

Écoles Normales Supérieures - École Polytechnique

Concours d'admission 2025

Lundi 13 avril 2026 - 8h00 - 12h00

Filière MP

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé

Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préambule

Dans tout le texte, la lettre \mathbf{C} désigne le corps des nombres complexes muni de la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$. On notera $\omega_n = \exp(\frac{2i\pi}{n})$ une racine primitive n -ème de l'unité.

On considère le \mathbf{C} -espace vectoriel \mathbf{C}^n muni du produit hermitien canonique

$$\langle x|y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

où les x_i (resp. y_i) sont les coordonnées de x (resp. y). On notera aussi $\|x\| := \sqrt{\langle x|x \rangle}$ qui définit une norme sur \mathbf{C}^n .

Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note ${}^t A$ sa transposée et \bar{A} la matrice dont les coefficients sont les conjugués dans \mathbf{C} des coefficients de A . On note aussi $A^* := \bar{{}^t A}$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme¹ subordonnée

$$\| \|A\| \| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Aucune connaissance spécifique sur le produit hermitien n'est nécessaire, on notera simplement les faits suivants similaires au cas euclidien, que les candidats pourront utiliser sans justification.

- Pour x fixé, l'application $\phi_x : y \mapsto \langle x|y \rangle$ est semi-linéaire au sens où $\phi_x(y_1 + \alpha y_2) = \phi_x(y_1) + \bar{\alpha} \phi_x(y_2)$ alors que $\phi_y : x \mapsto \langle x|y \rangle$ est linéaire ;
- $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur \mathbf{C}^n ;
- $\langle Ax|y \rangle = \langle x|A^*y \rangle$;
- $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$;
- Une matrice A est dite **unitaire** si $AA^* = I_n$ ou, de manière équivalente, si pour tout $x \in \mathbf{C}^n$, on a $\|Ax\| = \|x\|$. Elle est dite **hermitienne** si $A^* = A$.

1. On admet que $\| \| - \| \|$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Le théorème de réduction suivant pourra, et devra, être utilisé.

Théorème Soit A une matrice unitaire (resp. hermitienne). Il existe alors une matrice unitaire U telle que

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1}$$

où $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres λ_i de A qui sont alors de module 1 (resp. réelles).

Autrement dit une matrice unitaire (resp. hermitienne) est diagonalisable en base orthonormale pour le produit hermitien avec valeurs propres de module 1 (resp. réelles).

Pour $p = \sum_{i=1}^r p_i X^i \in \mathbf{C}[X]$, on rappelle que $p(A)$ est la matrice $\sum_{i=1}^r p_i A^i$. On s'intéresse alors à $|||p(A)|||$ que l'on essaie de majorer par

$$|||p|||_S := \sup_{\alpha \in S} |p(\alpha)|$$

pour un ensemble S compact qui, bien sûr, va dépendre de A puisqu'il doit au moins contenir le spectre $\sigma(A)$ de A , mais dont on pourrait avoir une définition « uniforme ».

Les parties sont assez largement indépendantes, les candidats sont donc invités à ne pas rester bloqués sur une question notamment celles, plus difficiles, à la fin de chaque partie.

Préliminaires

- 1) Justifier l'existence de $|||A|||$ et montrer que $|||A||| = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$.
- 2) Dans le cas où A est une matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donner une expression de $|||A|||$ en fonction des λ_i .
- 3) Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$.
- 4) Montrer que pour U unitaire, on a $|||U||| = 1$ et que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $|||AU||| = |||UA||| = |||A|||$.
- 5) On suppose A diagonalisable de sorte qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Montrer que

$$|||p|||_{\sigma(A)} \leq |||p(A)||| \leq \operatorname{cond}(P) |||p|||_{\sigma(A)},$$

où $\operatorname{cond}(P) := |||P||| \cdot |||P^{-1}|||$ est le conditionnement de P .

A- Principe du maximum pour les polynômes

On note \mathbb{D} le disque unité et $\partial\mathbb{D} = \{z, |z| = 1\}$ le cercle unité. Pour $p \in \mathbf{C}[X]$ de degré $n - 1$ et $z \in \mathbb{D}$ on se propose de montrer que $|p(z)| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$. On note $s = \sqrt{1 - |z|^2}$ et on introduit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

$$U = \begin{pmatrix} z & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ s & -\bar{z} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Montrer que U est unitaire.

7) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $p(z) = P^*p(U)P$.

8) Montrer, en utilisant le théorème du préambule, que

$$|p(z)| \leq \|p(U)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

9) Soit S un fermé borné de \mathbf{C} . On définit alors $\partial S \subset S$ comme suit : $x \in S \setminus \partial S$ si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que le disque $\mathbb{D}(x, \delta) := \{z : |z - x| \leq \delta\}$ est contenu dans S .

Montrer que $\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}$.

B- Inégalité de Von Neumann

On suppose que A est **une contraction** au sens où $\|A\| \leq 1$ et on veut montrer l'inégalité de Von Neumann suivante :

$$\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.$$

10) En utilisant la question 5), traiter le cas où A est unitaire.

- 11) Montrer qu'il existe une matrice hermitienne D_A (resp. D_{A^*}) dont les valeurs propres sont positives et telle que $D_A^2 = I - A^*A$ (resp. $D_{A^*}^2 = I - AA^*$).

Indication : utiliser le théorème de réduction du préambule.

- 12) Montrer qu'il existe $q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $D_A = q(A^*A)$ et $D_{A^*} = q(AA^*)$.

- 13) Dédurre de la question précédente que

$$A^*D_{A^*} = D_AA^* \quad AD_A = D_{A^*}A.$$

- 14) On introduit la matrice

$$U = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} \\ -D_A & A^* \end{pmatrix}.$$

En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $h \in \mathbf{C}^{2n}$, on a $\|Uh\| = \|h\|$: ainsi U est unitaire.

- 15) En utilisant les matrices

$$U_k = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0_n & 0_n & & & I_n \\ -D_A & A^* & 0_n & \cdots & 0_n \end{pmatrix},$$

où k est le nombre de matrice nulle 0_n de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sur la première ligne, démontrer l'inégalité de Von Neumann.

Indication : on notera l'analogie avec la matrice U de la partie A. On montrera ainsi que pour p de degré $\leq k + 1$, le premier bloc en haut à gauche de $p(U_k)$ est égal à $p(A)$.

- 16) En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a

$$\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}(0, \|A\|)}$$

où $\mathbb{D}(z, \alpha)$ désigne le disque fermé de centre z et de rayon α .

C- Hausdorffien et rayon numérique

Le Hausdorffien de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est par définition le sous-ensemble suivant de \mathbf{C} :

$$\mathcal{H}(A) := \{\langle Ax|x \rangle \text{ avec } \|x\| = 1\}.$$

17) Montrer que $\sigma(A) \subset \mathcal{H}(A)$.

18) Montrer que $\mathcal{H}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$ est l'enveloppe convexe de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ c'est à dire l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i \text{ avec } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ et } x_i \in \mathbf{R}_+ \right\},$$

où \mathbf{R} désigne le corps des nombres réels et \mathbf{R}_+ ceux qui sont positifs ou nuls.

19) En déduire $\mathcal{H}(A)$ lorsque A est unitaire (resp. hermitienne).

20) Montrer que $\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$.

Indication : on pourra commencer par calculer $\langle Ax|x \rangle$ pour $x = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbf{R}_+$ et $a^2 + b^2 = 1$.

21) Montrer que $\mathcal{H}(A)$ est un fermé borné de \mathbf{C} . On note alors

$$r(A) := \max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z|.$$

22) Montrer que $\frac{1}{2} \|A\| \leq r(A) \leq \|A\|$.

Pour la première inégalité, on pourra utiliser l'identité de polarisation

$$4\langle Ax|y \rangle = \langle A(x+y)|x+y \rangle - \langle A(x-y)|x-y \rangle - i\langle A(x+iy)|x+iy \rangle + i\langle A(x-iy)|x-iy \rangle.$$

23) Montrer que $r : A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto r(A) \in \mathbf{R}_+$ est une norme.

24) En considérant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^*$, montrer que l'inégalité $r(AB) \leq r(A)r(B)$ est fautive en toute généralité.

25) On veut dans cette question montrer l'inégalité $r(A^k) \leq r(A)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

25-a) On note $\omega_k = \exp(\frac{2i\pi}{k})$ une racine primitive k -ème de l'unité. Partant de l'égalité polynomiale usuelle $X^k - 1 = \prod_{i=1}^k (X - \omega_k^i)$, en déduire les égalités polynomiales

$$1 - X^k = \prod_{i=1}^k (1 - \omega_k^i X) \quad \text{et} \quad 1 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (1 - \omega_k^i X).$$

25-b) Pour $x \in \mathbf{C}^k$ de norme 1, on pose pour $j = 1, \dots, k$

$$x_j = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (1 - \omega_k^i A) \right) x.$$

Déduire de la question précédente la formule suivante

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2 \left[1 - \omega_k^i \left(\left\langle \frac{Ax_i}{\|x_i\|} \middle| \frac{x_i}{\|x_i\|} \right\rangle \right) \right] = 1 - \langle A^k x | x \rangle.$$

25-c) On suppose $r(A) \leq 1$. Soit θ un réel quelconque et soit $x \in \mathbf{C}^k$ un vecteur unitaire. En écrivant l'égalité précédente pour $e^{i\theta} A$, montrer que la partie réelle de $1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle$ est toujours positive et en déduire que $r(A^k) \leq 1$.

25-d) En déduire le résultat annoncé, i.e. $r(A^k) \leq r(A)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

D- Conjecture de Crouzeix

La conjecture de Crouzeix s'énonce comme suit : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et pour tout polynôme $p \in \mathbf{C}[X]$ on a

$$\|p(A)\| \leq 2 \|p\|_{\mathcal{H}(A)}. \quad (1)$$

26) En étudiant l'exemple de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que la constante 2 dans la conjecture ne peut pas être améliorée.

27) En utilisant le résultat de la question 24), montrer que la formule (1) est toujours vérifiée pour les monômes $p(X) = X^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

28) Soit $z = r(A)e^{i\theta} \in \mathcal{H}(A)$. Soit $\phi \in \mathbf{R}$ et $p(X) = \sum_{k=0}^r |c_k| e^{i(\phi - k\theta)} X^k$. Montrer que (1) est vérifiée pour le couple (A, p) considéré.

29) Un résultat de Okubo et Ando montre que si $r(A) \leq 1$ alors il existe une matrice inversible X de conditionnement² $\text{cond}(X) \leq 2$ telle que $B := X^{-1}AX$ est une contraction.

29-a) En utilisant le résultat de Okubo-Ando, montrer que

$$|||p(A)||| \leq 2||p||_{\mathbb{D}(0, r(A))}.$$

29-b) En déduire que

$$|||p(A)||| \leq 2||p||_{\mathcal{C}},$$

où \mathcal{C} est le cercle défini comme le bord du plus petit disque contenant $\mathcal{H}(A)$.

E- Matrices de Jordan perturbées

On considère la matrice $J_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ v & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, où $0 \leq v < 1$.

30) Donner les valeurs propres de J_v .

31) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}}M$ est unitaire et en déduire le conditionnement de M .

2. cf. la question (5) pour la définition du conditionnement d'une matrice

32) Pour tout $k = 1, \dots, n$, on note

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ v^{1/n} \omega_n^{k-1} \\ v^{2/n} \omega_n^{2(k-1)} \\ \vdots \\ v^{(n-1)/n} \omega_n^{(n-1)(k-1)} \end{pmatrix}.$$

Soit alors P la matrice de passage où on exprime les vecteurs v_1, \dots, v_n dans la base canonique. Montrer que son conditionnement, cf. la question (5), est égal à $v^{-(n-1)/n}$.

33) Dédire des calculs précédents que si $v \geq 2^{-n/(n-1)}$ alors la conjecture de Crouzeix est vérifiée pour J_v .

34) Montrer que

$$\mathcal{H}(J_0) = \mathbb{D}(0, \cos(\pi/(n+1))).$$

Indication : à ce stade du sujet on pourra utiliser sans en donner les preuves les faits élémentaires suivants :³

- $\mathcal{H}(\alpha A) = \alpha \mathcal{H}(A)$;
- la projection sur l'axe des réels de $\mathcal{H}(A)$ est égale à $\mathcal{H}(\frac{A+A^*}{2})$;
- J_0 est semblable à cJ_0 pour tout $c \in \mathbf{C}^*$;
- les valeurs propres de $\frac{J_0+J_0^*}{2}$ sont les $\cos(k\pi/(n+1))$ pour $k = 1, \dots, n$.

35) En déduire que $\mathbb{D}(0, \cos(\pi/n)) \subset \mathcal{H}(J_v)$.

36) Montrer que pour tout $c \in \mathbf{C}^*$, cJ_v est semblable à $J_{c^n v}$.

37) On suppose $0 < v \leq (\cos(\pi/n))^n$ et on pose $c = \cos(\pi/n)^{-1}$. Montrer que $J_{c^n v}$ est une contraction.

38) Dédire de l'inégalité de Von Neumann que

$$|||p(J_v)||| \leq \cos(\pi/n)^{1-n} |||p|||_{\mathcal{H}(J_v)},$$

3. aucun point de notation ne sera accordé aux preuves de ces faits

et conclure que pour $n > 6$, toutes les matrices J_v vérifient la conjecture de Crouzeix.

Indication : on pourra utiliser que pour $n > 6$, on a $\cos(\pi/n)^{1-n} \leq 2$.

Commentaires : la conjecture est vérifiée pour toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} & \\ \alpha_n & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

La conjecture est démontrée pour $n = 2$ et dans le cas général elle est valable si on remplace la constante 2 par $1 + \sqrt{2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Corrigé succinct

Préliminaires

1) En dimension finie, la sphère unité est compacte. L'application de $X \mapsto \|AX\|$ étant clairement continue, l'existence de $\|A\|$ découle du théorème des bornes atteintes, ce qui permet de remplacer le sup par un max. Par homogénéité, on a $\|A\frac{x}{\|x\|}\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ce qui fournit la deuxième formule.

2) On écrit $x = \sum_i x_i e_i$ et $Ax = \sum_i \lambda_i x_i e_i$ avec

$$\|Ax\|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leq \max_i |\lambda_i|^2 \left(\sum_i |x_i|^2 \right) = \max_i |\lambda_i|^2$$

et donc $\|A\| = \rho(A)$ le rayon spectral de A (pour une matrice diagonale).

3) Si $Bx \neq 0$, on écrit $\frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|$. Si $Bx = 0$ alors $ABx = 0$ et donc dans tous les cas on a $\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|$ et l'inégalité demandé en passant au sup.

4) Pour U unitaire, on a $\langle Ux|Ux \rangle = \langle x|U^*Ux \rangle = \langle x|x \rangle$ et donc $\|Ux\| = \|x\|$ ce qui donne $\|U\| = 1$.

L'ensemble $\{Ux : \|x\| = 1\}$ est la sphère unité de sorte que ($y = Ux$) $\sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \sup_{\|x\|=1} \|AUx\|$. Enfin $\|UAx\| = \|Ax\|$ et donc en passant au sup, $\|UA\| = \|A\|$.

5) Pour la première inégalité, pour x un vecteur propre unitaire pour une valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$, on a $p(A)x = p(\lambda)x$ et donc $|p(\lambda)| \leq \|p(A)\|$.

Pour la deuxième, on a $p(A) = Pp(D)P^{-1}$ et donc $\|p(A)\| \leq \text{cond}(P) \|p(D)\|$ avec, comme $p(D)$ est diagonale, d'après 2), $\|p(D)\| \leq \|p\|_{\sigma(A)}$.

Partie A

6) Les vecteurs colonnes sont unitaires et orthogonaux deux à deux, la matrice est donc unitaire (on peut aussi faire le calcul).

7) On note que $P^*p(U)P$ est le premier coefficient en haut à gauche de la matrice $p(U)$. Par linéarité on est amené à regarder U^k pour $k = 0, \dots, n-1$. On regarde la première colonne de U^k et on remarque que les $n-k-1$ derniers coefficients sont nuls, de sorte que, par une récurrence immédiate, le premier coefficient de U^k est bien z^k .

8) Pour la première inégalité,

$$p(z) = \langle Pp(U)P \rangle \leq \|P\| \|p(U)P\| = \|p(U)P\| \leq \|p(U)\|.$$

Pour la deuxième, d'après le théorème de réduction il existe une matrice unitaire U_0 telle que $U = U_0 D U_0^{-1}$ avec D diagonale dont les coefficients diagonaux sont de norme 1. D'après 4) on a

$$\| \|p(U)\| \| = \| \|U_0 p(D) U_0^{-1}\| \| = \| \|p(D)\| \| = \max_{\sigma(U)} |p| \leq \|p\|_{\partial D}.$$

9) S étant compact $\|p\|_S$ est atteint en un point z . Si $z \notin \partial S$, il existe alors $\delta > 0$ tel que $\mathbb{D}(z, \delta) \subset S$. Soit alors $q(x) = p(\delta x)$ que l'on étudie sur $\delta^{-1}S$ qui admet un maximum en $x_0 = \delta^{-1}z$. On regarde $r(x) = q(x - x_0)$ qui admet un maximum en $x = 0$ sur $\delta^{-1}S - x_0$ lequel contient \mathbb{D} . La contradiction découle alors de 8).

Partie B

10) D'après 5) et en utilisant que le conditionnement d'une matrice unitaire est égal à 1, on a $\| \|p(A)\| \| = \|p\|_{\sigma(A)}$ avec $\sigma(A) \subset \mathbb{D}$ d'où le résultat.

11) Notons que $I - A^*A$ est hermitienne et donc d'après le théorème de réduction, il existe U unitaire telle que $I - A^*A = U D U^*$ où D est diagonale avec valeurs propres réelles λ_i . Montrons que les λ_i sont > 0 .

On écrit $(I - A^*A)x = \lambda x$ soit $A^*Ax = (1 - \lambda)x$ et

$$\langle A^*Ax | x \rangle = \langle Ax | Ax \rangle = \|Ax\|^2 = (1 - \lambda)\|x\|^2.$$

Or par hypothèse $\| \|A\| \| \leq 1$, ce qui donne $0 \leq (1 - \lambda) \leq 1$ soit $0 \leq \lambda \leq 1$. Soit alors \sqrt{D} la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $\sqrt{\lambda_i}$: la matrice $D_A := U \sqrt{D} U^*$ répond alors aux contraintes demandées.

On procède de même pour $I - AA^*$: on note μ_j ses valeurs propres.

12) En utilisant, par exemple, les polynômes de Lagrange, il existe $q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ et $q(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$ pour $i = 1, \dots, n$ (avec les notations de 10)). On a alors $D_A = q(A^*A)$ et $D_{A^*} = q(AA^*)$.

13) Notons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A(A^*A)^k = (AA^*)^k A$ de sorte que, par linéarité, on a $Aq(A^*A) = q(AA^*)A$ et donc, d'après la question précédente, $AD_A = D_{A^*}A$. On procède de même pour l'autre égalité.

14) On décompose h en (h_1, h_2) et on écrit

$$\|Uh\|^2 = \|(Ah_1 + D_{A^*}h_2, -D_A h_1 + A^*h_2)\|^2 = \|Ah_1 + D_{A^*}h_2\|^2 + \|-D_A h_1 + A^*h_2\|^2,$$

et on développe

$$\begin{aligned}
\|Ah_1 + D_{A^*}h_2\|^2 &= h_1^*A^*Ah_1 + h_2^*D_{A^*}^2h_2 + h_1^*A^*D_{A^*}h_2 + h_2^*D_{A^*}Ah_1 \\
&= h_1^*A^*Ah_1 + h_2^*(I - AA^*)h_2 + h_1^*A^*D_{A^*}h_2 + h_2^*D_{A^*}Ah_1 \\
\|-D_Ah_1 + A^*h_2\|^2 &= h_1^*D_A^2h_1 + h_2^*AA^*h_2 - h_1^*D_AA^*h_2 - h_2^*AD_Ah_1 \\
&= h_1^*(I - A^*A)h_1 + h_2^*AA^*h_2 - h_1^*D_AA^*h_2 - h_2^*AD_Ah_1 \\
\hline
\|Uh\|^2 &= h_1^*h_1 + h_2^*h_2 + h_1^*(A^*D_{A^*} - D_AA^*)h_2 + h_2^*(D_{A^*}A - AD_A)h_1 \\
&= \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 = \|h\|^2
\end{aligned}$$

15) Comme dans la question précédente U_k est unitaire et donc d'après 8), $\|p(U)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}$. L'avantage de U_k est que si p est de degré $\leq k + 1$ alors $p(U_k)$ a son premier bloc en haut à gauche égal à $p(A)$ de sorte que $\|p(A)\| \leq \|p(U_k)\|$.

16) Soit $q(x) = p(\|A\|x)$ de sorte que $q(\frac{A}{\|A\|}) = p(A)$. La matrice $\frac{A}{\|A\|}$ est une contraction de sorte que d'après la question précédente

$$\|q(\frac{A}{\|A\|})\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{D}(0, \|A\|)}.$$

Partie C

17) Pour x un vecteur propre unitaire associé à une valeur propre λ , on a $\langle Ax|x \rangle = \lambda \langle x|x \rangle = \lambda$.

18) Soit $x = \sum_i x_i e_i$ unitaire, i.e. $\sum_i |x_i|^2 = 1$. On a $\langle Ax|x \rangle = \sum_i \lambda_i |x_i|^2$ et on conclut par une double inclusion facile.

19) Soit U unitaire, alors $\langle U^*AUx|x \rangle = \langle AUx|Ux \rangle$. Comme $\{Ux : \|x\| = 1\} = \{x : \|x\| = 1\}$, on obtient $\mathcal{H}(U^*AU) = \mathcal{H}(A)$. Ainsi d'après le théorème de réduction du préambule on obtient que pour A hermitienne ou unitaire (normale en fait), $\mathcal{H}(A)$ est l'enveloppe convexe de son spectre.

20) Pour $x = \alpha e_1 + \beta e_2$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, on a

$$\langle Ax|x \rangle = \langle \beta e_1 | \alpha e_1 + \beta e_2 \rangle = \bar{\alpha}\beta.$$

Notons que multiplier x par $e^{i\theta}$ ne change pas le résultat, on peut donc prendre $\alpha = a \in \mathbf{R}$ et $\beta = be^{i\theta}$, ce qui donne $\langle Ax|x \rangle = e^{i\theta}ab$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Les inégalités classiques

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$$

où toutes les valeurs sont prises, montrent que $\mathcal{H}(A) = \mathbb{D}(0, 1/2)$.

21) L'image d'un compact par une application continue est un compact.

22) Pour la deuxième inégalité, d'après Cauchy-Schwarz on a $\langle Ax|x \rangle \leq \|Ax\| \cdot \|x\| = \|Ax\|$, et on obtient le résultat demandé en passant au sup.

Pour la première on part de l'égalité de polarisation donnée ce qui donne

$$4|\langle Ax|y \rangle| \leq r(A)(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2)$$

et en utilisant l'égalité du parallélogramme $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, on obtient

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle Ax|y \rangle \leq 2r(A)$$

et le résultat s'obtient en prenant $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$.

23) On a clairement $r(\lambda A) = |\lambda|r(A)$ et $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$. Si $r(A) = 0$ alors d'après la question précédente on a $\|A\| = 0$ et donc $A = 0$.

24) On a vu que $r(A) = r(B) = 1/2$ alors que $r(AB) = 1$ (cas diagonal).

25-a) La première égalité s'obtient en factorisant par ω_k^i dans chaque parenthèse et en notant que $\prod_{i=1}^k \omega_k^i = 1$.

Pour la deuxième, on dérive l'égalité donnée que l'on divise par X^{k-1} , puis on fait le changement de variable $Y = X^{-1}$.

25-b) On écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2 \left[1 - \omega_k^i \left\langle \frac{Ax_i}{\|x_i\|} \middle| \frac{x_i}{\|x_i\|} \right\rangle \right] &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \langle (1 - \omega_k^i A)x_i | x_i \rangle \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \langle \prod_{i=1}^k (1 - \omega_k^i A)x | x_i \rangle \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \langle (1 - A^k)x | x_i \rangle \\ &= \langle (1 - A^k)x | \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \rangle \\ &= \langle (1 - A^k)x | \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \prod_{j=1, j \neq i}^k (1 - \omega_k^j A)x \rangle \\ &= \langle (1 - A^k)x | x \rangle = 1 - \langle A^k x | x \rangle. \end{aligned}$$

25-c) En remplaçant A par $e^{i\theta} A$ dans la formule précédente (on fera attention que les x_i sont aussi modifiés), on obtient (en utilisant la première égalité de 25-a))

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|x_i\|^2 \left[1 - e^{i\theta} \omega_k^i \left\langle \frac{Ax_i}{\|x_i\|} \middle| \frac{x_i}{\|x_i\|} \right\rangle \right] = 1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle.$$

Comme $r(A) \leq 1$, la partie réelle de chacun des termes du membre de gauche est positive, il en est donc de même pour le membre de droite, ce qui impose, comme c'est vrai pour tout angle θ , que $|\langle Ax|x \rangle| \leq 1$ et donc $r(A^k) \leq 1$.

25-d) Pour A quelconque, $B := \frac{A}{r(A)}$ vérifie $r(B) \leq 1$ et donc $r(B^k) = r(\frac{A^k}{r(A)^k}) \leq 1$ et donc $r(A^k) \leq r(A)^k$.

Partie D

26) On rappelle que $\mathcal{H}(A) = \mathbb{D}(0, 1/2)$ avec $|||A||| = 1 = 2r(A)$.

27) D'après 22) et 25) on a

$$|||A^k||| \leq 2r(A^k) \leq 2r(A)^k = 2|||X^k|||_{\mathcal{H}(A)}.$$

28) On a

$$|||p(A)||| \leq \sum_i |c_i| |||A|||^i \leq 2 \sum_i |c_i| r(A)^i = 2 \left| \sum_i c_i z^i \right| \leq 2|||p|||_{\mathcal{H}(A)}.$$

29-a) Soit $q(\frac{A}{r(A)}) = p(A)$. D'après Okubo-Ando $\frac{A}{r(A)} = XBX^{-1}$ avec $|||X||| |||X^{-1}||| \leq 2$. D'après 5) on a alors $|||q(\frac{A}{r(A)})||| \leq 2|||q(B)|||$ avec d'après Von Neumann $|||q(B)||| \leq |||q|||_{\mathbb{D}} = |||p|||_{\mathbb{D}(0, r(A))}$.

29-b) Soit $\mathbb{D}(z_0, r)$ le plus petit disque contenant $\mathcal{H}(A)$. Soit $q(A - z_0 I_n) = p(A)$ avec donc $r(A - z_0) \leq r$ de sorte que d'après la question précédente

$$|||p(A)||| = |||q(A - z_0 I_n)||| \leq 2|||q|||_{\mathbb{D}(0, r)} = 2|||p|||_{\mathbb{D}(z_0, r)},$$

et on passe au cercle en utilisant le principe du maximum de la partie A.

Partie E

30) On calcule aisément $J_v^n = vI_n$ de sorte que les valeurs propres sont les $\omega_n^k v^{1/n}$ avec pour valeur propre

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ v^{1/n} \omega_n^{k-1} \\ v^{2/n} \omega_n^{2(k-1)} \\ \vdots \\ v^{(n-1)/n} \omega_n^{(n-1)(k-1)} \end{pmatrix}.$$

31) Tous les vecteurs colonnes de M sont de norme \sqrt{n} et sont orthogonaux deux à deux de sorte que $\frac{1}{\sqrt{n}}M$ est unitaire. Comme $\text{cond}(\lambda X) = \text{cond } X$ et que le conditionnement d'une matrice unitaire est égal à 1, le conditionnement de M est égal à 1.

32) On a $P = \text{diag}(1, v^{1/n}, \dots, v^{(n-1)/n})M$ et son conditionnement est, d'après 4), donc égal à celui de la matrice diagonale et donc égal à $1 \cdot v^{-(n-1)/n}$.

33) D'après 5) et 17), on a alors

$$\|p(J_v)\| \leq v^{-(n-1)/n} \|p\|_{\sigma(J_v)} \leq v^{-(n-1)/n} \|p\|_{\mathcal{H}(J_v)} \leq 2 \|p\|_{\mathcal{H}(J_v)}.$$

34) En utilisant les propriétés données ainsi que le calcul de $\mathcal{H}(H)$ pour H hermitienne, la projection de $\mathcal{H}(A)$ sur l'axe réel est le segment $[-\cos(\pi/(n+1)), \cos(\pi/(n+1))]$.

Comme $e^{i\theta}A$ est semblable à A alors la projection de $\mathcal{H}(e^{i\theta}A) = e^{i\theta}\mathcal{H}(A)$ sur l'axe réel est encore le même segment ce qui prouve que $\mathcal{H}(J_0) = \mathbb{D}(0, \cos(\pi/(n+1)))$.

35) Notons que J_v contient comme matrice extraite la matrice J_0 d'ordre $n-1$. Ainsi si dans le calcul de $\langle J_v x | x \rangle$ on prend x dont la dernière coordonnée est nulle, on obtient $\mathcal{H}(J_0)$ et donc $\mathbb{D}(0, \cos(\pi/n))$ qui est alors contenu dans $\mathcal{H}(J_v)$.

36) Pour $D = \text{diag}(1, c, \dots, c^{n-1})$, on vérifie aisément que $cJ_v = D^{-1}J_{c^n v}D$.

37) Les vecteurs colonnes v_i de $J_{c^n v}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme ≤ 1 et donc $J_{c^n v}$ est une contraction puisque

$$\left\| \sum_i x_i v_i \right\|^2 = \sum_i |x_i|^2 \|v_i\|^2 \leq \sum_i |x_i|^2 = 1.$$

38) D'après l'inégalité de Von Neumann et 5), on a

$$\|q(cJ_v)\| \leq \kappa(D) \|q\|_{\mathbb{D}}.$$

En posant $p(z) = q(cz)$, cette inégalité s'écrit

$$\|p(J_v)\| \leq \kappa(D) \|p\|_{\mathbb{D}(0, c^{-1})},$$

où $c^{-1} = \cos(\pi/n)$. Comme $\mathbb{D}(0, c^{-1}) \subset \mathcal{H}(A)$ et $\kappa(D) = c^{n-1}$, on obtient

$$\|p(J_v)\| \leq \cos(\pi/n)^{1-n} \|p\|_{\mathcal{H}(J_v)}.$$

Pour $n > 6$, on remarque que $\cos(\pi/n)^{1-n} \leq 2$ ce qui permet de conclure.