Chapitre 3 : Equations linéaires autonomes

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une équation linéaire autonome est une EDO de la forme $X' = AX$ avec $A \in M_n(\mathbb{K})$ constante !

I Un premier calcul

Avant de passer au cas autonome, regardons ce que l'on obtient lorsque l'on tente de résoudre à la main le problème de Cauchy linéaire : $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

celui-ci est équivalent à l'équation intégrale :

$$\forall t \in J,\ X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(s_0)X(s_0)\,ds_0$$

$$= X_0 + \int_{t_0}^{t} A(s_0)\left(X_0 + \int_{t_0}^{s_0} A(s_1)X(s_1)\,ds_1\right) ds_0$$

$$= X_0 + \int_{t_0}^{t} A(s_0)X_0\,ds_0 + \int_{t_0}^{t} A(s_0)\int_{t_0}^{s_0} A(s_1)\left(X_0 + \int_{t_0}^{s_1} A(s_2)X(s_2)\,ds_2\right) ds_1\,ds_0$$

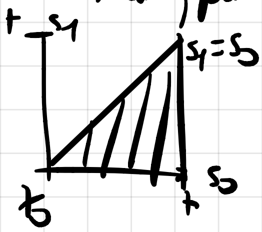
$$= X_0 + \int_{t_0}^{t} A(s_0)X_0\,ds_0 + \int_{t_0}^{t} A(s_0)\int_{t_0}^{s_0} A(s_1)X_0\,ds_1\,ds_0 + \dots$$

$$= X_0 + \left(\int_{t_0}^{t} A(s_0)\,ds_0\right)X_0 + \left[\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s_0} A(s_0)A(s_1)\,ds_1\right)ds_0\right]X_0 + \dots$$

On :

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} A(s_0)A(s_1)\,ds_1\,ds_0 = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_0} A(s_0)A(s_1)\,ds_0\,ds_1 + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{t} A(s_0)A(s_1)\,ds_0\,ds_1$$

Mais, par Fubini : $s_1 \leftrightarrow s_0$



$$\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{t} A(s_0)A(s_1)\,ds_0\,ds_1 = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_0} A(s_1)A(s_0)\,ds_1\,ds_0$$

$$\neq \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_0} A(s_0)A(s_1)\,ds_1\,ds_0 \quad \text{si } A(s_1)A(s_0) \neq A(s_0)A(s_1)$$

ce qui est le cas en général pour deux matrices.

Si on a : $\forall t, s,\ A(t)A(s) = A(s)A(t)$ alors

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} A(s_0)A(s_1)\,ds_1\,ds_0 = 2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_0} A(s_0)A(s_1)\,ds_1\,ds_2$$

②

Et on peut faire le même type de calculs pour les termes suivants : pour $s_0 \geq s_1 \geq \dots \geq s_{n-1}$:

$$\int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} A(s_0) A(s_1) \dots A(s_{n-1})\, ds_{n-1} \dots ds_0$$

permutations des $s_1, \dots, s_{n-1}$

$$= n! \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_0} \cdots \int_{t_0}^{s_{n-1}} A(s_0) \dots A(s_{n-1})\, ds_{n-1} \dots ds_0$$

D'où, en admettant la cv :

$$\forall t \in J,\ X(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} A(s_0) \dots A(s_{n-1})\, ds_{n-1} \dots ds_0 \right) X_0$$

On obtient un objet appelé l'exponentielle ordonnée :

$$\exp_{ord}\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds \right) \qquad s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots$$

qui n'est autre que la résolvante $R(t, t_0)$ de $X' = AX$.

Le problème est que cette exponentielle ordonnée ne se manipule pas aussi simplement que l'exponentielle habituelle. Pour se ramener à l'exponentielle classique on suppose $A(\cdot)$ constante égale à une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ donnée.

Dans ce cas :

$$\frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} A(s_0) \dots A(s_{n-1})\, ds_{n-1} \dots ds_0 = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} A^n\, ds_{n-1} \dots ds_0$$

$$= \frac{1}{n!} (t - t_0)^n A^n$$

et : $\forall t \in J,\ X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n = \exp((t-t_0)A)$

Ainsi dans le cas où A est constante, la résolvante de $X' = AX$ est : $\forall t, t_0 \in J,\ R(t, t_0) = \exp((t-t_0)A)$

③

II Exponentielle de matrice

1. Définition et premières propriétés

Définition : On appelle exponentielle matricielle l'application

$$\exp : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \end{array}$$

Cette application est bien définie. En effet si on se donne $\| \ \|$ une norme sur $M_n(\mathbb{K})$, par équivalence des normes elle est équivalente à la norme sous-multiplicative :

$$|||A||| = \sup_{\|X\|_2 = 1} \|AX\|_2$$ où $\| \ \|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$: $\|X\|_2 = \left(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

On a :

$$\forall k \geq 0, \ \left|\left|\left| \frac{1}{k!} A^k \right|\right|\right| \leq \frac{|||A|||^k}{k!}$$ et la série numérique $\sum \frac{|||A|||^k}{k!}$ est convergente à termes positifs.

Donc $\sum \left|\left|\left| \frac{1}{k!} A^k \right|\right|\right|$ est convergente, donc $\sum \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|$ aussi. Or $(M_n(\mathbb{K}), \| \ \|)$ est un evn de dimension finie donc complet, donc la CVU normale (uniforme) de $\sum \frac{1}{k!} A^k$ implique sa CV.

Donc la série $\sum \frac{1}{k!} A^k$ CV (normalement) pour toute norme $\| \ \|$ sur $M_n(\mathbb{K})$.

La convergence normale assure que l'exponentielle matricielle est une application C^∞.

Nous en redonnons, sans démonstration complète, les principales propriétés.

Proposition : 1. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K}) \\ t \mapsto \exp(tA) \end{array}$ est dérivable (et même analytique donc C^∞) et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

2. Si A et B commutent dans $M_n(\mathbb{K})$, alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

3. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$

4. Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$$

5. Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

D: 1. s'obtient en appliquant les résultats de régularité dans le disque de cv des séries entières.

2. Par CVN on peut faire de la sommation par paquets et obtenir ce résultat par calcul direct

⑤

3. est une conséquence de 2. avec $B = -A$.

4. s'obtient par un calcul direct : $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$

5. est également un calcul direct car $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

$\square$

De ces propriétés, on déduit le résultat suivant que l'on a déjà obtenu par un calcul direct en I.

__Théorème :__ Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. L'unique solution au problème de Cauchy linéaire et autonome $(C) \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ est donnée par $(\mathbb{R}, X)$ où $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$, $t \mapsto \exp((t-t_0)A)X_0$

En particulier : $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$, $R_A(t, t_0) = \exp((t-t_0)A)$.

D : Le calcul fait en introduction nous a déjà conduit à ce résultat. Revérifions le avec le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{(t-t_0)A}X_0\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{(t-t_0)A}\right)X_0$
$= Ae^{(t-t_0)A}X_0 = AX(t)$

De plus : $X(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}X_0 = e^0 X_0 = I_n X_0 = X_0$.

La fonction X est bien solution de (C) sur $\mathbb{R}$.

⑥ L'unicité vient de Cauchy-Lipschitz linéaire ou d'un calcul direct : soit Y une autre solution et considérons $Z : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K}) \\ t \mapsto \exp(-(t-t_0)A)Y(t)\end{array}$ Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = -Ae^{-(t-t_0)A}Y(t) + e^{-(t-t_0)A}Y'(t)$$

A et $e^{-(t-t_0)A}$ commutent

$$= -Ae^{-(t-t_0)A}Y(t) + e^{-(t-t_0)A}AY(t)$$

$$= (-Ae^{-(t-t_0)A} + e^{-(t-t_0)A})Y(t)$$

$$= 0 \times Y(t) = 0.$$

Donc Z est constante et $Z(t_0) = \exp(-0 \times A)Y(t_0)$
$= I_n X_0 = X_0.$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ Z(t) = X_0$
i.e. $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$
car $\exp(-(t-t_0)A) = (e^{(t-t_0)A})^{-1}$.

$\square$

Ainsi, la résolution des systèmes linéaires autonomes se ramène au calcul d'une exponentielle matricielle.

Dans le cas où A est diagonalisable, ce calcul est immédiat : si $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tA) = P\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$$

par 4. et 5. D'où l'unique solution à (C) est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P\begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(t-t_0)\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}X_0$$

7

On constate alors que le comportement asymptotique de X est donné par celui des $t \mapsto e^{t\lambda_i}$.
Nous verrons en détail plus loin comment étudier ce comportement.

2. Calcul de l'exponentielle d'une matrice.

Nous allons donner une méthode de calcul générale valable pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Nous expliquons ici, sans donner tous les détails des démonstrations, la réduction de Jordan-Dunford d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$\chi_A = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$$

avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$.
les sous-espaces propres $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_i)$ ne sont adapté à une décomposition complète de A que lorsque pour tout i, $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$, ce qui n'est pas forcément le cas. On introduit donc le sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre λ_i : $\Gamma_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_i)^{\alpha_i}$

(3) On a toujours $E_{\lambda_i} \subset \Gamma_{\lambda_i}$ mais cette inclusion peut être stricte.

Par le lemme de décomposition des noyaux on a :

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \Gamma_{\lambda_p}.$$

De plus, on peut montrer que :

1. $\forall i \in \{1,\dots,p\}$, $\dim \Gamma_{\lambda_i} = \alpha_i$
2. $\forall i \in \{1,\dots,p\}$, $\forall x \in \Gamma_{\lambda_i}$, $Ax \in \Gamma_{\lambda_i}$

   i.e Γ_{λ_i} est stable par A.

   On peut donc définir $A|_{\Gamma_{\lambda_i}} : \begin{array}{l} \Gamma_{\lambda_i} \to \Gamma_{\lambda_i} \\ X \mapsto AX \end{array}$

3. Il existe $N_i \in \mathcal{L}(\Gamma_{\lambda_i})$ nilpotent d'ordre plus petit que α_i (i.e. $N_i^{\alpha_i} = 0_{\mathcal{L}(\Gamma_{\lambda_i})}$) tel que

$$A|_{\Gamma_{\lambda_i}} = \lambda_i I_{\Gamma_{\lambda_i}} + N_i$$

Plus précisément, $\chi_{A|_{\Gamma_{\lambda_i}}} = (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et par trigonalisation il existe une base $\mathcal{B}_i$ de Γ_{λ_i} telle que

$$A|_{\Gamma_{\lambda_i}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$$

Si l'on concatène les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que si P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$:

$$A = P \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_p & * \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix}}_{\alpha_p} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} \lambda_p & 0 \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\alpha_p} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$:= D + N$$

avec D diagonalisable et N nilpotente.

De plus comme sur chaque bloc, $I_{n_{\lambda_i}}$ commute avec N_i, on a $DN = ND$. Enfin on peut montrer que N et D sont uniques. Résumons.

<u>Théorème</u> : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Il existe un unique couple (D, N) avec $D \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente, tel que :

$$A = D + N \quad \text{avec} \quad DN = ND.$$

On appelle cette décomposition la décomposition de Jordan-Dunford de A.

<u>Remarque</u> : Par construction, $N^\alpha = 0$ où $\alpha = \max_{1 \leq i \leq p} \alpha_i$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 0 \\ 2 & -X & 1-X \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 0 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 0 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\left[(3-X)(1-X)+1\right]$$

$$= (1-X)\left[3-X-3X+X^2+1\right]$$

$$= (1-X)\left(X^2-4X+4\right)$$

$$= (1-X)(X-2)^2$$

Donc A admet pour vps 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2. Calculons les espaces caractéristiques associés.

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_1 = \mathrm{Ker}(A-I_3)$ on a : $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$$

Donc $\Gamma_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Puis $\Gamma_2 = \mathrm{Ker}(A-2I_3)^2$.

On $(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11

D'où : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma_2 \iff -x+y=0 \iff x=y$

D'où $\Gamma_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ou plus simple : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right) = P^{-1}$$

D'où $D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

et $N = A - D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On vérifie que $N^2 = 0$:

$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12

et que $ND = DN$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où la décomposition de Jordan - Dunford de A :

$A = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

avec $D = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ pour

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

13

III. Forme des solutions de $X'=AX$

La décomposition de Jordan-Dunford permet de calculer l'exponentielle d'une matrice quelconque :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ e^{tA}=e^{t(D+N)}=e^{tD+tN}\underset{DN=ND}{=}e^{tD}e^{tN}$$

On :
$$e^{tD}=P\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_1}\end{pmatrix} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix}e^{t\lambda_p} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_p}\end{pmatrix}\end{pmatrix}P^{-1}$$

et
$$e^{tN}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(tN)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\alpha}\frac{t^k}{k!}N^k \text{ où } \alpha=\max_{1\leq i\leq p}\alpha_i$$

Nous savons que l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases}X'=AX\\X(t_0)=X_0\end{cases}$ est donnée par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=e^{(t-t_0)A}X_0$$

Si on décompose $X_0\in\mathbb{C}^n=\Gamma_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus\Gamma_{\lambda_p}$ on

$$X_0=V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_p} \text{ avec } V_{\lambda_i}\in\Gamma_{\lambda_i}$$

on peut poser pour tout $i\in\{1,\dots,p\}$ et tout $k\in\{0,\dots,\alpha_i-1\}$,

$$V_{\lambda_i,k}=\frac{1}{k!}N^kV_{\lambda_i}.$$

(14) En écrivant que $e^{(t-t_0)A}X_0 = e^{(t-t_0)D}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^k}{k!}N^k X_0$

on obtient alors :

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=\sum_{i=1}^{p} e^{(t-t_0)\lambda_i}\left(\sum_{k=0}^{\alpha_i-1}(t-t_0)^k\, V_{\lambda_i,k}\right)}$$

Dans le cas réel, i.e $A\in M_n(\mathbb{R})$ et X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $X_0\in\mathbb{R}_n$ on peut toujours se plonger dans $\mathbb{C}^n$. Pour cela on substitut aux espaces caractéristiques complexes de A les espaces :

$$\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_{\lambda_i}\cap\mathbb{R}^n \quad \text{pour } 1\leq i\leq s$$
$$\text{et } \tilde{\Gamma}_i = \left(\Gamma_{\lambda_i}\oplus\Gamma_{\bar{\lambda}_i}\right)\cap\mathbb{R}^n \quad \text{pour } s+1\leq i\leq q$$

où $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ désignent les racines réels de $\chi_A\in\mathbb{R}[X]$

et $\lambda_{s+1},\bar{\lambda}_{s+1},\dots,\lambda_q,\bar{\lambda}_q$ désignent les racines complexes conjuguées de $\chi_A\in\mathbb{R}[X]$.

Puis on prend la partie réelle de la formule complexe pour obtenir ; après décomposition de $X_0\in\tilde{\Gamma}_1\oplus\dots\oplus\tilde{\Gamma}_q=\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=\sum_{i=1}^{q} e^{(t-t_0)\mathrm{Re}(\lambda_i)}\left(\sum_{k=0}^{\alpha_i-1}(t-t_0)^k\left(\cos(\mathrm{Im}(\lambda_i)(t-t_0))a_{i,k}+\sin(\mathrm{Im}(\lambda_i)(t-t_0))b_{i,k}\right)\right)\\ \text{avec } a_{i,k}, b_{i,k}\in\tilde{\Gamma}_i\ \left(a_{i,k}=\mathrm{Re}\,\tilde{V}_{\lambda_i,k} \text{ et } b_{i,k}=-\mathrm{Im}\,\tilde{V}_{\lambda_i,k}\right)\end{gathered}}$$

(15) Dans le cas où A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, $N=0$ et on obtient une forme des solutions plus simple :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \sum_{1 \leq i \leq p} e^{(t-t_0)\mathrm{Re}(\lambda_i)}\left(\cos(\mathrm{Im}(\lambda_i)(t-t_0))\, a_i + \sin(\mathrm{Im}(\lambda_i)(t-t_0))\, b_i\right)$$

où $a_\ell + i b_\ell$ est un vecteur propre associé à λ_ℓ.

<u>Exemple</u> : On étudie le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = 2x + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

soit encore $X' = AX$ avec

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $X_0 \in \mathbb{R}^3$ fixé l'unique solution de ce système valant X_0 en $t=0$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{tA} X_0$$

$N^2 = 0 \rightarrow$

$$= P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} (I_3 + tN) X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t & -t & t \\ t & 1-t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^t & e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} & -e^{2t} \\ e^{2} & -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+t)x_0 - ty_0 + tz_0 \\ t x_0 + (1-t) y_0 + t z_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

16

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{t} & e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & -e^{2t} \\ e^{2t} & -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+t)x_0 - t y_0 + t z_0 \\ t x_0 + (1-t) y_0 + t z_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -e^{t}+e^{2t} & e^{t} & 0 \\ -e^{t}+e^{2t} & e^{t}-e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+t)x_0 - t y_0 + t z_0 \\ t x_0 + (1-t) y_0 + t z_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}\left[x_0 + t(x_0 - y_0 + z_0)\right] \\ e^{2t}\left[x_0 + t(x_0 - y_0 + z_0)\right] + e^{t}\left[y_0 - x_0\right] \\ e^{2t}\left[x_0 + t(x_0 - y_0 + z_0) - \left(y_0 + t(x_0 - y_0 + z_0)\right)\right] + e^{t}\left[y_0 - x_0\right] + e^{2t} z_0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \\ x_0 - y_0 + z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_0 - y_0 + z_0 \\ x_0 - y_0 + z_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 - x_0 \\ y_0 - x_0 \end{pmatrix}$$

IV Comportement asymptotique des solutions

A partir des formules obtenues pour les solutions complexes et réelles de $X' = AX$ on peut étudier leur comportement asymptotique.
Celui-ci va dépendre des $e^{Re(\lambda_i)t}$ donc des signes des $Re(\lambda_i)$.

On introduit pour $A \in M_n(\mathbb{C})$:

- l'espace stable : $\Gamma^s = \bigoplus_{Re(\lambda_i)<0} \Gamma_{\lambda_i}$
- l'espace instable : $\Gamma^u = \bigoplus_{Re(\lambda_i)>0} \Gamma_{\lambda_i}$
- l'espace "borné" : $\Gamma^b = \bigoplus_{Re(\lambda_i)=0} \Gamma_{\lambda_i}$

Alors : $\mathbb{C}^n = \Gamma^s \oplus \Gamma^u \oplus \Gamma^b$.

De même pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec des $\sim$: $\mathbb{R}^n = \tilde{\Gamma}^s \oplus \tilde{\Gamma}^u \oplus \tilde{\Gamma}^b$

Ces espaces sont tous stables par $e^{(t-t_0)A}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^{(t-t_0)A}\Gamma^s \subset \Gamma^s, \dots$

Ainsi, si $X_0 \in \Gamma^s$ alors : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) \in \Gamma^s$
et de même pour $\Gamma^u, \Gamma^b, \tilde{\Gamma}^s, \tilde{\Gamma}^u, \tilde{\Gamma}^b$.

(18) Pour étudier le comportement asymptotique d'une solution de $X' = AX$ on décompose donc sa condition initiale X_0 en $X_0^s + X_0^u + X_0^b$ ce qui donne une décomposition de la solution en

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \underbrace{X^s(t)}_{\in \Gamma^s \text{ ou } \tilde{\Gamma}^s} + \underbrace{X^u(t)}_{\in \Gamma^u \text{ ou } \tilde{\Gamma}^u} + \underbrace{X^b(t)}_{\in \Gamma^b \text{ ou } \tilde{\Gamma}^b}$$

Si l'un des termes $X_0^* = 0$ alors X^* correspondant est nul

On donne le comportement asymptotique pour chacun des cas.

<u>Théorème</u> : 1. $\tilde{\Gamma}^s$ (resp Γ^s) est l'ensemble des $X_0 \in \mathbb{R}^n$ (resp $\mathbb{C}^n$) tels que $\lim\limits_{t \to +\infty} \|X(t)\| = 0$.

2. $\tilde{\Gamma}^u$ (resp Γ^u) est l'ensemble des $X_0 \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) tels que

$$\lim_{t \to -\infty} \| X(t) \| = 0$$

3. $\tilde{\Gamma}^b$ (resp Γ^b) est l'ensemble des $X_0 \in \mathbb{R}^n$ (resp $\mathbb{C}^n$) pour lesquels il existe $M \geq 0$ et $C > 0$ tels que pour $|t|$ assez grand : $C^{-1} \|X_0\| \leq \|X(t)\| \leq C|t|^M \|X_0\|$

(19)

De plus pour $0 < \alpha < \min_{Re(\lambda_i)\neq 0} |Re(\lambda_i)|$, il existe $C>0$ tel que :

① si $X_0 \in \tilde{\Gamma}^s$ (resp Γ^s) alors pour $t>0$ assez grand :

$$\|X(t)\| \leq C e^{-\alpha t}\|X_0\| \quad \text{et} \quad \|X(-t)\| \geq C^{-1} e^{\alpha t}\|X_0\|$$

② si $X_0 \in \tilde{\Gamma}^u$ (resp Γ^u) alors pour $t>0$ assez grand :

$$\|X(t)\| \geq C^{-1} e^{\alpha t}\|X_0\| \quad \text{et} \quad \|X(-t)\| \leq C e^{-\alpha t}\|X_0\|$$

Dans le cas où A est diagonalisable on obtient le résultat suivant :

Théorème : $\tilde{\Gamma}^b$ est l'ensemble des conditions initiales $X_0 \in \mathbb{R}^n$ correspondant à des solutions périodiques donc bornées sur $\mathbb{R}$.

Exemples : ① Si on reprend l'exemple précédent, toutes les valeurs propres sont réelles positives donc $\mathbb{R}^3 = \tilde{\Gamma}^s$ et toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$.

② Pour $A = \begin{pmatrix} -2 & 2-i & -2+i \\ -3 & 3+i & -2-i \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

on a $\Gamma^s = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma^u = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Gamma^b = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Par exemple si $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on obtient comme solution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} e^{it} \\ e^{it} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit une solution périodique complexe de période 2π.

V EDO linéaires d'ordre m à coefficients constants.

On considère l'équation homogène :

$$\left(\mathcal{L}_H^{(m)}\right) : \quad x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \cdots + a_0 x = 0$$

avec $a_0, \ldots, a_{m-1}$ dans $\mathbb{K}$.

Alors, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(m-1)} \end{pmatrix}$ on a :

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(m-1)} \end{pmatrix}}_{X}$$

Nous sommes ramenés à l'étude du système linéaire autonome : $X' = AX$.

On remarque que : $\chi_A = (-1)^m (X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_0)$

On retrouve l'équation caractéristique de $\left(\mathcal{L}_H^{(m)}\right)$.