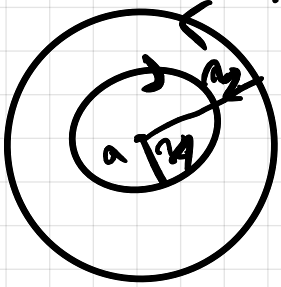
1

Chapitre 5 : Formule de Cauchy globale et calcul des résidus

I Formule de Cauchy globale :

1. Cycles.

Def : Un cycle est une somme finie (formelle) de type
$$\Gamma = \sum_{i=1}^{m} n_i \gamma_i$$
où les n_i sont dans $\mathbb{Z}$ et les γ_i sont des chemins fermés (C^0 et C^1_{pm}).

Ex : 

$r_2 > r_1$.

$\Gamma = -C(a, r_1) + C(a, r_2)$

Rq : Si l'un des γ_i n'est pas fermé, on parle de chaîne.

Def : (i) Le support de Γ est $\Gamma^* = \bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i^*$, c'est un compact.

(ii) La longueur d'un cycle Γ vaut : $\ell(\Gamma) = \sum_{i=1}^{m} |n_i| \, \ell(\gamma_i)$

Prop : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ C^0 sur Γ^*. Alors on pose :
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{m} n_i \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$
et $\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| \leq \ell(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma^*} |f(z)|$

2

Déf : Pour $a \notin \Gamma^*$ on pose : $\text{Ind}(\Gamma, a) = \sum_{i=1}^{m} n_i \text{Ind}(\gamma_i, a)$

Alors $a \mapsto \text{Ind}(\Gamma, a)$ a les mêmes propriétés que $a \mapsto \text{Ind}(\gamma, a)$.

2. Théorème de Cauchy global.

Pour obtenir une formule de Cauchy on peut soit faire des hypothèses sur l'ouvert Ω (étoilé pour Cauchy local), soit prendre un ouvert quelconque et écrire une formule pour un cycle qui vérifie certaines hypothèses.

Thm : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit Γ un cycle dans Ω tel que :

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \ \text{Ind}(\Gamma, a) = 0$$

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors :

(i) $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$

(ii) $\forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*, \ f(z) \text{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

Rq : On a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) avec une preuve similaire à celle de Cauchy local.

D/ Pour montrer (ii) on pose $g : \begin{array}{l} \Omega \times \Omega \to \mathbb{C} \\ (z, w) \mapsto \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z \end{cases} \end{array}$

③

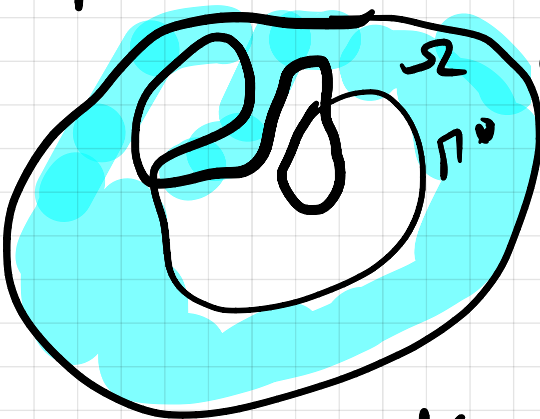
Puis on pose : $h : \Omega \to \mathbb{C}$

$z \mapsto \int_\Gamma g(z,\omega)\,d\omega$

Par holomorphie sous le signe intégral on montre que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$

Soit $\Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \mid \mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0 \}$

Par hypothèse : $\Omega_1 \supset \mathbb{C} \setminus \Omega$ et Ω_1 contient la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$



Ω_1 contient au moins cette région et tout le reste de $\mathbb{C} \setminus \Omega$

Soit $h_1(z) = \int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\,d\omega \in \mathcal{H}(\Omega)$.

sur $\Omega_1 \cap \Omega$, $h_1 = h$

et sur $\Omega_1 \cup \Omega$ on pose : $k(z) = \begin{cases} h(z) \text{ sur } \Omega \\ h_1(z) \text{ sur } \Omega_1 \end{cases}$

Alors $k \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

De plus : $|h_1(z)| \leq \ell(\Gamma) \sup_{\omega \in \Gamma^*} |f(\omega)| \times \frac{1}{d(z, \Gamma^*)} \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Donc k est bornée. Par Liouville, k est constante et $k \equiv 0$

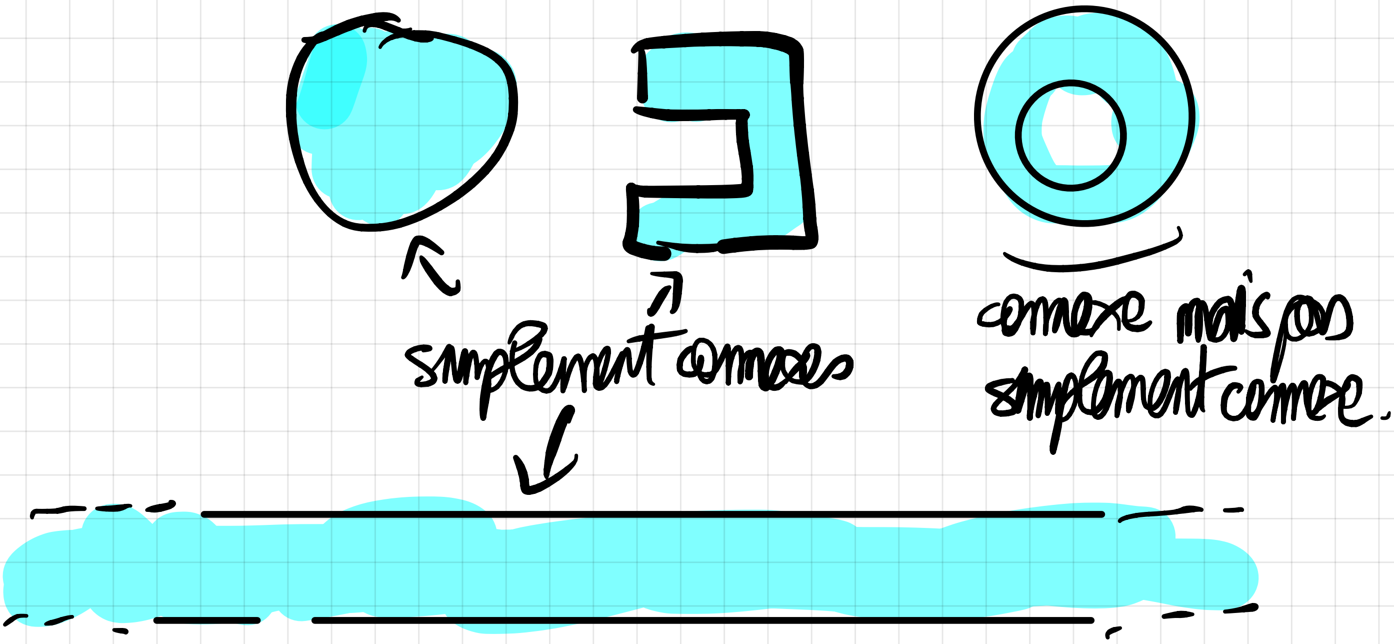
Donc : $\forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, $h(z) = \int_\Gamma \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}\,d\omega = 0$. $\square$

4

3. Applications

Déf : $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert est dit simplement connexe si : (i) Ω est connexe.
(ii) $\mathbb{C} \setminus \Omega$ n'a pas de composante connexe bornée

Ex : Un ouvert étoilé est simplement connexe.



Prop : Soit Ω simplement connexe et Γ un cycle dans Ω. Alors :
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \ \mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0.$$

D : Toutes les c.c de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ sont non bornées.

Corollaire : La formule de Cauchy globale est valable sur Ω simplement connexe sans hypothèse sur Γ

Corollaire : Soit Ω ouvert simplement connexe.

a. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ f a une $\mathbb{C}$-primitive.

b. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et f ne s'annule pas,

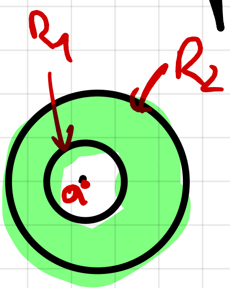
$$\exists g \in \mathcal{H}(\Omega),\ e^g = f.$$

II Singularités isolées des fonctions holomorphes.

1. Fonctions holomorphes sur une couronne. Développement en série de Laurent.

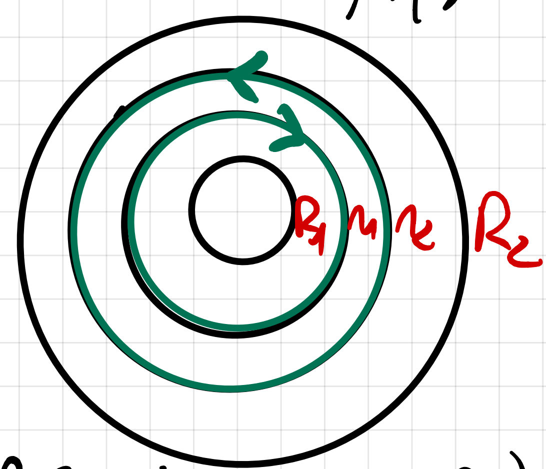
Déf : On appelle couronne de centre a et de rayons R_1 et R_2, $0 \leq R_1 < R_2 < +\infty$ l'ensemble :

$$C(a, R_1, R_2) = \{ z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2 \}$$



On se donne $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$

Soit $\Gamma = -C(a, r_1) + C(a, r_2)$



Soit $f \in \mathcal{H}(C(a, R_1, R_2))$ et soit $z \in C(a, r_1, r_2)$.

(6) Par la formule de Cauchy globale :

$\forall z\quad f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$

On : $\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(a-z)}\, d\xi \underset{\left|\frac{a-z}{a-\xi}\right|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi$

et $\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(a-z)}\, d\xi \underset{\left|\frac{a-\xi}{a-z}\right|<1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r_1)} f(\xi)(\xi-a)^n d\xi$

On : $\forall n\in\mathbb{Z}\quad \int_{\Gamma} \underbrace{\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^n}}_{\in\mathcal{H}(C(a,R_1,R_2))} d\xi = 0$ d'où : $\int_{C(a,r_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^n}\, d\xi = \int_{C(a,r_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^n}\, d\xi$

arbitraire donc les intégrales ne dépendent pas de r_1 et r_2 : on prend $r_1 = r_2 = r$

Donc, si $R_1 < r < R_2$:

$$\forall z\in C(a,R_1,R_2),\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-a)^n \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty}$ cv pour $|z-a| < R_2$ et $\sum_{-\infty}^{-1}$ est une série entière en $\frac{1}{z-a}$ de rayon de cv au moins $\frac{1}{R_1}$.

(7)

Donc, si $f \in \mathcal{H}(C(a, R_1, R_2))$, $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$

on peut écrire :

$$\forall z \in C(a, R_1, R_2), f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(z-a)^n$$

avec pour $r \in]R_1, R_2[$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} f(\xi)(\xi - a)^{-(n+1)} d\xi$$

Il s'agit d'un développement de Laurent de f dans la couronne $C(a, R_1, R_2)$.

et $f_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)(\cdot - a)^n$ a un rayon de $cv \geq R_2$

$f_2 = \sum_{-\infty}^{-1} c_n(f)(\cdot - a)^n$ série entière en $\frac{1}{z-a}$ de rayon de cv en $\frac{1}{R_1}$.

D'où $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \mathcal{H}(D(a, R_2))$ et $f_2 \in \mathcal{H}(C(a, R_1, +\infty))$

De plus comme f_2 n'a pas de terme constant, $f_2(z) \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} 0$.

En fait cette écriture est unique.

8) D: Si $f = h_1 + h_2$ avec $h_1 \in \mathcal{H}(D(a,R_2))$ et $h_2 \in \mathcal{H}(C(a,R_1,+\infty))$

et si $h_2(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$ alors $h_1 = f_1$ et $h_2 = f_2$.

En effet soit $k(z) = \begin{cases} (h_1 - f_1)(z) & \text{si } z \in D(a,R_2) \\ (f_2 - h_2)(z) & \text{si } z \in C(a,R_1,+\infty) \end{cases}$

bien définie pour $z \in C(a,R_1,R_2)$ car

$f = h_1 + h_2 = f_1 + f_2 \Rightarrow h_1 - f_1 = f_2 - h_2$.

Alors $k \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Comme $h_2(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$ et

$f_2(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$ alors $k(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$.

Par Liouville k est constante et $k = 0$.

D'où $h_1 = f_1$ et $h_2 = f_2$.

$\square$

Réciproquement si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$ vérifie :

(a) $\sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n$ a un rayon de CV R_2

(b) $\sum_{n<0} c_n (z-a)^n = \sum_{n>0} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ a un rayon de CV $\frac{1}{R_1}$

(c) $R_1 < R_2$.

Alors $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (\cdot - a)^n \in \mathcal{H}(C(a,R_1,R_2))$

9

et on peut vérifier que :

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = c_n(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} f(\xi)(\xi - a)^{-(n+1)} d\xi$

pour $r \in]R_1, R_2[$.

Thm : Une fonction holomorphe dans une couronne admet un unique développement de Laurent.

2. Types de singularités.

On étudie les fonctions holomorphes dans un disque pointé :

$$D'(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\} = C(a,0,r).$$

Déf : Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que a est une singularité isolée de f.

Pour étudier le comportement de f au voisinage de a on pourra toujours se ramener à $\Omega = D'(a,r)$.

Par la section précédente, f admet un développement de Laurent dans $D'(a,r)$:

$$\forall z \in D'(a,r),\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(z-a)^n$$

(10)

Il y a alors trois possibilités :

1. Tous les $c_n(f)$ sont nuls pour $n<0$: f se prolonge en une fonction holomorphe dans $D(a,1)$ donnée par $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)(z-a)^n$.

On dit alors que a est une singularité effaçable.

Ex $\frac{\sin z}{z} = 1 + \frac{z^2}{6} + \dots$ a une singularité effaçable en 0.

2. Il existe un nombre fini d'entiers négatifs n tels que $c_n(f) \neq 0$ i.e :

$$\exists n_0 < 0, \quad c_{n_0}(f) \neq 0 \text{ et } \forall n < n_0, \; c_n(f) = 0.$$

Dans ce cas on dit que f a un pôle en a et que n_0 est la multiplicité du pôle :

$$\sum_{n_0 \leq n} c_n(f)(z-a)^n.$$

Ex : $\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \dots$ a un pôle de multiplicité 1 en 0.

3. Il y a une infinité d'entiers négatifs tels que $c_n(f) \neq 0$. On dit que f a une singularité essentielle en a.

Ex : $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$: singularité essentielle en 0.

Prop : Soit $f \in \mathcal{H}(D'(a,r))$. Alors :

(i) f a une singularité effaçable en a ssi f est bornée au voisinage de a.

(ii) f a un pôle d'ordre au plus $m_0 \geq 0$ ssi $(z-a)^{-m_0} f$ est bornée au voisinage de a, ssi $|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$.

(iii) (Weierstraß) f a une singularité essentielle en a ssi : $\forall\, 0<\rho<r$, $\overline{f(D'(a,\rho))} = \mathbb{C}$

D : Admis $\square$

III Formule des résidus

1. Notion de résidu

Déf : Soit $f \in \mathcal{H}(D'(a,r))$. On appelle résidu de f en a le coefficient $c_{-1}(f)$ dans son développement de Laurent. On le note $\mathrm{Res}(f,a)$.

On a donc : $\forall \rho \in]0,r[$, $\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1}(f) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(a,\rho)} f(\xi)\,d\xi$

Rq : Si $f \in \mathcal{H}(D(a,r))$, $\mathrm{Res}(f,a) = 0$.

12

Proposition : Si $f \in \mathcal{H}(D'(a,r))$, f admet une $\mathbb{C}$-primitive dans $D'(a,r)$ ssi $\mathrm{Res}(f,a)=0$

D: $\Rightarrow$) Si f admet une $\mathbb{C}$-primitive dans $D'(a,r)$, comme $C(a,\rho)$ est un lacet : $\int_{C(a,\rho)} f(\xi)d\xi = 0$ et $\mathrm{Res}(f,a)=0$.

$\Leftarrow$) Le seul terme du développement de Laurent de f dans $D'(a,r)$ qui n'admet pas de $\mathbb{C}$-primitive dans $D'(a,r)$ est $\frac{1}{z-a}$. C'est celui associé à $c_{-1}(f)$. Donc si $c_{-1}(f)=0$, f admet une $\mathbb{C}$-primitive dans $D'(a,r)$.

$\square$

2. Pratique du calcul des résidus

- On se donne $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $a \in \Omega$. Soient f et g dans $\mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$.
Alors, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, par linéarité de l'intégrale :

$$\mathrm{Res}(\lambda f + \mu g, a) = \lambda \mathrm{Res}(f,a) + \mu \mathrm{Res}(g,a)$$

- Puis, si a est un pôle simple de f :

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

En effet si a est un pôle simple de f, on a au voisinage de a :

$$f(z) = \frac{c_{-1}(f)}{z-a} + \tilde{f}(z) \text{ avec } \tilde{f} \text{ holomorphe sur}$$

le voisinage.

13

D'où : $(z-a)f(z) = c_{-1}(f) + (z-a)\tilde{f}(z) \underset{z\to a}{\to} c_{-1}(f)$

- Plus généralement, si f admet un pôle d'ordre m en a, on a :

$$f(z) = \frac{c_{-m}(f)}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}(f)}{z-a} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)(z-a)^n}_{\tilde{f}(z)}$$

Alors

$$\varphi(z) := (z-a)^m f(z) = c_{-m}(f) + c_{-m+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(f)(z-a)^{m-1} + (z-a)^m \tilde{f}(z)$$

et par identification des coefficients de la série entière de φ :

$$c_{-1}(f) = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

En pratique on calcule un DL à l'ordre $m-1$ de φ en a (en posant $z = a+u$ et en faisant un $DL_m(0)$ en u) et on identifie ainsi $c_{-1}(f)$ au coefficient $m-1$ dans le DL.

- Si $f = \frac{g}{h}$ avec $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ et $h'(a) \neq 0$ alors f admet un pôle simple en a et on a :

$$\lim_{z\to a} (z-a)f(z) = \lim_{z\to a} g(z)\frac{z-a}{h(z)} = g(a)\frac{1}{h'(a)}$$

D'où

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

3. Formule des résidus.

Théorème : (Formule des résidus) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

On suppose que :

(i) $A \subset \Omega$ est fermé et formé de points isolés.

(ii) Γ est un cycle dont le support $\Gamma^* \subset \Omega \setminus A$

et : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0$

(iii) $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$.

Alors : $$\int_\Gamma f(\xi)\, d\xi = 2i\pi \sum_{a \in A} \mathrm{Ind}(\Gamma, a)\, \mathrm{Res}(f, a)$$

Rq : On sait que $\mathrm{Ind}(\Gamma, \cdot)$ est nulle sur $\mathbb{C} \setminus \Omega$ par hypothèse et que $\mathrm{Ind}(\Gamma, \cdot)$ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\Omega \setminus \Gamma^*$.

Donc $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ind}(\Gamma, z) \neq 0\}$ est borné, inclus dans une boule contenant Γ^* qui est bornée (rappelons que Γ^* est compact donc borné).

Mais alors, $\{a \in A \mid \mathrm{Ind}(\Gamma, a) \neq 0\}$ est formée de points isolés et bornée. Elle est donc finie.

Donc la $\sum_{a \in A} \mathrm{Ind}(\Gamma, a)\, \mathrm{Res}(f, a)$ est une somme ayant au plus un nombre fini de termes.

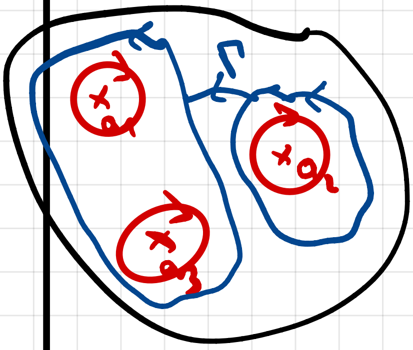
Il n'y a donc aucun problème de cv pour cette somme.

15

D : On pose : $\{a\in A \mid \mathrm{Ind}(\Gamma,a)\neq 0\} = \{a_1,\dots,a_k\}$

On a : $\forall j\in\{1,\dots,k\},\ \exists r_j>0,\ \bar{D}(a_j,r_j)\cap A=\{a_j\}$

et $\bar{D}(a_j,r_j)\subset \Omega\setminus\Gamma^*$.



On pose

$$\Gamma' = \Gamma - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ind}(\Gamma,a_i)\, C(a_i,r_i)$$

et $\Omega' = \Omega\setminus A$

On veut appliquer le théorème de Cauchy global à Ω', Γ' et f.

Pour cela il faut d'abord vérifier que :

$$\forall z\in \mathbb{C}\setminus\Omega',\quad \mathrm{Ind}(\Gamma',z)=0$$

On regarde deux cas : $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$ ou $z\in A$.

- Si $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$:

$$\mathrm{Ind}(\Gamma',z) = \underbrace{\mathrm{Ind}(\Gamma,z)}_{\substack{=0 \text{ par}\\ \text{l'hyp (ii)}}} - \sum_{i=1}^{k}\mathrm{Ind}(\Gamma,a_i)\,\underbrace{\mathrm{Ind}(C(a_i,r_i),z)}_{\substack{=0 \text{ car } z \text{ est dans}\\ \text{la cc non bornée de}\\ C(a_i,r_i)^* \text{ qui est } \subset\Omega}}$$

$$=0$$

- Si $z\in A$: • si $z\notin\{a_1,\dots,a_k\}$, comme $z\in A$,

$\mathrm{Ind}(\Gamma,z)=0$ par définition de $\{a_1,\dots,a_k\}$.

De plus, pour tout $i\in\{1,\dots,k\}$, $\mathrm{Ind}(C(a_i,r_i),z)=0$

car $\bar{D}(a_i,r_i)\cap A=\{a_i\}$, donc $z\notin \bar{D}(a_i,r_i)$.

Donc : $\mathrm{Ind}(\Gamma',z) = 0 - \sum_{i=1}^{k}\mathrm{Ind}(\Gamma,a_i)\times 0 = 0$.

(16)

- si $z \in \{a_1, \dots, a_k\}$:

$$\mathrm{Ind}(\Gamma', a_p) = \mathrm{Ind}(\Gamma, a_p) - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ind}(\Gamma, a_i)\, \mathrm{Ind}(C(a_i, r_i), a_p)$$

Or si $i \neq p$, on a $a_p \notin \bar{D}(a_i, r_i)$ et $\mathrm{Ind}(C(a_i, r_i), a_p) = 0$

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ind}(\Gamma, a_i)\,\mathrm{Ind}(C(a_i, r_i), a_p) = \mathrm{Ind}(\Gamma, a_p) \underbrace{\mathrm{Ind}(C(a_p, r_p), a_p)}_{=1}$

Finalement :

$$\mathrm{Ind}(\Gamma', a_p) = \mathrm{Ind}(\Gamma, a_p) - \mathrm{Ind}(\Gamma, a_p) = 0.$$

Donc on peut bien appliquer le théorème de Cauchy global à Ω', Γ', f pour obtenir

$$\int_{\Gamma'} f(\xi)\, d\xi = 0$$

Or : $\displaystyle\int_{\Gamma'} f(\xi)\, d\xi = \int_{\Gamma} f(\xi)\, d\xi - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ind}(\Gamma, a_i) \underbrace{\int_{C(a_i, r_i)} f(\xi)\, d\xi}_{= 2i\pi\, \mathrm{Res}(f, a_i)}$

D'où :

$$\int_{\Gamma} f(\xi)\, d\xi = 2i\pi \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ind}(\Gamma, a_i)\, \mathrm{Res}(f, a_i)$$

quitte à rajouter les termes nuls. $\rightarrow$ $\displaystyle = 2i\pi \sum_{a \in A} \mathrm{Ind}(\Gamma, a)\, \mathrm{Res}(f, a)$

$\square$

(17)

4. Calculs d'intégrales par la méthode des résidus

a. Type I : $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

Soit $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(x,y)$ une fraction rationnelle en deux variables telle que le dénominateur Q ne s'annule en aucun point de $C(0,1)$.

Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ F(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) ; \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

Alors : $F(e^{i\theta}) = \frac{1}{ie^{i\theta}} R(\cos\theta ; \sin\theta)$

D'où : $\int_{C(0,1)} F(z)\,dz = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

On a alors par le théorème des résidus :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \int_{C(0,1)} F(z)\,dz$$

$$= 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\mathrm{Ind}(C(0,1), z_k)}_{=1} \mathrm{Res}(F, z_k).$$

où $\{z_1, \dots, z_m\}$ est l'ensemble des pôles de F dans le disque unité.

D'où : $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(F, z_k)$

(18)

Par exemple, pour $a>1$ on peut calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$. La fraction rationnelle correspondante est : $R(X,Y)=\frac{1}{a+Y}$ et F est donnée par :

$$F(z)=\frac{1}{iz}\frac{1}{a+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\frac{2}{z^2+2iaz-1}$$

F admet deux pôles dans $\mathbb{C}$ donnés par :
$p_a^{\pm}:=-ia\pm i\sqrt{a^2-1}$, bien définis car $a>1$.
Le seul de ces deux pôles qui soit dans $D(0,1)$ est : $p_a^{+}=-ia+i\sqrt{a^2-1}$
Ce pôle est simple donc :

$$\operatorname{Res}(F,-ia+i\sqrt{a^2-1})=\lim_{z\to p_a^+}(z-p_a^+)F(z)=\lim_{z\to p_a^+}\frac{2(z-p_a^+)}{(z-p_a^+)(z-p_a^-)}$$

$$=\frac{2}{p_a^+-p_a^-}=\frac{2}{2i\sqrt{a^2-1}}=\frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$$

Il vient

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\sin t}=2i\pi\,\frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

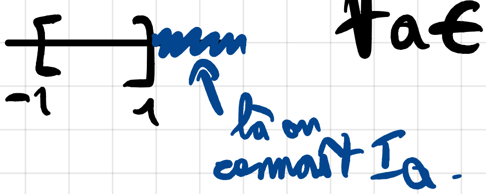
De plus, par théorème d'holomorphie sous le signe $\int$, $a\longmapsto \int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\sin t}=:I_a$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ et on sait que si $a\in]1,+\infty[$, $I_a=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

(19)

De plus $\mathbb{C}\setminus[-1,1] \to \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, $z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$. On peut donc poser

$$\sqrt{\frac{z-1}{z+1}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-1}{z+1}}$$

où Ln est la détermination principale du logarithme. Il vient alors, par prolongement analytique, que :

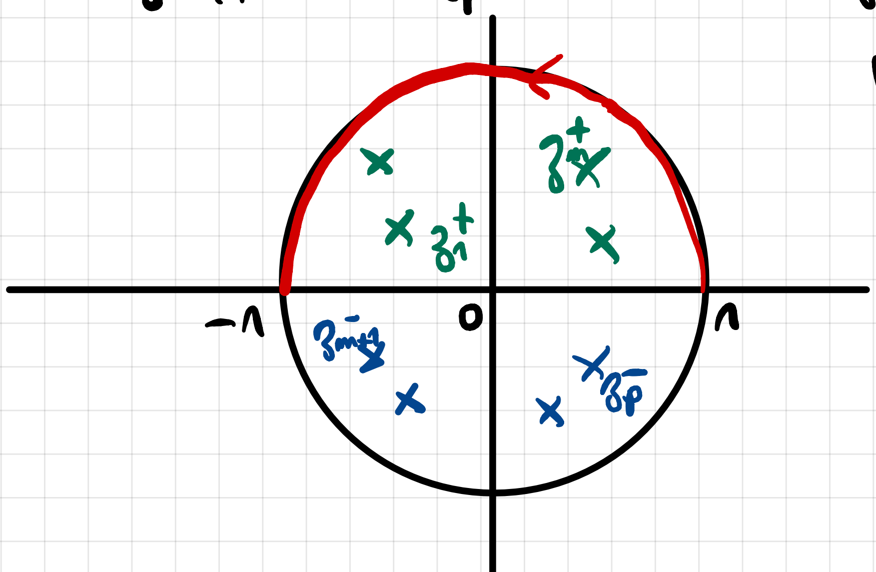


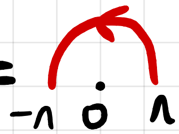
$$\forall a \in \mathbb{C}\setminus[-1,1], \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\,(a+1)}$$

b. Type II $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$

On considère une fraction rationnelle $R = \dfrac{P}{Q}$ avec Q qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^\circ P \leq d^\circ Q - 2$ pour n'avoir aucun problème de cv à l'infini.

Q admet un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$ que l'on notent $z_1^+, \dots, z_m^+, z_{m+1}^-, \dots, z_p^-$ avec $z_1^+, \dots, z_m^+$ de partie imaginaire > 0 et $z_{m+1}^-, \dots, z_p^-$ de partie imaginaire < 0.



$\Gamma =$ 

demi-cercle de centre 0 et de rayon 1

(20)

Par la formule des résidus :

$$\int_{-r}^{r} R(x)\,dx + \int_{\Gamma} R(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(R, z_k^+)\,\underbrace{\operatorname{Ind}(\Gamma \oplus [-r,r], z_k^+)}_{=1}$$

pour r assez grand de sorte que tous les $z_1^+, \dots, z_m^+$ soient dans $D(0,r)$.

On a :

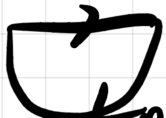
$$\int_{-r}^{r} R(x)\,dx \xrightarrow[r\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$

et
$$\left|\int_{\Gamma} R(z)\,dz\right| \leq L(\Gamma^*) \sup_{z\in\Gamma^*} |R(z)|$$
$$= \pi r \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } d^\circ P \leq d^\circ Q - 2}}{O\left(\frac{1}{r^2}\right)} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

Finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(R, z_k^+).$$

Rq : on aurait pu faire avec les $z_{m+1}^-, \dots, z_p^-$ et le demi-cercle



$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{Ind} = -1}}{-2i\pi} \sum_{k=m+1}^{p} \operatorname{Res}(R, z_k^-)$$

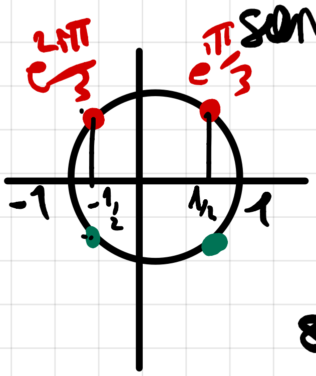
21

Exemple : On veut calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^4}$

On a $R(x) = \dfrac{1}{1+x^2+x^4}$ et on cherche les racines complexes de $1+x^2+x^4$ dont la partie imaginaire est strictement positive.

Petite astuce : $(1+x^2+x^4)(1-x^2) = 1-x^6$

Les racines de $1-x^2$ sont ± 1 et celles de $1-x^6$ sont les racines 6-ièmes de l'unité :



$$\left\{ 1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, -1, e^{-\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}} \right\}$$

Les racines de $1+x^2+x^4$ de partie imaginaire strictement positive sont donc : $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{2i\pi}{3}}$

D'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^4} = 2i\pi\left(\mathrm{Res}(R\,;e^{\frac{i\pi}{3}}) + \mathrm{Res}(R, e^{\frac{2i\pi}{3}})\right)$

On : $R(z) = \dfrac{1}{(z-e^{\frac{i\pi}{3}})\underbrace{(z-e^{\frac{2i\pi}{3}})(z-e^{-\frac{2i\pi}{3}})(z-e^{-\frac{i\pi}{3}})}_{=(z^2+z+1)(z-e^{-\frac{i\pi}{3}})}}$

$$= \frac{\frac{1}{(z^2+z+1)(z-e^{-\frac{i\pi}{3}})}}{z-e^{\frac{i\pi}{3}}} := \frac{g(z)}{h(z)}$$

D'où : $\mathrm{Res}(R, e^{\frac{i\pi}{3}}) = \dfrac{g(e^{\frac{i\pi}{3}})}{h'(e^{\frac{i\pi}{3}})} = \dfrac{1}{(e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{\frac{i\pi}{3}}+1)(e^{\frac{i\pi}{3}}-e^{-\frac{i\pi}{3}})}$

$$= \frac{1}{+\cancel{2}i\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times (1+i\sqrt{3})} = \frac{1}{+i\sqrt{3}-3}$$

On a aussi

$$R(z) = \frac{1}{(z-e^{\frac{2i\pi}{3}})(z^2-z+1)(z-e^{-\frac{2i\pi}{3}})} = \frac{\frac{1}{(z^2-z+1)(z-e^{-\frac{2i\pi}{3}})}}{z-e^{\frac{2i\pi}{3}}}$$

D'où

$$\operatorname{Res}\left(R, e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = \frac{1}{\left(e^{\frac{4i\pi}{3}} - e^{\frac{2i\pi}{3}} + 1\right)\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{(1 - i\sqrt{3})(i\sqrt{3})} = \frac{1}{3 + i\sqrt{3}}$$

Il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + x^4} = 2i\pi\left(\frac{1}{-3 + i\sqrt{3}} + \frac{1}{3 + i\sqrt{3}}\right)$$

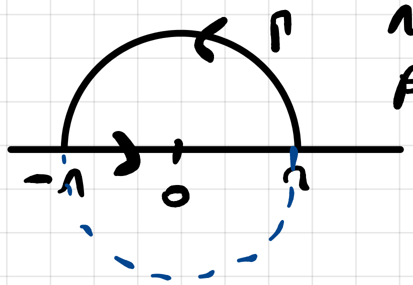
$$= 2i\pi \, \frac{\cancel{3} + i\sqrt{3} - \cancel{3} + i\sqrt{3}}{-12}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

c. Type III : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} R(x)\,dx$ avec R sans pôle réel

Soit $t \neq 0$ un réel et R une fraction rationnelle sans pôle sur $\mathbb{R}$. Par semi-convergence on peut juste supposer $d°P \leq d°Q - 1$ mais si on veut de l'intégrabilité on suppose $d°P \leq d°Q - 2$.

On suppose $t > 0$.



r assez grand pour contenir tous les pôles.

(23) On a par la formule des résidus :

$$\int_{-n}^{n} e^{itx} R(x)\,dx + \int_{\Gamma_n} e^{itz} R(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(e^{itz}R(z), z_k^+\right)$$

Γ_n : demi-cercle supérieur

avec la même convention que précédemment pour les z_k^+.

Soit $I_n = \displaystyle\int_{\Gamma_n} e^{itz} R(z)\,dz = \int_0^{\pi} \underbrace{e^{itne^{i\theta}}}_{= e^{itn(\cos\theta + i\sin\theta)}} R(ne^{i\theta})\, ine^{i\theta}\,d\theta$

Alors : $|I_n| \leq \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-tn\sin\theta} \frac{cte}{n}\, n\,d\theta$ ← pour $d^\circ P \leq d^\circ Q - 1$

De plus : $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \leq \theta$

D'où : $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-tn\sin\theta}\,d\theta \underset{\text{sym de } \sin\theta \,/\, \frac{\pi}{2}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tn\sin\theta}\,d\theta \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tn\frac{2}{\pi}\theta}\,d\theta$

$$= 2\left[-\frac{\pi}{2nt} e^{-tn\frac{2}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{2nt}e^{-tn} + \frac{\pi}{2nt} = \frac{\pi}{2nt}(1 - e^{-tn}) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Finalement : $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-tn\sin\theta}\,d\theta \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'où : $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} R(x)\,dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(e^{itz}R(z) ; z_k^+\right)$$

Si $t < 0$ on fait de même avec le demi-cercle inférieur (pour avoir un $\sin\theta < 0$).

Exemple 1: Soit $b>0$ et $I_b = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+b}\,dx$

Par parité on a:

$$I_b = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+b}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+b^2}\,dx\right)$$

Le seul pôle de $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$ dont la partie imaginaire est >0 est ib et c'est un pôle simple.

D'où:

$$I_b = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(2i\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}, ib\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(2i\pi\,\frac{e^{i(ib)}}{ib+ib}\right)$$

$$= \frac{\pi e^{-b}}{2b}$$

$$\lim_{z\to ib}(z-ib)\frac{e^{iz}}{z^2+b^2} = \lim_{z\to ib}\frac{e^{iz}}{z+ib}$$

Exemple 2: Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^2}e^{itx}\,dx$

L'unique pôle de partie imaginaire strictement positive de $z \mapsto \frac{z^3}{(1+z^2)^2}e^{itz}$ est i. C'est un pôle double et on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^2}e^{itx}\,dx = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{(1+z^2)^2}e^{itz}, i\right)$$

Soit $\varphi(z) = (z-i)^2\frac{z^3}{(1+z^2)^2}e^{itz} = \frac{z^3}{(z+i)^2}e^{itz}$

On a: $\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{(1+z^2)^2}e^{itz}, i\right) = \frac{\varphi'(i)}{1!}$

$$= \left[\frac{3z^2(z+i)^2 - 2(z+i)z^3}{(z+i)^4}e^{itz} + ite^{itz}\frac{z^3}{(z+i)^2}\right]_{z=i}$$

$$= \left[\frac{3z^2(z+i)^2 - 2(z+i)z^3}{(z+i)^4} e^{itz} + it e^{itz} \frac{z^3}{(z+i)^2} \right]_{z=i}$$

$$= \left[\frac{-3\times(-4) - 4i(-i)}{16\times 1} e^{-t} + it e^{-t} \frac{-i}{-4} \right]$$

$$= \frac{12-4}{16} e^{-t} - \frac{te^{-t}}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{4}\right) e^{-t}$$

Il vient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^2} e^{itx}\,dx = \cancel{2} i\pi \times \frac{1}{\cancel{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right) e^{-t}$

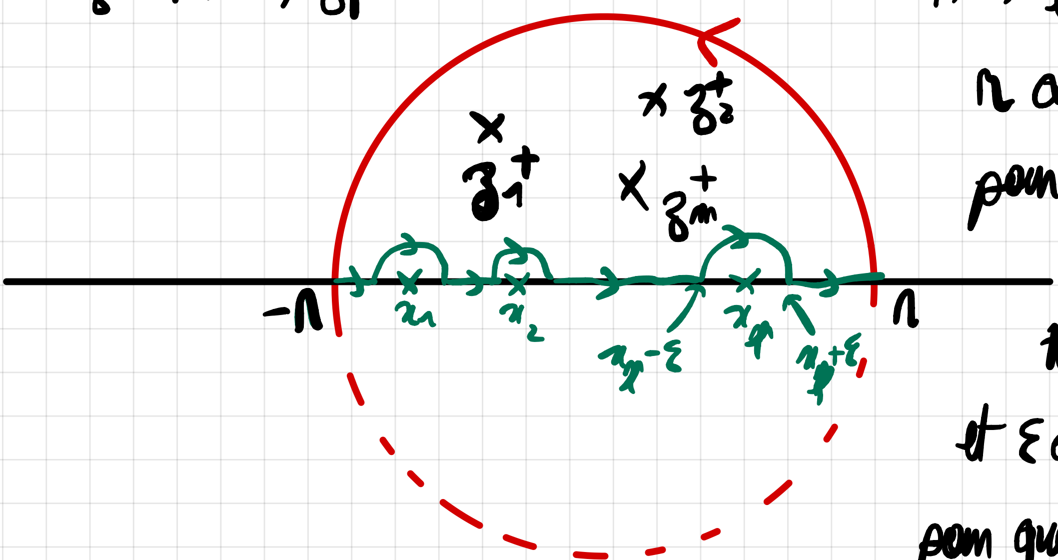
$$= \frac{i\pi}{2}(2-t)e^{-t}$$

On vient donc de calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}$.

4. Type III bis : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{itx}\,dx$, R ayant des pôles simples réels

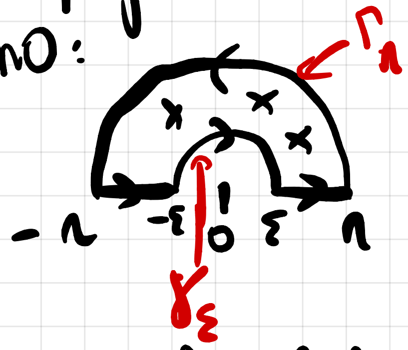
Soit $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ avec $d^\circ P \leq d^\circ Q - 1$

On note $z_1^+, \dots, z_m^+$ les pôles de R dans $\mathbb{H}^+$, $z_{m+1}^-, \dots, z_p^-$ ceux dans $\mathbb{H}^-$ et $x_1, \dots, x_q$ ceux dans $\mathbb{R}$.



r assez grand pour que $D(0,r)$ contienne tous les pôles et ε assez petit pour que chaque $[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ ne contienne que le pôle x_i.

Pour simplifier on traite le cas d'un unique pôle réel en 0 :



L'idée est celle de la $vp\left(\frac{1}{x}\right)$: $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=0$ par parité et intervalle sym

On a alors par la formule des résidus :

$$\int_{-r}^{-\varepsilon}R(x)e^{itx}dx+\int_{\varepsilon}^{r}R(x)e^{itx}dx+\int_{\gamma_\varepsilon}R(z)e^{itz}dz+\int_{\Gamma_r}R(z)e^{itz}dz$$

$$= 2i\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left(R(z)e^{itz}, z_k^+\right)$$

Comme dans le cas du Type III, $\int_{\Gamma_r}R(z)e^{itz}dz \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

D'où : $\forall \varepsilon>0$,

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon}R(x)e^{itx}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}R(x)e^{itx}dx+\int_{\gamma_\varepsilon}R(z)e^{itz}dz=2i\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left(R(z)e^{itz}, z_k^+\right)$$

Puis : $\int_{\gamma_\varepsilon}R(z)e^{itz}dz=-\int_0^{\pi}e^{it\varepsilon e^{i\theta}}R(\varepsilon e^{i\theta})\,i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta$

Or : $R(\varepsilon e^{i\theta})=\dfrac{P(\varepsilon e^{i\theta})}{(\varepsilon e^{i\theta}-0)Q_1(\varepsilon e^{i\theta})}$

car pôle simple en 0

D'où : $\int_{\gamma_\varepsilon}R(z)e^{itz}dz=-i\int_0^{\pi}e^{it\varepsilon e^{i\theta}}\dfrac{P(\varepsilon e^{i\theta})}{\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}Q_1(\varepsilon e^{i\theta})}\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -i\int_0^{\pi}1\times\frac{P(0)}{Q_1(0)}\,d\theta=-i\pi\,\mathrm{Res}\left(R(z)e^{itz},0\right)$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{itx}dx=2i\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left(R(z)e^{itz}, z_k^+\right)+i\pi\,\mathrm{Res}\left(R(z)e^{itz},0\right)$$

27

Plus généralement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{itx}\, dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(R(z)e^{itz}, z_k^+\right) + i\pi \sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}\left(R(z)e^{itz}, x_j\right)$$

Exemple 1 : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

On a : $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(i\pi \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\pi \times \lim_{z \to 0} z\,\frac{e^{iz}}{z} = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$

Exemple 2 : On détermine la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ pour $t > 0$.

On a : $\forall t > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x(x^2+1)}\, dx = 2i\pi \operatorname{Res}\left(\frac{e^{itz}}{z(z^2+1)}, i\right) + i\pi \operatorname{Res}\left(\frac{e^{itz}}{z(z^2+1)}, 0\right)$$

Or : $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{itz}}{z(z^2+1)}, i\right) = \lim_{z \to i}(z-i)\frac{e^{itz}}{z(z^2+1)} = \frac{e^{it(i)}}{i(i+i)} = \frac{e^{-t}}{-2}$

et $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{itz}}{z(z^2+1)}, 0\right) = \lim_{z \to 0} z\,\frac{e^{itz}}{z(z^2+1)} = 1.$

D'où : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x(x^2+1)}\, dx = -i\pi e^{-t} + i\pi = i\pi(1 - e^{-t})$