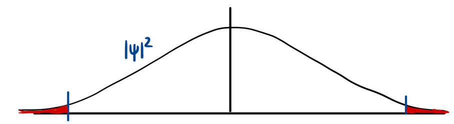
Localisation d'Anderson

Localisation d'Anderson - 1

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la famille ergodique d'opérateurs aléatoires auto-adjoints $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ a la propriété de localisation d'Anderson dans I ou encore est exponentiellement localisée dans I lorsque :

1. le spectre de H_ω dans I est non vide et purement ponctuel pour P-presque tout $\omega \in \Omega$,
2. les fonctions propres associées aux valeurs propres dans I décroîssent exponentiellement vers 0 à l'infini.



Localisation d'Anderson - 2

Definition
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la famille d'opérateurs aléatoires auto-adjoints $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ sur $\mathcal{H}$ est dynamiquement localisée dans I lorsque :

(i) le spectre de H_ω dans I est non vide pour P-presque tout $\omega \in \Omega$,

(ii) pour tout intervalle compact $I_0 \subset I$ et tout $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\forall n \geq 0,\ \mathbb{E}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} ||(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}} e^{-\mathrm{i}tH_\omega} \mathbf{1}_{I_0}(H_\omega)\psi||^2\right) < +\infty.$$

Cette définition est de nature dynamique et suit l'évolution des paquets d'ondes au cours du temps. Cela nous dit que la particule reste au voisinage de sa position initiale uniformément au cours du temps.

Localisation d'Anderson - 3 - Modèle d'Anderson

- **Modèle d'Anderson continu :** agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par

$$\forall \omega \in \Omega,\ H_\omega = -\Delta_d + V_{\mathrm{per}} + \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \omega^{(n)} V(x-n)$$

  où V est à support dans $[0,1]^d$ et $\lambda \geq 0$ est un nombre réel.

- **Modèle d'Anderson discret :** agissant sur $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ par

$$\forall \omega \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{Z}^d,\ (h_\omega u)_n = - \sum_{|m-n|=1} u_m + \lambda \omega^{(n)} u_n,$$

- Dans les deux cas $\omega = (\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est une suite de variables aléatoires réelles *i.i.d.* de loi commune ν sur un espace de probabilité complet $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathrm{P}})$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ est $\bigotimes_{\mathbb{Z}^d} (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathrm{P}})$.

Localisation d'Anderson - 4

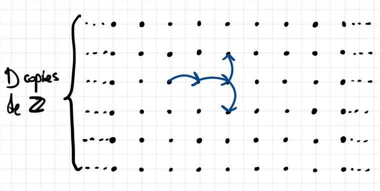
- En dimension $d = 1$, il y a localisation partout dans le cas discret et partout sauf sur un ensemble discret d'énergies dans le cas continu, pour tout désordre.
- En dimension $d \geq 2$: pour $\lambda > 0$ grand, il y a localisation partout dans le cas discret (*Fröhlich-Spencer '83*). Il y a localisation au bas du spectre dans le cas continu (*Bourgain-Kenig '05*).
- **Conjectures** :

  $d = 2$: il y a localisation partout et pour tout désordre.

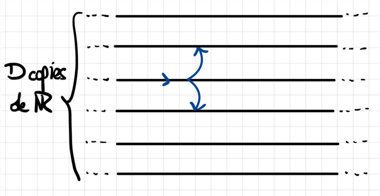
  $d \geq 3$: existence d'une transition entre localisation et délocalisation à une certaine énergie.

Modèles quasi-1d aléatoires

Définition
Soit $D \geq 1$ un entier et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé complet.
Un modèle désordonné quasi-unidimensionnel est une famille mesurable d'opérateurs agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D$ (modèle discret) ou $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$ (modèle continu) et indexée par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.



Cas discret



Cas continu

Modèles quasi-1d aléatoires - 2

Type Schrödinger (discret) : agit sur $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D$,

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (h_\omega u)_n = -(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_{\omega(n)} u_n$$

où $(V_{\omega(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* prenant leurs valeurs dans les matrices symétriques réelles ou hermitiennes.

Type Schrödinger (continu) : agit sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^D$,

$$H_\omega = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \otimes I_{\mathrm{D}} + V_{\mathrm{per}} + V_\omega$$

où V_{per} est un potentiel périodique sur un réseau Γ et V_ω un potentiel aléatoire invariant en loi par translations selon Γ, les deux prenant leurs valeurs dans les matrices symétriques réelles ou hermitiennes.

Type Dirac : agit sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^{2D}$,

$$D_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\otimes \mathrm{I}_{\mathrm{D}} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\otimes \mathrm{I}_{\mathrm{D}} & 0 \end{pmatrix} + V_{\mathrm{per}} + V_\omega$$

avec les mêmes hypothèses sur V_{per} et V_ω que le type Schrödinger continu.

Modèles quasi-unidimensionnels - 3

Type unitaire : Inclus le cas des matrices aléatoires unitaires à bandes agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D$, en particulier les cas des matrices CMV, d'Anderson unitaire ou du modèle de Chalker-Coddington.

Scattering zipper aléatoire (BK25[1]) : soit $\mathbb{U}_\omega = \mathbb{V}_\omega \mathbb{W}_\omega$, où

$$\mathbb{V}_\omega = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & S_{\omega(0)} & & \\ & & S_{\omega(2)} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \circ s_g^D \,, \qquad \mathbb{W}_\omega = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & S_{\omega(-1)} & & \\ & & S_{\omega(1)} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

s_g est l'opérateur de shift à gauche $((v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (v_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}})$ et les matrices $S_{\omega(n)}$ sont unitaires dans $U(2D)$ et de la forme

$$S_{\omega(n)} = \begin{pmatrix} \alpha & \rho(\alpha) U_{\omega(n)} \\ V_{\omega(n)} \widetilde{\rho}(\alpha) & -V_{\omega(n)} \alpha^* U_{\omega(n)} \end{pmatrix}, \; \rho(\alpha) = (\mathrm{Id_D} - \alpha\alpha^*)^{\frac{1}{2}}, \; ||\alpha\alpha^*|| < 1.$$

[1] H. Boumaza et A. Khouildi, Dynamical localization for random scattering zippers for random scattering zippers, Lett. Math. Phys. 115, 64 (2025)

Critère de localisation pour des modèles quasi-1d de type Schrödinger

Critère de localisation - 1 - Le modèle

On étudie des modèles désordonnés quasi-unidimensionnels continus de type Schrödinger :

$$H_\omega = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \otimes \mathrm{I}_{\mathrm{D}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_\omega^{(n)}(\cdot - \ell n),$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$, où $\ell > 0$ est un nombre réel et $(V_\omega^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.*.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $x \mapsto V_\omega^{(n)}(x)$ prennent leurs valeurs dans les matrices symétriques réelles, sont à support dans $[0, \ell]$ et sont uniformément bornées en x, n et ω.

Le potentiel aléatoire est tel que $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ est $\ell\mathbb{Z}$-ergodique.

Critère de localisation - 2 - Matrices de transfert

- Pour $E \in \mathbb{R}$, comportement asymptotique des solutions de :

$$H_\omega u = Eu, \; u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^D$$

- Matrices de transfert : $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ suite i.i.d. de matrices dans $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u'(n+1) \end{pmatrix} = T_{\omega^{(n)}}(E) \begin{pmatrix} u(n) \\ u'(n) \end{pmatrix}$$

- Cocycle : Pour E fixé, $\Phi_E : \mathbb{Z} \times \Omega \to \mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ défini par, $\forall n \in \mathbb{Z}, \; \forall \omega \in \Omega$,

$$\Phi_E(n,\omega) \; = \; \begin{cases} T_{\omega^{(n-1)}}(E) \cdots T_{\omega^{(0)}}(E) & \text{si} \quad n > 0 \\ \mathrm{I_D} & \text{si} \quad n = 0 \\ (T_{\omega^{(n)}}(E))^{-1} \cdots (T_{\omega^{(-1)}}(E))^{-1} & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Ici, $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_{2\mathrm{D}}(\mathbb{R}) \mid {}^t MJM = J\}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I_D} \\ \mathrm{I_D} & 0 \end{pmatrix}$.

Critère de localisation - 3 - Exposants de Lyapunov

- Les exposants de Lyapunov sont définis pour $p \in \{1, \ldots, 2D\}$ par,

$$\gamma_p^{\pm}(E) = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|\ell n|} \mathbb{E}(\log ||\mathbf{s_p(\Phi_E(n, \cdot))}||)$$

où $s_p(\cdot)$ désigne la p-ième valeur singulière.

- Dans notre cadre symplectique :

$\forall p \in \{1, \ldots, D\},\ \gamma_p^+(E) = \gamma_p^-(E)$ et $\gamma_{2D-p+1}(E) = -\gamma_p(E)$.

Critère de localisation - 4 - Groupe de Fürstenberg

Groupe de Fürstenberg : $G_{\mu_E} = \overline{\langle \operatorname{supp} \mu_E \rangle} \subset \mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$, où μ_E est la loi commune des matrices de transfert $T_{\omega^{(n)}}(E)$.

Pour le type Schrödinger,

$$G_{\mu_E} = \overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \operatorname{supp} \nu \rangle}.$$

Théorème (Bougerol, Guivarch, Raugi)

Soit $E \in \mathbb{R}$. Si $G_{\mu_E} = \mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ alors $\gamma_1(E) > \cdots > \gamma_D(E) > 0$.

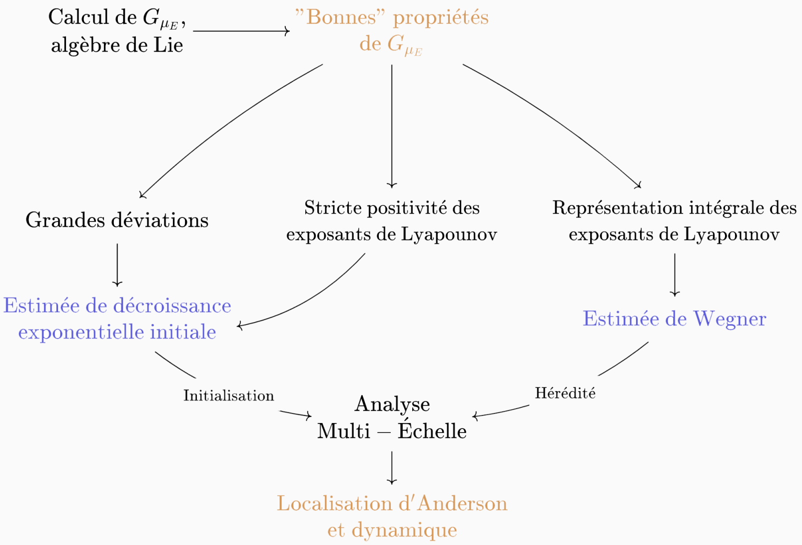
Théorème (Bou09[2])
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact tel que $\Sigma \cap I \neq \emptyset$ et, pour tout $E \in I$, $G_{\mu_E} = \mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$. Alors il y a localisation d'Anderson et localisation dynamique pour $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ dans $I \cap \Sigma$.

[2] H. Boumaza, Localization for a Matrix-valued Anderson Model, Math. Phys. Anal. Geom. 12(3) (2009)

Critère de localisation - 5

- Résultats précédents et autres résultats :
    - Modèle d'Anderson discret à valeurs scalaires : Carmona, Klein et Martinelli (1987)
    - Modèle d'Anderson discret quasi-unidimensionnel : Klein, Lacroix et Speis (1990)
    - Modèle d'Anderson continu à valeurs scalaires : Damanik, Sims et Stolz (2002)
    - Modèle de Dirac à valeurs scalaires : Zalczer (2021)
    - Modèle de Dirac quasi-unidimensionnel : B. et Zalczer (2026)
- Dans le cas unitaire, les preuves existantes de localisation (Scattering Zipper, Anderson unitaire, Chalker-Coddington) utilisent également la positivité des exposants de Lyapunov puis appliquent la méthode des moments fractionnaires au lieu de l'analyse multi-échelle.

Critère de localisation - 6 - Schéma de preuve



Étapes de la démonstration

Critère de localisation - Preuve - 1

Théorème (Bougerol, Guivarch, Raugi)
Soit $E \in \mathbb{R}$. Si G_{μ_E} est p-contractant et L_p-fortement irréductible, pour tout $p \in \{1, \ldots, D\}$, alors $\gamma_1(E) > \cdots > \gamma_D(E) > 0$. De plus, les exposants de Lyapounov ont aussi la représentation intégrale suivante :

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(E) = \int_{\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}(L_p)} \log \frac{|| \wedge^p Mx||}{||x||} \, \mathrm{d}\mu_E(M) \, \mathrm{d}\nu_{p,E}(\bar{x}),$$

où $\nu_{p,E}$ est une mesure μ_E-invariante sur $\mathbb{P}(L_p)$.

Critère de localisation - Preuve - 2

- Résultat général de continuité höldérienne des exposants de Lyapounov :

Théorème
Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $E \in I$, G_{μ_E} est p-contractant et L_p-fortement irréductible, pour tout $p \in \{1, \ldots, D\}$. Il existe alors deux réels $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que, pour $p \in \{1, \ldots, D\}$ et tout $E, E' \in I$, on ait :

$$|\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha.$$

Critère de localisation - Preuve - 3

- La densité d'états intégrée est définie, pour tout nombre réel E, par :

$$N(E) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H_\omega^{(L)})\},$$

  où $H_\omega^{(L)}$ est la restriction de H_ω agissant sur $L^2([-\ell L, \ell L]) \otimes \mathbb{R}^D$ avec conditions de Dirichlet aux bords.

- En utilisant une formule de Feynman-Kac on prouve que, pour $s > 0$, l'opérateur $\mathrm{e}^{-sH_\omega^{(L)}}$ a un noyau intégral dans $L^2([-\ell L, \ell L]^2) \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{D}}(\mathbb{R})$.

- La fonction $E \mapsto N(E)$ se réalise comme la fonction de répartition d'une mesure borélienne $\mathfrak{n}$ appelée la "densité d'états".

Critère de localisation - Preuve - 4

Soit $\mathrm{W} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $t \geq 0$:

$$X_t \; : \; \begin{array}{ccc} \mathrm{W} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{w} & \longmapsto & X_t(\mathrm{w}) = \mathrm{w}(t) \end{array}$$

Soit $\mathcal{W}$ la plus petite σ-algèbre sur W pour laquelle les X_t sont mesurables. Pour $s, t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on note par $W_{s,x,t,y}$ la mesure de Wiener conditionnelle, définie sur $(\mathrm{W}, \mathcal{W})$, associée au mouvement brownien partant de x au temps s et arrivant en y au temps t.

Soit $\Lambda = [-\ell L, \ell L]$ et $T_\Lambda(\mathrm{w}) = \inf\{t > 0,\ X_t(\mathrm{w}) \notin \Lambda\}$.

Théorème

Pour tout $t > 0$, $\mathrm{e}^{-tH_\omega^{(\Lambda)}}$ possède un noyau intégral donné par la formule :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ K_t^{(\Lambda)}(x,y) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\int \chi_{\{t < T_\Lambda(\mathrm{w})\}}(\mathrm{w}) \exp_{\mathrm{ord}} \left(- \int_0^t V_\omega(X_s(\mathrm{w}))\, \mathrm{d}s \right) \, \mathrm{d}W_{0,x,t,y}(\mathrm{w})\ \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} \right)$$

et $K_t^{(\Lambda)}$ appartient à $L^2(\Lambda^2) \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{D}}(\mathbb{C})$ pour tout $t > 0$.

Critère de localisation - Preuve - 5

- Continuité höldérienne de l'IDS.

Théorème
La densité d'états intégrée associée à $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ existe pour tout $E\in\mathbb{R}$. De plus, si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $E\in I$, G_{μ_E} soit p-contractant et L_p-fortement irréductible, pour tout $p\in\{1,\dots,D\}$, alors elle est Hölder continue sur tout intervalle ouvert $\tilde{I}\subset I$.

- On utilise la continuité höldérienne des exposants de Lyapounov en obtenant une formule de Thouless :

$$\forall E\in\mathbb{R},\ (\gamma_1+\ldots+\gamma_N)(E)=-c+\int_{\mathbb{R}}\log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right)\,\mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

  où $c\in\mathbb{R}$ est indépendant de E. On utilise aussi les propriétés de la transformée de Hilbert.

Critère de localisation - Preuve - 6 - Analyse multi-échelle

1. Les propriétés de la résolvante donne des informations sur la nature du spectre.
2. Les propriétés de décroissance des résolvantes des opérateurs $H_\omega^{(L)}$ permettent d'obtenir des informations sur les propriétés de la résolvante.
3. Si on connaît avec une bonne probabilité le comportement de la résolvante dans un intervalle de taille ℓ, on peut obtenir une meilleure décroissance avec une meilleure probabilité pour des tailles $L \simeq \ell^\alpha$, $\alpha > 1$.
4. Il est nécessaire de pouvoir exprimer la résolvante sur un intervalle en fonction des résolvantes sur les intervalles voisins (identité géométrique de la résolvante).
5. On doit pouvoir contrôler le nombre de valeurs propres dans chaque intervalle avec une bonne probabilité car s'approcher du spectre fait "exploser" la résolvante (estimée de Wegner).

Analyse multi-échelle

Analyse multi-échelle - 1

On introduit des notations pour les restrictions de H_ω à des intervalles de longueur finie $\mathbb{R}$ non nécessairement centrés en 0. Pour $x \in \mathbb{Z}$ et $L \geq 1$, soit $I_L(x) = [x - \ell L, x + \ell L]$, centré en x et de longueur $2\ell L$. Soit $\mathbf{1}_{x,L}$ la fonction caractéristique de $I_L(x)$ et soit $\mathbf{1}_x$, la fonction caractéristique de $I_1(x)$. Pour $L \in 3\mathbb{N}^*$, on pose aussi,

$$\mathbf{1}^{\mathrm{out}}_{x,L} = \mathbf{1}_{x,L} - \mathbf{1}_{x,L-2} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}^{\mathrm{in}}_{x,L} = \mathbf{1}_{x,\frac{L}{3}}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $L \geq 1$, soit $H_\omega^{(x,L)}$ la restriction de H_ω à $L^2(I_L(x)) \otimes \mathbb{C}^D$ avec conditions de Dirichlet aux bords et, pour $E \notin \sigma(H_\omega^{(x,L)})$, soit $R_\omega^{(x,L)}(E)$ la résolvante de $H_\omega^{(x,L)}$ en E, $R_\omega^{(x,L)}(E) = (H_\omega^{(x,L)} - E)^{-1}$. Soit enfin $E_\omega^{(x,L)}$ le projecteur spectral de $H_\omega^{(x,L)}$.

Definition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On dit que $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ a la propriété (SLI) s'il existe une constante C_I telle que, étant donnés $L, L', L'' \in \mathbb{N}$ et $x, y, y' \in \mathbb{Z}$, avec $I_{L''}(y) \subset I_{L'-2}(y') \subset I_{L-2}(x)$, pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, si $E \in I$, $E \notin \sigma(H_\omega^{(x,L)}) \cup \sigma(H_\omega^{(y',L')})$, on a :

$$||\mathbf{1}^{\mathrm{out}}_{x,L} R^{(x,L)}_\omega(E)\mathbf{1}_{y,L''}|| \leq C_I ||\mathbf{1}^{\mathrm{out}}_{y',L'} R^{(y',L')}_\omega(E)\mathbf{1}_{y,L''}||\, ||\mathbf{1}^{\mathrm{out}}_{x,L} R^{(x,L)}_\omega(E)\mathbf{1}^{\mathrm{out}}_{y',L'}||.$$

La propriété (SLI) permet d'estimer comment les résolvantes restreintes $R^{(x,L)}_\omega(E)$ varient en norme lorsque l'on passe d'un intervalle donné à un intervalle plus long le contenant. Ce type d'estimée est aussi appelée “Geometric Resolvent Inequality” dans la littérature.

Analyse multi-échelle - 3

La propriété suivante est une estimée du nombre moyen de valeurs propres de $H_\omega^{(x,L)}$.

Definition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On dit que $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ a la propriété (NE) s'il existe une constante finie $\hat{C}_I$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $L \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}(E_\omega^{(x,L)}(I))\right) \leq \hat{C}_I \ell L.$$

Analyse multi-échelle - 4

1. Estimée de Wegner optimale :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\left(\mathbf{1}_I\left(H_\omega^{(L)}\right)\right)\right) \leq C_W \cdot |I| \cdot 2\ell L \qquad (1)$$

   avec $C_W > 0$ et $|I|$ qui est la longueur de l'intervalle I.

2. Estimée de Wegner améliorée,

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\left(\mathbf{1}_I\left(H_\omega^{(L)}\right)\right)\right) \leq C_W \cdot N(I) \cdot 2\ell L \qquad (2)$$

   où $N(\cdot)$ est la densité d'états intégrée associée à $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

Analyse multi-échelle - 5

Estimée de Wegner dans le cas Bernoulli.

Théorème
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval compact et soit $\tilde{I}$ un intervalle ouvert, $I \subset \tilde{I}$, tel que, pour tout $E \in \tilde{I}$, G_{μ_E} soit p-contractant et L_p-fortement irréductible, pour tout $p \in \{1, \ldots, D\}$.

Alors, pour tout $\beta \in]0,1[$ et tout $\kappa > 0$, il existe $L_0 \in \mathbb{N}$ et $\xi > 0$ tels que,

$$(\mathbf{W}) \quad \mathrm{P}\left(\mathrm{d}(E, \sigma(H_\omega^{(L)})) \leq e^{-\kappa(\ell L)^\beta}\right) \leq e^{-\xi(\ell L)^\beta},$$

pour tout E dans I et tout $L \geq L_0$.

La preuve est basée sur la continuité höldérienne de la densité d'états intégrée.

Analyse multi-échelle - 6

La dernière propriété nécessaire à faire fonctionner l'analyse multi-échelle est d'une nature différente. Il s'agit d'une propriété probabiliste d'indépendance d'intervalles éloignés les uns des autres. Un évènement $A \in \mathcal{A}$ est dit basé sur $I_L(x)$ s'il est déterminé par des conditions portant sur $H_\omega^{(x,L)}$. Etant donné $d_0 > 0$, on dit que $I_L(x)$ et $I_{L'}(x')$ sont d_0-non recouvrant si $d(I_L(x), I_{L'}(x')) > d_0$.

Definition

On dit que $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ a la propriété (IAD) s'il existe $d_0 > 0$ tel que tout couple d'évènements basés sur des intervalles d_0-non recouvrant sont indépendants.

Avant de donner la définition de l'ensemble de l'analyse multi-échelle Σ_{MSA}, il nous faut une dernière définition.

Definition

Soient $\gamma, E \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$. Pour $x \in \mathbb{Z}$ et $L \in 3\mathbb{N}^*$, on dit que l'intervalle $I_L(x)$ est (ω, γ, E)-bon si $E \notin \sigma(H_\omega^{(x,L)})$ et

$$||\mathbf{1}_{x,L}^{\mathrm{out}} R_\omega^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_{x,L}^{\mathrm{in}}|| \leq \mathrm{e}^{-\gamma \ell \frac{L}{3}}.$$

Analyse multi-échelle - 8

On suppose que $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ vérifie la propriété (IAD).

Definition

L'ensemble Σ_{MSA} pour $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est l'ensemble des $E \in \Sigma$ pour lesquels il existe un intervalle ouvert I tel que $E \in I$ et, étant donnés ζ, $0 < \zeta < 1$, et $\alpha_0 \in (1, \zeta^{-1})$, il existe une échelle de longueur $L_0 \in 6\mathbb{N}$ et un nombre réel $\gamma > 0$, tels que si on pose $L_{k+1} = \max\{L \in 6\mathbb{N} \mid L \leq L_k^{\alpha_0}\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\mathrm{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \forall E' \in I,\ I_L(x) \text{ ou } I_L(y) \text{ est } (\omega, \gamma, E') - \text{bon}\right\}\right) \geq 1 - \mathrm{e}^{-L_k^\zeta}.$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $|x - y| > L_k + d_0$.

Théorème

Supposons que $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *a les propriétés (IAD), (SLI), (NE) et vérifie une estimée de Wegner (W) sur un intervalle ouvert* $I \subset \mathbb{R}$. *Etant donné* $\gamma > 0$, *pour tout* $E \in I$, *il existe un entier* $L_\gamma(E)$, *borné sur les sous-intervalles compact de* I, *tel que, pour* $E_0 \in \Sigma \cap I$ *donné, on a :*

$$\mathsf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid I_{L_0}(0) \text{ est } (\omega, \gamma, E_0) - \text{bon}\right\}\right) \geq 1 - \mathrm{e}^{-\delta \ell L}, \qquad (3)$$

pour $L_0 \in \mathbb{N}$, $L_0 > L_\gamma(E)$ *et* $\delta > 0$, *alors* $E_0 \in \Sigma_{\mathrm{MSA}}$.

L'hypothèse (3) est aussi connue sous le nom d'estimée de pas initial ou encore "Initial Length Scale Estimate" (ILSE).

Analyse multi-échelle - 10

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$, et soit $\nu > \frac{1}{4}$. On définit les espaces à poids $\mathcal{H}_\pm$ par :

$$\mathcal{H}_\pm = L^2(\mathbb{R}, < x >^{\pm 4\nu} \, \mathrm{d}x) \otimes \mathbb{C}^D,$$

où $< x >= \sqrt{1 + |x|^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_-$ la forme sesquilinéaire

$< \, , \, >_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-}$ par :

$$\forall (\phi, \psi) \in \mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_-, \; < \phi, \psi >_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-} = \int_{\mathbb{R}} {}^t\phi(x) \overline{\psi(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Soit aussi T l'opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ donné par la multiplication par $< x >^{2\nu}$. On rappelle que $E_\omega(.)$ désigne le projecteur spectral de H_ω.

On définit la propriété de "Strong Generalized Eigenfunction Expansion".

Definition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. On dit que $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ vérifie la propriété (SGEE) sur I si, pour un $\nu > \frac{1}{4}$,

(i) pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\mathcal{D}_+(\omega) = \{\phi \in D(H_\omega) \cap \mathcal{H}_+ \mid H_\omega \phi \in \mathcal{H}_+\}$ est dense dans $\mathcal{H}_+$ et est un coeur pour H_ω,

(ii) il existe une fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\sigma(H_\omega)$ telle que :

$$\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}(T^{-1} f(H_\omega) E_\omega(I) T^{-1})\right)^2\right) < \infty.$$

Estimée pour les fonctions propres généralisées en terme de résolvantes restreintes appelée “Eigenfunction Decay Inequality”.

Definition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On dit que $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ a la propriété (EDI) s'il existe une constante $\tilde{C}_I$ telle que, pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, étant donnée une valeur propre généralisée $E \in I$, on a pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $L \in \mathbb{N}$ avec $E \notin \sigma(H_\omega^{(x,L)})$,

$$||\mathbf{1}_x \psi|| \leq \tilde{C}_I ||\mathbf{1}_{x,L}^{\mathrm{out}} R_\omega^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_x|| \, ||\mathbf{1}_{x,L}^{\mathrm{out}} \psi||.$$

Analyse multi-échelle - 13

On peut finalement résumer les ingrédients d'une preuve par analyse multi-échelle de la localisation d'Anderson et dynamique :

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\mathrm{IAD}) + (\mathrm{SLI}) + (\mathrm{NE}) + (\mathrm{W}) + (\mathrm{ILSE})}_{\Downarrow} \quad (\mathrm{MSA}) + (\mathrm{SGEE}) + (\mathrm{EDI})}_{\Downarrow}} \qquad (4)$$

$$\overbrace{\text{Localisation d'Anderson et dynamique}}$$

Estimée de Wegner - 01

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et $\tilde{I}$ un intervalle ouvert, $I \subset \tilde{I}$, tel que, pour tout $E \in \tilde{I}$, G_{μ_E} soit p-contractant et L_p-fortement irréductible, pour tout $p \in \{1, \dots, D\}$. Alors, il existe $\alpha > 0$, $L_0 \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que, pour tout $E \in I$ et tout $\varepsilon > 0$:

$$\forall L \geq L_0, \qquad \mathrm{P}\Big(\Big\{\exists E' \in (E-\varepsilon, E+\varepsilon), \exists \phi \in D(H_\omega^{(L)}) \;\Big|\; (H_\omega^{(L)} - E')\phi = 0, \\ ||\phi|| = 1 \text{ et } ||\phi'(-\ell L)||^2 + ||\phi'(\ell L)||^2 \leq \varepsilon^2\Big\}\Big) \leq C\,\ell\,L\,\varepsilon^\alpha. \qquad (5)$$

Estimée de Wegner - 02

Soit E dans l'intérieur de I, $\varepsilon > 0$ et $L \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit I_k l'intervalle $2k\ell L + [-\ell L, \ell L] = [(2k-1)\ell L, (2k+1)\ell L]$ et notons $H_\omega^{(I_k)}$ la restriction de H_ω à $L^2(I_k) \otimes \mathbb{C}^D$ avec conditions aux limites de Dirichlet. On définit l'événement $A_k \in \mathcal{A}$ par :

$A_k = \{\omega \in \Omega \mid H_\omega^{(I_k)}$ possède une valeur propre $\lambda_k \in (E-\varepsilon, E+\varepsilon)$ telle que la fonction propre normalisée correspondante ϕ_k vérifie $||\phi'(-\ell L)||^2 + ||\phi'(\ell L)||^2 \leq \varepsilon^2\}$.

Alors, comme les $V_\omega^{(n)}$ sont des variables aléatoires *i.i.d.*, et en raison de la forme du potentiel dans H_ω comme une ℓ-périodisation de $V_\omega^{(0)}$, on déduit que $\mathrm{P}(A_k)$ est indépendante de k, c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{P}(A_k) = \mathrm{P}(A_0)$. De plus, $\mathrm{P}(A_0)$ est exactement la probabilité figurant dans (5).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $J_n = \bigcup_{k=-n}^{n} I_k = [-(2n+1)\ell L, (2n+1)\ell L]$. Soit $H_\omega^{(J_n)}$ la restriction de H_ω à $L^2(J_n) \otimes \mathbb{C}^D$ avec conditions aux limites de Dirichlet. Pour un $\omega \in \Omega$ fixé, soient $k_1, \ldots, k_j \in \{-n, \ldots, n\}$ distincts tels que $\omega \in A_{k_i}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, j\}$. Soit $i \in \{1, \ldots, j\}$.

Estimée de Wegner - 03

On construit alors, pour chaque $i \in \{1, \ldots, j\}$, une fonction normalisée $\tilde{\phi}_i$ dans $D(H_\omega^{(J_n)})$, supportée dans I_{k_i}, telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, j\}, \ ||(H_\omega^{(J_n)} - E)\tilde{\phi}_i|| \leq C\varepsilon, \tag{6}$$

Comme $\tilde{\phi}_i$ est supportée dans I_{k_i} et que les intervalles $I_{k_1}, \ldots, I_{k_j}$ sont disjoints, $(\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_j)$ forme un ensemble orthonormal et :

$$\forall i \neq i', \ (\tilde{\phi}_i, H_\omega^{(J_n)}\tilde{\phi}_{i'}) = 0 = (H_\omega^{(J_n)}\tilde{\phi}_i, H_\omega^{(J_n)}\tilde{\phi}_{i'}). \tag{7}$$

Le spectre de $H_\omega^{(J_n)}$ est un ensemble discret de valeurs propres ayant uniquement $+\infty$ comme point d'accumulation, et donc, son nombre de valeurs propres dans tout intervalle compact est fini. Par (6) et (7), nous pouvons appliquer à $(\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_j)$ et $H_\omega^{(J_n)}$ une version de l'inégalité de Temple pour obtenir que le nombre de valeurs propres de $H_\omega^{(J_n)}$ dans $[E - C\varepsilon, E + C\varepsilon]$, comptées avec multiplicité, est au moins j. Ainsi, pour un $\omega \in \Omega$ fixé,

$$j = \#\big\{k \in \{-n, \ldots, n\} \ \big| \ \omega \in A_k\big\} \leq \#\big\{\lambda \in [E - C\varepsilon, E + C\varepsilon] \ \big| \ \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H_\omega^{(J_n)})\big\}.$$

Estimée de Wegner - 04

De plus, en appliquant la loi des grands nombres aux variables aléatoires $\mathbf{1}_{A_{-n}}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$, on obtient que,

$$\frac{1}{2n+1}\#\big\{k \in \{-n, \ldots, n\} \,\big|\, \omega \in A_k\big\} = \frac{1}{2n+1}\left(\mathbf{1}_{A_{-n}} + \ldots + \mathbf{1}_{A_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_0}),$$

avec $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_0}) = \mathrm{P}(A_0)$. Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_0) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\#\big\{k \in \{-n, \ldots, n\} \,\big|\, \omega \in A_k\big\} \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\#\big\{\lambda \in [E - C\varepsilon, E + C\varepsilon] \,\big|\, \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H_\omega^{(J_n)})\big\} \\
&= 2\ell L \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(2n+1)\ell L}\#\big\{\lambda \in [E - C\varepsilon, E + C\varepsilon] \,\big|\, \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(H_\omega^{(J_n)})\big\} \\
&= 2\ell L(N(E + C\varepsilon) - N(E - C\varepsilon)) \\
&\leq 2\ell L C_1(2C\varepsilon)^\alpha := C_2 \ell L \varepsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve.

Estimée de pas initial - 01

Soit $\pi_F : \mathbb{R}^{2D} \to F$, et soit $\pi_F^* : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^{2D} \\ x & \mapsto & x \end{array}$. $F \subset \mathbb{R}^{2D}$ est dit *lagrangien* s'il est orthogonal à lui-même pour J et de dimension D.

Proposition

On fixe un intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $E \in I$:

1. *le groupe de Furstenberg G_{μ_E} est inclus dans $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$;*
2. *pour tout $p \in \{1, \ldots, D\}$, G_{μ_E} est L_p-fortement irréductible.*

Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $E \in I$, il existe des constantes $C(\epsilon, E) > 0$ et $c(\epsilon, E) > 0$ telles que, pour tout $p \in \{1, \ldots, D\}$, tout sous-espace lagrangien F et tous entiers m, n,

$$P\left(\left\{\left|\frac{1}{\ell(n-m)} \log s_p\left(T_{\ell m}^{\ell n}(E)\right) - \gamma_p(E)\right| \geq \epsilon\right\}\right) \leq C(\epsilon, E) e^{-c(\epsilon, E)\ell|n-m|} \quad (8)$$

et

$$P\left(\left\{\left|\frac{1}{\ell(n-m)} \log s_p\left(T_{\ell m}^{\ell n}(E)\pi_F^*\right) - \gamma_p(E)\right| \geq \epsilon\right\}\right) \leq C(\epsilon, E) e^{-c(\epsilon, E)\ell|n-m|}. \quad (9)$$

Estimée de pas initial - 02

Soit maintenant F un sous-espace lagrangien de $\mathbb{R}^{2D}$. Alors

$$\begin{aligned}
||\Lambda^p(T^{\ell n}_{\ell m}(E)\pi^*_F)|| &= \sup_{\substack{u_1\wedge\cdots\wedge u_p\in \mathrm{P}(L_p)\\ u_i\in F}} ||(\Lambda^p T^{\ell n}_{\ell m}(E))(u_1\wedge\cdots\wedge u_p)|| \\
&= ||\Lambda^p T^{\ell n}_{\ell m}(E)\ \bar{u}||, \quad \text{pour un certain } \bar{u}\in \mathrm{P}(L_p),
\end{aligned}$$

puisque le supremum est atteint par compacité de $\mathrm{P}(L_p)$.

On a également, pour tout sous-espace lagrangien F,

$$||\Lambda^p(T^{\ell n}_{\ell m}(E)\pi^*_F)|| = s_1(T^{\ell n}_{\ell m}(E)\pi^*_F)\cdots s_p(T^{\ell n}_{\ell m}(E)\pi^*_F).$$

Estimée de pas initial - 03

Soit les solutions $\Phi_\pm$ de $H_{\omega,\ell}\Phi_\pm = E\Phi_\pm$ satisfaisant

$$\Phi_-(-\ell L) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ I_{\mathrm{D}} \end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \Phi_+(\ell L) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ I_{\mathrm{D}} \end{smallmatrix}\right). \tag{10}$$

Pour tout entier $n \in [-L/3, L/3]$, toute matrice $T \in \mathcal{M}_{2\mathrm{D}}(\mathbb{R})$ et tout sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^{2D}$, on définit

$$\Omega_\epsilon^F[T] := \left\{ \max_{1\leq p\leq D} \left(\left| \frac{1}{\ell|n-L|} \log s_p(T) - \gamma_p(E) \right| + \left| \frac{1}{\ell|n-L|} \log s_p(T\pi_F^*) - \gamma_p(E) \right| \right) \leq \frac{\epsilon}{100D} \right\}. \tag{11}$$

On pose

$$F_+ := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \ | u \in \mathbb{R}^D \right\} \subset \mathbb{R}^{2D} \quad \text{et} \quad F_- := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ v \end{smallmatrix}\right) \ | v \in \mathbb{R}^D \right\} \subset \mathbb{R}^{2D} \tag{12}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$F_n := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2D} \ \middle| \ u = -\Phi_+'(\ell n)(\Phi_+(\ell n))^{-1} v \right\}. \tag{13}$$

On remarque que, puisque les matrices de transfert appartiennent à $\mathrm{Sp}_{\mathrm{D}}(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel F_n est lagrangien. Enfin, on définit

$$\Omega_\epsilon(n) := \Omega_\epsilon^{F_n}[{}^t T_{\ell L}^{\ell n}(E)] \cap \Omega_\epsilon^{F_+}[{}^t T_{\ell L}^{\ell n}(E)] \cap \Omega_\epsilon^{F_+}[T_{\ell L}^{\ell n}(E)] \cap \Omega_\epsilon^{F_-}[{}^t T_{\ell L}^{\ell n}(E)] \cap \Omega_\epsilon^{F_-}[T_{\ell L}^{\ell n}(E)] \tag{14}$$

Estimée de pas initial - 04

On note $I_L := I_L(0)$.

Proposition (ILSE pour Schrödinger)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert tel que, pour tout $E \in I$, le groupe de Furstenberg associé à $\{H_{\omega,\ell}\}_{\omega\in\Omega}$ soit p-contractant et L_p-fortement irréductible. Soit $E \in I$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $C, c > 0$ et $L_0 \in \mathbb{N}$ telles que, pour tout $L \geq L_0$,

$$\mathrm{P}\left(\left\{I_L \text{ est } (\omega, \gamma_D(E) - \varepsilon, E)\text{-}bon\right\}\right) \geq 1 - Ce^{-c\ell L}. \tag{15}$$

Lemme

Soit $\omega \in \Omega$ et soient $x, y \in I_L$. On suppose que $\Phi_+(x)$ et $\Phi_-(x)$ sont inversibles, ainsi que $\Phi'_+(x)\Phi_+(x)^{-1} - \Phi'_-(x)\Phi_-(x)^{-1}$. Le noyau de Green de $H_{\omega,\ell}^{(0,L)}$ est donné par

$$G_{I_L}^{\omega}(E, x, y) = \begin{cases} \Phi_+(y)(\Phi_+(x))^{-1}\left(\Phi'_+(x)\Phi_+(x)^{-1} - \Phi'_-(x)\Phi_-(x)^{-1}\right)^{-1} & si\ x \leq y \\ \Phi_-(y)(\Phi_-(x))^{-1}\left(\Phi'_+(x)\Phi_+(x)^{-1} - \Phi'_-(x)\Phi_-(x)^{-1}\right)^{-1} & si\ x \geq y \end{cases} \tag{16}$$

Notre objectif est maintenant de majorer $\sup_{x,y\in I_{L_0}} |\mathbf{1}^{\mathrm{out}}_{x,L}(x) G^{\omega}_{I_{L_0}}(E,x,y) \mathbf{1}^{\mathrm{in}}_{x,L}(y)|$ avec une bonne probabilité.

Proposition

Sur $\Omega_\epsilon := \cap_{n\in[-L/3,L/3]} \Omega_\epsilon(n)$, *on a, pour tout* $x \in [-\ell L/3, \ell L/3]$ *et tout* $y \in [\ell L - \ell, \ell L]$,

$$||G^{\omega}_{I_L}(E,x,y)|| \leq C e^{-2(\gamma_D(E)-\epsilon)\ell L}. \tag{17}$$

On commence par montrer que sur Ω_ϵ, pour tout $x \in [-\ell L/3, \ell L/3]$, la matrice $\Phi_+(x)$ est inversible, et on estime son inverse. Cela revient à minorer sa D-ième valeur singulière.

Soit n l'unique entier tel que $x \in [n\ell, (n+1)\ell)$. On remarque d'abord que, pour tout $p \in \{1,\dots,2D\}$,

$$s_p(T^x_{\ell L}) \geq s_p(T^{\ell n}_{\ell L}) s_{2D}(T^x_{\ell n}) = s_p(T^{\ell n}_{\ell L}) ||T^x_{\ell n}||^{-1}, \tag{18}$$

où la dernière égalité provient du fait que $T^x_{\ell n}$ est symplectique. Or on peut montrer qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de x et de ω, telle que $||T^x_{\ell n}|| \leq C$. Par conséquent, $s_p(T^x_{\ell L}) \geq C^{-1} s_p(T^{\ell n}_{\ell L})$.

Estimée de pas initial - 06

On dispose de la décomposition en valeurs singulières suivante :

$$T^{x}_{\ell L}(E) = U\Sigma V, \tag{19}$$

où U et V sont unitaires et, puisque la matrice est symplectique, on peut écrire $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & \Sigma_- \end{pmatrix}$ avec $\Sigma_+ = \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_D)$ et $\Sigma_- = \mathrm{diag}(1/s_1, \dots, 1/s_D)$, où $s_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, D\}$. On peut écrire une décomposition par blocs de U et V : $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$\Phi_+(x) = \begin{pmatrix} I_D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_+(x) \\ \Phi'_+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_D & 0 \end{pmatrix} T^{x}_{\ell L}(E) \begin{pmatrix} 0 \\ I_D \end{pmatrix} = U_{11}\Sigma_+ V_{12} + U_{12}\Sigma_- V_{22}.$$

Estimée de pas initial - 07

Or, d'une part, les blocs U_{ij} et V_{ij} sont de norme inférieure à 1 et, d'autre part, sur l'évènement $\Omega_\epsilon(n)$, on a $||\Sigma_-|| \leq Ce^{-(\gamma_D(E)-\epsilon)\ell|L-n|}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} s_D(\Phi_+(x)) &\geq s_D(U_{11}\Sigma_+ V_{12}) - Ce^{-(\gamma_D(E)-\epsilon)\ell|L-n|} \\ &\geq s_D(U_{11})s_D(\Sigma_+)s_D(V_{12}) - Ce^{-(\gamma_D(E)-\epsilon)\ell|L-n|}. \end{aligned}$$

Comme $s_D(\Sigma_+) \geq C^{-1}e^{(\gamma_D(E)-\epsilon)\ell|L-n|}$ (sur l'évènement $\Omega_\epsilon(n)$), il reste à contrôler $s_D(U_{11})$ et $s_D(V_{12})$. On peut montrer, comme dans Macera et Sodin, que sur $\Omega_\epsilon(n)$,

$$s_D(V_{12}) \geq e^{-\frac{\epsilon}{25}\ell|L-n|} \text{ et } s_D(U_{11}) \geq e^{-\frac{\epsilon}{25}\ell|L-n|}. \tag{20}$$

Par conséquent, sur $\Omega_\epsilon(n)$,

$$|s_D(\Phi_+(x))| \geq C^{-1}e^{(\gamma_D(E)-\frac{27\epsilon}{25})\ell|L-n|} - Ce^{-(\gamma_D(E)-\epsilon)\ell|L-n|}. \tag{21}$$

Pour L suffisamment grand, on obtient sur Ω_ϵ,

$$|s_D(\Phi_+(x))| \geq e^{(\gamma_D(E)-2\epsilon)\frac{2\ell L}{3}} > 0. \tag{22}$$

En particulier, $\Phi_+(x)$ est inversible.

Estimée de pas initial - 08

On veut que $\Phi_+'(x)\Phi_+(x)^{-1} - \Phi_-'(x)\Phi_-(x)^{-1}$ soit inversible. Or, on peut montrer que

$$s_D(\Phi_+'(x)\Phi_+(x)^{-1} - \Phi_-'(x)\Phi_-(x)^{-1}) \geq e^{-\frac{\epsilon}{2}\ell L}. \tag{23}$$

On a alors,

$$G_{I_L}^{\omega}(E,x,y) = \Phi_+(y)(\Phi_+(x))^{-1}(\Phi_+'(x)\Phi_+(x)^{-1} - \Phi_-'(x)\Phi_-(x)^{-1})^{-1}. \tag{24}$$

Enfin, on remarque que pour un tel y, on a

$$||\Phi_+(y)||^2 \leq D\exp\left(2\int_y^{\ell L} |V_\omega(t)|\mathrm{d}t\right) \leq C, \tag{25}$$

où C est indépendant de ω et de L.

En combinant (25), (21) et (23), on obtient que sur Ω_ϵ

$$||G_{I_L}^{\omega}(E,x,y)|| \leq Ce^{-2(\gamma_D(E)-\frac{7}{4}\epsilon)\ell L}. \tag{26}$$

Estimée de pas initial - 09

La dernière étape consiste à estimer la probabilité de Ω_ϵ. Comme la suite des matrices de transfert de $\{H_{\omega,\ell}\}_{\omega\in\Omega}$ et son groupe de Furstenberg satisfont les hypothèses de la Proposition 2 (grandes déviations), il existe des constantes $C, c > 0$ telles que $P(\Omega_\epsilon(n)) \leq Ce^{-c\ell|n-L|}$. Par conséquent,

$$P(^c(\Omega_\epsilon)) \geq 1 - \sum_{n\in[-L/3,L/3]} Ce^{-c\ell|n-L|} \geq 1 - C'e^{-c'\ell L} \tag{27}$$

ce qui démontre l'ILSE pour $\{H_{\omega,\ell}\}_{\omega\in\Omega}$.