Chapitre 2 : Equations différentielles linéaires

I Définition et premières propriétés.

Plusieurs modèles physiques (souvent simplifiés) conduisent à des EDOs dites "linéaires" qui satisfont à un "principe de superposition" : la désintégration radioactive, des modèles simples de mécanique comme la trajectoire d'un boulet de canon en milieu homogène, un circuit RLC ou l'équation de Schrödinger en milieu homogène et isotrope.

Comme nous le verrons plus tard, dans le cas d'équations non-linéaires comme le pendule ou en cinétique chimique, on pourra parfois se ramener au cas linéaire via des résultats de linéarisation.

Définition : On se donne pour $n, m \geq 1$:

(i) $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n$ un ouvert

(ii) $\Phi : U \to \mathbb{R}$ une application.

On dit que l'équation différentielle :

$$\forall t \in p_1(U), \ \Phi(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0$$

est linéaire lorsque pour tout $t \in p_1(U)$ fixé

$$x \longmapsto \Phi(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))$$ est

linéaire.

(2) Dans le cas d'une EDO d'ordre 1 résolue en X', définie sur $J \subset \mathbb{R}$, cela revient à l'existence d'applications $A : J \to M_n(\mathbb{R})$ et $B : J \to \mathbb{R}^n$ telles que :

$$X' = AX + B \quad \text{sur } J \qquad (\mathcal{L})$$

Une solution de $(\mathcal{L})$ est un couple (I, X) avec $I \subset J$ et $X : J \to \mathbb{R}$ dérivable tel que :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$$

Dans la suite de ce chapitre nous nous placerons principalement dans ce cas.

L'équation homogène associée à $(\mathcal{L})$ est par définition

$$X' = AX \quad \text{sur } J \quad (\mathcal{L}_H).$$

Cette équation homogène joue un rôle important dans la description de la structure géométrique de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{L})$.

Rappelons ici le résultat général de structure des équations linéaires : pour E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, pour $y_0 \in F$ fixé, l'ensemble des $x \in E$, $u(x) = y_0$ est un espace affine $x_0 + \operatorname{Ker} u$ de direction $\operatorname{Ker} u$ et passant par $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = y_0$.

Ce résultat s'applique à l'ensemble des solutions de $(\mathcal{L})$

③ sur un intervalle $I \subset J$ fixé avec

$$u : \begin{array}{l} D^1(I,\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \\ X \longmapsto X' - AX \end{array}$$

Dans le cas des EDOs linéaires, nous verrons que les solutions maximales sont globales et on pourra donc prendre $I = J$.
Pour déterminer l'espace des solutions maximales sur J nous procèderons en deux étapes :

① Résolution de l'équation homogène ($\operatorname{Ker} u$)

② Recherche d'une solution particulière ("variation de la constante").

II Lemmes de Gronwall

Avant de démontrer un théorème d'existence et d'unicité de solution globale d'une EDO linéaire, nous donnons trois lemmes qui permettent d'avoir des estimées a priori pour des solutions d'EDO linéaires et même pour des solutions d'inéquations linéaires.

Nous allons donner une première forme "différentielle" du lemme de Gronwall dont nous déduirons une première forme intégrale puis un raffinement de cette dernière.

④ **Lemme (Gronwall différentiel) :** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$, $w \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $v \in C^0(I, \mathbb{R})$.
On suppose que :
$$\forall t \in I, \ w'(t) \leq v(t)\, w(t).$$
Alors, pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$,
$$w(t) \leq w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}.$$

$\underline{D}$: On a :
$$\frac{d}{dt}\left[w(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}\right] = w'(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} + w(t)\big(-v(t)\big) e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}$$
$$= \underbrace{\big(w'(t) - v(t)w(t)\big)}_{\leq 0 \text{ par hypothèse}} \underbrace{e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}}_{>0} \leq 0$$
Donc $t \mapsto w(t) e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}$ est décroissante sur I.
Ainsi, pour $t \geq t_0$,
$$w(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} \leq w(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t_0} v(s)\,ds} = w(t_0)$$
D'où, comme $e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds} > 0$,
$$\forall t \in I, \ t \geq t_0, \quad w(t) \leq w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds}.$$
$\square$

(5) **Lemme (Gronwall intégral)** Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $u, v \in C^0(I, \mathbb{R})$.
Supposons $v \geq 0$ et :

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \quad u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} v(s) u(s) ds$$

Alors :

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \quad u(t) \leq a e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds}.$$

D: Pour $t \in I$, $t \geq t_0$, on pose :

$$w(t) = a + \int_{t_0}^{t} v(s) u(s) ds$$

Alors : $\forall t \in I$, $\quad w'(t) = v(t) u(t)$

Par ailleurs, par hypothèse : $\forall t \in I$, $u(t) \leq w(t)$.
Comme v est positive, il vient :

$$\forall t \in I, \quad v(t) u(t) \leq v(t) w(t).$$

soit encore : $\forall t \in I$, $w'(t) \leq v(t) w(t)$.
Par le lemme de Gronwall différentiel :

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \quad w(t) \leq w(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds}$$

Or : $w(t_0) = a$ et $u(t) \leq w(t)$ d'où :

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \quad u(t) \leq a e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds}$$

$\square$

⑥ L'hypothèse $t \geq t_0$ peut être contraignante.
Voici une version du lemme de Gronwall intégral qui permet de s'affranchir de cette hypothèse.

Lemme : (Gronwall intégral 2) Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $u, v \in C(I, \mathbb{R})$.
Supposons $u, v \geq 0$ et :
$$\forall t \in I,\ u(t) \leq a + \left| \int_{t_0}^{t} v(s) u(s)\, ds \right|$$
Alors : $\forall t \in I,\ u(t) \leq a e^{\left| \int_{t_0}^{t} v(s) ds \right|}$

D : Pour $t \in I$, $t \geq t_0$, comme u et v sont positifs, on a $u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} v(s) u(s) ds$ et on se ramène au lemme de Gronwall intégral pour avoir :
$$u(t) \leq a e^{\underbrace{\int_{t_0}^{t} v(s) ds}_{\geq 0}} = a e^{\left| \int_{t_0}^{t} v(s) ds \right|}$$
Pour $t \in I$ et $t \leq t_0$ on pose :
$$w(t) = a - \int_{t_0}^{t} v(s) u(s) ds.$$
Alors : $w'(t) = -v(t) u(t) \geq -v(t) w(t)$
d'où :
$$\frac{d}{dt}\left[w(t) e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds} \right] = \underbrace{(w'(t) + v(t) w(t))}_{\geq 0} \underbrace{e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds}}_{\geq 0}$$
Ainsi $t \mapsto w(t) e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds}$ est croissante d'où :
$$\forall t \in I,\ t \leq t_0,\quad w(t) e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds} \leq w(t_0) = a$$
et $u(t) \leq w(t) \leq a e^{-\int_{t_0}^{t} v(s) ds} = a e^{\left| \int_{t_0}^{t} v(s) ds \right|}$ □

III Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

7 La question de l'existence et de l'unicité à un problème de Cauchy linéaire admet une réponse remarquable de simplicité : il admet une unique solution maximale qui est globale sous des hypothèses relativement faibles sur les applications A et B.

Théorème (Cauchy-Lipschitz linéaire) :

Pour $J \subset \mathbb{R}$, $A \in C^0(J, M_n(\mathbb{R}))$, $B \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$ et $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ on considère le problème de Cauchy linéaire :

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} X' = AX + B \\ X(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Alors (C) admet une unique solution $X : J \to \mathbb{R}^n$.

Rq : L'unique solution obtenue est globale donc maximale.

D : Existence : Pour construire une solution à (C) nous allons utiliser la formulation intégrale de (C) et le théorème du point fixe de Picard.

(8) Nous commençons par le cas où J est un intervalle compact contenant t_0 donc de la forme $J=[t_0-\alpha, t_0+\beta]$ avec $\alpha, \beta \geq 0$.

Notons $E = C^0(J, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\forall X \in E, \quad \|X\|_E = \sup_{t \in J} \|X(t)\|$$

où par équivalence des normes en dimension finie, on peut choisir pour $\| \|$ n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$, par exemple la norme euclidienne.

L'espace $(E, \| \|_E)$ est un espace de Banach.
On considère l'application bien définie :

$$\Phi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ X \mapsto \left(\begin{array}{l} J \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s)+B(s))\,ds \end{array} \right) \end{array}$$

Par formulation intégrale d'un problème de Cauchy, (J, X) est solution de (C) si et seulement si $\Phi(X) = X$ i.e. X est un point fixe de Φ.

Soient X et $\tilde{X}$ dans E. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\Phi^p(X), \Phi^p(\tilde{X}) \in E$ et :

$(*)$ $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in J, \|\Phi^p(X)(t) - \Phi^p(\tilde{X})(t)\| \leq k^p \dfrac{|t-t_0|^p}{p!} \|X - \tilde{X}\|_E$

où $k = \sup_{t \in J} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$. k est fini car max d'une fonction C^0 sur un intervalle compact J.

9 **Initialisation :** Pour $p=0$:

$$\| \Phi^0(x)(t) - \Phi^0(\tilde{x})(t) \| = \| x(t) - \tilde{x}(t) \| \leq \| x - \tilde{x} \|_E$$

Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang $p \in \mathbb{N}$.
Alors par (HR), $\Phi^p(x) \in E$ donc par définition de Φ, $\Phi^{p+1}(x) = \Phi(\Phi^p(x)) \in E$. De même $\Phi^{p+1}(\tilde{x}) \in E$.

Soit $t \in I$, $t \geq t_0$. Alors :

$$\| \Phi^{p+1}(x)(t) - \Phi^{p+1}(\tilde{x})(t) \| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s) \Phi^p(x)(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} A(s) \Phi^p(\tilde{x})(s)\,ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \| A(s) \|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \, \| \Phi^p(x)(s) - \Phi^p(\tilde{x})(s) \| \,ds$$

$$\leq k \int_{t_0}^{t} \| \Phi^p(x)(s) - \Phi^p(\tilde{x})(s) \| \,ds$$

$$\overset{(HR)}{\leq} k \int_{t_0}^{t} k^p \frac{(s-t_0)^p}{p!} \| x - \tilde{x} \|_E \,ds$$

$$= \frac{k^{p+1}}{p!} \left[\frac{(s-t_0)^{p+1}}{p+1} \right]_{t_0}^{t} \| x - \tilde{x} \|_E$$

$$= \frac{k^{p+1}}{(p+1)!} (t-t_0)^{p+1} \| x - \tilde{x} \|_E$$

De même pour $t \in I$, $t \leq t_0$. On a donc bien (*) pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Rq : pour $p=1$, $\| \Phi(x)(t) - \Phi(\tilde{x})(t) \| \leq k |t-t_0| \, \| x - \tilde{x} \|_E$ ce qui implique que Φ est une contraction seulement si $\ell ob(J) < \frac{1}{k}$. (pour avoir $k|t-t_0| < 1$). C'est pour cela que l'on itère Φ.

(10) Par (*) on a :

$\forall t \in I, \quad \|\Phi^p(X)(t) - \Phi^p(\tilde{X})(t)\| \leq k^p \dfrac{\max(\alpha,\beta)^p}{p!} \|X-\tilde{X}\|_E$

En passant au sup sur $t \in J = [t_0-\alpha, t_0+\beta]$,

$$\|\Phi^p(X) - \Phi^p(\tilde{X})\|_E \leq k^p \frac{\max(\alpha,\beta)^p}{p!} \|X-\tilde{X}\|_E.$$

Or, $k^p \dfrac{\max(\alpha,\beta)^p}{p!} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (car $\sum k^p \dfrac{\max(\alpha,\beta)^p}{p!}$ cv, série exp) donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \dfrac{k^{p_0}}{p_0!} \max(\alpha,\beta)^{p_0} < 1$.

Pour ce $p_0 \in \mathbb{N}$, Φ^{p_0} est contractante de E dans E et par le théorème du point fixe itéré, Φ admet un unique point fixe dans $(E, \| \|_E)$ qui est complet.

Donc (C) admet une unique solution sur $J = [t_0-\alpha, t_0+\beta]$.

Si J est un intervalle quelconque, pour tout $I \subset J$ compact et contenant t_0, il existe une unique solution (I, X_I) à (C). On définit alors (J, X) par :

$\forall I \subset J$ compact, $t_0 \in I$, $\forall t \in I$, $X(t) = X_I(t)$.

Comme J intervalle de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union (au plus dénombrable) de tels intervalles compacts I contenant t_0, cela défini bien X.

De plus si I_1 et I_2 sont deux tels intervalles alors $X_{I_1} = X_{I_2}$ sur $I_1 \cap I_2$ par l'unicité dans le cas compact. (J, X) ainsi construite est solution de (C).

(11) Montrons que : $\forall t_0 \in J, \exists I \subset J$, I compact, $t_0 \in I$.

<u>Unicité</u> : Soient (J, X_1) et (J, X_2) deux solutions globales de (C).

Alors :

$$\forall t \in J, \quad X_1(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)X_1(s) + B(s)\, ds$$

et $$\forall t \in J, \quad X_2(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)X_2(s) + B(s)\, ds.$$

D'où :

$$\forall t \in J, \quad X_1(t) - X_2(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\left(X_1(s) - X_2(s)\right) ds$$

Pour $t \in J$,

$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \|X_1(s) - X_2(s)\|\, ds \right|$$

Par le lemme de Gronwall intégral avec $u(t) = \|X_1(t) - X_2(t)\|$, $v(t) = \|A(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ et $a = 0$ il vient :

$$\forall t \in J, \quad \|X_1(t) - X_2(t)\| \leq 0 \times e^{\left|\int_{t_0}^{t} \|A(s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} ds\right|} = 0$$

Donc : $(J, X_1) = (J, X_2)$ ce qui donne l'unicité. $\square$

Montrons comment le théorème du point fixe de Picard implique le théorème du point fixe pour une itérée contractante ie :

(R) Soit (E,d) un espace métrique complet et $\Phi : E \to E$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [0,1[$ tels que :
$\forall x,y \in E,\ d(\Phi^p(x), \Phi^p(y)) \leq k\, d(x,y)$
Alors Φ admet un unique point fixe $x_0 \in E$ i.e $\Phi(x_0) = x_0$.

D : • Φ^p possède un unique point fixe $x_0 \in E$, $x_0 = \Phi^p(x_0)$.
Alors :
$$\Phi^p(\Phi(x_0)) = \Phi^{p+1}(x_0) = \Phi(\Phi^p(x_0)) = \Phi(x_0)$$
D'où $\Phi(x_0)$ est également un point fixe Φ^p et par unicité : $\Phi(x_0) = x_0$.
D'où, x_0 est point fixe de Φ.

• Montrons qu'il est unique. Pour cela on montre que si x est un point fixe de Φ, c'est également un point fixe de Φ^p. En effet:
$$\Phi^p(x) = \Phi^{p-1}(\Phi(x)) = \Phi^{p-1}(x) = \dots = \Phi^2(x) = \Phi(\Phi(x)) = \Phi(x) = x$$
Si x et y sont deux points fixes de Φ alors ils sont points fixes de Φ^p. Comme Φ^p admet un unique point fixe, $x = y$. □

13

Cas de l'ordre n scalaire

Corollaire du théorème de CL linéaire : Soient $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in C^0(J, \mathbb{R})$ et $t_0 \in I$, $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Alors, il existe une solution et une seule $x : J \to \mathbb{R}$ de

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b \quad (*)$$

telle que : $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

D : On pose :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors $(*)$ s'écrit : $X' = AX + B$ avec $A \in C^0(J, M_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$.
Par le théorème de CL linéaire il existe une unique solution (J, X) telle que $X(t_0) = X_0$.
Alors la première composante de cette solution vérifie $(*)$ et on a bien $x(t_0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$. $\square$

14

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous informe sur la structure de l'ensemble des solutions d'une EDO linéaire.

Notons S l'ensemble des solutions maximales de $(\mathcal{L})$ $X' = AX + B$
et S_H l'ensemble des solutions maximales de $(\mathcal{L}_H)$: $X' = AX$.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire les solutions maximales de $(\mathcal{L})$ et de $(\mathcal{L}_H)$ sont globales, i.e. définies sur J tout entier.

Nous identifierons donc les éléments (J, X) de S et de S_H aux fonctions $X : J \to \mathbb{R}^n$.

Proposition (Structure de S_H) : Si $A \in C(J, M_n(\mathbb{R}))$ alors :

(i) S_H est un sev de $C(I, \mathbb{R}^n)$

(ii) Pour tout $t_0 \in I$, $\Phi_{t_0} : \begin{array}{l} S_H \to \mathbb{R}^n \\ X \mapsto X(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(iii) S_H est de dimension n.

D : (i) La fonction nulle est dans S_H donc $S_H \neq \emptyset$
Puis, si X_1 et $X_2 \in S_H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$(\lambda X_1 + \mu X_2)' = \lambda X_1' + \mu X_2' = \lambda A X_1 + \mu A X_2$$
$$= A(\lambda X_1 + \mu X_2)$$

15

D'où $\lambda X_1 + \mu X_2 \in S_H$. Enfin tout élément de S_H est C^0 sur J.

(ii) Soit $t_0 \in I$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2 \in S_H$,

$$\Phi_{t_0}(\lambda X_1 + \mu X_2) = (\lambda X_1 + \mu X_2)(t_0) = \lambda X_1(t_0) + \mu X_2(t_0)$$
$$= \lambda \Phi_{t_0}(X_1) + \mu \Phi_{t_0}(X_2)$$

d'où la linéarité de Φ_{t_0}.

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors par Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une unique solution $X \in S_H$ telle que $X(t_0) = X_0$ i.e $\Phi_{t_0}(X) = X_0$.

Donc Φ_{t_0} est bijective.

(iii) Par (ii) S_H est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ donc de dimension n. $\square$

Rq: Nous avons donné là la dimension sur le corps dans lequel les solutions sont à valeurs.
Si on considère une EDO à coefficients complexe et que l'on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ au lieu de $\mathbb{R}^n$, il faudra préciser que $\dim_{\mathbb{C}} S_H = n$ tandis que $\dim_{\mathbb{R}} S_H = 2n$.

16

Proposition (Structure de S) Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $A \in C^0(J, M_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$. L'ensemble S des solutions de $\mathcal{L}$ sur J est un espace affine de direction S_H.

D: $S \neq \emptyset$ par CL linéaire.

Soit $\tilde{X} \in S$. Si $X \in S$ on a

$$\forall t \in J,\ (X-\tilde{X})'(t) = A(t)X(t) + B(t) - (A(t)\tilde{X}(t) + B(t))$$
$$= A(t)(X(t) - \tilde{X}(t))$$

i.e $X - \tilde{X} \in S_H$ et $S \subset \tilde{X} + S_H$.

Réciproquement, si $Z \in S_H$ alors

$$(\tilde{X}+Z)' = A(t)\tilde{X}(t) + B(t) + A(t)Z(t)$$
$$= A(t)(\tilde{X}(t) + Z(t)) + B(t)$$

i.e $\tilde{X} + Z \in S$, donc $\tilde{X} + S_H \subset S$

On a bien :

$$S = \tilde{X} + S_H \qquad \square$$

Nous avons donc bien retrouvé le résultat général sur les équations linéaires :

"solution générale de l'EDO avec second membre = solution générale de l'équation homogène + solution particulière de l'équation avec second membre"

17

Exemple : (E) $x' = 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$

On commence par résoudre l'équation homogène $x' = 2x$

Alors : $S_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto Ce^{2t} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}$

Puis on cherche une solution particulière par la méthode de la "variation de la constante", soit sous la forme :

$\forall t \in \mathbb{R}, \ x_p(t) = C(t)\, e^{2t}$ avec $t \mapsto C(t)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ x_p'(t) = C'(t)e^{2t} + 2 \times C(t) e^{2t}$$
$$= (C'(t) + 2C(t))e^{2t}$$

D'où en réinjectant dans (E) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ 1 = x_p'(t) - 2x_p(t) = (C'(t) + \cancel{2C(t)})e^{2t} - \cancel{2C(t)}e^{2t}$$
$$= C'(t)e^{2t}$$

et : $\forall t \in \mathbb{R}, \ C'(t) = 1 \times e^{-2t}$

Soit pour une constante d'intégration nulle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ x_p(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} \times e^{2t} = -\frac{1}{2}.$$

(ce que l'on pouvait voir immédiatement)

Ainsi :

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto Ce^{2t} - \frac{1}{2} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}$$

IV Matrices fondamentales, résolvante

18 1. Matrices fondamentales

Avant d'introduire la notion de matrice fondamentale pour une EDO linéaire, nous donnons la conséquence suivante du résultat de structure de S_H.

Proposition : Soit $n_0 \in \{1, \dots, n\}$. Soient $X_1, \dots, X_{n_0} \in S_H$.
Alors on a équivalence entre
(i) $X_1, \dots, X_{n_0}$ sont libres dans $C^0(J, \mathbb{R}^n)$,
(ii) Pour tout $t \in J$, la famille $(X_1(t), \dots X_{n_0}(t))$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.
(iii) il existe $t_0 \in J$ tel que la famille $(X_1(t_0), \dots, X_{n_0}(t_0))$ soit libre dans $\mathbb{R}^n$.

D : Clairement : (ii) $\Rightarrow$ (iii). Montrons (iii) $\Rightarrow$ (i).
- Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_0} \in \mathbb{R}$ tels que : $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_{n_0} X_{n_0} = 0$.
D'où : $\forall t \in J$, $\lambda_1 X_1(t) + \dots + \lambda_{n_0} X_{n_0}(t) = 0$
En particulier : $\lambda_1 X_1(t_0) + \dots + \lambda_{n_0} X_{n_0}(t_0) = 0$. Par (iii) :
$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n_0} = 0$ d'où (i).

On montre de même que (ii) $\Rightarrow$ (i).
Puis, comme pour tout $t_0 \in I$, $\Phi_{t_0} : \begin{array}{l} S_H \to \mathbb{R}^n \\ X \mapsto X(t_0) \end{array}$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels, Φ_{t_0} envoie une famille libre sur une famille libre.
Donc (i) $\Rightarrow$ (iii). De même : (i) $\Rightarrow$ (ii). $\square$

Dans le cas où $n_0 = n$, on considère alors une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de solutions de $(\mathcal{L}_H)$. Si elle est libre elle est donc une base de S_H qui est de dimension n.

Déf : 19 On appelle matrice fondamentale associée à la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de S_H la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} | & & | \\ X_1 & \cdots & X_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les solutions $X_1, \ldots, X_n$.

Propriétés : (1) Par la proposition précédente, si pour un $t \in J$, $(X_1(t), \ldots, X_n(t))$ est libre, pour tout $t \in J$, $(X_1(t), \ldots, X_n(t))$ est libre donc pour tout $t \in J$, $\Phi(t)$ est inversible.

(2) On a : $\begin{array}{l} J \to M_n(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \Phi(t) \end{array}$ est de classe C^1 et

$$\Phi' = A\Phi.$$

En effet, chaque colonne de Φ vérifie $(\mathcal{L}_H)$.

(3) Si $X \in S_H$ et si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de solutions de S_H alors :

$$\exists! C \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in J, \ X(t) = \Phi(t) C$$

soit encore ; si $C = (c_1, \ldots, c_n)$,

$$X = c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n.$$

20

2. Résolvante

Parmi toutes les matrices fondamentales de $(\mathcal{L}_H)$, on retient la suivante.

Def : On appelle résolvante de $(\mathcal{L}_H)$ en $t_0 \in J$ l'application
$R_A(\cdot, t_0) : J \to M_n(\mathbb{R})$
$t \mapsto R_A(t, t_0)$
dont la i-ième colonne Ξ_i est l'unique solution sur J du problème de Cauchy : $\begin{cases} \Xi_i' = A\Xi_i \\ \Xi_i(t_0) = e_i \end{cases}$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Comme son nom l'indique, la résolvante de $(\mathcal{L}_H)$ en t_0 permet de résoudre tout problème de Cauchy en t_0.

Proposition : Pour tout $t_0 \in J$,
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} R_A(t, t_0) = A(t) R_A(t, t_0), \quad \forall t \in J \\ R_A(t_0, t_0) = I_n \end{cases}$$
En particulier, pour $X_0 \in \mathbb{R}^n$ donné, $J \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto R(t, t_0) X_0$ est l'unique solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

D : On fixe $t_0 \in J$. Alors $R_A(t_0, t_0) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \Xi_1(t_0) & \dots & \Xi_n(t_0) \\ | & & | \end{pmatrix}$

(21)

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_n \\ | & & | \end{pmatrix} = I_n.$$ L'autre identité vient du fait que $R_A(t,t_0)$ est une matrice fondamentale associée à la base de solutions $\Xi_1, \dots, \Xi_n$.

Posons alors : $\forall t \in J,\ X(t) = R_A(t,t_0) X_0$.

Alors : $\forall t \in J,\ X'(t) = \frac{d}{dt}\left(R_A(t,t_0)X_0\right) = A(t)R_A(t,t_0)X_0 = A(t)X(t)$

et on a bien $X(t_0) = R_A(t_0,t_0)X_0 = I_n X_0 = X_0$.

$\square$

L'application résolvante est un semi-groupe à un paramètre.

<u>Proposition</u> : (i) Pour tous $t_0, t_1, t_2 \in J$, $R_A(t_2,t_0) = R_A(t_2,t_1)R_A(t_1,t_0)$

(ii) Pour tous $t_0, t_1 \in J$, $\left(R_A(t_1,t_0)\right)^{-1} = R_A(t_0,t_1)$

(iii) Si $A(\cdot)$ est de classe C^k alors $t \mapsto R_A(t,t_0)$ est de classe C^{k+1}

<u>D</u> : (i) On fixe $t_0, t_1 \in J$ arbitraires et $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

Soient :

$u : \begin{array}{l} J \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto R_A(t,t_0)X_0 \end{array}$ et $v : \begin{array}{l} J \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto R_A(t,t_1)R_A(t_1,t_0)X_0 \end{array}$

Alors $v(t_1) = R_A(t_1,t_1)R_A(t_1,t_0)X_0 = I_n R_A(t_1,t_0)X_0 = u(t_1)$

De plus ;

$$\forall t \in J, \quad u'(t) = \frac{d}{dt} R_A(t,t_0)X_0 = A(t)R_A(t,t_0)X_0 = A(t)u(t)$$

et $$\forall t \in J, \quad v'(t) = \frac{d}{dt} R_A(t,t_1)\cdot R_A(t_1,t_0)X_0 = A(t)R_A(t,t_1)R_A(t_1,t_0)X_0$$
$$= A(t)\,v(t).$$

u et v sont donc solutions donc solutions de la même EDO et coïncident en t_1. Par Cauchy-Lipschitz linéaire, elles coïncident sur tout J.

Donc : $\forall t \in J, \ u(t) = v(t)$ i.e

$$\forall X_0 \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in J, \quad R_A(t,t_0)X_0 = R_A(t,t_1)R_A(t_1,t_0)X_0$$

En prenant $t = t_2$ et pour X_0 successivement tous les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient le résultat voulu.

(ii) On applique (i) avec $t_2 = t_0$:

$$I_n = R_A(t_0,t_0) = R_A(t_0,t_1)\,R_A(t_1,t_0).$$

(iii) C'est une conséquence immédiate du résultat de régularité des solutions $\square$

<u>Exemple</u> : ① Pour $n=1$, A est une fonction scalaire et on cherche à résoudre l'EDO $x' = ax$

d'où : $\forall t \in \mathbb{R}, \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad R_A(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$

23

2. Nous verrons plus loin que l'on peut aussi calculer la résolvante dans le cas où A est constante :
$$\forall (t,t_0)\in\mathbb{R}^2,\quad R_A(t,t_0)=e^{(t-t_0)A} \quad \text{(à préciser)}$$

En général il est très rare d'avoir une expression explicite pour R_A. Par contre, en étudiant la résolvante, on peut obtenir des informations qualitatives sur les solutions de $X'=AX$.