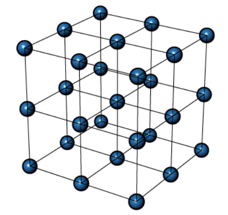
Théorie des opérateurs aléatoires et applications à la localisation d'Anderson

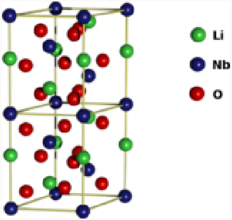
Cours spécialisé du M2 Mathématiques Fondamentales
de l'Université Sorbonne Paris Nord
Année 2025-2026

Professeur : BOUMAZA Hakim
LAGA, Université Sorbonne Paris Nord
boumaza@math.univ-paris13.fr

Transport électronique

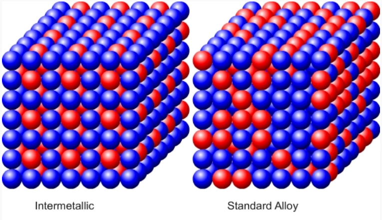
1. But : Etude du transport électronique dans un solide (métaux, semi-conducteurs...).
2. Dans un cristal parfait : phénomène de diffusion pour les énergies dans les bandes spectrales.

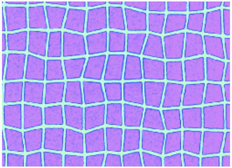




3. Opérateurs de Schrödinger périodiques : $H = -\Delta + V$ où V est $\mathbb{Z}^d$-périodique. Spectre de bandes.
4. Réduction à un problème discret - approximation des liaisons fortes (tight-binding model) :

Cristaux imparfaits - alliages

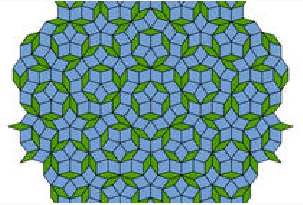


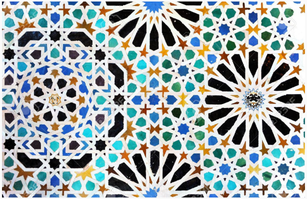


Famille d'opérateurs aléatoires : $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ où

1. Anderson continu : $V_\omega(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} q_i(\omega)V(x-i)$ où V est à support dans $[0,1]^d$ et les q_i sont *i.i.d.*
2. Déplacement aléatoire : $V_\omega(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} V(x-i-q_i(\omega))$.
3. Modèle discret (modèle d'Anderson) : $(V_\omega u)_n = q_n(\omega)u_n$.

Cristaux imparfaits - quasi-cristaux



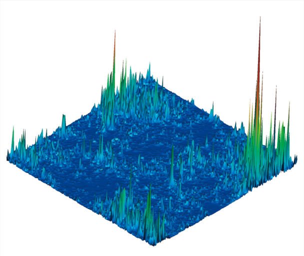


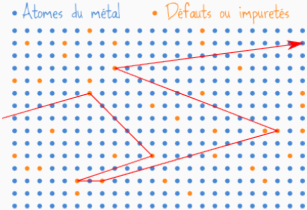
Famille d'opérateurs quasi-périodiques : $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ où

1. $V_\omega(x) = V(\alpha_1 x_1 + \omega_1, \dots, \alpha_d x_d + \omega_d)$ avec $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui est $\mathbb{Z}^d$-périodique.
2. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ à coordonnées rationellement indépendantes.
3. $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$.

Phénomène physique

1. À une énergie du spectre fixée, au-delà d'une certaine quantité de désordre dans le cristal, l'électron va cesser de s'y déplacer librement et va rester confiné dans une région localisée.

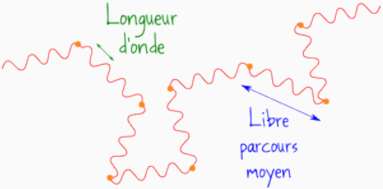




2. À chaque collision de l'électron avec une impureté du cristal, son onde associée se disperse.

Phénomène physique

3. Libre parcours moyen : distance moyenne parcourue par l'électron entre deux collisions.
4. Lorsque le désordre augmente, le libre parcours moyen ne diminue pas continûment.
5. Transition lorsque le libre parcours moyen devient plus court que la longueur d'onde de l'électron.



6. Le phénomène de localisation peut s'observer dès qu'une onde se propage dans un milieu désordonné (onde lumineuse, micro-ondes ou ondes acoustiques).

Definition
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la famille $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ a la propriété de localisation d'Anderson dans l'intervalle I lorsque :

(i) le spectre de H_ω est purement ponctuel pour P-presque tout $\omega \in \Omega$,

(ii) les fonctions propres associées aux valeurs propres dans I décroîssent exponentiellement vers 0 à l'infini.

Localisation d'Anderson

Pour $d \geq 1$, on considère l'opérateur

$$H_\omega = -\Delta_d + \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} q_i(\omega) V(x - i)$$

agissant sur $H^2(\mathbb{R}^d)$. Les $q_i(\omega)$ sont des variables aléatoires de Bernoulli *i.i.d.* et V est à support dans $[0,1]^d$.

1. Pour $d = 1$, il y a localisation pour toutes les énergies exceptées celles dans un ensemble discret (Damanik-Sims-Stolz '02).
2. Pour $d \geq 2$, il y a localisation d'Anderson au bas du spectre (Bourgain-Kenig '05).
   a. Pour $d = 2$: on pense qu'il y a localisation a toutes les énergies sauf éventuellement dans un ensemble discret (mais au prix d'une longueur de localisation qui peut devenir exponentiellement petite pour les grandes énergies).
   b. Pour $d \geq 3$, on conjecture l'existence d'une transition localisation / diffusion.