(1)

Chapitre 4 : Théorie générale des EDOs (non-linéaires)

Pour les EDOs générales, a priori non linéaires, il se pose trois questions :

(1) l'existence de solutions ?

(2) en cas d'existence de solutions, y-a-t-il unicité d'une solution maximale pour des conditions initiales données ?

(3) Lorsqu'elles existent, les solutions maximales sont-elles globales ? Si non, quelle est la taille d'un intervalle d'existence d'une solution et quel est le comportement aux bords de cet intervalle de la solution ?

I Existence et unicité de solutions locales

Tout d'abord, un problème de Cauchy qui n'est pas sous forme résolue peut ne pas avoir de solution.

Exemple 1 : Considérons : $(C_1)\begin{cases} x x' + t = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

L'EDO est de la forme $\Phi(t, x, x') = 0$ avec $\Phi(t, x, x') = x x' + t$, C^∞ sur $\mathbb{R}^3$.

2

Si par l'absurde (C_1) admettait une solution (I, x) avec $I \subset \mathbb{R}$, I contenant 0, pour tout $t \in I$ on pourrait intégrer $t \mapsto \Phi(t, x(t), x'(t))$ sur $[0, t]$:

$$\int_0^t x(s)x'(s) + s \, ds = c \quad \text{pour } c \in \mathbb{R}$$

Or pour $t = 0$ on a $c = 0$. D'où :

$$\forall t \in I, \ \frac{1}{2}(x(t))^2 + \frac{1}{2}t^2 = 0$$

soit encore : $\forall t \in I, \ (x(t))^2 + t^2 = 0$

et on devrait avoir : $\forall t \in I, \ t = 0$!

Cela est impossible sauf si $I = \{0\}$ ce que l'on exclu dans la définition d'une solution d'EDO.

(C_1) n'admet donc pas de solution (I, x) quel que soit $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Exemple 2 : Le problème d'existence de solution peut aussi se poser lorsque l'EDO est donné par une application qui n'est pas continue.

On considère le pb de Cauchy sur $\mathbb{R}$:

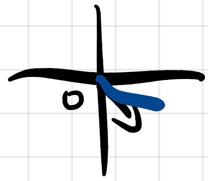
$$(C_2) \begin{cases} x' = -H(x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

avec : $\forall x \in \mathbb{R}, \ H(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En particulier, si x est solution de (C_2) sur un voisinage de 0 :

$$x'(0) = -H(x(0)) = -H(0) = -1$$

Donc comme $x(0)=0$, on devrait avoir l'existence de $\delta>0$ tel que : $\forall t \in]0;\delta[$, $x(t)<0$.
(par C^0 de x dérivable ...).



Alors, sur $]0,\delta[$, $\dfrac{x(t)}{|x(t)|} = \dfrac{x(t)}{-x(t)} = -1$

i.e. $\forall t \in]0,\delta[$, $H(x(t)) = -1$.

Cela conduit à : $\forall t \in]0,\delta[$, $x'(t) = -H(x(t)) = \underbrace{-(-1)}_{=1}$

ce qui contredit le fait que : $\forall t \in]0,\delta[$, $x'(t) < 0$
(car $x(0)=0$.

Donc pour tout I voisinage de 0, (C_2) n'admet pas de solution sur I.

Exemple 3 : Nous verrons plus loin que dans le cas d'une EDO résolue donnée par une application C^0, il y a toujours existence de solutions localement. Toutefois dans ce cas, il peut ne pas y avoir unicité à un problème de Cauchy donné.

$t>0$

$x_2'(t) = \frac{2t}{4} = \frac{t}{2}$

$t<0$, $-\frac{t}{2}$

et $\sqrt{|x_2|} = \frac{|t|}{2}$

$$(C_3) \quad \begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Alors, on vérifie que $x_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 0 \end{array}$ et

$x_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t|t|}{4} \end{array}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (C_3).

4

Mieux, pour tout $a \geq 0$, x^a définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x^a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ x_2(t-a) = \frac{(t-a)|t-a|}{4} & \text{si } t > a \end{cases}$$

est solution de (C_3) sur $\mathbb{R}$. (C_3) admet donc une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$.

Au vu de ces exemples, nous voyons que pour espérer avoir un résultat d'existence et d'unicité pour un problème de Cauchy donné, il va falloir supposer que l'on étudie une EDO sous forme résolue et qui est donnée par une application dont la régularité est plus forte que la seule C^0. En pratique, nous allons construire des solutions locales à l'aide du théorème de point fixe de Picard, nous allons donc avoir besoin d'un contrôle lipschitzien de l'application.

<u>Définition</u> : Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue. On dit que f est **localement lipschitzienne** par rapport à la deuxième variable si pour tout compact convexe $K \subset U$ il existe une constante $L = L(K) > 0$ telle que :

$$\forall (t,x),(t,y) \in K, \ \|f(t,x) - f(t,y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L \|x-y\|_{\mathbb{R}^n}$$

5

Si on peut choisir L indépendante de K, on retrouve la classe des fonctions lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Il se trouve que beaucoup de fonctions sont localement lipschitzienne. Par exemple, toutes les fonctions C^1 le sont.

Proposition: Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ avec $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert. Alors f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable dans U.

D: Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ et $K \subset U$ un compact convexe. Par le théorème des accroissements finis:

$\forall (t,X), (t,Y) \in K$,

$$\|f(t,X)-f(t,Y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sup_{(s,Z)\in K} |||D_{(s,Z)}f||| \times \|(t,X)-(t,Y)\|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$$

Or si f est C^1 sur U, elle l'est sur K et

$$\begin{aligned} K &\to \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n) \\ (s,Z) &\mapsto D_{(s,Z)}f \end{aligned}$$

est C^0 sur K compact.

Elle y est donc bornée. Notons

$$L(K) := \sup_{(s,Z)\in K} |||D_{(s,Z)}f|||$$

Notons que par définition de la norme sur

⑥

un espace produit :

$$\|(t,X)-(t,Y)\|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} = \max(|t-t|, \|X-Y\|_{\mathbb{R}^n})$$
$$= \|X-Y\|_{\mathbb{R}^n}$$

On a donc bien :

$$\forall (t,X),(t,Y)\in K, \|f(t,X)-f(t,Y)\| \leq L(K)\|X-Y\|$$

$\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de ce chapitre, le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (local) : Soit $U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U\to\mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable dans U.

Alors, pour tout $(t_0,X_0)\in U$, il existe $\delta>0$ tel que le problème de Cauchy

$$(C)\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0)=X_0 \end{cases}$$

possède une unique solution définie sur $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

(7)

La démonstration de ce théorème est très proche de celle du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et repose également sur l'usage du théorème du point fixe de Picard.

<u>D:</u> • Soit $K \subset U$ un compact tel que $(t_0, x_0) \in \mathrm{Int}(K)$.

Soit $M := \max\limits_{K} \|f(t,x)\| \geq 0$

Si $M=0$, f est nulle sur K et la solution constante égale à x_0 convient sur tout intervalle dans $p_1(U)$.

On suppose donc f non nulle sur K. Alors $M > 0$ (par C^0 de f).

Soit $L > 0$ la constante de Lipschitz de f sur K.

Fixons $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset \mathrm{Int}(K)$ et

$$\delta < \min\left(\frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{2L}\right).$$

• Soit $E = C^0([t_0-\delta, t_0+\delta], \overline{B}(x_0, \varepsilon))$.

Alors $(E, \| \|_\infty)$ est un espace complet car il est fermé dans $C^0([t_0-\delta, t_0+\delta], \mathbb{R}^n)$

8

car $\bar{B}(x_0, \varepsilon]$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$.

Précisons que
$$\forall X, Y \in E, \quad \|X-Y\|_\infty = \sup_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} \|X(t)-Y(t)\|$$

- On définit l'application
$$T: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ X \longmapsto \left(\begin{array}{l} [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \bar{B}(X_0, \varepsilon) \\ t \longmapsto X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds \end{array} \right) \end{array}$$

Vérifions que T est bien définie. Soit $X \in E$ et $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$:
$$\|(TX)(t) - X_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds \right\|$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \sup_{s \in [t_0, t]} \|f(s, X(s))\|\, ds \right|$$
$$\leq |t-t_0|\, M \leq \delta M \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$
i.e $\forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$, $(TX)(t) \in \bar{B}(X_0, \varepsilon)$ et $TX : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \bar{B}(X_0, \varepsilon)$ est bien C^0 par C^0 de f. Donc $T : E \to E$.

- Soient $X, Y \in E$ et $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$. On a:
$$\|TX(t) - TY(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, X(s)) - f(s, Y(s))\, ds \right\|$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, X(s)) - f(s, Y(s))\|\, ds \right|$$
car $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times \bar{B}(X_0, \varepsilon] \subset K$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L(K)\, \|X(s)-Y(s)\|\, ds \right|$$
$$\leq |t-t_0|\, L(K)\, \|X-Y\|_\infty \leq \delta L(K) \|X-Y\|_\infty$$

9

D'où :

$$\|TX - TY\|_\infty \leq \delta L(K) \|X - Y\|_\infty$$
$$\leq \frac{1}{2L(K)} L(K) \|X - Y\|_\infty$$
$$\leq \frac{1}{2} \|X - Y\|_\infty$$

Donc T est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet.

Par le théorème du point fixe de Picard T admet un unique point fixe dans E i.e (C) admet une unique solution $X : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\bar{B}(X_0, \varepsilon)$.

- Il nous reste à montrer que toute solution de (C) $Y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ est à valeurs dans $\bar{B}(X_0, \varepsilon)$ pour vérifier qu'il n'y a pas d'autre solution de (C) définie sur $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Supposons par l'absurde qu'une solution Y de (C) définie sur $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ sorte de $\bar{B}(X_0, \varepsilon)$ en un temps inférieur à δ et notons

$$t_1 = \inf \{ t \in]-\delta, \delta[\mid X(t_0 + t) \notin \bar{B}(X_0, \varepsilon) \}$$

Par le théorème des accroissements finis :

$$\varepsilon \leq \|X(t_1) - X_0\| \leq \left(\sup_{t \in [t_0, t_1]} \|X'(t)\| \right) |t_1 - t_0|$$
$$= \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left(\|f(t, X(t))\| \right) |t_1 - t_0| \leq M |t_1 - t_0| < M\delta$$

10

On $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$ d'où une contradiction. Donc toute solution de (C) définie sur $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ est à valeurs dans $\bar{B}(x_0,\varepsilon)$.

Il reste à prouver l'unicité.

Soit $([t_0-\delta, t_0+\delta], \tilde{x})$ une autre solution de (C).

Alors :

$$\forall t\in[t_0-\delta, t_0+\delta],\ x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds$$

et $$\tilde{x}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{x}(s))\,ds.$$

D'où :

$$\forall t\in[t_0-\delta, t_0+\delta],\ \|x(t)-\tilde{x}(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,x(s))-f(s,\tilde{x}(s))\|\,ds\right|$$

Lip k^{ème} vérifiable $\Rightarrow$ $$\leq \left|\int_{t_0}^{t} \underbrace{L(\underbrace{[t_0,t]\times\bar{B}(x_0,\varepsilon)}_{\text{compact}})}_{:=L}\ \|x(s)-\tilde{x}(s)\|\,ds\right|$$

D'où par Gronwall intégral 2 :

$$\forall t\in[t_0-\delta, t_0+\delta],\ \|x(t)-\tilde{x}(t)\| \leq \underbrace{0\times e^{L|t-t_0|}}_{=0}$$

i.e. $\forall t\in[t_0-\delta, t_0+\delta],\ x(t)=\tilde{x}(t)$, d'où l'unicité. $\square$

11 Rq : Avec les notations introduites dans la démonstration, soit V un voisinage de (t_0, x_0) dans U tel que $V + ([t_0-\delta, t_0+\delta] \times \bar{B}(x_0, \varepsilon)) \subset \mathrm{Int}(K)$.

Alors on peut reproduire la démonstration précédente pour tout couple $(t_1, x_1) \in V$ avec les mêmes δ et ε pour obtenir une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

définie sur $[t_1-\delta, t_1+\delta]$ où δ est uniforme en $(t_1, x_1) \in V$.

(on change t_0 en t_1 et x_0 en x_1)

Rappelons que le point fixe dans la démonstration est donné comme la limite de la suite $X_{n+1} = T(X_n)$ avec X_0 comme condition initiale.

Corollaire : Sous les hypothèses du thm de Cauchy-Lipschitz, la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence par $X_0(t) = x_0$ et

$$X_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X_n(s))\,ds$$ cvu vers la solution X du problème de Cauchy sur un intervalle I contenant t_0 et suffisamment petit.

Cela donne une première façon d'obtenir des approximations de la solution.

12

Nous avons vu que les équations d'ordre $n \geq 1$ peuvent toujours se ramener à des systèmes d'ordre 1 via une transformation canonique. On peut donc écrire le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas des EDOs d'ordre supérieur à 1.

Corollaire (EDO scalaires d'ordre n)

Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Pour tout $(t_0, X_0) \in U$ avec $X_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$, il existe $\delta > 0$ tel que le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x^{(n)} = \varphi(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_{0,1} \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n} \end{cases}$$
admet une unique solution locale $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$

D : Il suffit de vérifier que si on pose $X = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ définie par
$$f(t, x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, \varphi(t, x_1, \dots, x_n))$$
alors le problème de Cauchy se réécrit :
$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

13

De plus, on vérifie que f est localement lipschitzienne dans U :

$\forall K \subset U$ convexe compact, $\forall (t,X),(t,Y) \in K$,

$$\|f(t,X) - f(t,Y)\|^2 \leq \sum_{i=2}^{n} |x_i - y_i|^2 + |\varphi(t,X) - \varphi(t,Y)|^2$$

$$\leq \sum_{i=2}^{n} |x_i - y_i|^2 + M^2 \|X-Y\|^2$$

$$\leq (1+M^2) \|X-Y\|^2$$

D'où le résultat avec $L(K) = \sqrt{1+M^2}$, M étant donné par le caractère lipschitzien local de φ.

$\square$

(14)

II Solutions maximales et durée de vie

1. Solution maximales

Avant de montrer l'existence d'une unique solution maximale satisfaisant une condition initiale donnée, nous montrons un lemme de recollement de solutions.

Proposition: Soient $X : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $Y : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de $X' = f(t, X)$ définies sur des intervalles ouverts et telles que $X(t_0) = Y(t_0)$ pour un $t_0 \in I_1 \cap I_2$ donné. Alors:

(1) $\forall t \in I_1 \cap I_2,\ X(t) = Y(t)$

(2) le recollement de X et de Y est une solution sur $I_1 \cup I_2$.

Rappelons ici que le recollement de X et Y que l'on peut noter $X \sqcup Y$ est défini sur $I_1 \cup I_2$ par:

$$\forall t \in I_1 \cup I_2,\ X \sqcup Y(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } t \in I_1 \\ Y(t) & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$$

qui est bien défini lorsque $X = Y$ sur $I_1 \cap I_2$.

15

D : (1) Pour montrer (1) on montre que
$A = \{ t \in I_1 \cap I_2 \mid X(t) = Y(t) \}$ est non vide, ouvert et fermé dans $I_1 \cap I_2$ connexe. Il lui sera donc égal.

Comme $t_0 \in A$, $A \neq \emptyset$. Comme X et Y sont C^0, $A = (X-Y)^{(-1)}(\{0\})$ est fermé.

Soit $t_1 \in A$. Alors $t_1 \in I_1 \cap I_2$ et $X(t_1) = Y(t_1) = X_1$.
Par Cauchy-Lipschitz local, le problème de Cauchy
$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_1) = X_1 \end{cases}$$
admet une unique solution

Z définie sur un intervalle $[t_1 - \delta, t_1 + \delta] \subset I_1 \cap I_2$.
Par unicité, $X = Y = Z$ sur $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ car X et Y satisfont au même problème de Cauchy, donc : $\forall t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta] \subset I_1 \cap I_2$, $X(t) = Y(t)$
i.e. $[t_1 - \delta, t_1 + \delta] \subset A$ et cet intervalle contient l'ouvert $]t_1 - \delta, t_1 + \delta[\subset A$.

Donc si $t_1 \in A$, il existe $\delta > 0$, $]t_1 - \delta, t_1 + \delta[\subset A$
donc A est ouvert.

Par connexité de $I_1 \cap I_2$, $A = I_1 \cap I_2$.

16

(2) Comme $I_1 \cap I_2$ est ouvert et $t_0 \in I_1 \cap I_2$, il existe V voisinage de t_0 tel que $V \subset I_1 \cap I_2$.
Alors $X = Y$ sur V donc $X \sqcup Y$ est bien C^0 sur $I_1 \cup I_2$ et dérivable sur $I_1 \cup I_2$.
De plus on a bien :

$$\forall t \in I_1 \cup I_2, (X \sqcup Y)'(t) = \begin{cases} X'(t) & \text{si } t \in I_1 \\ Y'(t) & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(t, X(t)) & \text{si } t \in I_1 \\ f(t, Y(t)) & \text{si } t \in I_2 \end{cases} = f(t, X \sqcup Y(t))$$

Donc $X \sqcup Y$ est solution de l'EDO sur $I_1 \cup I_2$.

$\square$

On peut alors démontrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale à un problème de Cauchy donné.

Théorème : Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable dans U.
Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in U$, il existe une unique solution maximale $X_{max} :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy :

$$(C) \begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Toute autre solution de (C) est une restriction de X_{max} à un sous-intervalle de $]t_-, t_+[$

(17)

Rq : (1) Rappelons que l'intervalle de définition d'une solution maximale est toujours un ouvert car s'il était par exemple de la forme $]t_-, t_+]$, il suffirait de considérer la solution de $X' = f(t,X)$ valant $X_{max}(t_+)$ en t_+ et de la recoller avec X_{max} pour obtenir une solution sur $]t_-, t_+ + \delta]$, ce qui contredirait la maximalité de X_{max}.

(2) On a $t_-, t_+ \in \overline{\mathbb{R}}$.

D(Théorème) : Soit I_{max} la réunion de tous les intervalles ouverts contenant t_0 sur lesquels (C) admet une solution. Cette réunion est un ouvert de $\mathbb{R}$, connexe car t_0 est dans l'intersection de tous ces intervalles. C'est donc un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ donc de la forme $]t_-, t_+[$. Soit $t \in]t_-, t_+[$ et définissons $X_{max}(t)$ comme étant la valeur en t de n'importe quelle solution de (C) sur $[t_0, t]$.

18

Par (2) de la proposition sur les recollements de solutions, X_{max} est alors bien une solution de (C) sur $I_{max} =]t_-, t_+[$.
Par construction, X_{max} est un prolongement de toute autre solution.
Si $\tilde{X}_{max}$ est une autre solution maximale de (C) alors elle est aussi définie sur $]t_-, t_+[$ (sinon X_{max} en serait un prolongement strict) et

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \quad X_{max}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X_{max}(s))\,ds$$
$$\tilde{X}_{max}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{X}_{max}(s))\,ds$$

D'où :

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \quad \|X_{max}(t) - \tilde{X}_{max}(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, X_{max}(s)) - f(s, \tilde{X}_{max}(s))\|\,ds \right|$$

$$\xrightarrow[\text{var}]{\text{Lip } / \text{ 2ème}} \leq \left| \int_{t_0}^{t} L \|X_{max}(s) - \tilde{X}_{max}(s)\|\,ds \right|$$

Et par Gronwall :

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \quad \|X_{max}(t) - \tilde{X}_{max}(t)\| \leq 0 \times e^{L|t-t_0|} = 0$$

D'où : $X_{max} = \tilde{X}_{max}$

ce qui prouve l'unicité de la solution maximale

$\square$

19

2. Durée de vie

Commençons par étudier un exemple.

Exemple : Considérons $x' = x^2$ définie par
$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto x^2.$$

Tout d'abord, soit x solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, définie sur un intervalle $]t_-, t_+[$. Supposons $x_0 \neq 0$. Si x s'annule en un point t_1 de $]t_-, t_+[$ par unicité dans Cauchy-Lipschitz, x est la fonction nulle sur $]t_-, t_+[$. En effet, les deux fonctions, x et $\tilde{0}$ sont solutions de
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_1) = 0 \end{cases}.$$

Donc si $x_0 \neq 0$, x ne s'annule pas sur $]t_-, t_+[$ et on peut écrire :

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \quad \frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1 \text{ . D'où :}$$

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \quad \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x^2(s)}\,ds = t - t_0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]t_-, t_+[, \quad \left[-\frac{1}{x(s)}\right]_{t_0}^{t} = t - t_0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]t_-, t_+[, \quad -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} = t - t_0$$

20

$\Leftrightarrow \forall t \in]t_-, t_+[, \quad \frac{1}{x(t)} = -(t-t_0) + \frac{1}{x_0}$

$\Leftrightarrow \forall t \in]t_-, t_+[, \quad x(t) = \frac{x_0}{1-(t-t_0)x_0}$

Cette expression a un sens sur $]t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty[$ si $x_0 > 0$ et sur $]-\infty, t_0 - \frac{1}{x_0}[$ si $x_0 < 0$.
Bien entendu si $x_0 = 0$, on peut prendre $]t_-, t_+[= \mathbb{R}$, on retrouve la solution nulle sur $\mathbb{R}$.

On voit en particulier que pour $x_0 \neq 0$, $]t_-, t_+[\neq J = \mathbb{R}$, les solutions maximales ne sont pas globales.

On constate également, pour $x_0 > 0$, que si $t \to (t_0 - \frac{1}{x_0})^+$, $x(t) \to +\infty$.

Ce comportement asymptotique au bord d'un intervalle maximal d'existence d'une solution d'une EDO est en fait général.

Théorème (Sortie de tout compact).

Soit $X :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^m$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$ où $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

21

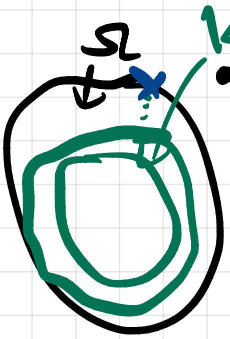
Si $t_+ < \sup J$ alors $x(t)$ sort de tout compact $K \subset \Omega$ lorsque t tend vers t_+

i.e. $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists\ \tilde{t} = \tilde{t}(K)$ tel que $\tilde{t} < t_+$ et $x(\tilde{t}) \notin K$.

Le même résultat est vrai en t_-, lorsque $\inf J < t_-$.

On aura essentiellement deux situations dans lesquelles ce résultat de sortie de tout compact va s'appliquer :

- si $\Omega = \mathbb{R}^n$ alors on aura :
  $\lim_{t \to t_+} \|X(t)\| = +\infty$: explosion en temps fini.



- si Ω est un ouvert à bord borné, $X(t)$ va tendre vers un point de $\partial\Omega$ lorsque t tend vers t_+.

D (Théorème) : Soit $X :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ et une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(22)

d'éléments de $]t_-, t_+[$ qui converge vers t_+ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X(t_n) \in K$.

Par compacité de K, $(X(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente i.e. $\exists \varphi \uparrow_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}, \exists X_+ \in K$

$$X(t_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X_+.$$

En particulier :

$$(t_{\varphi(n)}, X(t_{\varphi(n)})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (t_+, X_+) \in J\times\Omega$$

Par Cauchy-Lipschitz local,

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_+) = X_+ \end{cases}$$

admet une solution sur un intervalle $]t_+-\delta, t_+ + \delta[$ avec δ qui convient partout

$\subset I$ $(\hat{t}, \hat{x})$ dans un voisinage V de $(t_+, X_+) \in J\times\Omega$.

Soit $N \geq 1$ tel que $(t_{\varphi(N)}, X(t_{\varphi(N)})) \in V$ et tel que $t_{\varphi(N)} + \delta > t_+$.

Soit alors $Y :]t_{\varphi(N)} - \delta, t_{\varphi(N)} + \delta[\to \mathbb{R}^n$ l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = f(t,Y) \\ Y(t_{\varphi(N)}) = X(t_{\varphi(N)}) \end{cases}$$

23

Par recollement de X et Y on obtient une solution Z définie sur l'intervalle $]t_-, t_N+\delta[$ qui contient strictement $]t_-, t_+[$ et $(]t_-, t_N+\delta[, Z)$ est donc un prolongement strict de $(]t_-, t_+[, X)$ ce qui contredit la maximalité de cette dernière.

Donc : $\forall K \subset \Omega$ compact, $\forall (t_n) \in]t_-, t_+[^{\mathbb{N}}$ il existe $N \in \mathbb{N}$, $X(t_N) \notin K$.

$\square$

Nous déduisons de ce résultat de sortie de tout compact une condition suffisante pour que $t_+ = \sup J$.

<u>Corollaire</u> : • Si l'image d'une solution maximale $X :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ est contenue dans un compact $K \subset \Omega$ alors $t_+ = \sup J$. et $t_- = \inf J$.

• S'il existe $K \subset \Omega$ compact tel que : $\forall t \in [t_0, t_+[$, $X(t) \in K$, alors $t_+ = \sup J$.

24

Exemple : On considère le problème de Cauchy sur $[0,+\infty[$:

$$(C)\begin{cases} x'(t) = \lambda + \dfrac{x^2(t)}{1+t^2} & \text{pour } t\geq 0,\ \lambda > \dfrac{1}{4} \\ x(0)=0 \end{cases}$$

Par Cauchy-Lipschitz, (C) admet une unique solution maximale sur un intervalle de la forme $[0, t_+[$ car $(t,x)\mapsto \lambda + \frac{x^2}{1+t^2}$ est C^1 donc loc lip / 2ème var.

Pour $t\in[0,t_+[$, on pose : $x(t) = y(t)\sqrt{1+t^2}$

soit encore $y(t) = \dfrac{x(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ et $y^2(t) = \dfrac{x^2(t)}{1+t^2}$

Alors : $\forall t\in[0,t_+[$, $x'(t) = y'(t)\sqrt{1+t^2} + \dfrac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1+t^2}}\, y(t)$

soit encore : $\forall t\in[0,t_+[$, $y'(t)\sqrt{1+t^2} = x'(t) - \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, y(t)$

$$= \lambda + y^2(t) - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, y(t)$$

Or, $x'(t) > \frac{1}{4}$ pour $t>0$ donc $y'(t)>0$ pour $t>0$ et y est strictement croissante sur $[0,t_+[$.

De plus $y(0)=x(0)=0$ donc $y(t)>0$ sur $]0,t_+[$.

D'où : $\forall t\in[0,t_+[$, $y'(t)\sqrt{1+t^2} \leq \lambda + y^2(t)$.

De plus $y^2+\lambda - y \leq y'\sqrt{1+t^2}$ car : $\forall t\geq 0$, $\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\in[0,1[$ et $y\geq 0$ sur $[0,t_+[$.

On a donc :

$(*)$ $\forall t\in[0,t_+[$ $y^2(t) - y(t) + \lambda \leq y'(t)\sqrt{1+t^2} \leq y^2(t)+\lambda$

25

De plus, on remarque que pour $\lambda > \frac{1}{4}$, $X \mapsto X^2 - X + \lambda$ est une fonction polynomiale strictement positive.

D'où :

$$\forall t \in [0, t_+[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{y'(t)}{y^2(t) - y(t) + \lambda}$$

et : $\forall t \in [0, t_+[$, $\dfrac{y'(t)}{y^2(t)+\lambda} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

Ainsi :

$$\forall t \in [0, t_+[, \quad \frac{y'(t)}{y^2(t)+\lambda} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{y'(t)}{y^2(t)-y(t)+\lambda} \quad (**)$$

Pour $t \in [0, t_+[$, on intègre entre 0 et t les inégalités $(**)$: $\forall t \in [0, t_+[$,

$$\int_0^t \frac{y'(s)\,ds}{y^2(s)+\lambda} \leq \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \leq \int_0^t \frac{y'(s)\,ds}{y^2(s)-y(s)+\lambda}$$

On pose $u = y(s)$, changement de variable licite car y est une bijection strictement $\nearrow$ de $[0,t]$ sur $[0, y(t)]$

Il vient : (avec $du = y'(s)\,ds$)

$$\int_0^{y(t)} \frac{du}{u^2+\lambda} \leq \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \leq \int_0^{y(t)} \frac{du}{u^2-u+\lambda} \underset{\text{par positivité}}{\leq} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2-u+\lambda} < +\infty$$

Si par l'absurde $t_+ = +\infty$ alors on aurait

$$+\infty = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2-u+\lambda} < +\infty.$$

en faisant tendre t vers $+\infty$.

Donc $t_+ < +\infty$ et par le théorème de sortie de tout compact $y(t) \xrightarrow{t \to t_+} +\infty$ et $x(t) \xrightarrow{t \to t_+} +\infty$

26

Essayons d'estimer t_+. On a :

$$\forall t \in [0, t_+[,\ \int_0^{y(t)} \frac{du}{u^2+\lambda} \leq \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \leq \int_0^{y(t)} \frac{du}{u^2-u+\lambda}$$

et si on fait tendre t vers $t_+ < +\infty$; $y(t) \to +\infty$ et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+\lambda} \leq \int_0^{t_+} \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2-u+\lambda}$$

On : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)^2} = \frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{\lambda}\, \text{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]_0^{+\infty}$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$$

$$\int_0^{t_+} \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \left[\text{Argsh}\right]_0^{t_+} = \text{Argsh}(t_+)$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2-u+\lambda} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\lambda-\frac{1}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}\right)^2}$

$$= \frac{1}{\lambda-\frac{1}{4}}\left[\sqrt{\lambda-\tfrac{1}{4}}\, \text{Arctan}\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}\left(\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{4\lambda-1}}\right)\right) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{4\lambda-1}}$$

D'où, par croissance de sh :

$$\text{sh}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) \leq t_+ \leq \text{sh}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{4\lambda-1}}\right)$$

27

IV Solutions globales

Nous commençons par donner un théorème de Cauchy-Lipschitz global qui généralise le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que f est globalement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable lorsque : il existe $L > 0$,

$$\forall t \in J, \forall x, y \in \Omega, \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|$$

Théorème (Cauchy-Lipschitz global) :

Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et globalement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Pour tout $t_0 \in J$ et $x_0 \in \Omega$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution globale (J, x).

28

Nous ne démontrerons pas en détails ce théorème, la démonstration étant en presque tous points similaire à celle du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.
Bien entendu, ce théorème de Cauchy-Lipschitz global contient le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire puisque si $f : x \mapsto Ax + B$ alors

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq |||A||| \, \|x - y\| \quad (L = |||A|||).$$

Il n'est pas nécessaire d'avoir une fonction f globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable pour avoir une solution globale. Il suffit que f soit localement lipschitzienne et que f satisfasse une condition de croissance non-linéaire

Une autre façon de démontrer l'existence de solutions globales est de passer par l'existence d'une intégrale première du mouvement qui a de bonnes propriétés
Nous allons traiter l'exemple des équations de Newton. Nous reviendrons plus tard dans ce cours sur la notion d'intégrales premières associées à une EDO.

29

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On considère l'équation autonome d'ordre 2 :

$$(N) \quad x'' = g(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ on a :

$$(\tilde{N}) \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = g(x_1(t)) \end{cases}$$

soit encore $X' = f(t, X)$ avec $f(t, X) = (x_2, g(x_1))$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, indépendante de t et qui satisfait donc les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz local.

On définit la fonction énergie potentielle :

$$U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto -\int_0^s g(\tau)\, d\tau$$

et la fonction énergie totale :

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2} x_2^2 + U(x_1)$$

Montrons qu'il y a "conservation de l'énergie", au sens où la fonction E

est constante le long des trajectoires des solutions de (N).

En effet, si $X = (x_1, x_2)$ est une solution de $(\tilde{N})$ sur un intervalle $]t_-, t_+[$, on a :

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \ \frac{d}{dt} E(x_1(t), x_2(t)) = x_2'(t)\, x_2(t) + x_1'(t)\, U'(x_1(t))$$

$x_2'(t)$

$$= x_2(t)\, g(x_1(t)) + x_2(t)\left(-g(x_1(t))\right)$$

$$= 0$$

Donc $t \mapsto E(x_1(t), x_2(t))$ est constante sur $]t_-, t_+[$.

On suppose de plus que l'énergie potentielle est bornée inférieurement i.e.

$$\exists c_0 \in \mathbb{R}, \ \forall s \in \mathbb{R}, \ U(s) = -\int_0^s g(\tau)\, d\tau \geq c_0.$$

Toujours pour $X = (x_1, x_2)$ solution maximale de $(\tilde{N})$ définie sur $]t_-, t_+[$, on note $c \in \mathbb{R}$ la constante telle que :

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \ E(x_1(t), x_2(t)) = c$$

(31) Alors :

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \quad c = \frac{(x_2(t))^2}{2} + U(x_1(t)) \geq \frac{1}{2}(x_2(t))^2 + c_0$$

En particulier $c \geq c_0$ et on a :

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \quad |x_2(t)| \leq 2\sqrt{c - c_0}$$

De plus :

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \quad x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t x_1'(s)\,ds$$
$$= x_1(0) + \int_0^t x_2(s)\,ds$$

D'où :

$$\forall t \in]t_-, t_+[, \quad |x_1(t)| \leq |x_1(0)| + \int_0^t |x_2(s)|\,ds$$
$$\leq |x_1(0)| + 2t\sqrt{c - c_0}$$

En particulier, x_2 est bornée et x_1 est bornée sur les intervalles bornés.

Si $t_+ < +\infty$ alors X est bornée sur $[0, t_+]$ ce qui contredit le théorème de sortie de tout compact. Donc $t_+ = +\infty$

De même $t_- = -\infty$ et X est globale.

Par exemple, pour $g(s) = -s^3$ on a

$$U(s) = -\int_0^s (-\tau^3)\, d\tau = \frac{s^4}{4} \geq 0$$

Donc les solutions du système

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1^3 \end{cases}$$

ou de manière équivalente de l'EDO $x'' = -x^3$ sont globales.

Notons que $f(t, x_1, x_2) = (x_2, -x_1^3)$ ne satisfait pas la condition de sous-linéarité du résultat précédent.

V Continuité par rapport aux données.

1. Continuité par rapport aux conditions initiales

Rappelons tout d'abord que si $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ c'est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, si on fixe $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$, il existe :

(i) V un voisinage de (t_0, x_0)

(ii) $I \subset J$ un intervalle non trivial

(iii) $K \subset U = J \times \Omega$ un compact

(33)

telsque :

- $\forall (t_1, x_1) \in V$, la solution X du problème de Cauchy
$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_1) = x_1 \end{cases}$$
est définie sur I
- $\forall (t_1, x_1) \in V$, le graphe de cette solution est inclus dans K.

On considère à présent X et Y les solutions définies sur I respectivement des problèmes de Cauchy :
$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_1) = X_1 \end{cases}$$

Théorème : Il existe des constantes $L, M > 0$ telles que :
$$\forall t \in I,\ \|X(t) - Y(t)\| \leq \left(\|X_0 - X_1\| + M|t_1 - t_0|\right) e^{L|t-t_0|}$$
En particulier, si $t_1 = t_0$, on a :
$$\forall t \in I,\ \|X(t) - Y(t)\| \leq \|X_0 - X_1\| e^{L|t-t_0|}$$

(34) <u>Rq</u>: La borne dans la deuxième inégalité peut être atteinte comme le montre l'exemple élémentaire de $x' = ax$, $a > 0$.

Il s'agit là de "l'effet papillon".

En effet : $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$

et $y(t) = x_1 e^{a(t-t_0)}$

d'où :

$$|x(t) - y(t)| = |x_0 - x_1| e^{a(t-t_0)}.$$

<u>D(Théorème)</u> : Rappelons que par la formulation intégrale du problème de Cauchy, pour $t \in I$:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\,ds$$

et $$Y(t) = X_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, Y(s))\,ds$$

Donc :

$$\|X(t) - Y(t)\| \leq \|X_0 - X_1\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\,ds - \int_{t_1}^{t} f(s, Y(s))\,ds \right\|$$

Or, $$\int_{t_1}^{t} f(s, Y(s))\,ds = \int_{t_1}^{t_0} f(s, Y(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} f(s, Y(s))\,ds$$

D'où :

$$\|X(t) - Y(t)\| \leq \|X_0 - X_1\| + \left\| \int_{t_1}^{t_0} f(s, Y(s))\,ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, X(s)) - f(s, Y(s))\,ds \right\|$$

(35)

Soit alors $M = \max_{(t,x)\in K} \|f(t,x)\|$. Il vient,

en notant $L>0$ la constante de Lipschitz de f / $2^{\text{ème}}$ variable :

$$\|X(t)-Y(t)\| \leq \|x_0 - x_1\| + M|t_1-t_0| + L\int_{t_0}^{t} \|X(s)-Y(s)\|ds$$

Par le lemme de Gronwall :

$$\forall t\in I, \|X(t)-Y(t)\| \leq \left(\|x_0-x_1\| + M|t_1-t_0|\right) e^{L|t-t_0|}$$

$\square$

2. Perturbations uniformes de l'EDO.

Proposition : Soit $\varepsilon > 0$ et soient $f, g : J \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ C^0 et localement Lipschitziennes / 2ème var telles que : $\|f - g\|_{\infty, J} \leq \varepsilon$.

Supposons qu'il existe un intervalle $I \subset J$ tel que les solutions X et Y de

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y' = g(t, Y) \\ Y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

pour $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ fixé soient définies sur I. Alors, il existe $L > 0$,

$$\forall t \in I, \ \|X(t) - Y(t)\| \leq \varepsilon |t - t_0| e^{L|t - t_0|}$$

Cette estimée est intéressante pour des t proches de t_0. Elle devient vite imprécise si t s'en éloigne du fait du facteur exponentiel.