Angles: définitions et utilisation en géométrie

Plan

Remarque: Plus que pour les autres leçons, il est impossible de raconter tout ce que vous savez sur le sujet, il faut certainement faire des choix sachant qu'il est indispensable de parler d'orientation, et de géométrie affine. Par ailleurs il faut éviter de rester dans le plan affine euclidien: dans l'espace vous pouvez parler des triangles de la sphère unité pour aller jusqu'à la géométrie sphérique. Les plus téméraires pourront s'attaquer au plan lorentzien pour aller jusqu'à la géométrie hyperpolique. Plus simplement vous pouvez parler de la géométrie conforme i.e. la sphère de Riemann (projection stéréographique, groupe circulaire...)

- angles du plan affine euclidien: de droites, de demi-droites, orientés ou pas. Par exemple pour les angles orientés de demi-droites concourrantes, on passe en vectoriel, et on fait agir le groupe orthogonal sur l'ensemble des couples de droites vectoriels, les angles sont par définition les orbites et sa mesure est $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ envoie la première demi-droite sur la deuxième. L'additivité des angles découle de l'isomorphisme $SO(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. A partir de là on obtient la trigonométrie classique.
  - lignes de niveau $(\widehat{AMB}) = cte$; angle au centre (attention de ne pas vous emmêler en parlant d'angles de demi-droites ou de droites!)
  - théorème de Jacobi-Kronecker: le groupe engendré par e^{it} est dense dans S^1 si et seulement si $\frac{t}{2\pi} \in \mathbb{Q}$;
  - formule de Laguerre: soit E le plan euclidien orienté et soit $E_{\mathbb{C}}$ le complexifié; on note I, J les droite isotropes. Pour deux droites D, D' de E, alors l'angle orienté entre D et D' est égal à $\frac{1}{2}\log[D_{\mathbb{C}}, D'_{\mathbb{C}}, I, J]$ où $[D_{\mathbb{C}}, D'_{\mathbb{C}}, I, J]$ est le birapport dans $P(E_{\mathbb{C}})$. L'orientation consiste alors à choisir I et J.
  - de la géométrie semblable:
    - triangles semblables: soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des triangles non dégénérés alors $\mathcal{T}/\sim(E)$ est en bijection avec l'ensemble des couples (θ_1, θ_2) d'éléments de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ tels que $\theta_1 + \theta_2 < \pi$. (aussi en bijection avec $(a, b, c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, ou encore $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$);
    - le théorème de Pythagore $\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = 1$ (il s'agit d'un énoncé de géométrie semblable): on note AH la hauteur menée de A sur BC, les triangles ABC et AHB sont semblables de sorte que $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$. De même on a $CH^2 = CH.CB$ et donc $AB^2 + AC^2 = (BH + HC)BC = BC^2$;
    - **Triangles podaires** Soit ABC un triangle et P un point intérieur au triangle. On considère A_1, B_1, C_1 les pieds des perpendiculaires menées de P aux cotés du triangle. Le triangle $A_1B_1C_1$ est dit triangle podaire de ABC pour P. Soit alors $A_2B_2C_2$ le triangle podaire de $A_1B_1C_1$ pour P et $A_3B_3C_3$ le triangle podaire de $A_2B_2C_2$ pour P. Alors ABC et $A_3B_3C_3$ sont semblables et le rapport de similitude est égal au rapport du produit des distances de P aux trois côtés sur le produit des distances aux trois sommets.
  - les angles constructibles: $n = 2^k p_1 \cdots p_m$ où les p_i sont des nombres premiers de Fermat
  - coniques:
    - soit C une conique propre de foyer F et de directrice D. Soient $M, N \in C$ et $P = (MN) \cap D$, alors (PF) est la bissectrice de (FM, FN);
    - soit C une conique propre qui n'est pas un cercle, F un foyer et D la directrice correspondante. Si $M \in C$ et P est le point d'intersection de la perpendicualire à (MF) en F à D, alors PM est tangente à C en M;
    - soit C une conique propre à centre de foyers F et F'. La tangente à C en M est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle en M de triangle MFF' si C est une hyperbole (resp. une ellipse).

- la géométrie conforme: en dimension 2, il s'agit de la sphère de Riemann S^2, en dimension quelconque on prend le plan affine euclidien E auquel on rajoute un point à l'infini $\hat{E} = E \cup \{\infty\}$ (on passe de l'une à l'autre par la projection stéréographique); la topologie sur $\hat{E}$ est celle de E à laquelle on rajoute les ouverts du type $(E \backslash K) \cup \{\infty\}$ où K est un compact de E; la projection stéréographique est un homéomorphisme

- pour une similitude f du plan affine euclidien, on la prolonge en posant $f(\infty)=\infty$; les inversion et les similitudes de $\hat{E}$ engendrent un groupe appelé le groupe conforme ou groupe des homographies; la géométrie conforme est l'étude de l'action du groupe conforme sur $\hat{E}$.
- si on rajoute la conjugaison, on obtient le groupe circulaire qui vu comme automorphismes de S^2, correspond aux automorphismes qui conservent les cercles tracés sur S^2. Une transformation circulaire droite ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) (resp. gauche $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$) conserve (resp. change en son opposé) les angles orientés de droites.

- géométrie sphérique: on note S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, orientée.
  - Pour $x, y \in S$, on note $d(x,y) = \arccos(x|y)$: les géodésiques sont les grands cercles.
  - triangles sphériques: les cotés sont les morceaux de grand cercle qui relient les points entre eux, les angles étant définis par l'angle entre les vecteurs tangents dans le plan tangent euclidien: $\alpha = d(x_y, x_z)$ où x_y (resp. x_z) est le deuxième vecteur fourni après x par l'orthonormalisation de Schmidt appliqué à $\{x, y\}$, i.e. $x_y = \frac{\lambda}{||\lambda||}$ avec $\lambda = y - (x|y)x$; c'est aussi l'angle entre les plans correspondants.
  - formule fondamentale de la trigonométrie sphérique:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

  - deux triangles sphériques ayant les mêmes angles sont isométriques.
  - l'aire d'un triangle sphérique est égale à la somme des angles moins π.
  - toutes les droites se coupent en 2 point, en passant en projectif et donc en identifiant x et $-x$, on obtient un modèle de la géométrie elliptique, où toutes les droites se coupent en un point (pas de droites parallèles).

- en dimension supérieure:
  - dans $\mathbb{R}^3$ orienté, on peut définir l'angle de deux droites, de deux plans mais sans orientation!
  - familles obtusangles:
  - systèmes de racines: soit V un espace euclidien de dimension finie, muni du produit scalaire euclidien standard noté (Δ, Δ). Un système de racines dans V est un ensemble fini Φ de vecteurs non nuls (appelés racines) qui satisfont les propriétés suivantes :
    * les racines engendrent V comme espace vectoriel;
    * les seuls multiples scalaires d'une racine $\alpha \in \Phi$ qui sont dans Φ sont $\pm\alpha$;
    * pour chaque racines $\alpha \in \Phi$, l'ensemble Φ est stable par la réflexion à travers l'hyperplan perpendiculaire à α i;e. pour toutes racines α, β on a

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$$

    * (condition d'intégralité) si α et β sont des racines dans Φ alors

$$<\beta,\alpha>= 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$$

    autrement dit $\beta - \sigma_\alpha(\beta) \in \mathbb{Z}\alpha$.

  - La condition d'intégralité pour $<\alpha,\beta>$ force β à être sur les lignes verticales. Par ailleurs en combinant ces conditions aux conditions d'intégralité pour $<\beta,\alpha>$, les possibilités pour les angles entre α et β sont réduites à au plus deux possibilités sur chaque ligne verticale.
  - Le groupe des isométries de V engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans associés aux racines de est nommé le groupe de Weyl de . Comme il agit fidèlement sur l'ensemble fini , le groupe de Weyl est toujours fini.
  - Si Φ est un système de racines dans V et W est un sous-espace de V, alors $\Psi = \Phi \cap W$ est un système de racines dans W. Ainsi, de la liste des systèmes de racines de rang 2, on montre que deux racines se rencontrent selon un angle de 0, 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150 ou 180 degrés.

- angles lorentziens: cette fois-ci la forme quadratique q est de signature $(1,1)$, dans la base des vecteurs isotropes (e_1, e_2), la matrice de la forme quadratique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  - Un élément f de $O^+(q)$ (resp. $O^-(q)$) est alors tel que sa matrice dans la base (e_1, e_2) est de la forme $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k & 0 \end{pmatrix}$) pour $k \in \mathbb{R}^*$. On note $O^{++}(q)$ la composante connexe de $O^+(E)$.
  - On fait agir $O^{++}(q)$ sur les droites de E; il y a alors trois orbites, les droites telles que la restriction de la forme quadratique est nulle, strictement positive, strictement négative. On définit comme précédemment la notion d'angle hyperbolique de "deux" droites ainsi que sa mesure qui est alors un nombre réel.
  - on retrouve la trigonométrie hyperbolique habituelle avec les modèles **conformes** (i.e. qui respecte les angles mais les droites hyperboliques sont des cercles euclidiens, les cercles hyperboliques sont des cercles euclidiens mais ne sont plus centrés, on obtient des faisceau de cercles...) du disque et du demi-plan de Poincaré. En particulier pour $\delta = 2$, ces modèles conformes sont δ-hyperbolique, i.e. pour tout triangle hyperbolique, tout point situé sur un des cotés est à distance au plus δ d'un point situé sur l'un des deux autres côtés.
  - Notons I, J les droites isotropes de (E, q), alors pour deux droites D, D' où q est strictement positive, la mesure de l'angle hyperbolique orienté entre D et D' est donné par la formule de "Laguerre"

    $$\mathrm{meas}(\widehat{DD'}) = \frac{1}{2}\log([D, D', J, I])$$

    et que $\overline{DD'} := \frac{1}{2}|\log([D, D', J, I])|$ définit une distance telle que

    $$\widehat{DD'} = \mathrm{argch}\Big(\frac{< v, v' >}{\sqrt{q(v)}\sqrt{q(v')}}\Big)$$

    où v et v' sont des vecteurs directeurs de respectivement D et D'.
  - On considère la forme quadratique de signature $(1,2)$ et l'ensemble des droites où la restriction de q est positive. La métrique définie par les angles lorenztiens définie la géométrie hyperbolique.

Développements

- rotation dans $\mathbb{R}^3$ avec les quaternions
- triangles podaires
- trissectrices: théorème de Morley
- angles eccentriques sur une ellipse et cocyclicité
- problème de Steiner, point de Fermat
- triangles sphériques
- simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Questions

- angles dièdres
- Expliquez l'intérêt des antennes paraboliques.
- bissectrices (conique, tangente...): problème de Lehmus-Steiner
- montrez qu'une transformation circulaire droite ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) (resp. gauche $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$) conserve (resp. change en son opposé) les angles orientés de droites; que se passe-t-il pour le birapport?

- Décrivez $\mathcal{T}/GA(E)$, $\mathcal{T}/SLA(E)$.

- Quelle est la somme des mesures des angles non orientés de demi-droite d'un quadrilatère? Montrez que les intersections des bissectrices intérieures d'un quadrilatère forment un quadrilatère inscriptible (i.e. les 4 sommets sont cocycliques). Montrez que si le quadrilatère est un parallèlogramme alors les bissectrices intérieures et extérieures forment deux rectangles.

- au rugby, pour transformer un essai, le buteur doit placer son ballon sur une ligne parallèle à la ligne de touche, passant par le point où l'essai a été marqué. Expliquez comment placer le ballon pour que l'angle sous lequel on voit les poteaux, y maximal.

Exercices corrigés

Exercice 1. ***Problème de Steiner****: trouvez un point M intérieur à un triangle ABC tel que $MA + MB + MC$ soit minimal.*

Preuve : A partir d'une solution M_0, on considère la ligne de niveau $MB + MC = M_0B + M_0C$ qui est ellipse de foyer B et C. L'ellipse étant convexe, M_0 est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur l'ellipse. Mais la tangente en un point d'une ellipse est bissectrice extérieure de l'angle formé par les rayons vecteurs aboutissant en ce point. Il en résulte que $\widehat{AM_0C} = \widehat{AM_0C}$ qui par symétrie est encore égal $\widehat{CM_0B}$. Ainsi le point M_0 est donc le point d'où l'on voit les trois côtés du triangle sous le même angle, c'est le point de Steiner (Fermat, Toricelli?) du triangle. On le construit en considérant les triangles équilatéraux extérieurs sur les côtés du triangle, dont on note A', B', C' les sommets. Le point cherché est alors l'intersection des droites $A'A, B'B, CC'$ (considérer les rotations d'angle $\pi/3$ de sommets A, B ou C.
Remarque: pour être certain que le point soit à l'intérieur, il faut supposer que les angles du triangle sont strictement inférieurs à $2\pi/3$.

Exercice 2. ***Triangles podaires*** *Soit ABC un triangle et P un point intérieur au triangle. On considère A_1, B_1, C_1 les pieds des perpendiculaires menées de P aux cotés du triangle. Le triangle $A_1B_1C_1$ est dit triangle podaire de ABC pour P. Soit alors $A_2B_2C_2$ le triangle podaire de $A_1B_1C_1$ pour P et $A_3B_3C_3$ le triangle podaire de $A_2B_2C_2$ pour P.*

(i) Montrez que ABC et $A_3B_3C_3$ sont semblables.

(ii) Calculez le rapport de similitude.

(iii) Trouver P tel que l'aire de $A_3B_3C_3$ soit minimale.

Preuve : (i) Remarquons déjà que A, C_1, P, B_1 (resp. B, A_1, P, C_1, resp. C, B_1, P, A_1) sont cocycliques car les triangles rectangles AC_1P et APB_1 ont même hypoténuse. Par permutation circulaire, il s'agit donc de montrer que les angles $\hat{A}$ et $\hat{A}_3$ ont même mesure. Or on a $\alpha := (\widehat{AC_1, AP}) = (\widehat{B_1C_1, B_1P})$ car A, C_1, P, B_1 sont cocycliques, qui est égal à $(\widehat{B_1A_2, B_1P})$ car C_1, A_2, B_1 sont alignés, qui est égal à $(\widehat{C_2A_2, C_2P})$ car A_2, B_1, C_2, P sont cocycliques, qui est égal à $(\widehat{C_2B_3, C_2P})$ car A_2, B_2, P sont alignés, qui est égal à $(\widehat{A_3B_3, A_3P})$ car B_3, C_2, A_3, P sont cocycliques. De la même façon on a $(\widehat{AP, AB_1}) = (\widehat{A_3P, A_3C_3})$ et donc

$$(\widehat{AC_1, AP}) + (\widehat{AP, AB_1}) = (\widehat{A_3B_3, A_3P}) + (\widehat{A_3P, A_3C_3})$$

d'où le résultat.

(ii) Notons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (resp. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$) les angles $\widehat{PAA_1}$, $\widehat{PBB_1}$, $\widehat{PCC_1}$ (resp. $\widehat{C_1AP}$, $\widehat{A_1BP}$, $\widehat{B_1CP}$). On a alors $\sin\alpha_1 = PA_1/PA$ ... de sorte que $PA_3/PA = \sin\alpha_1 . \sin\alpha_2 . \sin\alpha_3 = \sin\beta_1 . \sin\beta_2 . \sin\beta_3$ qui est encore égal au rapport du produit des distances de P aux trois côtés sur le produit des distances aux trois sommets.

(iii) Il s'agit donc de maximiser $(\sin\alpha_1 . \sin\beta_1)(\sin\alpha_2 . \sin\beta_2)(\sin\alpha_3 . \sin\beta_3)$ sachant que $\alpha_i + \beta_i$ est constant. Ainsi le maximum est obtenu pour $\alpha_i = \beta_i$ ou $\alpha_i = \pi - \beta_i$ cas exclu puisque l'on est à l'intérieur du triangle. Le résultat découle alors par compacité du fait qu'aux bords, i.e. sur les côtés du triangle, l'aire est nulle.

Exercice 3. *Soit E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont positifs distints et non nuls. On appelle* ***angle eccentrique*** *d'un point $P \in E$ un réel t tel que $P = (a\cos t, b\sin t)$.*

(1) *Montrez que quatre points de E d'angles eccentriques respectifs α_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sont cocycliques si et seulement si la matrice 4×4 dont la i-ème ligne est*

$$(1 \quad \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad \cos 2\alpha_i)$$

est de déterminant nul.

(2) *Montrez que le déterminant ci-dessus est égal à*

$$32 \sin\Big(\frac{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i}{2}\Big) \prod_{1 \le i < j \le 4} \sin\Big(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{2}\Big)$$

(3) *Avec les notations de (1) et en supposant les points distincts, montrez que ceux(ci sont cocycliques si et seulement si la somme de leurs angles eccentriques est un multiple entier de 2π.*

Preuve : (1) L'équation du cercle passant par les points $P_i = (x_i, y_i)$ pour $i = 1, 2, 3$, est

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

En remplaçant (x_i, y_i) par $(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)$, on obtient une matrice dont la i-ème ligne est

$$ab(1 \quad \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad a^2\cos^2\alpha_i + b^2\sin^2\alpha_i)$$

Or $a^2\cos^2\alpha_i + b^2\sin^2\alpha_i = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + \frac{1}{2}(a^2-b^2)\cos(2\alpha_i)$. Le déterminant de cette matrice est donc égal à $[ab(a^2-b^2)/2]^4$ fois le déterminant de la matrice dont la i-ème ligne est

$$(1 \quad \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad \cos 2\alpha_i)$$

(2) Le déterminant précédent est la partie réelle du déterminant de

$$(1 \quad \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad e^{2\alpha_i})$$

En utilisant les formules d'Euler pour le cos et le sin, on obtient

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\det(1 \quad e^{i\alpha_i} \quad ie^{-i\alpha_i} \quad e^{2i\alpha_i})$$

En changeant l'ordre des colonnes et en mettant $e^{-i\alpha_i}$ en facteur dans chaque ligne, on fait apparaître un Vandermonde et on obtient

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(e^{-i\sum_{j=1}^{4}\alpha_j} \prod_{1 \le i < j \le 4} (e^{i\alpha_i} - e^{i\alpha_j})\Big)$$

En mettant en facteur $e^{i\frac{\alpha_i - \alpha_j}{2}}$ pour chaque $i < j$, on obtient le résultat.

(3) C'est une conséquence directe de ce qui précède.

Exercice 4. *Une rotation de $SO(3)$ sera notée par $r = (k, \theta)$ où k est le vecteur unitaire de l'axe de la rotation et θ son angle.*

Soient alors $r = (OA, 2\alpha)$ et $s = (OB, 2\beta)$ deux rotations telles que $\frac{\alpha}{\pi}$ et $\frac{\beta}{\pi}$ soient irrationnels. Montrez que si l'on excepté une infinité dénombrable de valeurs pour la mesure c de l'angle entre les axes OA et OB, le groupe engendré par r et s est dense dans $SO(3)$.

Preuve : Si P_3 est le plan OAB et $P_2 = (OA, -\alpha)(P_3)$ alors r s'écrit comme le produit des réflexions par rapport aux plans P_2 et P_3. De même s est le produit de P_1 et P_2 où $P_1 = (OB, \beta)(P_3)$.

Afin d'approcher une rotation $(k, 2\theta)$, on approche son axe puis son angle. Pour approcher $\mathbb{R}.k$, on approche les plans qu'il détermine avec OA, et OB. D'après le théorème de Jacobi-Kronecker, ils sont respectivement approchés par $P_2' = (OA, -p\alpha)(P_3)$ et $P_1' = (OB, q\beta)(P_3)$ si p et q sont des entiers adéquats. Ainsi $\mathbb{R}k' = P_1' \cap P_2'$ approche $\mathbb{R}k$.

Puisque $r^p = (OA, 2p\alpha)) = (P_3)(P_2')$ et $s^q = (OB, 2q\beta) = (P_1')(P_3)$, on a $s^q r^p = (P_1')(P_2')$ dont la mesure $2\gamma'$ de l'angle est donnée par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos\gamma' = \sin(p\alpha)\sin(q\beta)\cos c - \cos(p\alpha)\cos(q\beta)$$

On cherche $\frac{\gamma'}{\pi}$ irrationnel; la formule précédente montre que si p et q décrivent les entiers et si $\frac{\gamma'}{\pi}$ décrit les rationnels, $\cos c$ ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs. On choisit alors c pour que $\cos c$ n'appartienne pas à cet ensemble de valeurs. Il en résulte alors que $\frac{\gamma'}{\pi}$ est irrationnel pour tout p, q. Le théorème de Jacobi-Kronecker montre alors que l'on peut choisir n pour que $2n\gamma'$ approche 2θ de sorte que $(s^q r^p)^n$ approche $(k, 2\theta)$.

Exercice 5. *On note H le corps des quaternions et soit G ceux de norme 1: $G = \{a+bi+cj+dk \ / \ a^2+b^2+c^2+d^2 = 1\}$. On considère alors l'action de G sur H par automorphismes intérieurs.*

(1) En restreignant cette action à l'ensemble P des quaternions purs, montrez que l'on obtient alors un isomorphisme s:$G/\{\pm 1\} \simeq O(3, \mathbb{R})^+$. La suite exacte associée est-elle scindée ?

(2) Montrez que $s_{bi+cj+dk}$ est une rotation d'angle π d'axe (b, c, d).

(3) Montrez que $s_{a+b_i+cj+dk}$ est une rotation d'axe (b, c, d) et d'angle $\arccos a$.

(4) Expliciter une méthode de calcul du composé de deux rotations.

Preuve : (1) On a $P \simeq \mathbb{R}^3$ et on vérifié aisément que l'action de conjugaison de G est $\mathbb{R}$-linéaire et conserve la norme de sorte qu'elle définit un morphisme de groupes $G \longrightarrow O(3, \mathbb{R})$. On note en outre que $G \simeq S^3$ est connexe et que le morphisme précédent est continue de sorte que l'image de $G \to O(3, \mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ est connexe et donc égale à $\{1\}$. On obtient donc bien un morphisme de groupe $\phi : G \longrightarrow O^+(3, \mathbb{R})$. Montrons la surjectivité: soit $p \in P \cap G$, on a $\phi_p(p) = p$ ce qui prouve que ϕ_p fixe p (et est non triviale), c'est donc une rotation d'axe p. En outre on a $p^2 = -1$ soit ϕ_p d'ordre 2; c'est donc un renversement. On obtient donc tous les renversements, or ceux-ci engendrent $O^+(3, \mathbb{R})$, d'où la surjectivité. Pour le noyau, on a $\phi_g(p) = p$ pour tout $p \in P$ si et seulement si g commute à tous les éléments de P et donc à tous les éléments de H, soit donc $g \in \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$.

Si la suite exacte

$$1 \to \{\pm 1\} \longrightarrow G \longrightarrow^{\phi} O^+(3, \mathbb{R}) \to 1$$

était scindée, on aurait un sous-groupe H de G tel que $\phi_{|H}$ soit un isomorphisme de H sur $O^+(3, \mathbb{R})$. Mais alors pour $g \in G$, on aurait g ou $-g$ qui appartiendrait à H. En prenant $o \in P \cap G$, on a $p^2 = (-p)^2 = -1$ soit donc $-1 \in H$, contradiction.

(2) Notons $q = bi + cj + dk$, on a $s_q(q) = q.q.\bar{q} = q$ et donc le vecteur (b, c, d) est fixé par s_q qui est donc une rotation d'axe (b, c, d). D'autre part comme q est un quaternion pur de norme 1, on a $q^2 = -1$ de sorte que $s_q^2 = s_{q^2}$ est la conjugaison par -1 et donc l'identité. Ainsi s_q est soit l'identité soit le demi-tour d'axe (b, c, d). Comme q n'est pas dans le centre de $\mathbb{H}$, le premier cas est exclu.

(3) Soit $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin(\frac{\theta}{2}q'$ avec $q' = xi + yj + zk$. Alors

$$s_q(q') = (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}q')q'(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}q') = (\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2})q' = q'$$

et donc s_q est une rotation d'axe (x, y, z). Si $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ désigne un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et p le quaternion $x_1 i + y_1 j + z_1 k$ alors on a

$$s_q(p) = (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}q')p(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}q') = (\cos^2\frac{\theta}{2}p + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2})(q'p - pq') - \sin^2\frac{\theta}{2}q'pq'$$

mais $-q'pq' = s_{q'}(p) = -p$ puisque $s_{q'}$ est le demi-tour d'axe (x,y,z) et donc $pq' = q'\bar{q}'pq' = q'(-q'pq') = q'(-p) = -q'p$. On obtient

$$s_q(p) = (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})p + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}q'p = \cos\theta p + \sin\theta q'p$$

Il suffit alors de remarquer que le produit $q'p$ correspond au produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ et donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forme une base orthonormale directe et l'égalité précédente se retraduit en $s_q(\vec{v}) = \cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{w}$ et donc s_q est la rotation d'axe (x,y,z) et d'angle θ.

(4) On traite un exemple: soient r la rotation d'axe Ox et d'angle $\pi/2$ et r' la rotation d'axe Oy d'angle $\pi/2$. On introduit donc $q = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $q' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$. On a alors $qq' = \frac{1}{2}(1+i+j+k)$ et donc $r\circ r'$ est la rotation d'axe $\mathbb{R}_+(1,1,1)$ et d'angle $2\pi/3$.