales.

4. Raccordement de solutions.

Les valeurs de $t \in J$ pour lesquelles on ne peut pas mettre une EDO $\Phi(t, x, x')$ sous forme résolue $x' = f(t, x)$ sont appelés points singuliers de l'EDO.

Nous verrons dans la suite que l'on peut résoudre, sous certaines hypothèses sur f, une EDO sur tout intervalle non trivial ne contenant pas de point singulier.

Supposons que $t_0 \in J$ soit un point singulier de $\Phi(t, x, x')$ qui soit isolé. On peut alors trouver deux intervalles $]t_-, t_0[$ et $]t_0, t_+[$ ne contenant pas de point isolé et sur lesquels on suppose que l'on peut trouver deux solutions $(]t_-, t_0[, X_-)$ et $(]t_0, t_+[, X_+)$. Se pose alors la question de savoir si ces solutions peuvent ou non se "raccorder" en une solution $(]t_-, t_+[, X)$ qui "traverse" le point singulier t_0. Pour cela il faudra vérifier que :

$$\lim_{t \to t_0^-} X_-(t) = \lim_{t \to t_0^+} X_+(t)$$

$$\text{et} \quad \lim_{t \to t_0^-} X'_-(t) = \lim_{t \to t_0^+} X'_+(t)$$

Cela nous conduit au plan d'étude suivant pour une EDO.

13

Plan d'étude d'une EDO

1. On détermine les points singuliers
2. Cela nous donne les intervalles sur lesquels on peut mettre l'EDO sous forme résolue.
3. Sur chacun de ces intervalles on montrera, si les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont vérifiées, l'existence de solutions maximales
4. On étudie les raccords éventuels de ces solutions en les points singuliers.

Exemple: On considère l'équation différentielle d'ordre 1 :

(E) $t^2 x' - x = 0$ sur $\mathbb{R}$.

L'unique point singulier est $t=0$, on résout donc (E) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Sur $]0,+\infty[$, l'équation se met sous la forme :

$$x' = \frac{1}{t^2} x$$ dont les solutions sur $]0,+\infty[$

sont de la forme $\begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto Ce^{-1/t} \end{array}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

De même sur $]-\infty, 0[$, les solutions sont de

14 la forme $\begin{array}{l}]-\infty,0[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto De^{-\frac{1}{t}} \end{array}$ pour $D \in \mathbb{R}$.

Etudions l'existence éventuelle d'une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Soit $(\mathbb{R}, x)$ une solution de (E).

Alors $x|_{]-\infty,0[}$ et $x|_{]0,+\infty[}$ sont solutions de $x' = \frac{1}{t^2}x$ donc il existe $C, D \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = \begin{cases} De^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t < 0 \\ Ce^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On étudie la C^0 de x en 0. On a :

$$\forall C \in \mathbb{R}, \lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{t \to 0^+} Ce^{-\frac{1}{t}} = 0$$

tandis que :

$$\lim_{t \to 0^-} x(t) = \lim_{t \to 0^-} De^{-\frac{1}{t}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } D > 0 \\ -\infty & \text{si } D < 0 \\ 0 & \text{si } D = 0 \end{cases}$$

Pour assurer la continuité de x en 0 il faut donc supposer $D = 0$. On prolonge alors x par C^0 en 0 en posant $x(0) = 0$.

15

Alors : $\forall t<0$, $x(t)=0$ et ainsi, $\forall t<0, x'(t)=0$. Or, pour tout $C\in\mathbb{R}$,

$$\forall t>0,\quad x'(t) = C\frac{1}{t^2}e^{-1/t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$

Ainsi x admet un prolongement C^1 en 0 si on pose $x'(0)=0$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont donc de la forme :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ x(t) = \begin{cases} Ce^{-1/t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t\leq 0 \end{cases},\ C\in\mathbb{R}$$

Vous verrez d'autres exemples d'études d'EDO de ce type en TDs.

III Propriétés générales des EDOs d'ordre 1 :

1. Régularité des solutions d'une EDO d'ordre 1 :

Proposition : Si $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}$ alors toute solution $X : J \to \mathbb{R}^n$ de $X' = f(t, X)$ est de classe C^{k+1}.

D : Par récurrence sur k. Si f est C^0 alors X dérivable vérifie $X' = f(t, X)$ C^0 par composition donc X est C^1. Si on suppose que f est C^k implique X C^{k+1} alors si f est C^{k+1}, $X' = f(t, X)$ implique que X' est C^{k+1} par composition. Donc X est C^{k+2} $\square$

2. Formulation intégrale du problème de Cauchy

Proposition : Soit f continue.

(I, X) est solution du problème de Cauchy

$$(C) \begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

si et seulement si $X : I \to \mathbb{R}$ est continue, pour tout $t \in I$, $(t, X(t)) \in U$ et

$$\forall t \in I, \ X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds$$

D : Supposons (I, x) solution de (C).
Alors x est dérivable sur I donc continue sur I, pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$ et on a :

$$\forall t \in I, \quad \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = x(t) - \underbrace{x(t_0)}_{=x_0}$$

D'où : $\forall t \in I$, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$.

Réciproquement, si x est C^0 sur I et si pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$ alors
$t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$ est bien définie sur I,
et de classe C^1 sur I par C^0 de $s \mapsto f(s, x(s))$
(C^0 par C^0 de f et x). D'où en dérivant cette fonction on obtient : $x'(t) = f(t, x(t))$. De plus

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s))\,ds = x_0$$

Donc (I, x) est solution de (C).

$\square$