

① Chapitre 5 :

Introduction à l'étude qualitative des EDOs

I Barrières et entonnoirs

Dans cette première partie on se place dans le cadre des EDO d'ordre 1 à valeurs scalaires ($m=1$).

On fixe $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f:]a, b[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue!

Définition (Barrières) (1) Une fonction $\alpha:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$

de classe C^1 est une **barrière inférieure (stricte)** pour l'EDO $x' = f(t, x)$ si pour tout $t \in]a, b[$,
 $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$ (resp. **$\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$**)

(2) Une fonction $\beta:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une **barrière supérieure (stricte)** pour l'EDO $x' = f(t, x)$ si pour tout $t \in]a, b[$:

$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t))$ (resp. **$\beta'(t) > f(t, \beta(t))$**)

Exemple: On considère (E) $x' = f(t, x) = x^2 - t^2$ sur \mathbb{R} .

Alors, $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto -t$ est une barrière inférieure stricte pour (E).

②

En effet:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha'(t) = -1 < f(t, \alpha(t)) = (-t)^2 - t^2 = 0$$

De même, $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto t$ est une barrière supérieure

stricte pour (E):

$$\forall t \in \mathbb{R}, \beta'(t) = 1 > f(t, \beta(t)) = t^2 - t^2 = 0.$$

En pratique, pour trouver des barrières, il suffit de "minorer" ou "majorer" l'EDO.

Proposition: Soient $f, g:]a, b[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que:

$$\forall (t, x) \in]a, b[\times \mathbb{R}, f(t, x) \leq g(t, x).$$

Alors les solutions de $x' = g(t, x)$ sont des barrières supérieures pour $x' = f(t, x)$ et les solutions de $x' = f(t, x)$ sont des barrières inférieures pour $x' = g(t, x)$. (sur leurs intervalles d'existence)

D: Si (I, β) est solution de $x' = g(t, x)$ alors
 $\forall t \in I, \beta'(t) = g(t, \beta(t)) \geq f(t, \beta(t)).$

De même si (J, α) est solution $x' = f(t, x)$ alors
 $\alpha'(t) = f(t, \alpha(t)) \leq g(t, \alpha(t)).$

□

③

Exemple: On considère (E) : $x' = 1 + \frac{(\cos x)^2}{t^2}$
sur $]0, +\infty[$.

Posons : $f(t, x) = 1 + \frac{(\cos x)^2}{t^2}$.

On a :

$$g_1(t, x) := 1 \leq f(t, x) \leq g_2(t, x) := 1 + \frac{1}{t^2}.$$

Ainsi, les solutions de $x' = g_1(t, x)$ sont des barrières inférieures pour (E) et celles de $x' = g_2(t, x)$ en sont des barrières supérieures.

On résout ces deux EDOs pour obtenir que les fonctions $t \mapsto t + C$, $C \in \mathbb{R}$ sont des barrières inférieures et les fonctions $t \mapsto t - \frac{1}{t} + C$ sont des barrières supérieures.

L'intérêt des barrières tient au fait qu'elles "contrôlent" le comportement des solutions de l'EDO.

④

lemme des barrières: Soit $f:]a, b[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{c_0}$.

Soit α (resp. β) une barrière inférieure (resp. supérieure) stricte pour $x' = f(t, x)$.

Soit $t_0 \in]a, b[$ et soit x_0 tel que $\alpha(t_0) \leq x_0$ (resp. $\beta(t_0) \geq x_0$).

Soit $(]t_-, t_+[, x)$ une solution maximale de $x' = f(t, x)$ telle que $x(t_0) = x_0$. Alors:

$\forall t \in]t_-, t_+[, \alpha(t) \leq x(t)$ (resp. $x(t) \leq \beta(t)$).

D: MQ: $\{t \in]t_-, t_+[, \alpha(t) > x(t)\} = \emptyset$.

— s'il est non vide soit $t_1 = \inf \{t \in]t_-, t_+[, \alpha(t) > x(t)\}$

Si $t_1 \in \{t \in]t_-, t_+[, \alpha(t) > x(t)\}$ alors $\alpha(t_1) > x(t_1)$
et en particulier ceci implique que $t_1 > t_0$ car (t_0, x_0)
vérifie $\alpha(t_0) \leq x_0 = x(t_0)$.

Par C^0 de x et de α , il existerait $t_2 \in]t_0, t_1[$ tel que

$\forall t \in]t_2, t_1[, \alpha(t) > x(t)$

ce qui contredirait la minimalité de t_1 .

Donc $t_1 \notin \{t \in]t_-, t_+[, \alpha(t) > x(t)\}$ et $\alpha(t_1) \leq x(t_1)$.

Si $\alpha(t_1) < x(t_1)$, t_1 par C^0 de x et α il existerait
 $t_3 > t_1$ tel que $\forall t \in]t_1, t_3[, \alpha(t) < x(t)$.

ce qui impliquerait que $\forall t \in]t_1, t_3[, \alpha(t) < x(t)$.

et on ne peut pas avoir $t_1 \in]t_0, t_3[$.

donc $\alpha(t_1) = x(t_1)$.

(5)

Alors, pour $t \leq t_1$, $\alpha(t) \leq x(t)$ et :

$$\frac{(x-\alpha)(t) - (x-\alpha)(t_1)}{t-t_1} = \frac{x(t) - \cancel{x(t_1)} + \cancel{\alpha(t_1)} - \alpha(t)}{t-t_1} \leq 0$$

En passant à la limite quand $t \rightarrow t_1^-$: $(x-\alpha)'(t_1) \leq 0$

D'où : $f(t_1, x(t_1)) = x'(t_1) \leq \alpha'(t_1) < f(t_1, \alpha(t_1))$

Mais ceci est impossible car $f(t_1, x(t_1)) = f(t_1, \alpha(t_1))$

puisque $x(t_1) = \alpha(t_1)$.

Finalement, l'hypothèse $\exists t \in [t_0, t_1] \mid \alpha(t) > x(t)$ conduit toujours à une contradiction.

Dans le cas d'une barrière supérieure stricte, la démonstration est identique en changeant les inégalités.

□

Exemple : On considère (L) $x' = t + x^2 \sin t$, $t \in \mathbb{R}$.

Pour $\gamma > 0$, la solution maximale (I_γ, x_γ) du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = \gamma^2 + x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ pour $t_0 > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

est donnée par : $I_\gamma =] \max(0, t_0 - \frac{\pi}{2\gamma}), t_0 + \frac{\pi}{2\gamma} [$

et $\forall t \in I_\gamma$, $x_\gamma(t) = \gamma \tan(\gamma(t - t_0))$.

Alors, pour $t \geq t_0$ et $0 < \gamma < \sqrt{t}$ on a :

$$x_\gamma'(t) = \gamma^2 + x_\gamma^2(t) < t_0 + x_\gamma^2(t) \leq t + x_\gamma^2(t)$$

Donc (I_γ, x_γ) est une barrière inférieure stricte

(6)

pon (L). Soit alors (I, α) la solution maximale de $\begin{cases} x' = t + x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$. Alors par le lemme des

barrières :

$$\forall t \in I_\gamma \cap I \cap [t_0, +\infty[, x_\gamma(t) \leq x(t).$$

En particulier, $I \cap [t_0, +\infty[\subset [t_0, t_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{t_0}}[$
car $x_\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{t_0}}]{} +\infty$. Comme cela est vrai pour
tout $\gamma \in]0, \sqrt{t_0}[$, on en déduit que

$$I \cap [t_0, +\infty[= [t_0, t_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{t_0}}[.$$

Par le théorème de sortie de tout compact :

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{t_0}}} x(t) = +\infty.$$

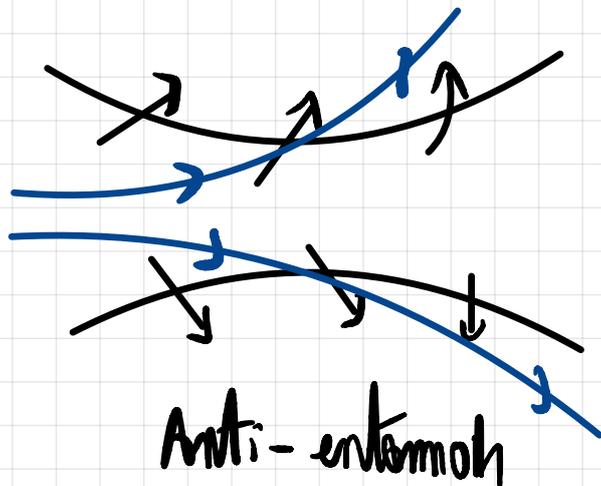
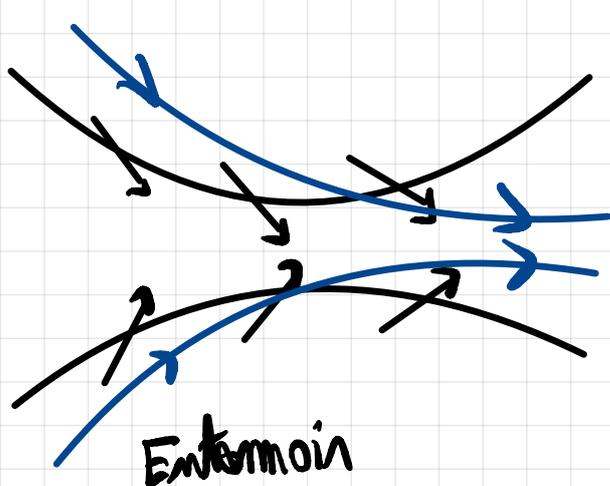
En combinant les notions de barrières inférieures et supérieures, on obtient une zone de confinement pour les solutions. Cette zone est appelée un entonnai.

Définition : Soient α une barrière inférieure (strict) et β une barrière supérieure (strict) pour l'EDO $x' = f(t, x)$.

(1) Si $\alpha < \beta$ alors $\{(t, x) \mid \alpha(t) < x < \beta(t)\}$ est appelé entonnai pour $x' = f(t, x)$ (strict)

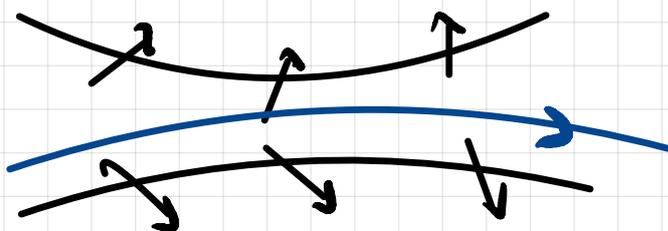
(2) Si $\alpha > \beta$ alors $\{(t, x) \mid \alpha(t) > x > \beta(t)\}$ est appelé un anti-entonnai (strict)

(7)



Bien entendu, en combinant les résultats sur les bornes strictes, on obtient que si (t_0, x_0) est dans un entremoi strict pour $x' = f(t, x)$ alors la solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ reste dans cet entremoi pour $t \in [t_0, t_0 + \epsilon]$.

Ce qui est par contre plus surprenant est le fait qu'il existe, pour un anti-entremoi strict donné, une condition initiale (t_0, x_0) dans cet anti-entremoi strict qui correspond à une solution "protégée" dans celui-ci.



Exemple: On considère l'EDO $x' = x^2 - t$ pour $t > 0$.

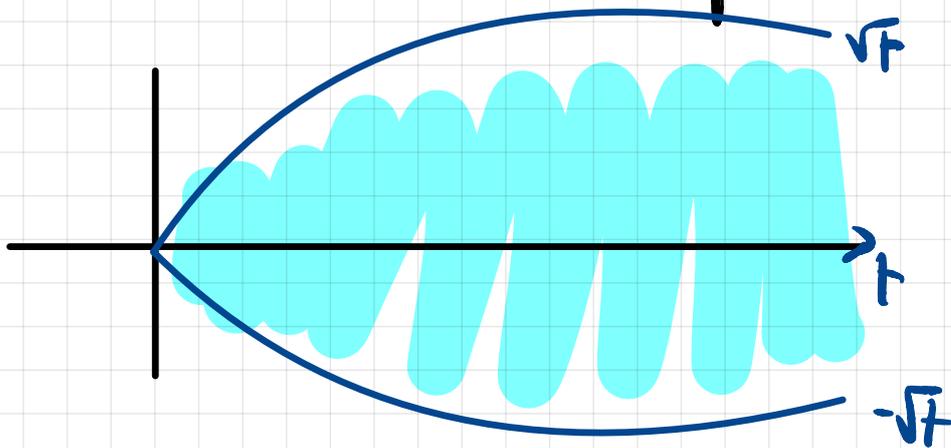
Soient $\alpha:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\beta:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto -\sqrt{t}$ et $t \mapsto \sqrt{t}$

Alors pour $t > 0$:

$$\alpha'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} < 0 = f(t, \alpha(t)).$$

(8) Donc a est une barrière inférieure stricte.
Puis : $\beta'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0 = f(t, \beta(t))$

Donc β est une barrière supérieure stricte.
Donc $\{(t, x) \in]0, t_0[\times \mathbb{R} \mid -\sqrt{t} \leq x \leq \sqrt{t}\}$
est un entonnoir strict pour $x' = x^2 - t$.



II Intégrales premières

Les notions de barrières et d'entonnoirs permettent de localiser dans des régions du plan les courbes de solutions d'une EDO donnée. Dans certains cas on peut localiser plus précisément ces courbes dans des courbes de niveaux de certaines fonctions associées à l'EDO.

Les solutions des EDOs autonomes conservent parfois une ou plusieurs quantités. C'est par exemple le cas de l'énergie pour les équations issues d'un système physique.

(9) Définition (Intégrale première) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un

ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 . Une fonction $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est appelée intégrale première de l'EDO autonome $x' = f(x)$ si pour toute solution X de l'EDO, on a $\frac{d}{dt} [E(X(t))] = 0$. i.e. E est constante le long des orbites de l'EDO.

L'intérêt des intégrales premières est que les solutions des EDOs auxquelles elles sont associées sont contenues dans leurs courbes de niveaux.

Pour $c \in \mathbb{R}$ on note :

$$E_c = \{ \gamma \in \Omega \mid E(\gamma) = c \}$$

la courbe de niveau c de la fonction E .

Proposition: Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 . Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \Omega$. Supposons qu'il existe une intégrale première $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pour l'EDO $x' = f(x)$. Alors, pour toute solution (I, X) de $x' = f(x)$ avec $X(t_0) = x_0$ (on suppose $t_0 \in I$), la trajectoire (t, X) est contenue dans la courbe de niveau $E(x_0)$ de E .

(10) D: On a: $\forall t \in I, E(X(t)) = E(X(t)) = E(X_0)$.

Donc $\{X(t) | t \in I\} \subset E_{F(X_0)}$.

□

Précisons un point de vocabulaire.

Definition: La trajectoire d'une solution maximale (I, X) de $X' = f(X)$ est l'ensemble: $\{X(t) | t \in I\}$

Si on se donne $X_0 \in \Omega$, on appelle **orbite** de l'EDO $X' = f(X)$ passant par X_0 la trajectoire de l'unique solution maximale passant par X_0 (on se place bien entendu dans les hypothèses de C-1).

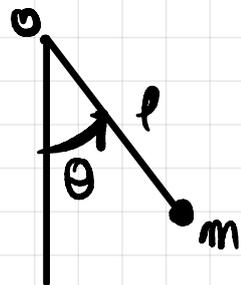
On peut préciser la proposition précédente: il se trouve qu'en fait les trajectoires des solutions maximales sont exactement les composantes connexes des courbes de niveau de E .

Exemple 1: le pendule simple.

Rappelons que si

$$\text{alors: } \theta'' + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (P)$$

avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, ω fréquence (s^{-1})



En multipliant par θ' on remarque que :

$$0 = \theta' \theta'' + \theta \omega_0^2 \sin \theta = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\theta')^2 - \omega_0^2 \cos \theta \right]$$

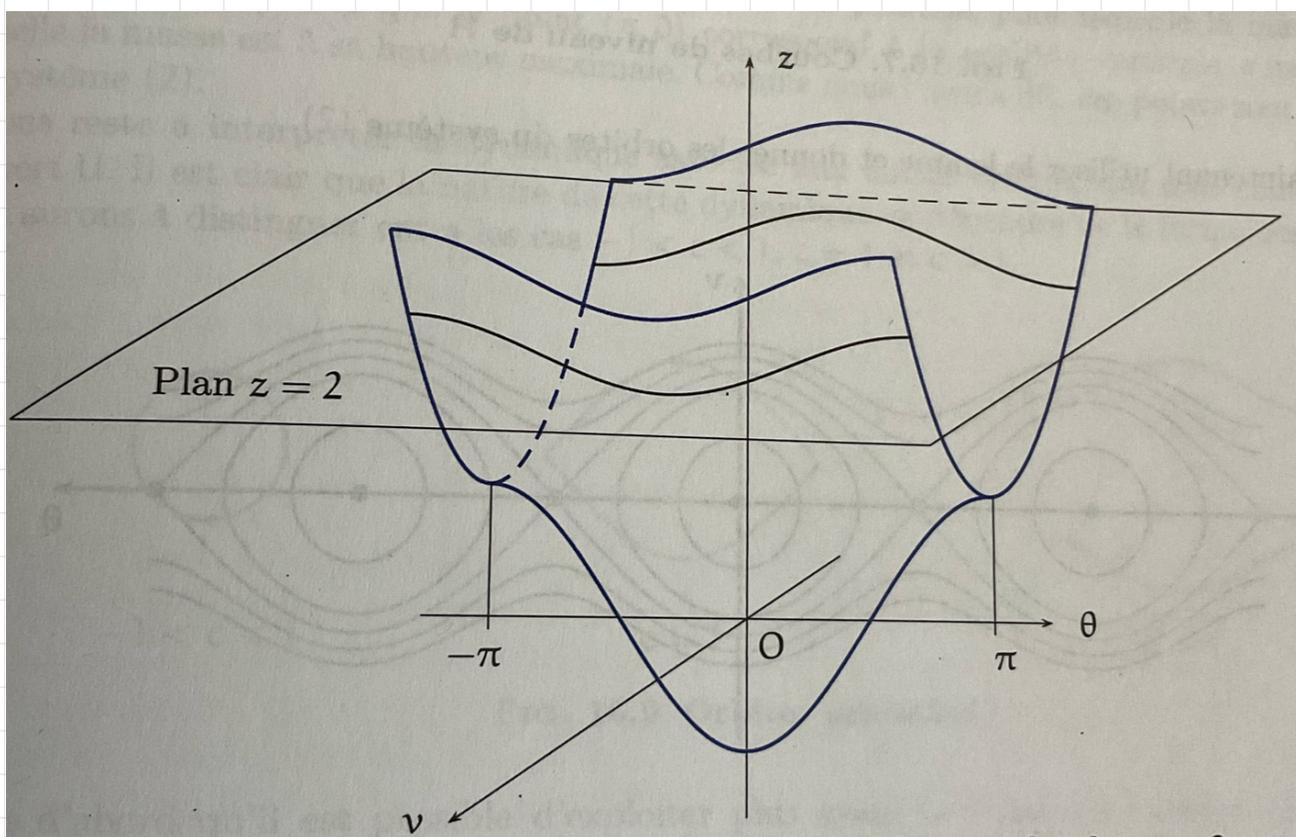
Donc, en posant $v = \theta'$ on a :

$$(P) \quad \theta'' + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \Leftrightarrow (P') \quad \begin{cases} \theta' = v \\ v' = -\omega_0^2 \sin \theta \end{cases}$$

et $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\theta, v) \mapsto \frac{1}{2} v^2 - \omega_0^2 \cos \theta$ est une intégrale première pour (P').

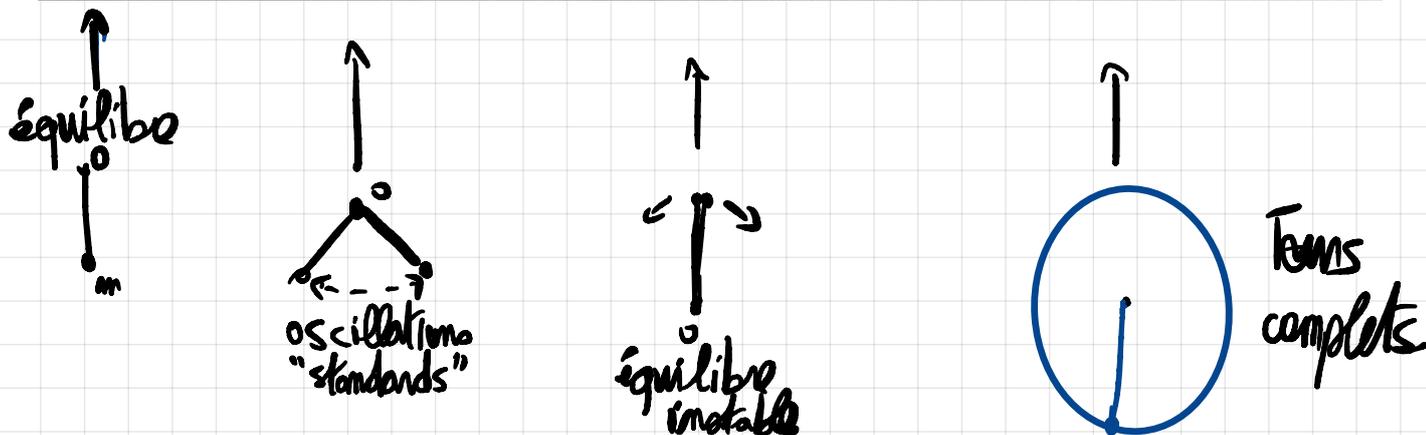
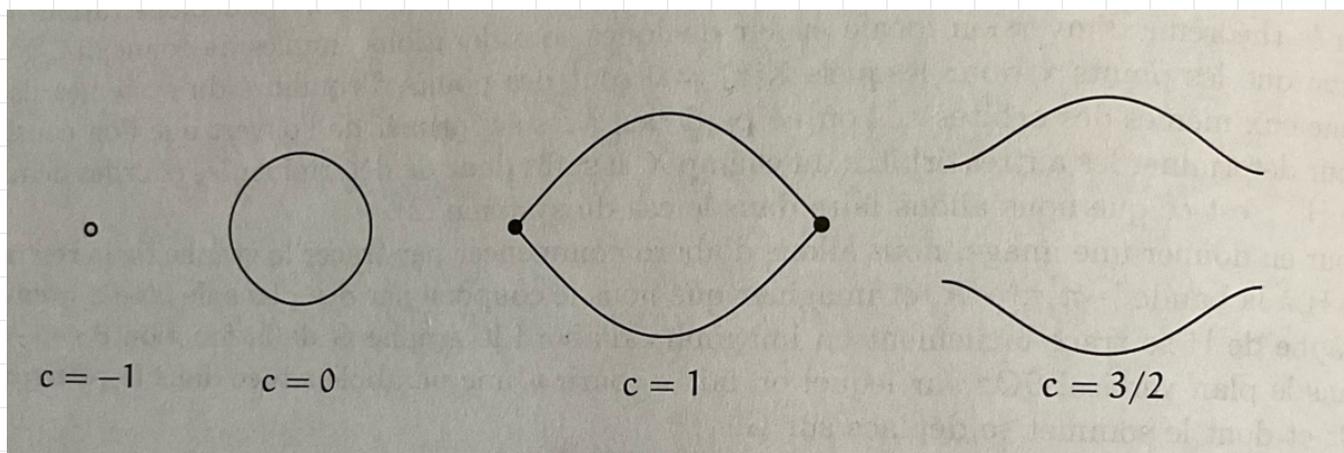
Les trajectoires des solutions maximales de (P') sont incluses dans les courbes de niveaux de E .

Tracé du graphe de E restreint à $[-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$:

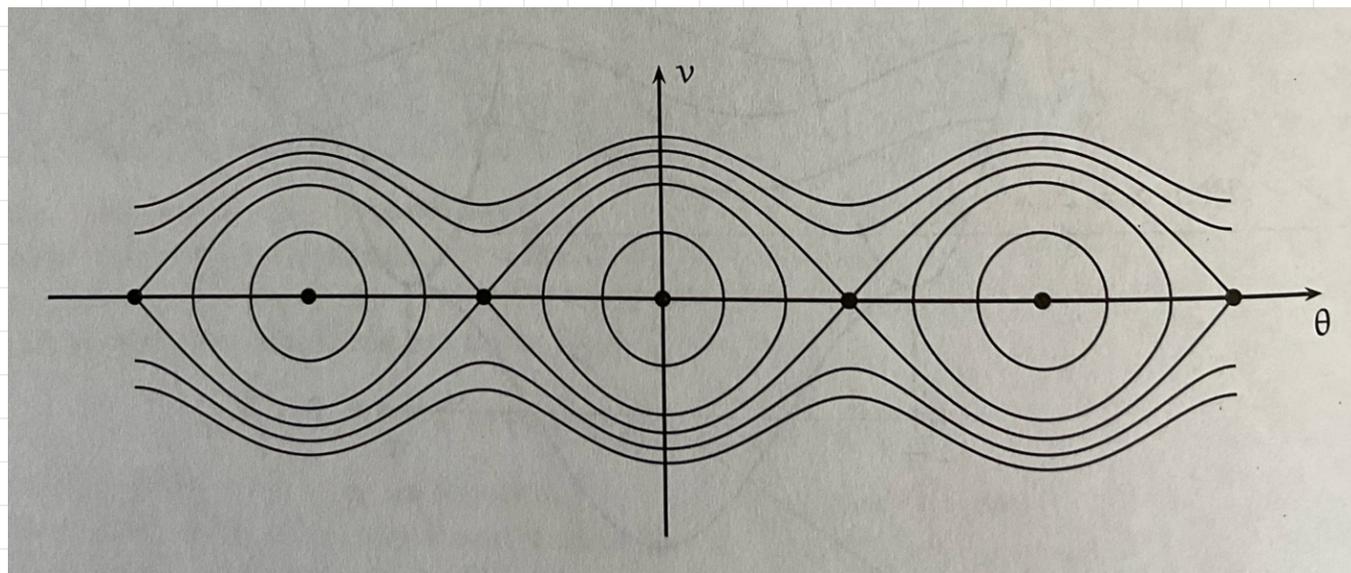


Lignes de niveau de E

(12)



Trajectoires des solutions maximales de (P')



On s'intéresse au problème de Cauchy :

$$(C_p) \begin{cases} \theta'' + \omega_0^2 \sin \theta \\ \theta(0) = \theta_0 \text{ et } \theta'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (C_p') \begin{cases} \theta' = \nu \\ \nu' = -\omega_0^2 \sin \theta \\ \begin{pmatrix} \theta \\ \nu \end{pmatrix} (b) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soit $(\exists a, b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \theta \\ \nu \end{pmatrix})$ la solution maximale.

(13) On a alors : $\exists C \in \mathbb{R}$,
 $\forall t \in \mathbb{R}, E(\theta(t), \theta'(t)) = \frac{1}{2} (\theta'(t))^2 - \omega_0^2 \cos \theta(t) = C$

En $t=0$, cela donne : $\frac{1}{2} 0^2 - \omega_0^2 \cos \theta_0 = C$

i.e. $C = -\omega_0^2 \cos \theta_0$.

Puis :

$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} (\theta'(t))^2 = \omega_0^2 (-\cos \theta_0 + \cos \theta(t)) \leq 2\omega_0^2$

soit : $|\theta'(t)| \leq 2\omega_0$

et θ' est bornée. Supposons par l'absurde que $b < +\infty$.
 Il vient alors, par les accroissements finis :

$\forall t \in]0, b[, |\theta(t) - \theta(b)| \leq \sup_{s \in]0, t[} |\theta'(s)| |t-b|$
 $\leq 2\omega_0 |t-b|$

et θ est bornée sur $]0, b[$. D'où $\begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$ serait bornée sur $]0, b[$. Par le corollaire du théorème de continuité de tout compact, $b = +\infty$. Contradiction ! Donc $b = +\infty$.

De même $a = +\infty$.

Donc les solutions de (P) ou (P') sont globales !

On peut être plus précis à partir de :

$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} (\theta'(t))^2 = \omega_0^2 (\cos \theta(t) - \cos \theta_0)$

D'où en particulier : $\forall t \in \mathbb{R}, \cos \theta(t) \geq \cos \theta_0$

ce qui implique : $\exists k \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}, \theta(t) \in]-\theta_0 + 2k\pi, \theta_0 + 2k\pi[$.

(14)

En périodicité de θ : $\forall t \in \mathbb{R}, \theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$

soit encore : $\forall t \in \mathbb{R}, |\theta(t)| \leq \theta_0$

D'où : $\forall t \in \mathbb{R}, |\theta(t)| \leq \theta_0$ et $|\theta'(t)| \leq 2\omega_0$

Cela permet d'étudier la linéarisation de l'équation.
On considère les deux problèmes de Cauchy

$$(C_p) \begin{cases} x'' + \omega^2 \sin x = 0 \\ x(0) = \theta_0, x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(C_p) \begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = \theta_0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Posons $x = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$$\text{Ainsi: } x' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -\omega^2 \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} x - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ x - \sin x \end{pmatrix}$$

$$\text{et: } y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} y$$

Soit $z = x - y$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } z' &= x' - y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} y - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ x - \sin x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} z - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ x - \sin x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où:

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \overset{=0}{z(0)} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} z(s) ds - \int_0^t \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ x(s) - \sin x(s) \end{pmatrix} ds$$

On a : $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t) - \sin x(t)| \leq \frac{|x(t)|^3}{6} \leq \frac{\theta_0^3}{6}$

Ainsi:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|z(t)\| \leq \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \right\| \|z(s)\| ds + \frac{\omega^2 \theta_0^3}{6} |t|$$

Pour $t \geq 0$, $t \mapsto \frac{\omega^2 \theta_0^3}{6} |t|$ est croissante et pour un

(15)

Lemme de Gronwall adapté,

$$\forall t \geq 0, \|Z(t)\| \leq \frac{\Theta_0^3 \omega_0^2}{\delta} t e^{\int_0^t \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \right\| ds}$$

$$\leq \frac{\Theta_0^2 \omega_0^2}{\delta} t \max \left(\sqrt{\frac{1+\omega_0^2}{2}}, \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\omega_0^2}}{2}} \right)$$

De même avec $t \leq 0$ et finalement:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|Z(t)\| \leq \frac{\Theta_0^2 \omega_0^2}{\delta} |t| \max \left(\sqrt{\frac{1+\omega_0^2}{2}}, \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\omega_0^2}}{2}} \right)$$

Ainsi, plus Θ_0 est petit plus la linéarisation est valide sur un intervalle de temps long.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} : \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega_0$$

$$\text{et: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i\omega_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = i\omega_0 x \\ -\omega_0^2 x = i\omega_0 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = i\omega_0 x \\ -\omega_0^2 x = i\omega_0 \times i\omega_0 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = i\omega_0 x.$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i\omega_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -i\omega_0 x \\ -\omega_0^2 x = -i\omega_0 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -i\omega_0 x \\ -\omega_0^2 x = (-i\omega_0)^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = -i\omega_0 x.$$

$$\text{Donc: } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega_0 & -i\omega_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega_0 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{-2i\omega_0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2i\omega_0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\omega_0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i\omega_0} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i\omega_0} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc: } e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} t} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega_0 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i\omega_0} \\ 1 & \frac{1}{-i\omega_0} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \left\| e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} t} \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega_0 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i\omega_0} \\ 1 & \frac{1}{-i\omega_0} \end{pmatrix} \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2} \sqrt{1+\omega_0^2} \times \max(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{2}{\omega_0^2}})$$

$$\leq \max \left(\sqrt{\frac{1+\omega_0^2}{2}}, \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\omega_0^2}}{2}} \right)$$

(16)

Exemple 2: Equation de Newton: on considere l'equation

$$(N) \quad x'' + f(x) = 0$$

ou $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne sur I intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} .

L'equation du pendule entre dans cette categorie plus large d'equations

Supposons par exemple que $0 \in I$. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0:

$$\forall t \in I, \quad F(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Alors en multipliant (N) par x' on obtient:

$$\forall t \in I, \quad x'(t) x''(t) + x'(t) f(x(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (x'(t))^2 + F(x(t)) \right] = 0$$

Ainsi, $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \frac{1}{2} y^2 + F(x)$ est une

integrale premiere de (N).

Si on suppose f impaire sur $I =]-a, a[$ et positive sur $]0, a[$ (par exemple, \sin avec $a = \pi$) on peut montrer, comme dans le cas du pendule simple, que les solutions maximales de (N) sont globales.

Exemple 3: Systèmes hamiltoniens

(17) Def: Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^{2m} et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ C^0 .
S'il existe une fonction $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2
telle que, posant $X = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$ on ait
 $f(X) = \begin{pmatrix} \partial_p H \\ -\partial_q H \end{pmatrix}$, on dit que le système différentiel
 $X' = f(X)$ est hamiltonien

Le système $X' = f(X)$ s'écrit:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, m\}$$

(Equations d'Hamilton)

Par exemple, l'oscillateur harmonique $x'' + \omega^2 x = 0$
est hamiltonien: $\begin{cases} q' = p \\ p' = -\omega^2 q \end{cases}$ et $H(q, p) = \frac{1}{2} p^2 + \omega^2 \frac{1}{2} q^2$

Pour beaucoup de systèmes physiques, l'hamiltonien
 H n'est autre que l'énergie totale du système.

Pour l'opérateur de Schrödinger 1d:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$$

Proposition: Si $X' = f(X)$ est hamiltonien, tout hamiltonien
 H est une intégrale première.

D: On a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[H(x(t))] &= \frac{d}{dt}(H(q, p)) \\ &= \langle \partial_q H(q, p), q' \rangle + \langle \partial_p H(q, p), p' \rangle \\ &= \langle \partial_q H(p, q), \partial_p H(p, q) \rangle - \langle \partial_p H(p, q), \partial_q H(p, q) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Une classe importante de systèmes hamiltoniens est donnée par les systèmes différentiels dérivant d'un gradient:

$$q'' = -\nabla V(q)$$

où $q \in \mathbb{R}^m$ et $\nabla V(q) = (\partial_{q_1} V(q), \dots, \partial_{q_m} V(q))$

En posant $p = q'$, on obtient:

$$q_i' = p_i \quad \text{et} \quad p_i' = -\partial_{q_i} V(q)$$

$$\text{soit} \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\text{où} \quad H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m p_i^2 + V(q).$$

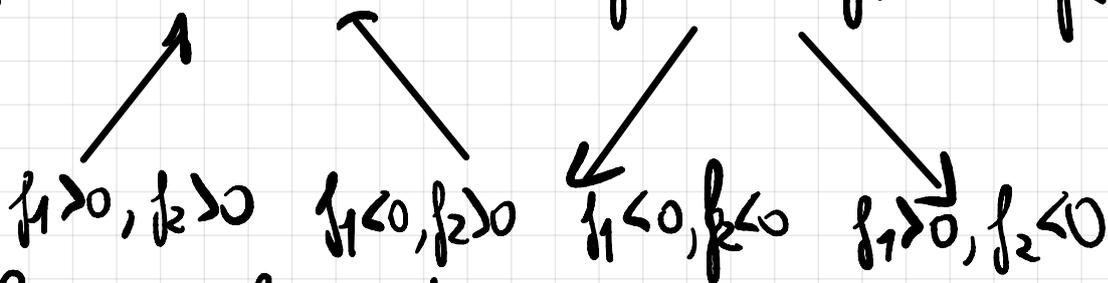
19

III Systèmes autonomes dans le plan :

On considère $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 et on regarde le système différentiel autonome :

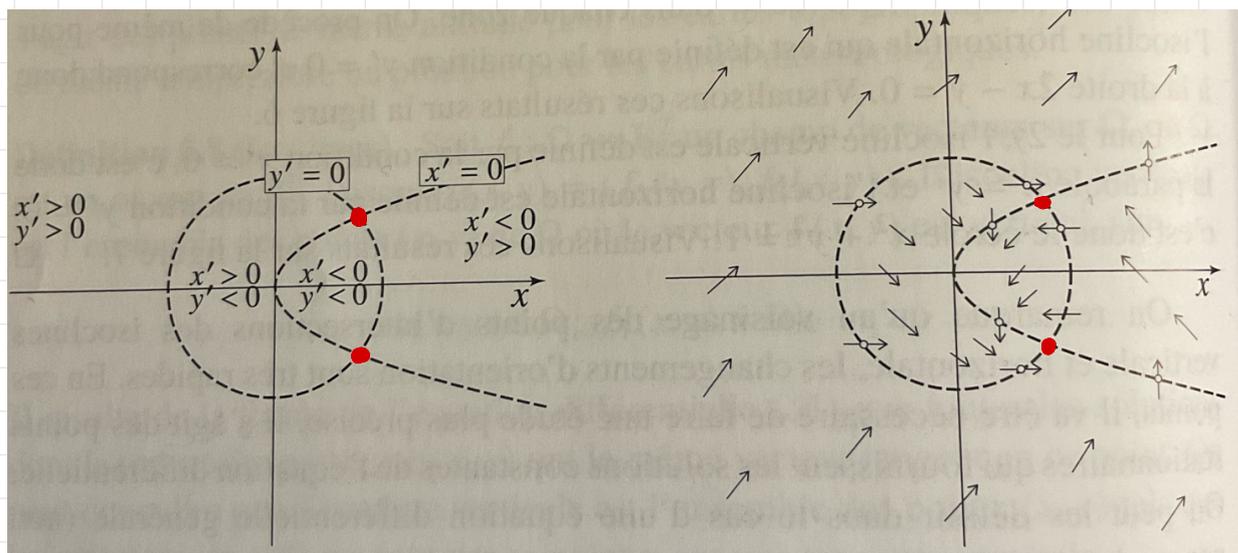
$$(E) \quad X' = f(X) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(x(t), y(t)) \end{cases}$$

En chaque point (x, y) du plan, le vecteur tangent aux courbes intégrales de (E) est donné par le vecteur $\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$. On peut alors régionales le plan \mathbb{R}^2 suivant les signes de f_1 et de f_2 :



Par exemple, pour le système :

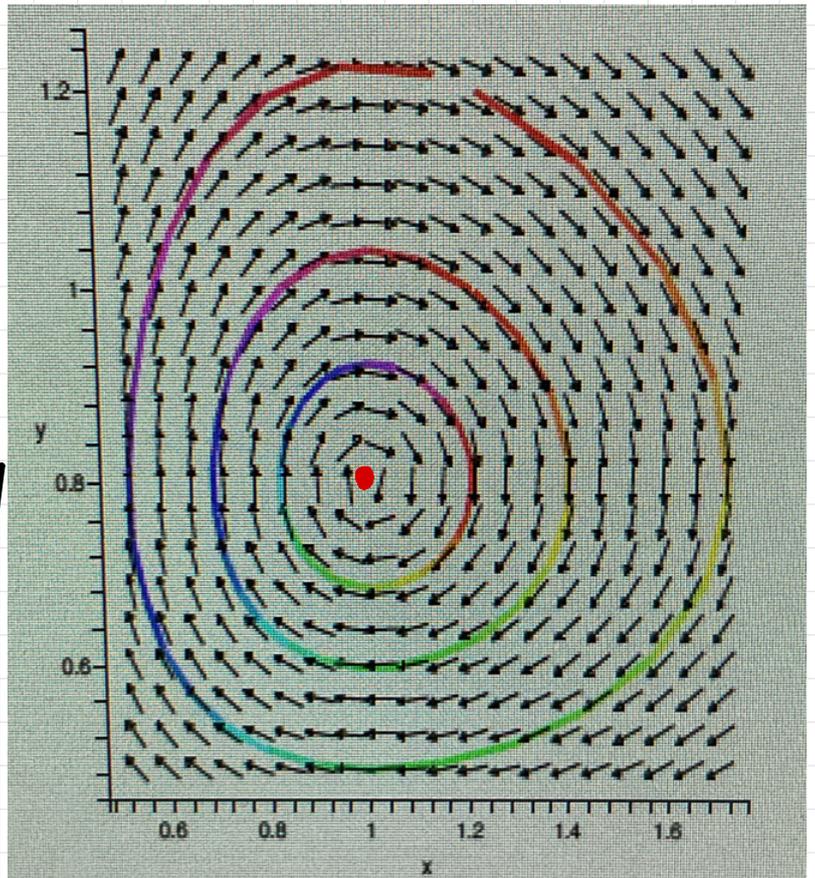
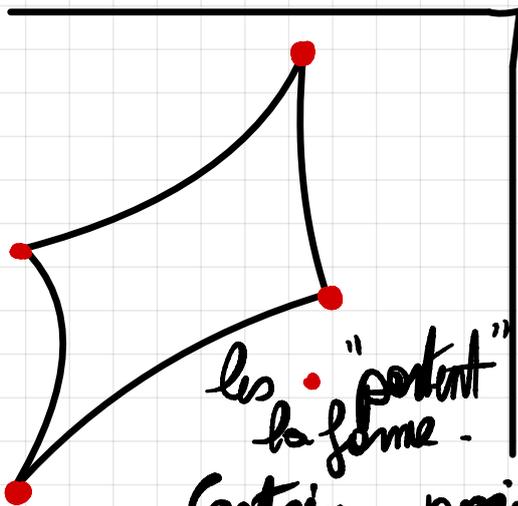
$$\begin{cases} x' = y^2 - x \\ y' = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}, \text{ on régionalise le plan à l'aide des courbes } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x, y) = 0\} \text{ et } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_2(x, y) = 0\}.$$



20
Cela donne une première idée de l'allure des courbes intégrales.

Exemple de Lotka - Volterra:

$$\begin{cases} x' = x(y-1) \\ y' = y(1-x) \end{cases}$$



Certains points jouent un rôle particulier : les **points singuliers** sont ceux où $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$. En ces points il n'y a pas de tangente aux courbes intégrales. Pour étudier l'allure des courbes intégrales au voisinage d'un point singulier l'idée est de linéariser f et d'étudier les courbes intégrales du système linéarisé.

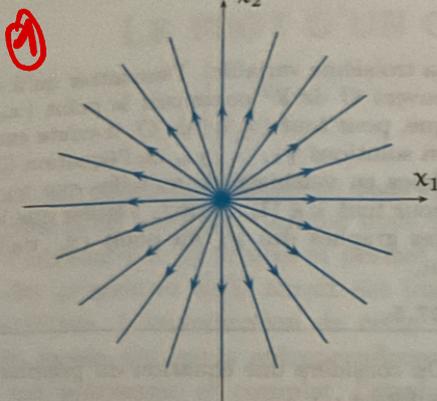
Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_0, y_0) = (0, 0)$.
On a alors, puisque f est C^1 :

$$f(x, y) = (0, 0) + D_{(x_0, y_0)} f(x, y) + o(\|(x, y)\|)$$

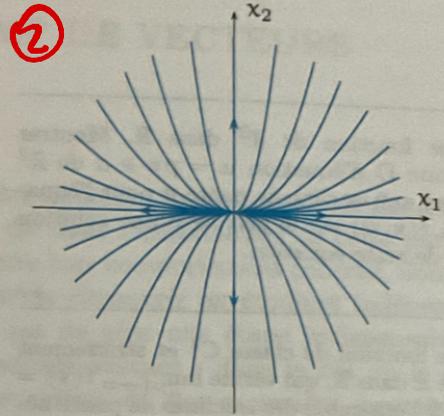
21

Comme le système est autonome, $D_{(x_0, y_0)}$ est une matrice 2×2 constante notée A .
On étudie alors le système linéarisé

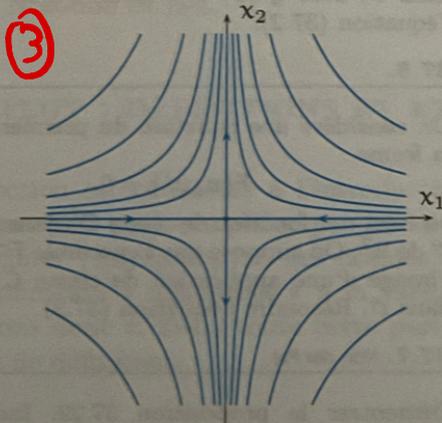
$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$



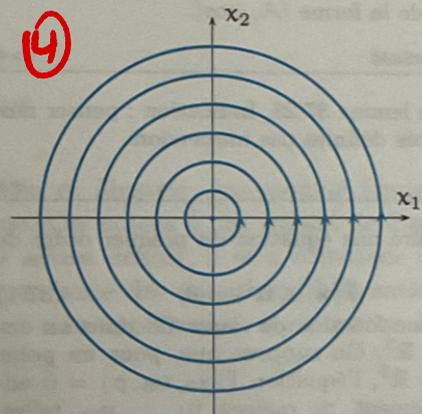
$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0.$$



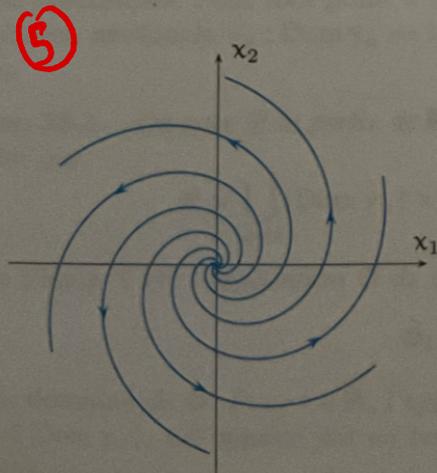
$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 > \lambda_1 > 0.$$



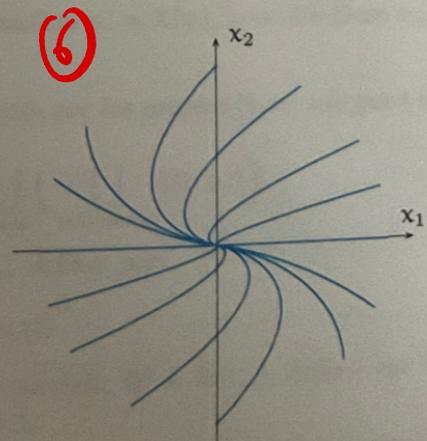
$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0.$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0.$$



$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad a > 0, b > 0.$$



$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0.$$

(27) En général, lorsque le point singulier est "hyperbolique" (cas "1" - "2" - "3") l'allure des trajectoires du système (E) est proche de celles du système linéarisé (\mathcal{L}_E). Lorsque le point singulier est elliptique ("4" - "5" - "6") on ne sait pas si les trajectoires de (E) ressemblent ou non à celles de (\mathcal{L}_E) en voisinage du point singulier.

On peut enfin s'aider des courbes de niveaux d'une éventuelle intégrale première pour compléter l'allure des trajectoires.