1

Chapitre 4 : Formule de Cauchy locale et applications

I Formule de Cauchy pour un ouvert étoilé

Théorème : (Formule de Cauchy) Soit Ω un ouvert étoilé. Soit γ un lacet dans Ω et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. On a :

$$\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}$$

D : Soit $z \in \Omega$ fixé. On pose

$$g : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \xi \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{si } \xi = z \end{cases}$$

Alors g est C^0 sur Ω par holomorphie de f et $g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z\})$. D'où :

$$\int_\gamma g(\xi) d\xi = 0 \iff \int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0$$

Soit encore :

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = f(z) \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = f(z) \times 2i\pi \, \mathrm{Ind}(\gamma, z)$$

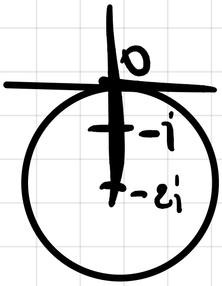
D'où : $\mathrm{Ind}(\gamma, z) f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$. $\square$

② **Remarque :** On utilise très souvent la formule de Cauchy pour calculer la valeur de f en un point $z \in D(a,R)$ avec comme lacet γ le cercle $C(a,R)$ de centre a et de rayon R parcouru une fois dans le sens direct. La "formule de Cauchy pour le disque" devient alors :

$$\forall z \in D(a,R),\quad f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,R)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

car $\mathrm{Ind}(C(a,R),z) = 1$.

Exemple 1 : Calculons $\displaystyle\int_{C(-2i,2)} \frac{dz}{1+z^2}$. On a :



$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z-(-i))}.$$ La fonction $f : \begin{array}{l}\mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{z-i}\end{array}$ est holomorphe sur $D(-2i,2) \subset \mathbb{C}\setminus\{i\}$ et $-i \in D(-2i,2)$ donc on peut appliquer la formule de Cauchy :

$\sin(-i) = \frac{e^{i(-i)} - e^{-i(-i)}}{2i}$

$$f(-i) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(-2i,2)} \frac{f(z)}{z-(-i)}\, dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(-2i,2)} \frac{dz}{1+z^2}$$

D'où : $$\int_{C(-2i,2)} \frac{dz}{1+z^2} = 2i\pi\, f(-i) = 2i\pi\,\frac{1}{-2i} = -\pi.$$

Exemple 2 : Calculons $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)}{z+i}\, dz$. $f : \begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sin(z)\end{array}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, $-i \in D(0,2)$ donc :

$$\int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)}{z+i}\, dz = \int_{C(0,2)} \frac{f(z)}{z-(-i)}\, dz = 2i\pi\, f(-i) = 2i\pi \sin(-i)$$
$$= \frac{e^{i(-i)} - e^{-i(-i)}}{\cancel{2i}} \times \cancel{2i}\pi = \pi\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

3

II Applications

1. Développement en série entière.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Soit $z_0 \in \Omega$ et soit $R > 0$ tel que $D(z_0, R] \subset \Omega$.
Soit $\gamma = C(z_0, R)$ le bord de $D(z_0, R)$ et soit $z \in D(z_0, R)$. On a alors :

$$\underbrace{\mathrm{Ind}(\gamma, z)}_{=1} f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Or : $\gamma : \begin{array}{l} [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto z_0 + Re^{it} \end{array}$ et on a donc :

$$f(z) = \frac{1}{2\cancel{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R\cancel{i} e^{it} f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it} + (z_0 - z)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{1 - \frac{z - z_0}{Re^{it}}} dt$$

Or : $\left| \frac{z - z_0}{Re^{it}} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} < 1 \quad \forall z \in D(z_0, R)$.

Donc $\displaystyle \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{Re^{it}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{R^n} e^{-int} (z - z_0)^n$

Par convergence normale sur tout disque inclus dans $D(z_0, R)$ on peut intervertir somme et intégrale pour obtenir :

$$\forall z \in D(z_0, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it}) Re^{it}}{(Re^{it})^{n+1}} dt \right) (z - z_0)^n$$

(21)

Soit encore :

$$\forall z \in D(z_0,R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,R)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right)(z-z_0)^n$$

Nous pouvons résumer ce calcul.

Théorème : [Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors f est analytique sur Ω i.e. f est DSE en tout point $z_0 \in \Omega$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,R)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

pour tout $R>0$ tel que $D(z_0,R) \subset \Omega$.

En particulier, si f est $\mathbb{C}$-dérivable, elle est en fait indéfiniment dérivable ! Il n'y a pas de notion de classe C^k pour les fonctions holomorphes.

Corollaire : [Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$.

D : Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f est DSE en tout point $z_0 \in \Omega$. Alors f' est également DSE en tout $z_0 \in \Omega$ et on a déjà vu que la somme d'une série entière est holomorphe !

$\square$

(5)

2. Théorème de Morera

Théorème : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ssi pour tout triangle $T \subset \Omega$, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$

D : $\Rightarrow$] C'est le lemme de Goursat.

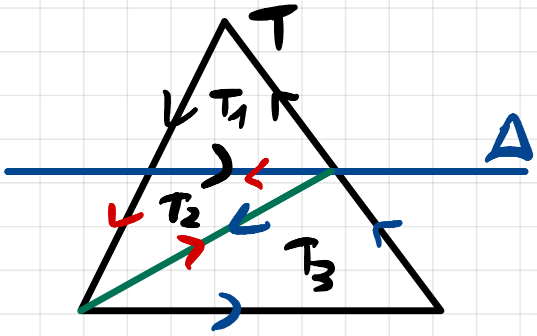
$\Leftarrow$] Si $\forall T \subset \Omega$, T triangle, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$, alors f admet une $\mathbb{C}$-primitive $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $F' = f$. Or la dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe, donc $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\square$

Corollaire 1 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue.
(1) Si $p \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$ alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
(2) Soit Δ une droite. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \Delta)$ alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

D : (1) Par le corollaire du lemme de Goursat, si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$ alors : $\forall T \subset \Omega$, T triangle, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. Par Morera, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(2) Soit $T \subset \Omega$, T triangle. Si $\Delta \cap T = \emptyset$, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ par Goursat.

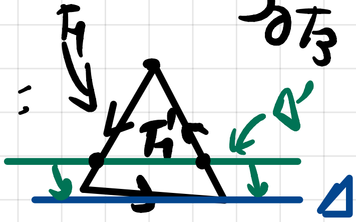
Si $\Delta \cap T \neq \emptyset$ on peut avoir deux cas.



On découpe en trois triangles et on applique le corollaire de Goursat à T_3 pour avoir

$$\int_{\partial T_3} f(z)\,dz = 0.$$

Pour T_1 et T_2 :



On applique Goursat sur T_1' et on fait tendre Δ' vers Δ pour avoir $\int_{\partial T_1} f(z)\,dz = 0$ à la limite. Idem pour T_2.

Finalement $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. Par Morera $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. $\blacksquare$

Corollaire 2 : Soit Ω un ouvert (connexe) [ou composantes connexes] de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Alors f admet une $\mathbb{C}$-primitive ssi pour tout lacet γ dans Ω, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

D : $\Rightarrow$ Voir calcul chapitre 2.

$\Leftarrow$ Pour γ triangle on retrouve que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ par Morera. Puis Ω étant connexe dans $\mathbb{C}$ il est connexe par arcs.

Soit $a \in \Omega$ fixé et soit $z \in \Omega$. Soit γ_z un chemin qui relie a à z. On pose

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi.$$

Montrons que F ne dépend pas du chemin qui relie a à z. Soit γ_z' un tel autre chemin. Alors

4

$\gamma = \gamma_z \odot \overleftarrow{\gamma'_z}$ est un lacet qui joint a à a.

D'où :

$$0 = \int_\gamma f(\xi)\,d\xi = \int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi - \int_{\gamma'_z} f(\xi)\,d\xi$$

et $F(z) = \int_{\gamma'_z} f(\xi)\,d\xi$.

Puis, soit $z_0 \in \Omega$. Montrons que F est holomorphe en z_0. Soit $r>0$, $D(z_0,r) \subset \Omega$. Pour $z \in D(z_0,r)$ on a :

$$F(z) = \underbrace{\int_{\gamma_{z_0}} f(\xi)\,d\xi}_{cte} + \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi$$

← segment inclus dans $D(z_0,r)$

Or $z \mapsto \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi$ est holomorphe en appliquant le résultat déjà obtenu sur les ouverts étoilés ($D(z_0,r)$ est étoilé en z_0).

Donc F est holomorphe et $F' = f$. $\square$

3. Logarithme et racine carré.

Proposition : Soit Ω un ouvert étoilé. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ne s'annulant pas sur Ω. Alors f admet un logarithme holomorphe sur Ω i.e. $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $e^g = f$.

⑧

D: Comme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ et comme f ne s'annule pas, $\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$. Comme Ω est étoilé, $\frac{f'}{f}$ admet une $\mathbb{C}$-primitive $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. On a :

$$\left(\frac{e^h}{f}\right)' = \frac{\cancel{f}\,\frac{f'}{\cancel{f}}e^h - f'e^h}{f^2} = 0$$

Comme Ω est étoilé, Ω est connexe donc $\frac{e^h}{f} = cte \neq 0$

On la note e^a. Alors : $e^h = e^a f \iff e^{h-a} = f$.

D'où $g = h - a$ convient.

□

Rq : Si g_1 est une autre fonction holomorphe telle que

$$e^{g_1} = f = e^g \text{ alors } e^{g_1 - g} = 1 \text{ et}$$

$$\forall z \in \Omega,\ (g_1 - g)(z) = 2i\pi \underbrace{k(z)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Or k est C^0 donc k est cte.

Donc : $\exists k \in \mathbb{Z},\ g_1 = g + 2ik\pi$.

⚠ Cette fonction logarithme n'est pas forcément $\ln \circ f$.

Proposition : Soit Ω un ouvert étoilé et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ qui ne s'annule pas sur Ω. Alors f a une racine carré holomorphe dans Ω i.e.
$\exists\, \ell$ holomorphe dans Ω tq : $\ell^2 = f$.

D: Soit $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ un logarithme holomorphe de f.
Alors $\ell_1 = e^{g/2}$ et $\ell_2 = e^{-g/2}$ conviennent.

□

⑨

4. Inégalités de Cauchy

a. Il est remarquable que pour une fonction holomorphe, les dérivées sont contrôlées par la fonction.

Théorème : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soient $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $D(z_0, r) \subset \Omega$ un disque ouvert. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \mathcal{C}(z_0, r)} |f(z)|$$

D : Rappelons que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})\, ir}{(re^{it})^{n+1}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, e^{-i(n+1)t} dt$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + re^{it})|}_{\leq \sup_{z \in \mathcal{C}(z_0,r)} |f(z)|} \underbrace{|e^{-i(n+1)t}|}_{=1} dt$$

$$\leq \frac{n!}{r^n} \cancel{\frac{1}{2\pi}} \times \cancel{(2\pi} - 0) \sup_{z \in \mathcal{C}(z_0,r)} |f(z)|$$

$\square$

10

Les inégalités de Cauchy ont de nombreuses applications. En voici quelques-unes.

b. Théorème de cv de Weierstraß : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{H}(\Omega)$ qui cv uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f. Alors :

(1) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

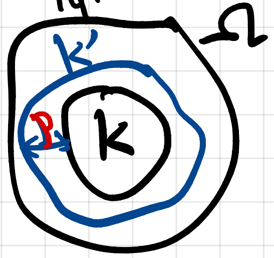
(2) pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(f_n^{(k)})$ cvu sur tout compact de Ω vers $f^{(k)}$.

D : (1) f est C^0 car les f_n le sont et (f_n) cvu sur tout compact vers f. Puis si $T \subset \Omega$ est un triangle :

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \int_{\partial T} \lim_{n\to+\infty} f_n(z)\,dz \overset{\text{cvu sur } \partial T \text{ compact}}{=} \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_{\partial T} f_n(z)\,dz}_{=0 \text{ par Goursat}} = 0$$

Par Morera, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

$\exists\, \rho>0$ et K' compact tq !



(2) Soit $K \subset \Omega$ un compact. On note

$$\rho = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(K, \underbrace{\mathbb{C}\setminus\Omega}_{\text{fermé}}) > 0,$$

$$K' = \bigcup_{z\in K} \bar{D}(z,\rho) \subset \Omega \text{ et compact car}$$

$$K' = \sigma(\underbrace{K\times\bar{D}(0,\rho)}_{\text{compact}}) \text{ avec } \sigma : \begin{array}{l} K\times\bar{D}(0,\rho) \to \mathbb{C} \\ (k,\alpha) \mapsto k+\alpha \end{array} \quad C^0.$$

(Soit enfin $\Omega' := \mathrm{Int}(K') \supset K$.)

(11)

On a bien $K' \subset \Omega$ car : $\forall z \in K, D(z,\rho) \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) = \emptyset$

Alors, Ω' est un ouvert contenant K et tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ ($\overline{\Omega'} = K'$)

et on a : $\forall z \in K, D(z,\rho) \subset \Omega'$ d'où :

$$\forall z \in K, \overline{D}(z,\rho) \subset K' \subset \Omega.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par l'inégalité de Cauchy :

$$\forall z \in K, |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{\rho^k} \sup_{\xi \in \mathcal{C}(z,\rho)} |f_n(\xi) - f(\xi)|$$

$$\leq \frac{k!}{\rho^k} \sup_{\xi \in K'} |f_n(\xi) - f(\xi)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{par hyp}$$

D'où : $\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{K,\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ i.e. $(f_n^{(k)})$ CVU vers $f^{(k)}$ sur K.

$\square$

Ce résultat est tout à fait remarquable par rapport au résultat pour les fonctions C^k ou C^∞ de la variable réelle. Dans le cas C^k on ne peut pas contrôler une dérivée avec la fonction !

c. Le théorème de Liouville

Théorème (Liouville) : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe et bornée. Alors f est constante.

Rq : Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ on dit que f est entière.

12

D: On a : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

On applique l'inégalité de Cauchy en $z_0 = 0$ et n arbitraire. On a :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$$

← car f bornée

Pour $n \geq 1$:

$$\forall r > 0, \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{1}{r^n} \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$$

donc : $\forall n \geq 1$, $a_n = 0$ i.e. $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a_0$

$\square$

On peut déduire du théorème de Liouville le théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème (d'Alembert-Gauss) : $\boxed{\text{Tout polynôme complexe non constant a une racine.}}$

D: Soit $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ un polynôme non constant, i.e. $N > 0$ et $a_N \neq 0$. On suppose par l'absurde que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

On a : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |a_N||z|^N - \sum_{n=0}^{N-1} |a_n||z|^n$

De là : $\exists R > 0$ tel que si $|z| \geq R$, $|P(z)| \geq 1$ car $|P(z)| \to +\infty$.

Alors comme P ne s'annule pas, $\frac{1}{P} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et

On a : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geq R,\ \left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq 1$.

Sur $\overline{D}(0,R)$, $\frac{1}{P}$ C^0 est bornée donc $\frac{1}{P}$ est bornée sur $\mathbb{C}$ et entière : par Liouville $\frac{1}{P}$ est constante i.e. P est constant. Contradiction et résultat !

$\square$

On termine par un résultat sur le comportement asymptotique des fonctions entières.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq : $\exists C > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \exists R > 0,$
$$|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| \leq C|z|^k.$$
Alors f est un polynôme de degré au plus k.

D : $\forall r > R$, $\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r^n} C r^k$

Si $n > k$: $\frac{r^k}{r^n} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$.

D'où : $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ si $n > k$ et f est donc un polynôme de degré au plus k (intégrat° directe ou Taylor exacte).

$\square$

4. Holomorphie sous le signe intégral.

Théorème : Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : \begin{array}{l} X \times \Omega \to \mathbb{C} \\ (x, z) \mapsto f(x, z) \end{array}$

On suppose :

(i) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(x, z)$ est mesurable

(ii) $\forall x \in X$, $z \mapsto f(x, z)$ est dans $\mathcal{H}(\Omega)$

(iii) $\forall K \subset \Omega$ compact, il existe $\varphi_K \in \mathcal{L}^1(K)$ telle que : $\forall (x, z) \in X \times K$, $|f(x, z)| \leq \varphi_K(x)$.

Alors : (1) $F : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \int_X f(x, z)\, d\mu(x) \end{array}$ est holomorphe sur Ω.

(2) $\forall z_0 \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z_0) = \int_X \left(\frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x, z_0)\right) d\mu(x)$

(3) Soit $K \subset \Omega$ compact et soit $r > 0$ tel que $K_r = \{z \in \Omega \mid d(z, K) \leq r\} \subset \Omega$. Alors :

$\forall z \in K$, $|F^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \int_X \varphi_K(x)\, d\mu(x)$.

Rq : Il est remarquable qu'il n'y ait aucune hypothèse de domination des dérivées !

D : Soit $K \subset \Omega$ compact. Si $r < d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ alors $r > 0$ et on a bien $K_r \subset \Omega$ pour un tel r.

Par l'inégalité de Cauchy :

$\forall x \in X, \forall z \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x, z)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z' \in K_r} |f(x, z')|$

15

D'où : $\sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x,z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \varphi_{K_r}(x)$

De plus, $x \mapsto \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x,z)$ est mesurable.

Par ailleurs, si $z_0 \in K$ et si $|z - z_0| \leq r/2$ i.e. $z \in K_{r/2}$

on a : $f(x,z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x,z_0) (z-z_0)^n$. (*)

D'où : $\sum_{n \geq 0} \frac{\left| \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x,z_0) (z-z_0)^n \right|}{n!} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{r^n} \varphi_{K_r}(x) \frac{1}{n!} \left(\frac{r}{2}\right)^n$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \varphi_{K_r}(x)$$

D'où la CVN / z sur $\bar{D}(z_0, \frac{r}{2})$. On peut donc intégrer terme à terme dans (*) :

$$\forall z \in \bar{D}(z_0, r/2), F(z) = \int_X f(x,z) d\mu(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n!} \int_X \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x,z_0) d\mu(x) \right) (z-z_0)^n$$

Donc F admet un DSE sur $\bar{D}(z_0, r/2)$ d'où F est holomorphe sur $\bar{D}(z_0, r/2)$ et on a :

$$F^{(n)}(z_0) = \int_X \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x,z_0) d\mu(x)$$

L'inégalité (3) vient alors de l'inégalité de Cauchy pour F.

$\square$

5. Prolongement analytique.

Théorème (Prolongement analytique) : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On a équivalence entre :

(1) $f \equiv 0$ sur Ω

(2) $\exists z_0 \in \Omega$, f soit nulle sur un voisinage de z_0

(3) $\exists z_0 \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(z_0) = 0$

D : (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) : ok.

(3) $\Rightarrow$ (2) : f DSE au $V(z_0)$ et $\forall k, a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Soit $N = \left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists r > 0, \overline{D(z,r)} \subset \Omega \\ \text{et } f|_{D(z,r)} \equiv 0 \end{array} \right\}$

- D'après (2), $\exists z_0 \in \Omega$, $z_0 \in N$ donc $N \neq \emptyset$.
- Puis, si $z \in N$ et si $w \in D(z,r)$, il existe $r_0 > 0$, $D(w, r_0) \subset D(z,r) \subset \Omega$ et $f|_{D(w,r_0)} \equiv 0$ car f est nulle sur $D(z,r)$.

  Donc $w \in N$ et on vient de montrer que si $z \in N$ alors $D(z,r) \subset N$. Donc N est ouvert dans $\mathbb{C}$ donc dans Ω car Ω ouvert.
- Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} z \in \Omega$. Alors :

  $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \equiv 0$ au $V(z_n)$ donc toutes les dérivées de f sont nulles au $V(z_n)$ et par C^0 de ces dérivées, elles sont nulles au $V(z)$.

(17)

En effet : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f^{(k)}(z_n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f^{(k)}(z)}$ $\Rightarrow$

Or f est DSE au $V(z)$ donc $f \equiv 0$ au $V(z)$. Donc $z \in N$

Donc N est un fermé de Ω.

N est non vide, ouvert et fermé dans Ω connexe, donc $N = \Omega$. D'où $f \equiv 0$ sur Ω.

$\square$

Corollaire 1 : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.
Si f et g sont dans $\mathcal{H}(\Omega)$ et s'il existe $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que : $\forall z \in D(z_0, r)$, $f(z) = g(z)$, alors $f = g$.

D : On applique le prolongement analytique à $f - g$.

$\square$

Corollaire 2 : $(\mathcal{H}(\Omega), +, \times)$ est un anneau intègre.

D : Soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \times g = 0$ dans Ω.

Si par l'absurde g est non identiquement nulle, il existe $z_0 \in \Omega$, $g(z_0) \neq 0$.
Par C^0, $g(z_0) \neq 0$ au $V(z_0)$. Donc $f \equiv 0$ au $V(z_0)$. Par prolongement analytique $f \equiv 0$ sur Ω

$\square$

18

Nous pouvons étudier plus précisément la structure de l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe non nulle sur un ouvert connexe.

Théorème (Zéros isolés) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f non identiquement nulle. Alors $Z(f) = f^{(-1)}(\{0\})$ est un fermé de Ω formé de points isolés.

D : Comme f est C^0 et $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{C}$, $Z(f)$ est fermé dans Ω.

Soit $z_0 \in Z(f)$. Alors $f(z_0) = 0$.

Comme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f est DSE sur un disque $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$:

$$\forall z \in \bar{D}(z_0, r),\ f(z) = \cancel{f(z_0)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

Comme Ω est connexe et f est non identiquement nulle : $\exists\, k \geq 1,\ f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Soit alors $k_0 = \min\{k \mid k \geq 1 \text{ et } f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$

Alors $f^{(k_0)}(z_0) \neq 0$ et : $\forall k < k_0,\ f^{(k)}(z_0) = 0$.

Donc : $\forall z \in \bar{D}(z_0, r),\ f(z) = \sum_{k \geq k_0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$.

$$= \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!}(z-z_0)^{k_0} \underbrace{\sum_{k \geq k_0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \frac{k_0!}{f^{(k_0)}(z_0)} (z-z_0)^{k-k_0}}_{:= g(z)}$$

(19)

g ainsi définie est holomorphe sur $D(z_0, r)$.
En dehors de ce disque on pose :

$$\forall z \in \Omega \setminus D(z_0, r),\ g(z) = \frac{k_0!}{f^{(k_0)}(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k_0}}$$

Alors $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $g(z_0) = 1$.

Finalement :

$$\forall z \in \Omega,\ f(z) = (z-z_0)^{k_0} \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!} g(z)$$

avec $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $g(z_0) = 1$.

Par C^0 de g, il existe $r' > 0$: $\forall z \in D(z_0, r'),\ g(z) \neq 0$.

D'où : $\forall z \in D(z_0, r') \setminus \{z_0\},\ f(z) \neq 0$
i.e z_0 est un point isolé de $Z(f)$

$\square$

De la démonstration, on déduit le résultat suivant.

Corollaire : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f non identiquement nulle. Si $z_0 \in Z(f)$, il existe un unique entier $k_0 \in \mathbb{N}$ et une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tels que :

$$\forall z \in \Omega,\ f(z) = (z-z_0)^{k_0} g(z)$$

On appelle k_0 l'ordre du zéro z_0.

Application :

Pour α réel non nul, nous cherchons à déterminer les zéros de la fonction $F : \mathbb{C}\setminus[0,1] \to \mathbb{C}$

$$\lambda \mapsto 1+\alpha \int_0^1 \frac{dy}{y-\lambda}$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus[0,1]$ on a :

$$\int_0^1 \frac{dy}{y-\lambda} = \ln\left(\frac{|1-\lambda|}{|\lambda|}\right) = \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) \quad \text{car } \lambda \notin [0,1].$$

Par ailleurs, si $F(\lambda)=0$ on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{y-\lambda} = -\frac{1}{\alpha}$ et

$$\int_0^1 \frac{dy}{y-\lambda} = -\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow e^{\int_0^1 \frac{dy}{y-\lambda}} = e^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Or, $\lambda \mapsto \frac{\lambda-1}{\lambda}$ et $\lambda \mapsto e^{\int_0^1 \frac{dy}{y-\lambda}}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ qui est connexe. De plus elles sont égales sur $\mathbb{R}\setminus[0,1] \subset \mathbb{C}\setminus[0,1]$ qui contient des points non isolés. Ces deux fonctions sont donc égales sur $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ par prolongement analytique.

On en déduit que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus[0,1],\ F(\lambda)=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda} = e^{-1/\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1-e^{-1/\alpha}}$$

qui est ainsi l'unique zéro de F dans $\mathbb{C}\setminus[0,1]$.