Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications

Conseils d'ordre généraux : c'est une leçon de géométrie, il est donc impossible d'éviter de faire cu calcul barycentrique : au minimum Ceva et Routh. Après avoir donné quelques résultats sur les enveloppes convexes, il faut passer aux applications typiquement sur les polynômes, l'algèbre linéaire et pour les plus téméraires, la géométrie des nombres. On pourra aussi penser à étudier les polyèdres convexes.

Avertissement : ce qui suit a été rédigé très rapidement (parfois il s'agit de copié-collé disposé un peu en vrac, il y aura bientôt une version 2 plus présentable).

1. Généralités

1.1. Coordonnées barycentriques. — - Etant donnée une base affine $A_1, \cdots, A_{n+1}$ d'un espace affine de dimension n, et des éléments $m_1, \cdots, m_{n+1}$ du corps, la fonction qui à M associe $\sum_{i=1}^{n+1} m_i \overrightarrow{MA_i}$ est constante si $\sum_i m_i = 0$ et surjective (donc une bijection) sinon. Dans ce dernier cas, le point G tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ est appelé le barycentre des A_i affectés des poids m_i.

- *Associativité du barycentre* : les médianes d'un triangle se coupent en leur tiers (pour un tétraèdre c'est au quart)

- *exemples de coordonnées barycentriques de points remarquables d'un triangle ABC* : on note x_A, x_B, x_C les coordonnées barycentriques cherchées :

– pour le centre O du cercle circonscrit, $(x_A, x_B, x_C) = (\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$, ou encore $(x_A, x_B, x_C) = (a\cos\alpha, b\cos\beta, c\cos\gamma)$;

  Preuve : On prend le déterminant de $x_A\overrightarrow{OA} + x_B\overrightarrow{OB} + x_C\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{OA}$ ce qui donne $x_B R^2 \sin 2\beta - x_C R^2 \sin 2\gamma = 0$ et donc $\frac{x_B}{x_C} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma}$ et par permutation circulaire $\frac{x_C}{x_A} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}$;

  Remarque : il est aussi possible d'invoquer le résultat général suivant : les coordonnées barycentriques d'un point M du plan par rapport à ABC sont données par les aires signées des triangles MBC, MAC et MAB. □

– pour l'orthocentre H, $(x_A, x_B, x_C) = (a\cos\beta\cos\gamma, b\cos\alpha\cos\gamma, c\cos\alpha\cos\beta)$;

  Preuve : Par projection orthogonale sur la droite BC on obtient $x_B\overline{A_1B} + x_C\overline{A_1C} = 0$ et donc $x_B c\cos\beta = x_C b\cos\gamma$ et par permutation circulaire $x_C a\cos\gamma = x_A c\cos\alpha$ ce qui donne le résultat ; □

– pour le centre du cercle d'Euler $(x_A, x_B, x_C) = (\sin 2\beta + \sin 2\gamma, \sin 2\alpha + \sin 2\gamma, \sin 2\alpha + \sin 2\beta)$:

  Preuve : Rappelons que l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$ transforme les hauteurs de ABC en celles de $A'B'C'$ qui sont les médiatrices de ABC de sorte que $\overrightarrow{GO} = -1/2.\overrightarrow{GH}$; par ailleurs le centre Ω du cercle circonscrit de $A'B'C'$ est tel que $\overrightarrow{G\Omega} = -1/2.\overrightarrow{GO}$. La droite joignant O, G, H, Ω s'appelle la droite d'Euler. Notons A_1, B_1, C_1 les pieds des hauteurs et soient U, V, W les milieux de $[A, H]$, $[B, H]$ et $[C, H]$. Comme Ω est le milieu de $[O, H]$, il appartient à la médiatrice de $[A', A_1]$ de sorte que A_1, B_1, C_1 appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à A', B', C' ; en outre l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$ envoie le cercle circonscrit à ABC sur celui de $A'B'C'$ et donc U, V, W appartiennent à $\mathcal{C}$ qui s'appelle le cercle d'Euler.

D'après ce qui précède, on a $(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)O=\sin 2\alpha A+\sin 2\beta B+\sin 2\gamma C$ de sorte que par application de l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$, on obtient

$$\begin{aligned}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)\Omega &= \sin 2\alpha(\tfrac{B+C}{2})+\sin 2\beta\tfrac{C+A}{2}+\sin 2\gamma\tfrac{A+B}{2}\\ &= \tfrac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{2}A+\tfrac{\sin 2\gamma+\sin 2\alpha}{2}B+\tfrac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{2}C\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

– pour le point de Fermat $(x_A,x_B,x_C)=(a\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma), b\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma), c\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha))$.

Preuve : Rappelons qu'étant donné un triangle ABC avec $0<\alpha,\beta,\gamma<2\pi/3$, le point de Fermat est l'unique point P qui minimise $PA+PB+PC$ et s'obtient comme l'intersection des droites (AA'), (BB') et (CC') où A',B',C' sont tels que BAC', CBA' et ACB' soient des triangles équilatéraux construits à l'extérieur de ABC (point dit de Toricelli). Notons que l'aire de ABA' est égale à $\frac{ac}{2}\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)$ de sorte que

$$\frac{x_C}{x_B}=\frac{aire(ABP)}{aire(ACP)}=\frac{aire(ABA')}{aire(ACA')}=\frac{c\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)}{b\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)}$$

et par permutation circulaire $\frac{x_A}{x_C}=\frac{a\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)}{b\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)}$ ce qui donne le résultat. □

1.2. Théorèmes de Ceva et applications. — Tout ce qui suit se trouve dans [**?**] essentiellement §1.2.

Théorème 1.1. — *Soit X,Y,Z des points sur les côtés d'un triangle ABC de coordonnées barycentriques dans le repère affine (A,B,C), $X(0,\alpha,1)$, $Y(1,0,\beta)$ et $Z(\gamma,1,0)$. Les droites AX, BY et CZ sont concourrantes si et seulement si $\alpha\beta\gamma=-1$.*

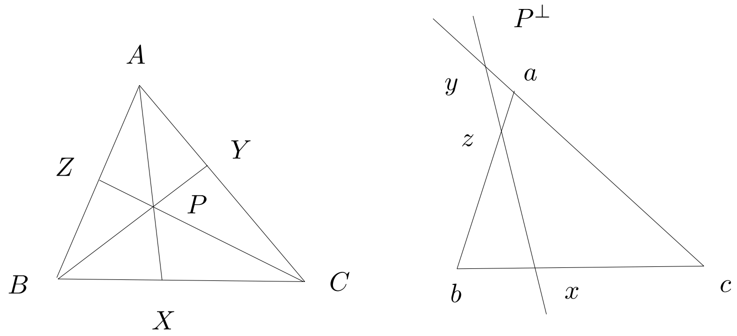

Fig. 1.

Preuve : On a $\alpha=-\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}$, $\beta=-\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$, et $\gamma=-\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$. Avec les notations de la figure 1 et en raisonnant sur les aires, on a

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}=\frac{\mathcal{A}(ABX)}{\mathcal{A}(AXC)}=\frac{\mathcal{A}(PBX)}{\mathcal{A}(PXC)}=\frac{\mathcal{A}(ABX)-\mathcal{A}(PBX)}{\mathcal{A}(AXC)-\mathcal{A}(PXC)}=\frac{\mathcal{A}(ABP)}{\mathcal{A}(CAP)}$$

et de manière similaire

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\mathcal{A}(BCP)}{\mathcal{A}(ABP)} \qquad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\mathcal{A}(CAP)}{\mathcal{A}(BCP)}$$

et donc en multipliant on obtient

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\mathcal{A}(ABP)}{\mathcal{A}(CAP)}\frac{\mathcal{A}(BCP)}{\mathcal{A}(ABP)}\frac{\mathcal{A}(CAP)}{\mathcal{A}(BCP)} = 1.$$

Réciproquement notons P le point de concours des deux premières céviennes et soit Z' l'intersection des droites CP avec AB de sorte que d'après le sens direct, on a

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = 1$$

soit $\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$ et donc Z et Z' coïncident. $\square$

Remarque : en dualisant la figure, on obtient le théorème de Menelaus ; on note $a = (BC)^{\perp}$, $b = (AC)^{\perp}$, $c = (AB)^{\perp}$ de sorte que $x = (AX)^{\perp}$ est le point $P^{\perp} \cap A^{\perp}$ de même pour les points y et z, comme sur la figure 1 :

$$\frac{\overline{xb}}{\overline{xc}}\frac{\overline{yc}}{\overline{ya}}\frac{\overline{za}}{\overline{zb}} = 1.$$

En effet, comme A, B, C ne sont pas colinéaires, on peut supposer $B \notin P^{\perp}$; en considérant l'homothétie de centre x qui envoie b sur c, composée avec celle de centre y qui envoie c sur a, composée par celle de centre z qui envoie a sur b, on obtient une homothétie dont le centre appartient à $P^{\perp}$ et laissant B invariant, c'est donc l'identité de sorte que le produit des rapports est égal à 1, c'est l'énoncé du théorème de Menelaus.

Application : Points de concours classiques dans un triangle :

- les médianes sont concourrantes au centre de gravité du triangle ; par ailleurs les céviennes correspondantes partagent le triangle en 6 petits triangles de même aire.
  Preuve : La concourrance découle directement du théorème de Ceva puisque les rapports sont tous égaux à -1. Avec les notations de la figure 2, comme $\mathcal{A}(CAC') = \mathcal{A}(CC'B)$ on a $2y + x = z + 2x$ et donc $x = y$. L'égalité $\mathcal{A}(ABA') = \mathcal{A}(AA'C)$ donne aussi $y = z$, d'où l'égalité des aires des 6 petits triangles. $\square$
- les hauteurs sont concourrantes en l'orthocentre du triangle.
  Preuve : On a $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\frac{c}{b}$; de même pour les autres rapports de sorte qu'après multiplication on obtient 1 et le résultat découle du théorème de Ceva. $\square$
- les bissectrices sont concourrantes au centre du cercle inscrit.
  Preuve : D'après la loi des sinus, on a $\frac{BX}{\sin(\beta/2)} = \frac{c}{\sin\widehat{BXA}}$ et $\frac{XC}{\sin(\alpha/2)} = \frac{b}{\sin\widehat{CXA}}$ de sorte que $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{c}{b}$ et le résultat découle du théorème de Ceva comme précédemment. $\square$
- *Gergonne* : (cf. [**?**] p.13) notons D, E, F les points de contact du cercle inscrit d'un triangle ABC avec ses côtés, alors les droites AE, BF et CD sont concourrantes, cf. la figure 3.
  Preuve : On a $AD = AF$, $BD = BE$ et $CE = CF$ de sorte que $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = -1$ et le résultat découle du théorème de Ceva. $\square$
- *Lemoine* : notons S_a le point de contact de la symédiane issue de A, i.e. le symétrique de la médiane AM_a par rapport à la bissectrice issue de A, cf. la figure **??**. Le point de concours des symédiane s'appelle le point de Lemoine.

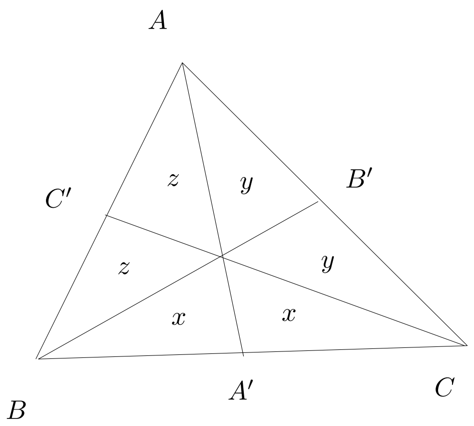

FIG. 2.

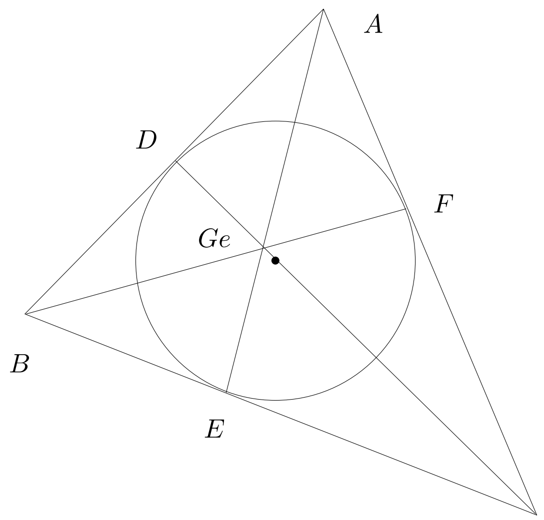

FIG. 3.

Preuve : On considère l'aire des différents triangles :

$$\frac{\mathcal{A}(BAS_a)}{\mathcal{A}(AM_aC)} = \frac{BS_a}{CM_a} = \frac{AB.AS_a}{AM_a.AC}, \quad \frac{\mathcal{A}(CAS_a)}{\mathcal{A}(AM_aB)} = \frac{CS_a}{BM_a} = \frac{AC.AS_a}{AM_a.AB}$$

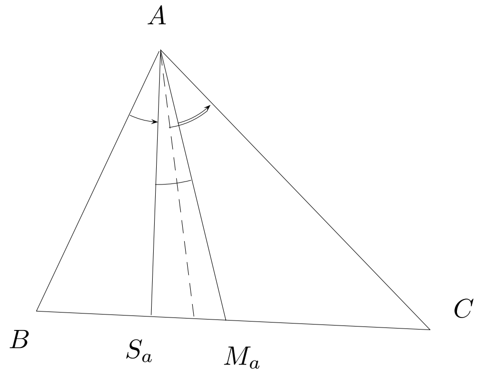

Fig. 4.

de sorte que $\frac{BS_a}{CS_a} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Par symétrie on a les mêmes égalités concernant S_b et S_c de sorte que $\frac{\overline{S_bA}}{\overline{S_bC}} \frac{\overline{S_aC}}{\overline{s_aB}} \frac{\overline{S_cB}}{\overline{S_cA}} = -1$ et le résultat découle du théorème de Ceva. □

– *Nagel* : notons X_a resp. X_b et X_c) le point de contact du cercle exinscrit au triangle ABC au côté BC (resp. AC et AB). Les droites AX_a, BX_b et CX_c sont concourrantes au point de Nagel.

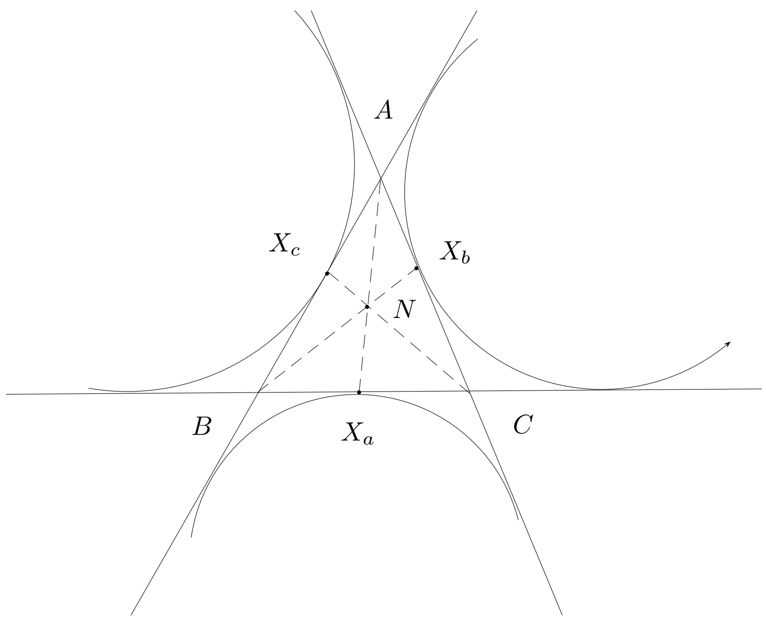

Fig. 5.

Preuve : On a $AB + BX_a = AC + X_a$ de sorte qu'en notant $p = (a+b+c)/2$ le demi-périmètre du triangle ABC, on a $BX_a = p - c$ et $CX_a = p - b$ de sorte que $\frac{\overline{X_aB}}{\overline{X_aC}} = -\frac{p-c}{p-b}$. Par symétrie on en déduit que $\frac{\overline{X_bA}}{\overline{X_bC}} \frac{\overline{X_aC}}{\overline{X_aB}} \frac{\overline{X_cB}}{\overline{X_cA}} = -1$ et le résultat découle du théorème de Ceva. □

1.3. Théorème de Routh. — Commençons par rappeler le résultat suivant.

Lemme 1.2. — *Soit M_1, M_2, M_3 trois plans du plan affine de coordonnées barycentriques respectives dans le repère A, B, C, $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ avec $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$ pour $i = 1, 2, 3$. Le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

est égal au quotient des aires des triangles $M_1M_2M_3$ par celle de ABC.

Preuve : L'aire du triangle $M_1M_2M_3$ est égale à

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

où M_i est de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère quelconque. De l'égalité $\alpha_i\overrightarrow{M_iA} + \beta_i\overrightarrow{M_iB} + \gamma_i\overrightarrow{M_iC} = \overrightarrow{0}$, on obtient $x_i = \alpha_i x_A + \beta_i x_B + \gamma_i x_C$ et $y_i = \alpha_i y_A + \beta_i y_B + \gamma_i y_C$ de sorte que

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème 1.3. — ***Routh*** *Soient A', B', C' des points des côtés BC, AC et AB de coordonnées barycentriques respectives $(0, 1, \lambda)$, $(\mu, 0, 1)$ et $(1, \nu, 0)$. Les droites AA', BB' et CC' déterminent un triangle dont l'aire est égale à $\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(\mu+\mu\nu+1)(\nu+\lambda\nu+1)(\lambda+\lambda\mu+1)}$.*

Preuve : Un point M de coordonnées barycentriques (u, v, w) dans le repère (A, B, C) appartient à la droite (AA') (resp. (BB'), resp. (CC')) si et seulement si $\lambda v = w$ (resp. $\mu w = u$, resp. $\nu u = v$). Ainsi le point d'intersection $(AA') \cap (BB')$ (resp. $(BB') \cap (CC')$, resp. $(CC') \cap (AA')$) a pour coordonnées barycentriques $(\lambda\mu, 1, \lambda)$ (resp. $(\mu, \mu\nu, 1)$, resp. $(1, \nu, \lambda\nu)$). Ainsi l'aire en question est

$$\frac{1}{(\mu + \mu\nu + 1)(\nu + \lambda\nu + 1)(\lambda + \lambda\mu + 1)} \begin{vmatrix} \lambda\mu & \mu & 1 \\ 1 & \mu\nu & \nu \\ \lambda & 1 & \lambda\nu \end{vmatrix}$$

ce qui donne le résultat. □

Remarque : on obtient en particulier une autre preuve du théorème de Ceva, l'aire du triangle est nulle, i.e. les trois points sont confondus, si et seulement si $\lambda\mu\nu = 1$.

1.4. Quelques résultats géométriques sur les convexes. — - *Hyperplans d'appui* : Hahn-Banach (séparation d'un convexe fermé avec un convexe compact),

- *Théorème de la projection* : soit C un convexe compact et x un point n'appartenant pas à C, il existe alors un unique point $p_C(x) \in C$ tel que $d(x, p_C(x)) = \min_{y \in C} d(x, y)$. Celui-ci est caractérisé par $\langle x - p_C(x), h \rangle < 0$ pour tout $h \in C$.

Remarque : la réciproque est vraie, c'est le théorème de Motzkin.

Théorème 1.4. — ***Helly*** *Soient $k > n+1$ convexes tels que toute sous-famille de $n+1$ ait une intersection non vide alors l'intersection de tous est non vide.*

Remarque : on a un énoncé identique pour les familles infinies en rajoutant une hypothèse de compacité.

Application : : soit donc une famille de segment du plan, tous parallèles à (Oy). On suppose que pour trois quelconques d'entre eux, il existe une droite $y = px + q$ qui intersecte chacun d'eux.

Pour chaque segment S , l'ensemble des (p, q) tels que $y = px + q$ rencontre S est un convexe non vide C_S. L'intersection de trois des C_S est non vide par hypothèse. Donc d'après le théorème de Helly, l'intersection de tous les C_S est non vide.

2. Constructions de convexes

2.1. Enveloppes convexes. — exemple d'enveloppe convexe (droite et un point)

Théorème 2.1. — *Caratheodory (enveloppe convexe d'un compact avec nombre fini de $n+1$ points en dimension n),*

Application : l'enveloppe convexe d'un compact est un compact.

Théorème 2.2. — ***Jung*** *: soit K un compact, il existe une unique boule de rayon minimal contenant K. Par ailleurs le rayon en question est $\leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} d(K)$ où $d(K)$ est le diamètre de K, et son centre $x$appartient à l'enveloppe convexe de $K \cap S(x, r)$.*

Théorème 2.3. — ***Krein-Milman*** *Tout convexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

2.2. Symétrisation de Steiner. — Soit C un convexe et D une droite, pour toute droite perpendiculaire à D, on note $[A, B]$ l'intersection avec C et on le ramène symétriquement autour de D. On obtient ainsi un convexe avec D comme axe de symétrie qui est de même volume mais de périmètre moindre.

2.3. Etoilés. — Soit E un espace affine de dimension n, et A un compact de E. On suppose que pour tous x1,...,xn+1 de A, il existe y de A tel que le segment [y,xi] est inclus dans A pour tout i dans 1,...,n+1. Alors A est étoilé en au moins un point.

Ce théorème a les conséquences suivantes : si A est une partie compacte du plan, et si quelque soient 3 points de A, il existe un autre point de A d'où l'on peut voir ces 3 points, alors A est étoilé, c'est-à-dire qu'il existe un point de A d'où l'on voit tous les points de A.

3. Algèbre

3.1. Polynômes. —

Théorème 3.1. — ***Lucas*** *Si P est un polynôme à coefficients complexes, l'ensemble des zéros de P' est contenu dans l'enveloppe convexe des zéros de P.*

Remarque : il y a de nombreuses généralisations.

Laguerre Etant donnés $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, le centre de gravité de $z_1, \cdots, z_n$ relativement à $z_0 \in \mathbb{C}$ est par définition

$$\zeta_{z_0}(z_1, \cdots, z_n) = z_0 + n \frac{1}{\frac{1}{z_1 - z_0} + \cdots + \frac{1}{z_n - z_0}}.$$

On notera aussi $\zeta_\infty(z_1, \cdots, z_n) = \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n)$ le centre de gravité usuel. Considérons alors le polygone « curviligne » $C_{z_0}(z_1, \cdots, z_n)$ suivant : pour tout couple de points (z_i, z_j) avec $1 \leq i < j \leq n$, on note $C_{i,j}$ le cercle passant par les points z_i, z_j, z_0 ; on note $C_{i,j}^{int}$ la partie du plan complexe intérieure à $C_{i,j}$ et $C_{i,j}^{ext}$ la partie extérieure. Si $C_{i,j}^{int}$ (resp. $C_{i,j}^{ext}$) contient tous les points $z_1, \cdots, z_n$, on pose alors $C_{z_0}(i,j) = \overline{C_{i,j}^{int}}$ (resp. $C_{z_0}(i,j) = \overline{C_{i,j}^{ext}}$) ; dans les autres situations on pose $C_{z_0}(i,j) = \mathbb{C}$. On définit alors

$$C_{z_0}(z_1, \cdots, z_n) = \bigcap_{1 \leq i < j \leq n} C_{z_0}(i,j).$$

Proposition 3.2. — *On a $\zeta_{z_0} \in C_{z_0}(z_1, \cdots, z_n)$ et $z_0 \notin C_{z_0}(z_1, \cdots, z_n)$.*

Preuve : Notons $\phi : z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ de sorte que

$$\zeta_{z_0}(z_1, \cdots, z_n) = \phi\Big(\zeta_\infty(\phi(z_1), \cdots, \phi(z_n))\Big).$$

Or $\zeta_\infty(\phi(z_1), \cdots, \phi(z_n))$ appartient à l'enveloppe convexe C de $\{\phi(z_1), \cdots, \phi(z_n)\}$ que l'on construit à la manière ci-dessus : pour tout $1 \leq i < j \leq n$, la droite $z_i z_j$ (ou encore le cercle passant par z_i, z_j, ∞) partage le plan en deux demi-plans de sorte que C est l'intersection de ces demi-plans qui contiennent tous les $\phi(z_1), \cdots, \phi(z_n)$. Le résultat découle alors de l'application de ϕ sachant que l'image par ϕ du cercle-droite passant par $\phi(z_i), \phi(z_j), \infty$ est le cercle-droite passant $z_i, z_j, z_0 = \phi(\infty)$. □

Corollaire 3.3. — *Si l'intérieur (resp. l'extérieur) d'un cercle C de $\mathbb{C}$ contient les points $z_1, \cdots, z_n$ sans contenir z_0 alors il contient $\zeta_{z_0}(z_1, \cdots, z_n)$.*

Preuve : On applique ϕ à la situation : comme $z_0 \notin C$ alors l'image de C est un cercle et comme $\infty = \phi(z_0)$ est à l'extérieur de $\phi(C)$, tous les $\phi(z_i)$ sont dans l'intérieur de $\phi(C)$ qui en tant que convexe contient l'enveloppe convexe des $\phi(z_i)$ et donc aussi leur isobarycentre qui est égal à $\phi(\zeta_{z_0}(z_1, \cdots, z_n))$. Le résultat découle de l'application de ϕ. □

Remarque : posons $f(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$; l'égalité $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}$ fournit $\zeta_z(z_1, \cdots, z_n) = z - n \frac{f(z)}{f'(z)}$.

Théorème 3.4. — ***(Laguerre)*** *Soient $f(z) \in \mathbb{C}[x]$ de degré n et z_0 une racine simple ; le centre de gravité des autres racines de $f(z)$ relativement à z_0 est*

$$X(z_0) := z_0 - 2(n-1) \frac{f'(z_0)}{f''(z_0)}.$$

Preuve : Soit $f(z) = (z - z_0)F(z)$; on a $f'(z) = F(z) + (z - z_0)F'(z)$ et $f"(z) = 2F'(z) + (z - z_0)F"(z)$ de sorte que $f'(z_0) = F(z_0)$ et $f"(z_0) = 2F(z_0)$. Le résultat découle alors de la remarque précédente appliquée au polynôme $F(z)$ de degré $n - 1$. □

Remarque : si C est un cercle-droite passant par une racine simple de $f(z)$ tel que son intérieur (resp. son extérieur) contient toutes les autres racines, alors il contient aussi $X(z_0)$. De même si z_0 est la racine simple de module maximal alors $|X(z_0)| \leq |z_0|$.

3.2. Géométrie des nombres. — Minkowski et applications à la théorie des nombres

la jauge d'un convexe (si symétrique compact d'intérieur non vide, alors on obtient une norme)

4. Algèbre linéaire

4.1. Groupe orthogonal. —

- compact maximaux de $GL_n(\mathbb{R})$: avec l'ellipsoide de volume maximal...),
- l'enveloppe convexe de $O(n)$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité : $O(n)$ est l'ensemble des points extrémaux (idem avec $U(n)$)
- l'ensemble des matrices symétriques définies positives est convexe
- théorème de Horn : les vecteurs constitués des diagonales des matrices hermitiennes d'une même orbite sous l'action de $U(n)$ décrivent exactement l'enveloppe convexe des vecteurs de coordonnées $(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)})$ où $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres attachées à l'orbite et σ décrit les permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$.

4.2. Matrices de permutation. — Les points extrémaux de l'ensemble des matrices bi-stochastiques sont les matrices de permutation. (généralisation aux matrices sous-stochastiques : toute matrice sous-bistochastique est un barycentre fini à coefficients positifs de matrices de permutations partielles i.e. des matrices de permutations où certain 1 peuvent être mis à 0.

4.3. Hausdorffien. — Vous trouverez tout ce qui peut vous convenir, et sûrement plus, dans [**?**]. Le hausdorffien d'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est

$$\mathcal{V}(A) = \{x^*Ax : \ x \in \mathbb{C}^n \ / \ x^*x = 1\}$$

théorème de Toeplitz-Hausdorff : $\mathcal{V}(A)$ est un convexe de $\mathbb{C}$

Si A est normal alors $\mathcal{V}(A) = \mathrm{Conv}(\sigma(A))$:

Localisation à la Gersgorin : rappelons que d'après **??** on a

$$\sigma(A) \subset G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z : \ |z - a_{i,i}| \leq R'_i(A)\} \qquad \sigma(A) \subset G({}^tA) = \bigcup_{j=1}^{n} \{z : \ |z - a_{j,j}| \leq C'_j(A)\}$$

Notons alors $g_i(A) = \frac{R'_i(A)+C'_i(A)}{2}$ et

$$G_{\mathcal{V}}(A) = \mathrm{Conv}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \{z : \ |z - a_{i,i}| \leq g_i(A)\}\Big)$$

Théorème 4.1. — *Pour tout $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathcal{V}(A) \subset G_{\mathcal{V}}(A)$.*

Remarque : les points angulaires donnent des valeurs propres.

4.4. Minimisation. — Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang r et $b \in \mathbb{R}^m$. Alors le vecteur x de norme minimale parmi ceux qui minimise la norme de $Ax - b$ est un barycentre :

$$x = \sum_{(I,J)\in\mathcal{N}(A)} \lambda_{IJ}\widehat{A_{IJ}^{-1}b_I} \qquad \lambda_{IJ} = \frac{\det^2 A_{IJ}}{\sum_{(K,L)\in\mathcal{N}(A)} \det^2 A_{KL}}$$

où $\mathcal{N}(A)$ est l'ensemble des couples $(I,J) \in \mathcal{F}(r,m) \times \mathcal{F}(r,n)$ tels que A_{IJ} est inversible et où $\widehat{X}$ désigne la matrice X bordée par le bon nombre de zéros aux bons endroits.

4.5. Polyèdres convexes. — - formule d'Euler,
- rigidité,
- dire que l'intérieur du polyèdre est l'intersection des demi-espaces déterminés par ses hyperplans d'appui équivaut à dire que cet intérieur est l'ensemble des solutions de $AX \geq Y$, où A est une matrice de $\mathbb{M}_{m,n}$ et $X, Y \in \mathbb{M}_{m,1}$. Réciproquement

Théorème 4.2. — ***Fourier-Kuhn*** *L'ensemble des solutions de $AX \geq Y$ est un polyèdre, celui-ci est non vide si et seulement si*

$${}^tZA = 0 \Rightarrow {}^tZY \leq 0.$$

5. Développements

- théorème de Krein-Milman [**?**] p.290, points extremaux des matrices bistochastiques
- théorème de Carathéodory+ satisfaisabilité des systèmes linéaires homogènes diophantiens
- partition du plan en deux convexe [**?**] [**1**] sous-groupes compacts maximaux de $GL_n(\mathbb{R})$ [**?**]
- enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ [**2**]
- thm de Jung comme application du thm de Carathéodory [**?**]

6. Questions

7. Solutions

Références

[1] A. Warusfel. *Structures algébriques finies.* Hachette, 1971.

[2] C. Zuily and H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.