Chapitre 2 : Intégrales sur les chemins et primitives

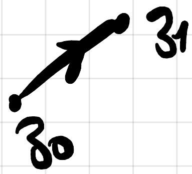
I. Intégrale sur un chemin

a. Définition (chemin) : Un chemin continûment C^1 par morceaux est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, C^0 sur $[a,b]$ et pour laquelle il existe une subdivision $a = x_0 < \dots < x_n = b$ telle que sur $]x_p, x_{p+1}[$, γ est C^1 et la dérivée γ' se prolonge continûment à $[x_p, x_{p+1}]$.

On appelle support du chemin : $\gamma^* = \gamma([a,b])$

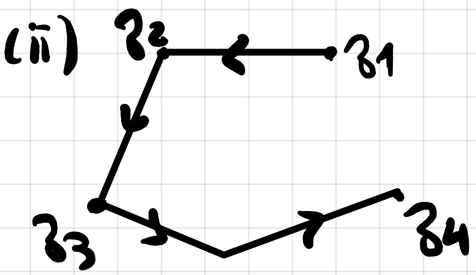
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que γ est un lacet.

Exemples : (i)



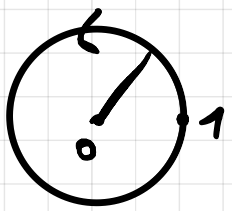
$$\gamma : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0) \end{array}$$

(ii)



$$\gamma : \begin{array}{l} [0,4] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} z_0 + t(z_1 - z_0), & t \in [0,1] \\ z_1 + (t-1)(z_2 - z_1) & t \in [1,2] \\ z_2 + (t-2)(z_3 - z_2) & t \in [2,3] \\ z_3 + (t-3)(z_4 - z_3) & t \in [3,4] \end{cases} \end{array}$$

(iii)



$$\gamma : \begin{array}{l} [0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{array}$$

Ce chemin qui interviendra très souvent sera noté C.

2

(iv) Plus généralement le cercle de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r>0$ est paramétré par le chemin

$$C(a,R) : \begin{array}{l} [0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto a + Re^{it} \end{array}$$

b. On peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin donné.

Déf : Soient $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. On suppose f continue sur le support γ^* de γ. On pose alors :

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Plus précisément : $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

Exemples : (1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}}\, i\cancel{e^{it}}\,dt = 2i\pi$

(2) Si $C(z_0,R)$ désigne le cercle centré en z_0 et de rayon $R>0$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \int_{C(z_0,R)} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

③

En effet :

$$\int_{C(z_0,R)} (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (z_0+Re^{it}-z_0)^n iRe^{it} dt$$
$$= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt$$

Si $n \neq -1$:
$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Si $n=-1$: $\int_0^{2\pi} e^{i(-1+1)t} dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$.

et $\int_{C(z_0,R)} \frac{dz}{z-z_0} = iR^{-1+1} \times 2\pi = 2i\pi$.

c. Propriétés de l'intégrale de chemin

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin C^0 et C^1_{pm}.

(1) Linéarité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\forall f, g \in C^0(\gamma^*)$
$$\int_\gamma (\lambda f + \mu g)(z) dz = \lambda \int_\gamma f(z) dz + \mu \int_\gamma g(z) dz$$

(2) Inégalité triangulaire : $\forall f \in C^0(\gamma^*)$
$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)| \times \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

et $\int_a^b |\gamma'(t)| dt := L(\gamma)$: longueur de γ

Soit encore :

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \left(\sup_{z\in\gamma^*}|f(z)|\right) L(\gamma)$$

(3) Changement de variable :

$$[a',b'] \xrightarrow[\text{et croissante}]{\varphi \ \text{inj}, C^1} [a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}$$

Alors $\gamma\circ\varphi : [a',b'] \to \mathbb{C}$ est un chemin.

On a :

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_{a'}^{b'} f\big((\gamma\circ\varphi)(u)\big)(\gamma\circ\varphi)'(u)\,du$$

$$= \int_{a'}^{b'} f\big((\gamma\circ\varphi)(u)\big)\,\gamma'(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$$

$t=\varphi(u)$

$dt=\varphi'(u)\,du$

$$= \int_{\varphi(a')}^{\varphi(b')} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Donc l'intégrale de chemin est invariante par changement de paramétrage du chemin sur lequel on intègre.

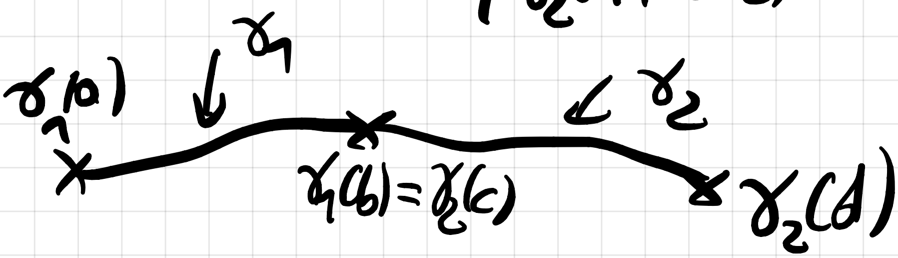
4. Bricolage sur les chemins.

1. Concaténation de deux chemins.

Soient $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.

On définit alors $\gamma_1 \odot \gamma_2 : [a, b+(d-c)] \to \mathbb{C}$ par :

$$\gamma_1 \odot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t+c-b) & \text{si } t \in [b, b+(d-c)] \end{cases}$$



Si $f \in C^0(\gamma_1^* \cup \gamma_2^*)$ alors :

$$\int_{\gamma_1 \odot \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

par la relation de Chasles usuelle et par invariance par reparamétrage.

2. Chemin opposé

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ le chemin opposé à γ, noté $-\gamma$ ou $\overleftarrow{\gamma}$ est défini par :

$$\overleftarrow{\gamma} : \begin{array}{l} [-b,-a] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \gamma(-t) \end{array}$$

On a alors : $\forall f \in C^0(\gamma^*)$,

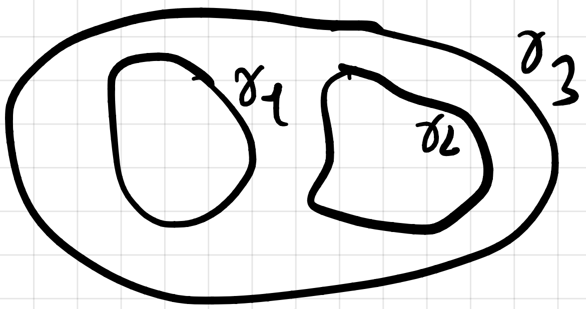
$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

L'intégrale de chemin, comme l'intégrale de Riemann, est une intégrale orientée.

3. Multi-chemins

Un multi-chemin est une union finie de chemins $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ que l'on note

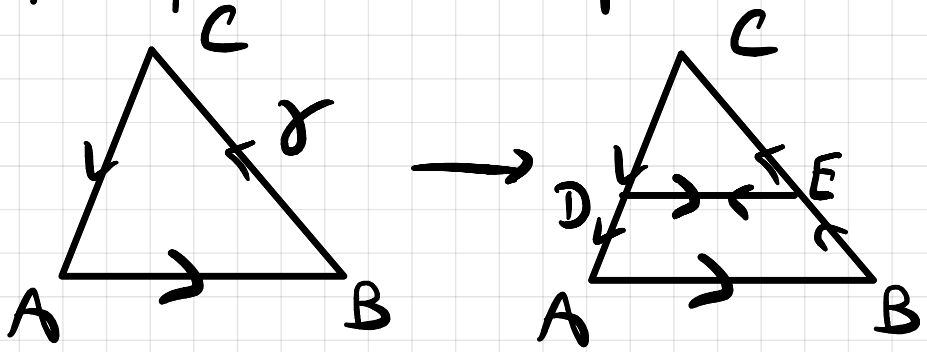
$$\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$$

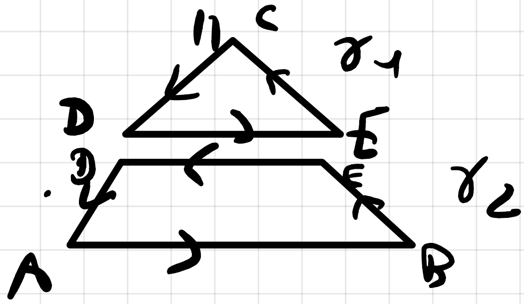


$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

Rq : On note $\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3$ plutôt que $\gamma_1 + \overleftarrow{\gamma_2} + \gamma_3$.

Exemple qui combine ces opérations :





$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

e. Un cas particulier important.

On suppose que f est la dérivée d'une fonction F holomorphe sur Ω et que f est C^0 sur Ω.

Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ C^1. Alors :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En effet : $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

$$= \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Si γ est C^0 et C^1_{pm} on fait ce calcul sur chaque intervalle de la subdivision.

En particulier si γ est un lacet : $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

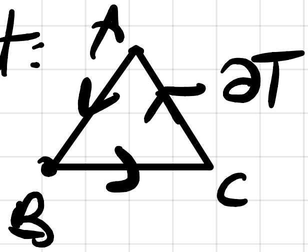
Remarque : $z \mapsto \frac{1}{z}$ est C^0 dans $\mathbb{C}^*$ et $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$.

Donc $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. A fortiori il n'existe pas dans $\mathbb{C}^*$ de détermination du logarithme.

II lemme de Goursat

Lemme (Goursat) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.

On considère un triangle $T = ABC$ dans Ω et on note ∂T le chemin correspondant :

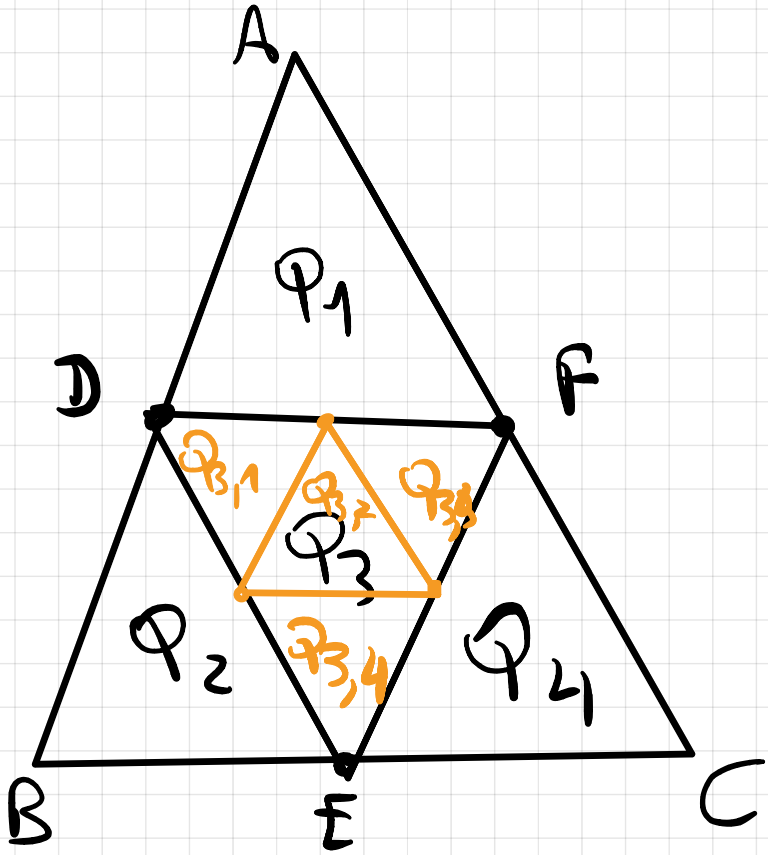


Alors $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

D : On considère D, E, F les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On obtient alors 4 triangles isométriques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

9



On a alors : $L(\partial P_k) = \frac{1}{2} L(\partial T)$ et

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial P_k} f(z)\,dz.$$

De plus :

$$\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \leq \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial P_k} f(z)\,dz\right| \leq 4 \max_{1\leq k\leq 4} \left|\int_{\partial P_k} f(z)\,dz\right|$$

Soit $k_1 \in \{1,2,3,4\}$ tel que $\left|\int_{\partial P_{k_1}} f(z)\,dz\right| = \max_{1\leq k\leq 4} \left|\int_{\partial P_k} f(z)\,dz\right|$

On note $T_1 = P_{k_1}$ et on divise en 4 triangles isométriques T_1 comme on l'a fait pour T.

10

Notons ces 4 plus petits triangles $Q_{k_1,1}$, $Q_{k_1,2}$, $Q_{k_1,3}$ et $Q_{k_1,4}$.

Soit alors $k_2 \in \{1,2,3,4\}$ tel que

$$\left| \int_{\partial Q_{k_1,k_2}} f(z)\,dz \right| = \max_{1 \leq l \leq 4} \left| \int_{\partial Q_{k_1,l}} f(z)\,dz \right|$$

On remarque que :

$$\left| \int_{\partial T} f(z)\,dz \right| \leq 4^2 \left| \int_{\partial Q_{k_1,k_2}} f(z)\,dz \right|$$

On note $T_2 = Q_{k_1,k_2}$

En itérant ce procédé on obtient une suite décroisante de triangles :

$$\underset{T_1}{\underset{\shortparallel}{Q_{k_1}}} \supset \underset{T_2}{\underset{\shortparallel}{Q_{k_1,k_2}}} \supset \underset{T_3}{\underset{\shortparallel}{Q_{k_1,k_2,k_3}}} \supset \cdots \supset \underset{T_n}{\underset{\shortparallel}{Q_{k_1,k_2,\ldots,k_n}}} \supset \cdots$$

telle que :

(i) $\operatorname{diam}(T_n) : \max_{w,z \in T_n} |w-z| = \frac{1}{2^n} \operatorname{diam}(T)$

(ii) $L(\partial T_n) = \frac{1}{2^n} L(\partial T)$

(11)

(iii) $\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right|$

Comme les T_n sont des fermés dans l'espace complet $\mathbb{C}$, par le théorème des fermés emboîtés, il existe $c \in \Omega$ tel que :

$$\bigcap_{n \geq 1} T_n = \{c\}.$$

Soit $g : \Omega \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z = c \\ \dfrac{f(z)-f(c)}{z-c} - f'(c) & \text{si } z \neq c \end{cases}$$

Comme f est holomorphe sur Ω, g est C^0 sur Ω et on a :

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z-c) + g(z)(z-c).$$

On calcule alors l'intégrale de f le long de ∂T_n :

$$\int_{\partial T_n} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\partial T_n} f(c)\,dz}_{} + \underbrace{\int_{\partial T_n} f'(c)(z-c)\,dz}_{} + \int_{\partial T_n} g(z)(z-c)\,dz$$

$= 0$ car $z \mapsto 1$ est la dérivée de $z \mapsto z$ qui est holomorphe sur Ω

$= 0$ car $z \mapsto (z-c)$ est la dérivée de $z \mapsto \frac{1}{2}(z-c)^2$ holomorphe sur Ω

12

Ainsi : $\displaystyle\int_{\partial T_n} f(z)\,dz = \int_{\partial T_n} g(z)(z-c)\,dz$ et on a :

$$\left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in\partial T_n}|g(z)| \times \sup_{z\in\partial T_n}|z-c| \times L(\partial T_n)$$

$$\leq \sup_{z\in\partial T_n}|g(z)| \times \operatorname{diam}(T_n) \times L(\partial T_n)$$

$$= \sup_{z\in\partial T_n}|g(z)| \times \frac{1}{2^n}\operatorname{diam}(T) \times \frac{1}{2^n}L(\partial T)$$

car $\operatorname{diam}(T) \leq L(\partial T)$ $\Rightarrow$ $$\leq \frac{1}{4^n}\sup_{z\in\partial T_n}|g(z)|\,(L(\partial T))^2$$

Il vient :

$$\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \leq 4^n\left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| \leq \left(\sup_{z\in\partial T_n}|g(z)|\right)(L(\partial T))^2$$

Or g est continue en c, $g(c)=0$ et $\bigcap_{n\geq 1} T_n = \{c\}$,

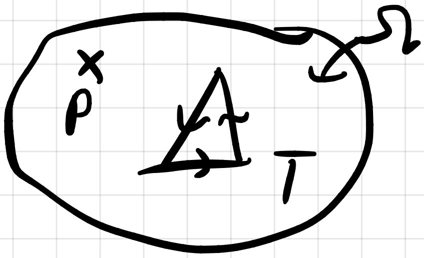
donc $\displaystyle\sup_{z\in\partial T_n}|g(z)| \leq \sup_{z\in T_n}|g(z)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(=g(c))$

D'où le résultat : $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

$\square$

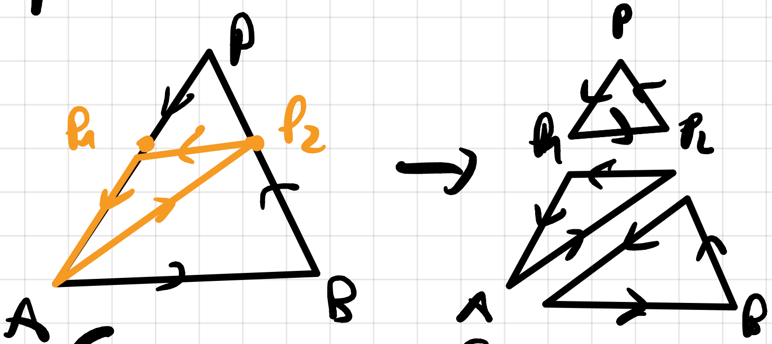
Corollaire : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ C^0 et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{p\}$, $p \in \Omega$. Alors : $\forall T \subset \Omega$, T triangle, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$

D : 1er cas :



on applique directement le lemme de Goursat.

2e cas : p est un sommet de T :



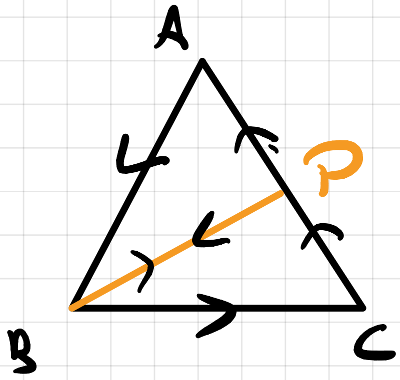
Par décomposition : $\displaystyle\int_{\partial T} = \int_{\partial PAB} = \int_{\partial PP_1P_2} + \underbrace{\cancel{\int_{\partial P_1AP_2}}}_{=0 \text{ par Goursat}} + \underbrace{\cancel{\int_{\partial ABP_2}}}_{=0 \text{ par Goursat}}$

On, $\displaystyle\left|\int_{\partial PP_1P_2} f(z)\,dz\right| \leq \underbrace{\sup_T |f|}_{\text{car } f\ C^0 \text{ sur } T \text{ compact}} L(\partial PP_1P_2)$

Si $P_{1,2} \to P$ alors $L(\partial PP_1P_2) \to 0$.

Donc $\int_{\partial PP_1P_2} f(z)\,dz = 0$ et $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

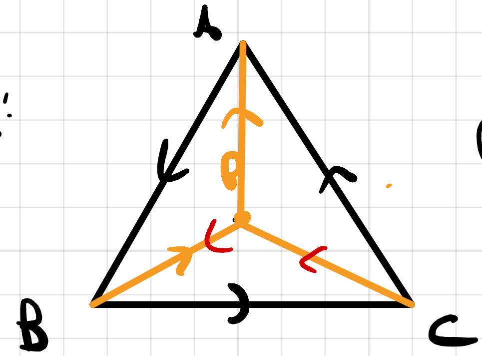
3e cas :



On est ramené à faire deux fois le deuxième cas :

$$\int_{\partial ABC} = \int_{\partial ABP} + \int_{\partial BCP}$$

4e cas :



On est ramené 3 fois au 2ème cas.

$\square$

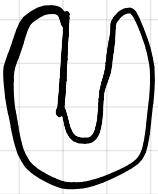
III Existence de $\mathbb{C}$-primitives

On rappelle qu'une $\mathbb{C}$-primitive d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $F' = f$.

On commence cette partie par une définition topologique.

15

Définition :



Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit étoilé s'il existe $\quad \in \Omega$ tel que :

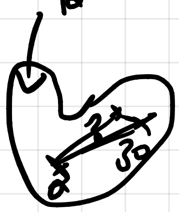
$$\forall z \in \Omega, \ [a, z] := \{ta + (1-t)z \mid t \in [0,1]\} \subset \Omega$$

Tout ouvert convexe est étoilé. Tout ouvert étoilé est connexe par arcs donc connexe.

Théorème :

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue telle que $\forall T$ triangle $T \subset \Omega$, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. Alors f admet une $\mathbb{C}$-primitive.

D : Soit $a \in \Omega$ tel que : $\forall z \in \Omega, [a, z] \subset \Omega$.



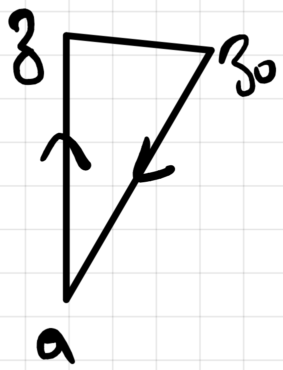
On fixe $z_0 \in \Omega$. Soit $z \in \Omega$. On pose :

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)\,d\xi.$$

On suppose z suffisamment proche de z_0 pour que le triangle $a z z_0$ soit inclus dans Ω.

16

On a : $F(z)-F(z_0)=\int_{[a,z]} f(\xi)d\xi - \int_{[a,z_0]} f(\xi)d\xi$



$= \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi + \int_{[z_0,a]} f(\xi)d\xi$

$= \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi + \int_{[z,z_0]} f(\xi)d\xi + \int_{[z_0,a]} f(\xi)d\xi - \int_{[z,z_0]} f(\xi)d\xi$

$= \underbrace{\int_{\partial(a z z_0)} f(\xi)d\xi}_{} - \int_{[z,z_0]} f(\xi)d\xi$

$= \quad 0 \quad - \int_{[z,z_0]} f(\xi)d\xi = \int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi.$

$= \int_0^1 f(tz_0+(1-t)z)\,(z_0-z)\,dt$

Si $z\neq z_0$: $\dfrac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \int_0^1 f(tz_0+(1-t)z)\,dt$

Comme f est C^0 et $[0,1]$ est compact :

$\int_0^1 f(tz_0+(1-t)z)\,dt \xrightarrow[z\to z_0]{} \int_0^1 f(tz_0+(1-t)z_0)\,dt = f(z_0)$

Donc $\dfrac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow[z\to z_0]{} f(z_0)$.

Donc F est holomorphe et : $\forall z_0\in\Omega$, $F'(z_0)=f(z_0)$ $\square$

17

Corollaire : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé. Soit $p \in \Omega$. Soit $f \in C^0(\Omega)$ et dans $\mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Alors :

(i) f admet une $\mathbb{C}$-primitive

(ii) pour tout lacet $\gamma \subset \Omega$, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

D : (i) Par le corollaire du lemme de Goursat, $\forall T \subset \Omega$ triangle,

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

D'où (i).

(ii) Par (i), f admet une $\mathbb{C}$-primitive F donc son intégrale sur γ vaut, si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $F(\underbrace{\gamma(b)}_{=\gamma(a)}) - F(\gamma(a)) = 0$.

$\square$