

① Chapitre 1:

Fonctions dérivables de la variable complexe

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{C}$ désigne un ouvert de \mathbb{C} .

I. Fonctions \mathbb{C} -dérivables

Def. Soient $z_0 \in \Omega$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.
On dit que f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 lorsque la limite suivante existe et est finie:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

On la note alors $f'(z_0)$.

Formellement, on retrouve la définition de la dérivabilité pour les fonctions de la variable réelle, les propriétés élémentaires des fonctions dérivables seront donc conservées. Toutefois l'existence de la limite du taux de variation dans \mathbb{C} est plus difficile à obtenir en pratique que sur \mathbb{R} , cette existence impliquera donc des propriétés (beaucoup) plus fortes pour les fonctions \mathbb{C} -dérivables.

(2)

Tout d'abord, on constate que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -dérivable en $z_0 \in \Omega$ ssi

$$\exists a \in \mathbb{C}, \forall h \in \mathbb{C}, z_0 + h \in \Omega,$$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ah + h \varepsilon(h)$$

$$\text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Propriétés: Soient $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \Omega$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a:

(1) Si f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 , elle est \mathbb{C} en z_0 .

(2) Si f et g sont \mathbb{C} -dérivables en z_0 , λf , $f+g$ et fg sont \mathbb{C} -dérivables en z_0 et:

$$(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0), \quad (f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(3) Si f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 et si $f(z_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est \mathbb{C} -dérivable en z_0 et:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}$$

(3)

Les preuves de ces propriétés sont en tout point identiques à celle dans le cas des fonctions dérivables de la variable réelle.

Exemples: (1) Les polynômes sont dérivable en tout $z_0 \in \mathbb{C}$.
En effet $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto z$ l'est :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

et on en déduit le cas d'une fonction polynomiale quelconque $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en appliquant la propriété (2).

Pour $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto z^m$ on peut faire le calcul "à la main":

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z_0 \in \mathbb{C}, z^m - z_0^m = (z - z_0)(z^{m-1} + z z^{m-2} + \dots + z_0^{m-1})$$

donc pour $z \neq z_0$:

$$\frac{z^m - z_0^m}{z - z_0} = z_0^{m-1} + z z_0^{m-2} + \dots + z_0^{m-1} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} m z_0^{m-1}$$

(2) Les fractions rationnelles $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$ sont \mathbb{C} -dérivables sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, q(z) = 0\}$

(1) Il suffit en effet d'utiliser l'exemple (1), la propriété (3) et le produit dans la propriété (2).

(3) La conjugaison $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ n'est \mathbb{C} -dérivable en aucun $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$\text{En effet : } \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \\ = \overline{\frac{z - z_0}{z - z_0}}. \text{ Si } z - z_0 \in \mathbb{R}, \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = 1$$

$$\text{mais si } z - z_0 \in i\mathbb{R}, \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = -1.$$

Donc $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'admet pas de limite en z_0 .

(4) Les fonctions parties réelles et imaginaires et la fonction module ne sont \mathbb{C} -dérivables en aucun point.

En effet, si $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ était \mathbb{C} -dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ comme : $\forall z \in \mathbb{C}, \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) - z$ et $z \mapsto z$ est \mathbb{C} -dérivable en tout point, $z \mapsto \bar{z}$ serait \mathbb{C} -dérivable en z_0 . Absurde!

(5)

De même pour $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$.

Pour le module, $z \mapsto |z|$ n'est pas

\mathbb{C} -dérivable en 0 car

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{R}_+^*}} \frac{|z| - |0|}{z - 0} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{R}_-^*}} \frac{|z| - |0|}{z - 0} = -1$$

Puis on a : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$.

Si $z \mapsto |z|$ est \mathbb{C} -dérivable en $z_0 \neq 0$ alors $z \mapsto |z|^2$ le serait aussi et on sait que $z \mapsto z$ l'est avec $z_0 \neq 0$.

Donc $z \mapsto \bar{z}$ serait \mathbb{C} -dérivable en z_0 !

(5) Soit $I \subset \mathbb{R} \cap \mathbb{C}$ un intervalle ouvert. Soit f \mathbb{C} -dérivable en $z_0 \in I$. Alors $f|_I$ est \mathbb{R} -dérivable en z_0 .

En effet, l'existence de la limite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ implique celle de :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow z_0 \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(z_0)}{x - z_0} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in I}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

II Fonctions holomorphes sur un ouvert de \mathbb{C}

Définition : $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **holomorphe** sur Ω si elle est \mathbb{C} -dérivable en tout point de Ω .

(6)

Si f est holomorphe sur Ω on note $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$
sa fonction dérivée. $z \mapsto f'(z)$

Not: L'ensemble des fonctions holomorphes
sur un ouvert Ω de \mathbb{C} est noté $\mathcal{H}(\Omega)$.

Propriété: $(\mathcal{H}(\Omega), +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{C} -algèbre
unitaire.

Exemples: Les fonctions polynomiales sont
dans $\mathcal{H}(\Omega)$ pour tout Ω ouvert
de \mathbb{C} . Les fractions rationnelles $\frac{p}{q}$
sont dans $\mathcal{H}(\Omega)$ pour tout Ω ouvert
dans $\mathbb{C} \setminus Z(q)$.

Composition: Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de \mathbb{C}
et soient $f: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ et $g: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$
holomorphes respectivement sur Ω_2 et Ω_1
Alors $f \circ g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ et on a:
 $\forall z \in \Omega_1, (f \circ g)'(z) = g'(z) f'(g(z))$.

Là encore, la démonstration est identique au cas
des fonctions de la variable réelle.

III Relations entre holomorphie et différentiabilité

(7)

Comme on peut écrire tout nombre complexe à l'aide de sa partie réelle et de sa partie imaginaire, une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ peut aussi être vue comme une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . Pour les fonctions de deux variables réelles, nous connaissons la notion de différentiabilité. Nous cherchons donc à comprendre s'il y a ou non un lien entre différentiabilité et \mathbb{C} -dérivabilité.

Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si $z \in \Omega$ on écrit

$z = x + iy$. On écrit également: $f = P + iQ$

On considère: $\tilde{f}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\tilde{f}: (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Si f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 , pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in \Omega$,

$$(A) \quad f(z_0 + h) = f(z_0) + h f'(z_0) + \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

⑧

Posons $f'(z_0) = a + ib$ et $h = k + il$

Alors, en prenant les parties réelles et imaginaires dans (*):

$$P(z_0, y_0) + (k, P) = P(z_0, y_0) + ak - bl + o(h)$$

$$\text{et } Q(z_0, y_0) + (k, P) = Q(z_0, y_0) + al + bk + o(h)$$

Soit encore :

$$\begin{pmatrix} P(z_0, y_0) + (k, P) \\ Q(z_0, y_0) + (k, P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(z_0, y_0) \\ Q(z_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} + o\left(\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}\right)$$

Cela signifie que $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est différentiable au point $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et que :

$$D_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

En particulier :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equations de} \\ \text{Cauchy-Riemann} \end{array} \right\} \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

⑨

Réciproquement, si P et Q sont différentiables en (x_0, y_0) et si elles vérifient les équations de Cauchy - Riemann, on peut "remonter" les calculs précédents pour obtenir (*) et que f est \mathbb{C} -dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$.
On a alors :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

On veut donc démontrer le résultat suivant :

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $f = P + iQ : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

Alors f est holomorphe sur Ω ssi $(x, y) \mapsto (P, Q)$ est différentiable sur Ω et satisfait dans Ω les équations de Cauchy - Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

IV Holomorphie et séries entières.

Nous traitons la l'exemple fondamental de fonctions holomorphes. Nous venons plus tard qu'il s'agit en fait du seul exemple.

Théorème: Soit $\sum a_m z^m$ une série entière de rayon de cv $R > 0$. Alors sa somme f est holomorphe sur $D(0, R)$ et:

$$\forall z \in D(0, R), f'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} z^m$$

D: ① Tout d'abord, on montre que si $\sum a_m z^m$ est de rayon de cv $R > 0$ alors le rayon de cv de $\sum (m+1) a_{m+1} z^m$ est égal à R .

En effet, soit R_1 le rayon de cv de $\sum (m+1) a_{m+1} z^m$. Si $z \in D(0, R_1)$ alors $(m+1) a_{m+1} |z|^m$ est bornée par $M > 0$. D'où:

$$\forall m \geq 1, |a_m| |z|^m \leq m |a_m| |z|^{m-1} |z| \leq M R_1$$

(13) Ainsi $(|a_n| |z|^n)_{n \geq 0}$ est bornée et $z \in \mathcal{D}(f, R)$

d'où $R' \leq R$.

Réciproquement, soit $r \in R$ et soit $s \in]r, R[$.

Alors $(|a_n| s^n)_{n \geq 0}$ est une suite bornée et :

$$(n+1) |a_{n+1}| r^n = \underbrace{\frac{(n+1)}{s}}_{\substack{\downarrow \\ \text{ta croît} \\ \text{linéairement}}} \underbrace{|a_{n+1}| s^{n+1}}_{\text{bornée}} \frac{r^n}{s^n} \xrightarrow{\text{notas}} 0$$

$\left(\frac{r}{s}\right)^n \xrightarrow{\text{notas géométrique}} 0$

En particulier $(n+1) |a_{n+1}| r^n$ est bornée.

Donc $r \in R'$. Comme cela est vrai pour tout $r \in R$ on obtient $R \leq R'$.

Finalement $R = R'$.

(2) Soit $z_0 \in \mathcal{D}(f, R)$. Pour tout $z \in \mathcal{D}(f, R)$,

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^n - z_0^n)$$

$$= (z - z_0) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1})$$

D'où, pour $z \neq z_0$:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(z)$$

(14)

avec $q_n(z) := a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-2} + z_0^{n-1})$

Chaque q_n est C^0 en z_0 . De plus, si on se donne r tel que $|z_0| < r < R$ alors

$$\forall z \in D(0, r), |q_n(z)| \leq |a_n| m r^{n-1}$$

et $\sum |a_n| m r^{n-1}$ est cv car $r < R$.

Donc $\sum q_n$ cvN sur $D(0, r)$, sa

somme est donc C^0 en z_0 et on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(z_0) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z_0^{n-1} + z_0^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n \end{aligned}$$

D'où f est C -dérivable en z_0 et :

$$f'(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n$$

D'où le résultat. \square

Nous montrerons au chapitre 4 que réciproquement, toute fonction holomorphe sur Ω est analytique sur Ω (somme d'une série entière).

Corollaire: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de CV $R > 0$ et de somme f sur $D(0, R)$. Alors f est infiniment \mathbb{C} -dérivable sur $D(0, R)$ et : $\forall n > 0, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

V Fonctions holomorphes classiques

Nous savons déjà que toute fonction donnée comme la somme d'une série entière est holomorphe sur son disque ouvert de CV. Voici quelques exemples particuliers de telles fonctions.

1. L'exponentielle complexe.

- Par définition $exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
- On sait que le rayon de CV de $\sum \frac{z^n}{n!}$ vaut $+\infty$ ($\frac{1}{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{n+1} + \infty} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$)
- D'où exp est holomorphe sur \mathbb{C} et

(16)

$\forall z \in \mathbb{C}, (e^z)' = e^z$

Par ailleurs on a: $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

qui s'obtient par:

$$e^z e^{z'} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(z')^l}{l!} \right) = \sum_{k,l \geq 0} \frac{z^k (z')^l}{k! l!}$$

sommation par paquets
 car $\left(\frac{z^k (z')^l}{k! l!} \right)_{k,l \geq 0}$ est sommable (prendre le module)

$$\rightarrow = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k+l=m} \frac{z^k (z')^l}{k! l!}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} z^k (z')^{m-k}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^k (z')^{m-k}}_{\text{Newton } (z+z')^m = e^{z+z'}}$$

En particulier $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$ et \exp ne s'annule pas et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Enfin: $\overline{e^z} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \overline{z^m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \overline{z}^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \overline{z}^m = e^{\overline{z}}$

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}, |e^{it}| = 1$.

En effet: $|e^{it}|^2 = e^{it} \overline{e^{it}} = e^{it} e^{-it} = e^0 = 1$

(17)

On peut alors définir \cos et \sin sur \mathbb{R} :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos(t) := \operatorname{Re}(e^{it}) \quad \text{et} \quad \sin(t) := \operatorname{Im}(e^{it})$$

$$\text{Alors: } \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

En dérivant ces identités d'Euler:

$$\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos$$

On a également :

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

$$\text{et } \sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En particulier: $\forall t > 0$, $\cos(t) < 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}$

et $\cos(2) < -\frac{1}{3}$ en sachant

que $\cos(0) = \operatorname{Re}(e^{i0}) = 1$.

Par le TVI (\cos est C^∞) \cos possède un plus petit zéro strictement positif que

(18)

l'on met t_0 . On pose par définition:

$$\pi := 2t_0$$

On a alors:

Proposition: 1. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

2. $e^z = 1$ ssi $z \in 2\pi i \mathbb{Z}$

3. \exp est périodique de période $2i\pi$.

4. $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (S^1, \times)$ est un morphisme de groupes
 $t \mapsto e^{it}$

surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. Par le thm de l'isomorphisme: $S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

5. $\exp: (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\times, \times)$ est un morphisme

de groupes surjectif de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.

D: 1. On a $\cos(t_0) = 0$ donc $(\sin t_0)^2 = 1 - 0$

et $\sin t_0 = \pm 1$. Or $\sin'(t) = \cos(t) > 0$ sur

$]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $\sin(0) = 0$. Donc $\sin > 0$ sur $]\frac{\pi}{2}, t_0[$

et $\sin t_0 = 1$. D'où: $e^{it_0} = 0 + i \times 1 = i$

(19)

2. Il vient: $e^{i\pi} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = i^2 = -1$ et
 $e^{2i\pi} = (e^{i\pi})^2 = (-1)^2 = 1.$

Soit $z = \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}}$ avec $e^z = 1.$

On a: $e^x = |e^z| = 1$ d'où $x = 0.$

Il reste à montrer que $\frac{y}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$

On écrit: $y = 2\pi N + y_0$ avec $N \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq y_0 < 2\pi$

Alors: $e^{iy} = e^{i2\pi N} e^{iy_0} = e^{iy_0}$
 $e^{0+iy} = e^z = 1$

Donc $e^{iy_0} = 1.$ Or, si $y_0 \in]0, 2\pi[$,
on écrit $e^{i\frac{y_0}{4}} = u + i\nu$ et comme $\frac{y_0}{4} \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
 $u, \nu > 0$ et

$$e^{iy_0} = (u + i\nu)^4 = u^4 - 6u^2\nu^2 + \nu^4 + 4i u \nu (u^2 - \nu^2)$$

Donc si $e^{iy_0} = 1$ alors $u^2 - \nu^2 = 0.$ Mais

$$u^2 + \nu^2 = |e^{i\frac{y_0}{4}}| = 1 \text{ d'où } u^2 = \nu^2 = \frac{1}{2}$$

Mais $e^{iy_0} = -1 \neq 1$ d'où une contradiction.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-4}{4} = -1.$$

Donc $y_0 = 0$ et $y = 2\pi N, N \in \mathbb{Z}.$

(20)

3. On a $\exp(2i\pi) = 1 = \exp(0)$.

Puis: $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z + 2i\pi) = \exp z \exp(2i\pi)$$

D'où la $2i\pi$ -~~periodicity~~ ^{$= \exp z$} .

4. On sait déjà par 2. que le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$. De plus c'est un morphisme. Il reste à vérifier la surjectivité.

Soit $w = u + iv \in \mathbb{S}^1 : u^2 + v^2 = 1$.

Si $u, v \geq 0$, comme $0 \leq u \leq 1$, il existe

$t \in [0, t_0]$, $\cos(t) = u$. Puis:

$$\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - u^2 = v^2$$

Donc $\sin(t) = \pm v$. Mais $\sin \nearrow$ sur $[0, t_0]$ donc $\sin(t) \geq 0$ et $\sin(t) = v$

i.e. $w = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$.

Si $u < 0, v \geq 0$ alors $-iw$ vérifie les conditions précédentes et $-iw = e^{it}, t \in \mathbb{R}$ donc $w = e^{i(t + \frac{\pi}{2})}$. De même dans les autres cas.

(21)

5. A nouveau, il ne manque que la surjectivité.
 Soit $w \in \mathbb{C}^*$. on pose $\alpha = \frac{w}{|w|}$, $|\alpha| = 1$.
 On $\underline{L.}$: $\exists y \in \mathbb{R}$, $\alpha = e^{iy}$. De plus,
 par surjectivité de l'exponentielle $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$,
 $\exists x \in \mathbb{R}$, $|w| = e^x$. D'où :

$$w = |w| \alpha = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$
 avec $z = x + iy$. □

2. Les fonctions trigonométriques

(a) On pose pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Alors :
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{et} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Ainsi \cos et \sin sont définies sur \mathbb{C} , elles
 y sont holomorphes et $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.
 On a les formules habituelles :

(22)

$$\forall w, z \in \mathbb{C}, \cos(w+z) = \cos(w)\cos(z) - \sin(w)\sin(z)$$

$$\text{et } \sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z,$$

$$\text{et } \forall z \in \mathbb{C}, \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

De plus \cos et \sin sont surjectives et en particulier leurs modules ne sont pas bornés. En effet si $w \in \mathbb{C}$, on cherche $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = w$ i.e.

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w \Leftrightarrow \begin{cases} \xi^2 - 2w\xi - 1 = 0 \\ \xi = e^{iz} \end{cases}$$

Cette équation a deux solutions ξ_1 et ξ_2 non nuls. Or $\exp \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surj donc: $\exists z_1 \in \mathbb{C}, e^{iz_1} = \xi_1$

$$\text{Alors } \cos(z_1) = w.$$

Enfin \cos et \sin sont périodiques de période 2π .

(b) Comme dans le cas réel, on peut également définir les \cos et \sin hyperbolique.

(23)

Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

On a alors:

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{et: } \operatorname{ch}' z = \operatorname{sh} z \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}' z = \operatorname{ch} z$$

De plus ch et sh sont $2\pi i$ -périodiques.

Dans le cas réel on trouve des analogies entre \cos/\sin et $\operatorname{ch}/\operatorname{sh}$. Dans le cas complexe on révèle qu'il y a en fait une structure commune:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos z = \operatorname{ch}(iz), \quad \operatorname{ch} z = \cos(iz)$$

$$\sin z = -i \operatorname{sh}(iz), \quad \operatorname{sh} z = -i \sin(iz).$$

De plus si on pose $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \\ &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

et de même pour les autres fonctions. On en déduit:

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \end{aligned}$$

$$\text{De même: } |\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

(24)

Ainsi, \cos et \sin ne sont pas bornés sur \mathbb{C} !

D'ailleurs: $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1 + \text{sh}^2 y = \text{ch}(2y)$

(c) Fonctions tangente et tangente hyperbolique.

Pour $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ on pose: $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

Pour $z + i(\frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$, on pose: $\text{th} z = \frac{\text{sh} z}{\text{ch} z}$

Ces deux fonctions sont holomorphes sur leurs ensembles de définition et:

$$\tan' z = 1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z} \text{ et } \text{th}' z = 1 - \text{th}^2 z = \frac{1}{\text{ch}^2 z}.$$

3. Logarithme complexe

La détermination principale du logarithme est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z.$$

où pour $z = x + iy$, $\text{Arg } z$ est la détermination principale du logarithme:

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \text{si } x > 0, \text{ Arctan } \frac{y}{x} & \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ x \end{array} \\ \text{si } y > 0, \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } \frac{x}{y} & \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ x \end{array} \\ \text{si } y < 0, -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } \frac{x}{y} & \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ x \end{array} \end{cases}$$

(25)

De manière équivalente on peut aussi définir

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \text{Arccos} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } y > 0 \\ \text{Arccos} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } y > 0 \\ -\text{Arccos} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

La fonction Log ainsi définie est discontinue en tout point de \mathbb{R}_- . Par exemple: $\text{Log}(z)$ tend vers $\ln 5 + i\pi$ si z tend vers -5 dans \mathbb{C}_+ mais $\text{Log}(z)$ tend vers $\ln 5 - i\pi$ si z tend vers -5 en restant dans le demi-plan inférieur $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z < 0\} = \mathbb{C}_-$

Pour obtenir une "bonne" fonction logarithme, on se restreint à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: on définit alors la détermination principale du logarithme complexe.

Proposition: Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et a pour dérivée $z \mapsto \frac{1}{z}$.

D: Notons: $\text{Log} = P + iQ$. Pour $z = x + iy$, on a

$$\ln |z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \text{ d'où:}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(26)

$$\text{Puis pour } x > 0 : \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \times \left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\text{et } \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

De même dans les autres cas ($y > 0$, $y < 0$).

Donc (p, q) vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

Donc \log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \log' z = \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}$$

□

Comme $\frac{1}{z}$ est DSE au voisinage de 1 avec ($z=1+u$) $\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$, on a:

$$\forall u \in \mathcal{D}(0,1), \log(1+u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} u^n.$$

De plus, $\log z$ coïncide avec $x \mapsto \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* et on a:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, e^{\log z} = z$$

En effet $f: z \mapsto e^{\log z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par composition et: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, f'(z) = \frac{1}{z} e^{\log z} = \frac{1}{z} f(z)$

(27) Also: $\frac{zf'(z) - f(z)}{z^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(z)}{z}\right)' = 0$

Comme \mathbb{C} est connexe, $\frac{f(z)}{z} = \frac{f(1)}{1} = 1$

Donc $f(z) = z$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Par contre on a $\text{Log}(\exp(z)) = z$ que pour $-\pi < \text{Im} z < \pi$.

On perd aussi $\text{Log} z_1 z_2 \neq \text{Log} z_1 + \text{Log} z_2$

On a juste, si $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\text{Log} z_1 z_2 \equiv \text{Log} z_1 + \text{Log} z_2 \quad [2i\pi]$$

Plus généralement on peut définir une notion générale de détermination du logarithme.

Definition: Soit Ω un ouvert du plan complexe \mathbb{C} .
On appelle détermination du logarithme sur Ω toute fonction $L \in H(\Omega)$ telle que:
 $\forall z \in \Omega, \exp(L(z)) = z$.

Une telle détermination n'existe pas toujours. Nous venons plus tard les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de telles fonctions.

(28) On continue on a toujours:

Proposition: Toute détermination du logarithme a pour dérivée $z \mapsto \frac{1}{z}$.

D: $\exp(L(z)) = z$ d'où: $\exp(L(z))L'(z) = 1$

d'où: $L'(z) = \frac{1}{\exp(L(z))} = \frac{1}{z}$. □

4. Racine carrée

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ on définit:

$$F(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right)$$

On obtient alors une détermination de la racine carrée car:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, (F(z))^2 = \exp(\log z) = z$$

- F est une autre détermination de la racine carrée.

On a: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, F'(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right) \times \frac{1}{2z}$

On: $z = \exp(\log z) = \left(\exp\left(\frac{1}{2} \log z\right)\right)^2$

d'où: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, F'(z) = \frac{1}{2F(z)}$