1

Chapitre 3 — Notion d'indice

I Définition et premières propriétés

Définition : Soit γ un lacet et $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
On appelle indice de γ par rapport à a le nombre :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Proposition : Soit γ un lacet et $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* := \Omega$,

(1) $\mathrm{Ind}(\gamma, a)$ est constant quand a décrit un domaine inclus dans Ω.

(2) $\mathrm{Ind}(\gamma, a)$ est constant sur tout chemin qui ne rencontre pas γ.

(3) $\lim_{|a| \to +\infty} \mathrm{Ind}(\gamma, a) = 0$.

(4) $\mathrm{Ind}(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$.

D: (1) Pour $a \in \Omega$ on pose : $F(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$

Alors : $F(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z} \frac{dz}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n dz$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi} \left(\int_\gamma \frac{1}{z^{n+1}} dz \right) a^n$$

et F est analytique donc holomorphe sur Ω. De plus, ②

$$F'(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^2}$$

Or, la fonction rationnelle $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^2}$ a des $\mathbb{C}$-primitives dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, donc $F'(a) = 0$.

Donc F est une $\mathbb{C}$-primitive de la fonction nulle dans Ω, elle est donc constante sur tout ouvert connexe de Ω.

(2) Un chemin qui ne rencontre pas γ^* est dans une composante connexe de Ω. D'après (1), l'indice est constant sur cette composante connexe.

(3) Soit $R > 0$ tel que $\gamma^* \subset D(0, R)$.

Pour $|a| > R$ on a :

$$|\mathrm{Ind}(\gamma, a)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{L(\gamma)}{|a| - R} \xrightarrow[|a| \to +\infty]{} 0$$

(4) Supposons $\gamma : [b, c] \to \mathbb{C}$.

Alors : $$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_b^c \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} \, dt$$

Posons pour $u \in]b, c]$, $g(u) = \int_b^u \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} \, dt$

Alors g est C^0 et admet, sauf en un ensemble fini de points, une dérivée :

$$g'(u) = \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - a}$$

Aux points de cet ensemble fini, g admet des dérivées à gauche et à droite.

③ Posons, pour $u \in]b,c]$, $G(u) = (\gamma(u)-a)\, e^{-g(u)}$

G est C^0 et on a sauf en un nb fini de points :

$$\frac{G'(u)}{G(u)} = \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-a} - g'(u) = 0$$

Donc G est constante sur $]b,c]$ et en particulier, par C^0, $G(b) = G(c)$, soit encore :

$$(\gamma(b)-a)\, \underbrace{e^{-g(b)}}_{=1} = (\gamma(c)-a)\, e^{-g(c)}$$

Or $\gamma(b) = \gamma(c)$ car γ est un lacet, donc $e^{-g(c)} = 1$. On en déduit que $-g(c)$ est un multiple entier de $2i\pi$ i.e.

$$g(c) \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Or $\mathrm{Ind}(\gamma,a) = \frac{1}{2i\pi}\, g(c) \in \mathbb{Z}$.

$\square$

On déduit des points (1) et (3) que $\mathrm{Ind}(\gamma,a)$ est nul dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

II Exemples de calculs.

1. On considère le lacet circulaire de centre a et de rayon r défini par : $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$,
$\forall t \in [0,2\pi]\ \gamma(t) = a + r e^{imt}$ avec $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

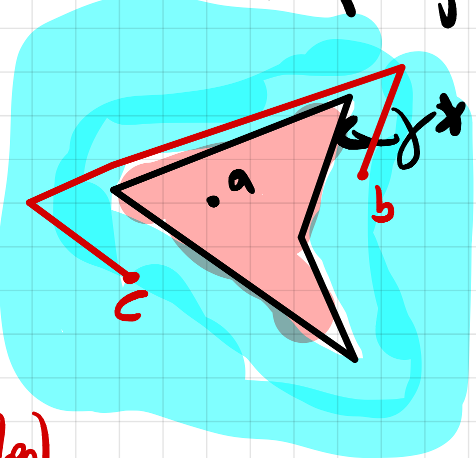
γ tourne m fois autour de a, dans le sens direct si $m>0$ et dans le sens indirect si $m<0$.

④ On a $\gamma^* = C(a,r)$ et $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ se divise en deux domaines, $D(a,r)$ et la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > r\}$. Comme précisé précédement, l'indice est nul dans la couronne puisqu'il s'agit de la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Puis, comme l'indice est constant dans chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, pour le calculer dans $D(a,r)$ il suffit de le calculer en a.

On a :
$$\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma, a)} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\cancel{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m \cancel{i} \cancel{r} \cancel{e^{imt}}}{\cancel{r} \cancel{e^{imt}}} \, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m \, dt = \boxed{m}.$$

2. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ donné par :
$\forall t \in [0, 2\pi]$, $\gamma(t) = a + r(t) e^{it}$
avec $a \in \mathbb{C}$ et r C^0 sur $[0, 2\pi]$, C^1_{pm}, strictement positive et telle que $r(0) = r(2\pi)$.
Pour γ on définit $\mathrm{Int}(\gamma^*) = \{a + \rho e^{it} \mid 0 \leq \rho < r(t),\ t \in [0, 2\pi]\}$
et $\mathrm{Ext}(\gamma^*) = \{a + \rho e^{it} \mid \rho > r(t),\ t \in [0, 2\pi]\}$

pour relier b à c on suit des "parallèles" aux côtés de γ^* (ça peut être des courbes)



$\mathrm{Int}(\gamma^*)$ et $\mathrm{Ext}(\gamma^*)$ sont des domaines.
$\mathrm{Int}(\gamma^*)$ est étoilé par rapport à a.

De nombreuses courbes relèvent de cet exemple : cercles, ellipses, contours polygonaux convexes ou non, triangle !

On a alors pour $b \in \mathrm{Ext}(\gamma^*)$, $\mathrm{Ind}(\gamma,b)=0$ et si $b \in \mathrm{Int}(\gamma^*)$ il suffit là encore de prendre $b=a$. Alors :

$$\mathrm{Ind}(\gamma,a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\,dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r'(t)\cancel{e^{it}} + r(t)\,i\,\cancel{e^{it}}}{r(t)\,\cancel{e^{it}}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r'(t)}{r(t)} + i\,dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\left(\left[\ln(\underbrace{r(2\pi)}_{= r(0)}) - \ln(r(0))\right] + 2i\pi\right)$$

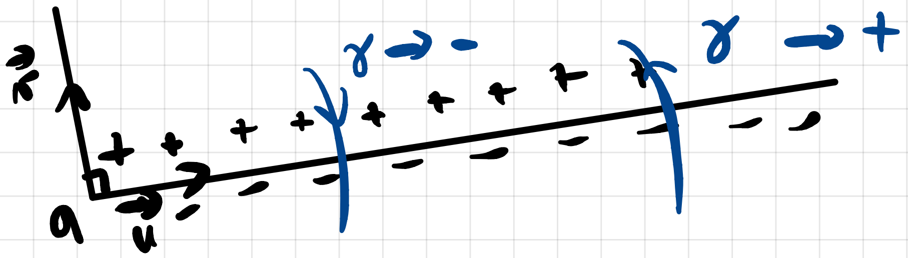
$$= 1$$

Donc $\mathrm{Ind}(\gamma,a) = 1$.

II Signification de l'indice.

Intuitivement, $\mathrm{Ind}(\gamma,a)$ compte le nombre de tours effectués par γ "autour" de a. Ces tours peuvent être comptés positivement ou négativement.

Soit γ un lacet et $a \in \mathbb{C}$, $a \notin \gamma^*$. On trace une demi-droite issue de a.



(6)

On suppose que la demi-droite coupe γ^* en un nombre fini de points et qu'en chacun de ces points, γ "traverse" la demi-droite (pas de)

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire directeur de la demi-droite et $\vec{v}$ de sorte que $(\vec{u},\vec{v})$ soit direct. A chaque point a_i de traversée de la demi-droite, on associe un nombre ε_i qui vaut : $+1$ si γ passe de $\ominus$ à $\oplus$

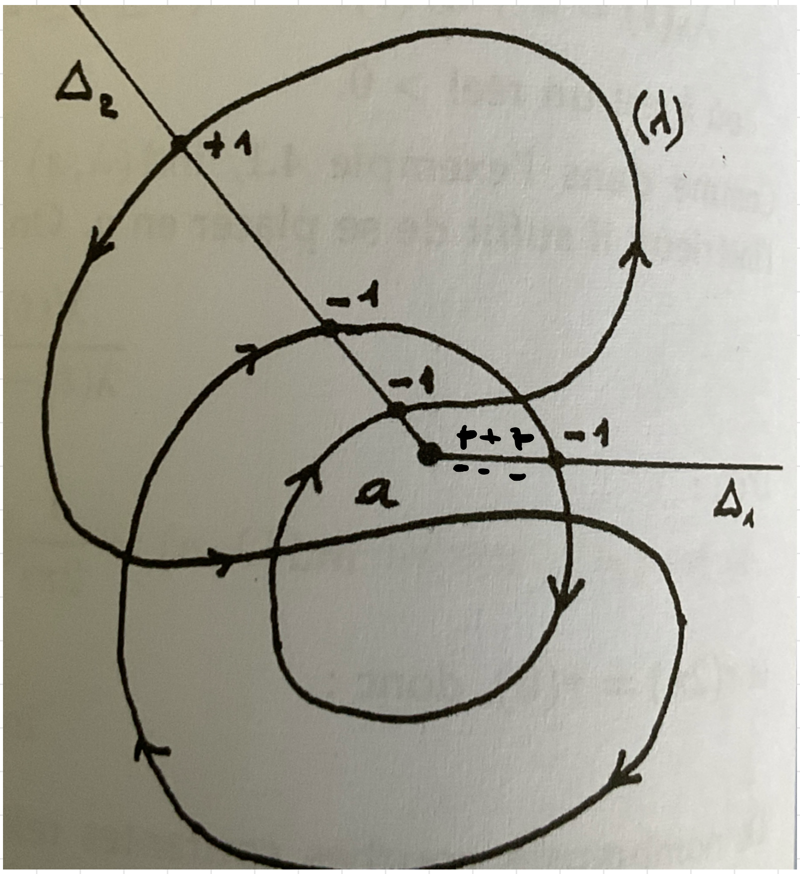
-1 si γ passe de $\oplus$ à $\ominus$

Alors $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$.

Plus précisément : s'il existe $\alpha \in]b,c[$ tel que γ soit C^1 au $V(\alpha)$ et $\gamma'(\alpha) \neq 0$ et $\gamma^{(-1)}(\gamma(\alpha)) = \{\alpha\}$

alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{Ind}(\gamma, \gamma(\alpha) + \varepsilon i \gamma'(\alpha)) = \mathrm{Ind}(\gamma(\alpha) - i\varepsilon\gamma'(\alpha)) + 1$$



Avec Δ_1 : -1

Avec Δ_2 : $(-1)+(-1)+1$
$= -1$!

7

IV Deux applications de l'indice.

1. Déterminations du logarithme.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine. On rappelle qu'une détermination du logarithme sur Ω est une fonction L, holomorphe sur Ω et telle que

$$\forall z \in \Omega, \quad \exp(L(z)) = z.$$

L'existence de L implique que $0 \notin \Omega$ car l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

L étant une primitive de $\frac{1}{z}$ une autre condition nécessaire est que : $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$ pour tout lacet γ, tel que $\gamma^* \subset \Omega$.

Cela revient à dire que l'indice de γ par rapport à 0 est nul. Montrons que cette condition est suffisante pour avoir l'existence de L.

Tout d'abord, si $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$ pour tout lacet γ dans Ω alors $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une $\mathbb{C}$-primitive. Soit F une telle $\mathbb{C}$-primitive et soit $a \in \Omega$.

En particulier $a \neq 0$ et on peut l'écrire $a = e^{\alpha}$.

On choisit alors F de sorte que $F(a) = \alpha$.

Puis pour $z \in \Omega$ on pose :

$$G(z) = z e^{-F(z)}$$

Alors G est holomorphe sur Ω par composition et on a : $G'(z) = e^{-F(z)} + z\left(-\frac{1}{z}\right)e^{-F(z)} = 0$

Donc G est constante dans Ω et :

$$\forall z \in \Omega, \quad G(z) = G(a) = a\, e^{-f(a)} = a\, e^{-\alpha} = a \frac{1}{a} = 1$$

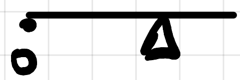
Soit encore : $\forall z \in \Omega, \ e^{f(z)} = z$

d'où f est une détermination du logarithme sur Ω.

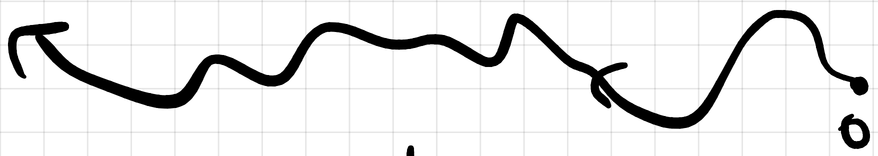
Finalement :

Proposition : Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ tel que $0 \notin \Omega$. Pour qu'il existe une détermination du logarithme sur Ω, il faut et il suffit qu'on ait $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 0$ pour tout lacet γ dans Ω.

Exemples :
- $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite issue de l'origine



- $\mathbb{C}$ privé d'une courbe C^0 non bornée issue de 0.

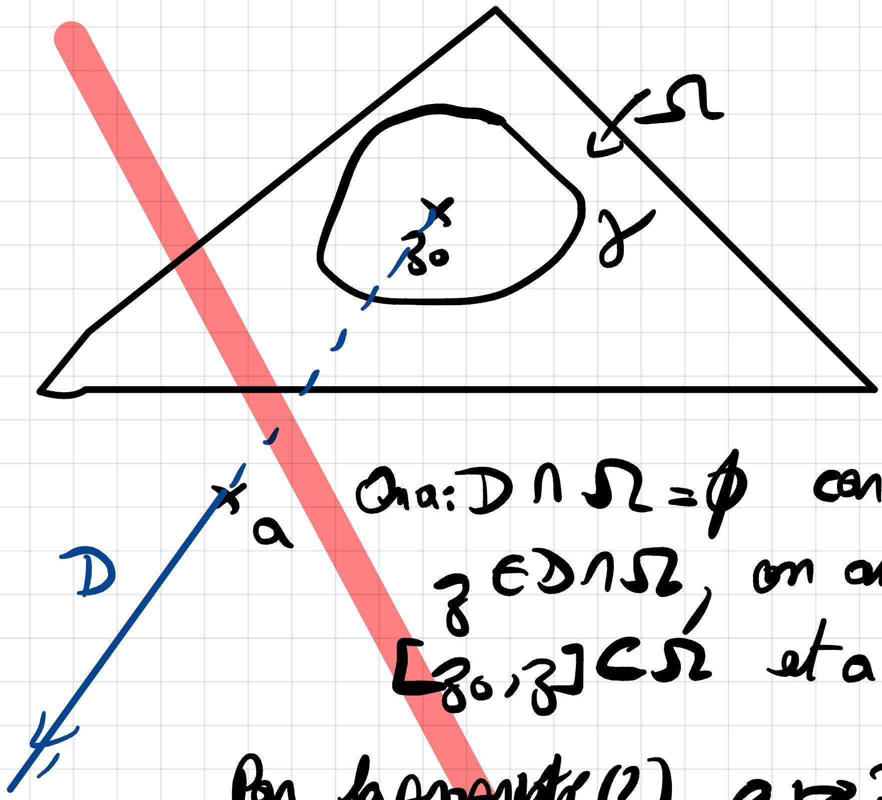


2. Application aux domaines étoilés

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ étoilé par rapport à $z_0 \in \Omega$.

Proposition : Pour tout lacet γ dans Ω et tout point $a \notin \Omega$ on a $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = 0$

D : Soit $a \notin \Omega$. Soit D la demi-droite d'origine a, portée par la droite $(z_0 a)$ et qui ne contient pas z_0.



On a : $D \cap \Omega = \emptyset$ car s'il existait $z \in D \cap \Omega$, on aurait $z \in D$ et $[z_0, z] \subset \Omega$ et $a \in [z_0, z]$ i.e. $a \in \Omega$.

Par la propriété (2), $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est constante sur D et par la propriété (3), cette constante est nulle. En particulier $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = 0$. $\square$

Cette propriété des domaines étoilés signifie qu'ils sont "simplement connexes". Nous y reviendrons au chapitre 5.

Proposition : Si Ω est un domaine étoilé, pour tout contour triangulaire ∂T tracé dans Ω, l'intérieur de ∂T est inclus dans Ω.

D : ∂T relève de l'exemple 2. Soit $a \in \mathrm{Int}(\partial T)$. Alors $\mathrm{Ind}(\partial T, a) = 1 \neq 0$. Donc on ne peut pas avoir $a \notin \Omega$ i.e. $a \in \Omega$. $\square$