Distributions 2018-2019, S1, Devoir maison

Exercice 1. Soit $(T_n)_{n\geq 1} = (T_{u_n})_{n\geq 1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la suite de distributions associées aux fonctions $u_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ définies par

$$u_n(t) = \begin{cases} t^2, & \text{if } t \leq n, \\ n^2, & \text{if } t > n. \end{cases}$$

1. Calculer T_n', T_n'' et T_n'''.
2. Quel est l'ordre de T_n''' ?
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} T_n'''$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2. On considère dans le plan la distribution définie par la fonction $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$

$$E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t - |x| > 0 \\ 0 & t - |x| < 0. \end{cases}$$

On pose $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (opérateur des ondes). Calculer $\square E$ au sens des distributions.

Exercice 3.

1. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre au plus 1 :

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{k}\right) \right).$$

2. Montrer que T est d'ordre exactement 1.
   Indication : on pourra utiliser des fonctions plateau $\psi_n \in C_c^\infty([\frac{1}{n+1}, 2])$ telles que $\psi_n \equiv 1$ dans $[\frac{1}{n}, 1]$.
3. Montrer que $\operatorname{supp}(T) = \{0\} \cup \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\}$.
4. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset C_c^\infty(R)$ définie par $\varphi_n(t) = n^{-3/2}\psi_n(t)$ vérifie
   — pour tout $p \geq 1$, $\varphi_n^{(p)} \to 0$ uniformement sur $\operatorname{supp}(T)$ lorsque $n \to \infty$.
   — $\langle T, \varphi_n \rangle \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$.
5. En déduire qu'il n'existe pas d'entier k et de constante C_k tels que pour tout $n \geq 1$

$$\langle T, \varphi_n \rangle \leq C_k \max_{p\leq k} \max_{x\in\operatorname{supp}(T)} |\varphi_n^{(p)}(x)|.$$

   Est-ce que ceci contredit le fait que T soit une distribution ?