ANGLES : DÉFINITIONS ET UTILISATION EN GÉOMÉTRIE

par

Boyer Pascal

Table des matières

1. Définitions et propriétés ... 3
1.1. Définitions et lignes de niveau ... 3
1.2. Géométrie du triangle ... 3
1.2.1. Triangles semblables ... 3
1.2.2. La loi des sinus ... 4
1.2.3. Coordonnées barycentriques ... 6
1.3. Constructions ... 7
1.3.1. Bissectrices ... 7
1.3.2. Trissectrices ... 9
1.3.3. Géométrie conforme ... 13
1.4. Pavages euclidiens ... 15
1.4.1. Groupes cristallographiques ... 15
1.4.2. Triangles paveurs ... 17
1.4.3. Pavages impossibles ... 17
2. D'autres angles en dimension 2 ... 19
2.1. Géométrie sphérique ... 19
2.1.1. Triangles sphériques ... 19
2.1.2. Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique ... 20
2.1.3. Inégalités triangulaires ... 20
2.1.4. Loi des sinus ... 21
2.1.5. Triangles isométriques ... 21
2.1.6. Aires des triangles sphériques ... 22
2.1.7. Triangles paveurs ... 22
2.2. Angles lorentziens ... 22
3. Angles en dimension 3 ... 23
3.1. Définitions ... 23
3.2. Polyèdres ... 24
3.2.1. Angle polyèdre régulier ... 24
3.2.2. Théorème de Cauchy ... 26
3.3. Invariants de Dehn ... 28

3.4. Quelques propriétés sur $SO(3,\mathbb{R})$ 31
4. Angles en dimension supérieure 31
4.1. Angles d'une famille de points 31
4.1.1. Familles obtusangles 31
4.1.2. Tout grand ensemble de points détermine un angle obtus 32
4.2. Systèmes de racines 33
4.2.1. Définition 33
4.2.2. Classification dans $\mathbb{R}^2$ 34
4.2.3. Le diagramme de Dynkin 36
5. Angles et distances 38
5.1. Cas de la sphère 39
5.2. Géométrie hyperbolique 39
5.2.1. Distance hyperbolique 39
5.2.2. Le modèle conforme $\mathcal{C}$ 41
5.2.3. Le modèle $\mathcal{H}$ du demi-espace de Poincaré 42
5.2.4. Quelques propriétés des triangles hyperboliques 42
5.3. Métriques de Hilbert 43
6. Développements 44
7. Questions 46
8. Exercices 47
9. Solutions 50
Références 55

Les thèmes sur le sujet sont très nombreux, il n'est bien évidemment pas question de tout raconter, cela n'a pas de sens (on ne sait pas tout...) et puis ce n'est pas du tout l'esprit de l'agrégation. Selon vos connaissances et vos goûts il s'agit de faire des choix de façon à faire un exposé équilibré sachant qu'il faut :

– proposer une définition claire de ce qu'est un angle et de sa mesure ; le faire précisément, par exemple pour les angles orientés de vecteurs, puis mentionner rapidement les autres angles (de droite, avec ou sans orientation) ;
– ne pas rester exclusivement dans le plan : il faut en particulier être capable d'utiliser les différentes notions d'angles du point précédent, pour les illustrer en dimension 3.

Une première partie de l'exposé, après la définition des angles et de leur mesure, doit sûrement être consacrée à vos problèmes de constructions favoris en géométrie plane : il sera difficile d'éviter le thème des bissectrices et le théorème de l'angle au centre. Il faut sûrement étudier les triangles et connaître notamment les différentes caractérisations des triangles semblables.

En dimension 3, outre les angles de vecteurs, de plan (bien dégager les problèmes de non orientation), il parait raisonnable de parler d'angle polyèdre (en particulier dièdre et trièdre) et de faire le lien avec les polyèdres réguliers. Il faut absolument savoir calculer les angles dièdres d'un tétraèdre régulier, tout comme l'angle solide d'un cone de révolution. Un thème agréable et simple consiste à faire de la géométrie sphérique : montrer par exemple la relation fondamentale d'un triangle sphérique. Si vous choisissez ce dernier thème il faut absolument connaître le lien avec les polyèdres.

Parmi les thèmes plus originaux (que l'on voit parfois), vous pouvez traiter les invariants de Dehn, ou les systèmes de racines en dimension 2.

1. Définitions et propriétés

Dans cette partie $\mathcal{E}$ désigne le plan affine euclidien ; son espace vectoriel associé est E isomorphe à $\mathbb{R}^2$ orienté et muni de son produit scalaire canonique de sorte que la base canonique est orthonormale directe.

1.1. Définitions et lignes de niveau. —

- *un angle orienté* (resp. *non orienté*) de *deux vecteurs* non nuls u, v de E, noté $\widehat{(u,v)}$ (resp. $(u,v))$ est l'orbite de $(\mathbb{R}_+u, \mathbb{R}_+v)$ sous l'action de $SO(2,\mathbb{R})$ (resp. $O_2(\mathbb{R})$) ; *la mesure* de $\widehat{(u,v)}$ est l'unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $r(\theta) \in SO(2,\mathbb{R})$ envoie $\mathbb{R}_+u$ sur $\mathbb{R}_+v$. Ainsi l'ensemble des angles orientés de vecteurs est muni d'une loi de groupe provenant de celle de $SO(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ce qui permet d'additionner les angles. La mesure de $\widehat{(u,v)}$ est le réel $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos\theta = \frac{<u,v>}{||u||.||v||}$;
- *un angle orienté* (resp. *non orienté*) de *deux droites* D_1, D_2 de E, noté $(\widehat{D_1, D_2})$ (resp. $(D_1, D_2))$ est l'orbite du couple (D_1, D_2) sous l'action de $PSO(2,\mathbb{R})$ (resp. $PO(2,\mathbb{R})$). *La mesure* de $(\widehat{D_1, D_2})$ est l'unique $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ tel que $r(\theta) \in PSO(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ envoie D_1 sur D_2.

Remarque : une autre façon de définir les mesures des angles et de considérer les vecteurs unitaires puis d'étendre la définition par proportionnalité avec un réel strictement positif.
Remarque : si s_{D_1} et s_{D_2} sont deux réflexions d'axes respectifs D_1, D_2 alors $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est la rotation d'angle $2(\widehat{D_1, D_2})$: on notera que le double de l'angle entre deux vecteurs directeurs de D_1 et D_2 ne dépend pas du choix de ceux-ci.
Théorème de l'angle au centre : si M, A, B sont trois points distincts d'un cercle de centre O et $T \neq A$ un point de la tangente en A alors

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}) \mod 2\pi.$$

On en déduit alors le critère de cocyclicité de 4 points distincts deux à deux : A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}}) \mod \pi$, soit encore si et seulement si le birapport $[a,b,c,d]$ de leur affixe respective, est réel.

Remarque : tracer les lignes de niveau $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = cte$, idem avec les angles non orientés, les angles orientés ou pas de droites.
Application : angles eccentriques sur une conique (savoir les tracer) et critère de cocyclicité de 4 points sur une ellipse, cf. l'exercice 8.4.
Le théorème « Pékin 2000 » : *tout système de n droites en position générale avec n pair (resp. impair) détermine un point central (resp. un cercle central)* qui est l'intersection des cercles centraux des n systèmes possibles de $n-1$ de ces droites (resp. qui passe par les points centraux des n systèmes possibles de ces droites) ; cf. l'exercice 8.7.

1.2. Géométrie du triangle. —

1.2.1. Triangles semblables. — Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des triangles non dégénérés alors $\mathcal{T}/\sim(E)$ est en bijection avec l'ensemble des couples (θ_1, θ_2) d'éléments de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ tels que $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ (autrement dit la somme des angles d'un triangle est égale à π). (aussi en bijection avec $(a,b,c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})/\mathfrak{S}_3$, ou encore $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})/\mathfrak{S}_2$) ;

Application : le théorème de Pythagore $\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}=1$ (il s'agit d'un énoncé de géométrie semblable) : on note AH la hauteur menée de A sur BC, les triangles ABC et AHB sont semblables de sorte que $\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}$. De même on a $CH^2=CH.CB$ et donc $AB^2+AC^2=(BH+HC)BC=BC^2$;

Triangles podaires (cf. l'exercice 8.3) : soit ABC un triangle et P un point intérieur au triangle. On considère A_1,B_1,C_1 les pieds des perpendiculaires menées de P aux cotés du triangle. Le triangle $A_1B_1C_1$ est dit triangle podaire de ABC pour P. Soit alors $A_2B_2C_2$ le triangle podaire de $A_1B_1C_1$ pour P et $A_3B_3C_3$ le triangle podaire de $A_2B_2C_2$ pour P. Alors ABC et $A_3B_3C_3$ sont semblables et le rapport de similitude est égal au rapport du produit des distances de P aux trois côtés sur le produit des distances aux trois sommets.

1.2.2. La loi des sinus. — : étant donné un triangle ABC de côtés de longueur a,b,c et d'angles α,β,γ, on note S son aire et R le rayon du cercle circonscrit. On a alor

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{abc}{2S}=2R.$$

Preuve : On a clairement $S=\frac{bc\sin\alpha}{2}$ ce qui donne les trois premières égalités. Pour la dernière, on considère dans le cercle circonscrit le point A' diamétralement opposé à A. Le triangle $AA'C$ étant rectangle en C, on en déduit alors $b=2R\sin\beta$, en utilisant le théorème de l'angle au centre (en effet $\sin\beta=\sin\widehat{AA'C}$). $\square$

Théorème de Morley : *les trois points d'intersection des trissectrices adjacentes d'un triangle non plat forment un triangle équilatéral, cf. l'exercice 8.2.*

Remarque : Morley a montré ce résultat en 1899 en étudiant les centres des cardioïdes tangentes aux trois côtés d'un triangle, cf. [**2**] p.319. Depuis il y a eu d'innombrables preuves et même un livre entier sur le sujet ! Nous allons ici présenté deux preuves, une utilisant la loi des sinus, cf. [**2**] p.332 et une autre géométrique cf. [**2**] p.372. Signalons par ailleurs qu'en considérant les trissectrices des angles de droites les 108 points d'intersections se répartissent en 36 triangles équilatéraux sans points en commun. Morley avait montré qu'il y avait 27 points se répartissant 6 par 6 sur 9 droites 3 à 3 parallèles ; ces points étaient alors les sommets de 27 triangles équilatéraux.

Cas particulier du grand théorème de Poncelet : *soient deux cercles $C(I;r)$ et $C(O;R)$ tels que $D(I;r)\subset D(O;R)$; pour un point $M\in C(O,R)$, on trace une tangente à $C(I;R)$ passant par M qui recoupe alors $C(O;R)$ en un point nommé M_1. On recommence alors le processus pour M_1 et on construit ainsi une suite M_n de points de $\mathcal{C}(0;R)$. Cette suite est alors périodique de période* 3 *si et seulement si $OI^2=R^2-2rR$.*

Remarque : en particulier on remarque que cette condition est indépendante du point M de départ comme l'affirme plus généralement le grand théorème de Poncelet.

Preuve : Cela revient en fait à montrer que $C(O;R)$ (resp. $C(I;r)$) est le cercle circonscrit (resp. inscrit) d'un triangle ABC si et seulement si $OI^2=R^2-2rR$. Montrons tout d'abord le sens direct qui correspond à *la relation d'Euler*, cf. la figure 1. On note P_1 l'intersection de la droite (IA) avec $C(O;R)$, Q_1 le symétrique de P_1 par rapport à O et I_a le centre du cercle exinscrit par rapport au segment $[BC]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $(\widehat{BP_1,BC})=(\widehat{AP_1,AC})=(\widehat{AB,AP_1})=(\widehat{CB,CP_1})$ de sorte que BP_1C est isocèle de sommet P_1 qui appartient donc à la médiatrice de $[BC]$. Les triangles I_aBI et I_aCI étant rectangles d'hypothénuse I_aI, on en déduit que I_aIBC sont cocycliques le centre du cercle étant un point

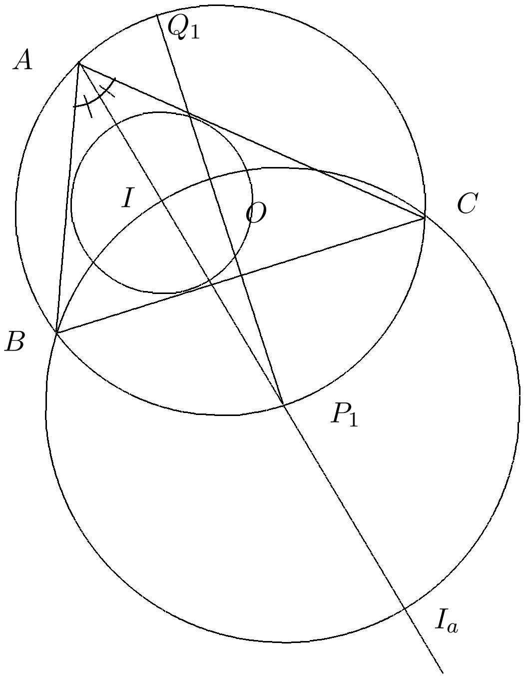


Fig. 1. Relation d'Euler

appartenant à (II_a) et à la médiatrice de $[BC]$, c'est donc P_1. En particulier on a $P_1B = P_1I$. Calculons alors $\sigma = \overrightarrow{IP_1}.\overrightarrow{IA}$ de deux façons différentes :

– on a $\sigma = -IP_1.IA = -P_1B.IA$ avec dans le triangle rectangle P_1Q_1B (resp. AIC_1 où C_1 est le point de contact de $C(I;r)$ avec (AB)) $P_1B = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$ (resp. $AI = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$) et donc $\sigma = -2Rr$;
– $\sigma = \overrightarrow{IP_1}.(\overrightarrow{IQ_1} + \overrightarrow{Q_1A}) = \overrightarrow{IP_1}.\overrightarrow{IQ_1} = IO^2 - R^2$.

De ces deux calculs on en déduit bien la relation d'Euler : $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Réciproquement étant donnés $C(O;R)$ et $C(I;r)$ tels que $OI^2 = R^2 - 2Rr$, pour un point A quelconque de $C(O;R)$, on construit les tangentes issues de A à $C(I;r)$ qui recoupent $C(O;R)$ en B, C. On note P_1 l'intersection de (AI) avec $C(O;R)$ de sorte que, d'après ce qui précède, le centre I' du cercle inscrit à ABC est l'intersection du cercle de centre P_1 et de rayon P_1B. Celui-ci est tel que $(OI')^2 = R^2 - 2r'R$ où r' est le rayon du cercle inscrit ce qui impose $I = I'$ et donc $r = r'$. En effet, notons O' le projeté orthogonal de O sur (AI) et pour M un point variable sur $(O'A)$ orienté de de O' vers A, notons $x = \overline{O'M}$ et considérons l'équation $OM^2 = R^2 - 2Rr$ qui s'écrit $(OO')^2 + x^2 = R^2 - 2R(AO' - x)\sin(\alpha/2)$, équation de degré 2 dont une solution évidente est $M = A$ soit $x = O'A$ et donc pour unique autre solution I. $\square$

Quelques relations trigonométriques dans le triangle : on pose $p = (a+b+c)/2$:

– $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$: $a^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2$;
– $\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$: on a $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{-b^4-c^4-a^4+2b^2c^2+2b^2a^2+2c^2a^2}{4b^2c^2}$ et on vérifie en développant que $16p(p-a)(p-b)(p-c) = -b^4 - c^4 - a^4 + 2b^2c^2 + 2b^2a^2 + 2c^2a^2$;

– $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$: on a $\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2 = (2bc - b^2 - c^2 + a^2)/2$ et on vérifie que $4(p-b)(p-c) = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$;
– $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$: on a $\cos^2(\alpha/2) = 1 - \sin^2(\alpha/2) = p(p-a)/bc$.

1.2.3. Coordonnées barycentriques. — On signale ici quelques exemples de coordonnées barycentriques de points remarquables d'un triangle ABC qui font intervenir les angles α, β, γ. On note x_A, x_B, x_C les coordonnées barycentriques cherchées :

– pour le centre O du cercle circonscrit, $(x_A, x_B, x_C) = (\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$, ou encore $(x_A, x_B, x_C) = (a\cos\alpha, b\cos\beta, c\cos\gamma)$;

Preuve : On prend le déterminant de $x_A\overrightarrow{OA} + x_B\overrightarrow{OB} + x_C\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{OA}$ ce qui donne $x_B R^2 \sin 2\beta - x_C R^2 \sin 2\gamma = 0$ et donc $\frac{x_B}{x_C} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma}$ et par permutation circulaire $\frac{x_C}{x_A} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}$;
Remarque : il est aussi possible d'invoquer le résultat général suivant : les coordonnées barycentriques d'un point M du plan par rapport à ABC sont données par les aires signées des triangles MBC, MAC et MAB. $\square$

– pour l'orthocentre H, $(x_A, x_B, x_C) = (a\cos\beta\cos\gamma, b\cos\alpha\cos\gamma, c\cos\alpha\cos\beta)$;

Preuve : Par projection orthogonale sur la droite BC on obtient $x_B\overline{A_1B} + x_C\overline{A_1C} = 0$ et donc $x_B c\cos\beta = x_C b\cos\gamma$ et par permutation circulaire $x_C a\cos\gamma = x_A c\cos\alpha$ ce qui donne le résultat ; $\square$

– pour le centre du cercle d'Euler $(x_A, x_B, x_C) = (\sin 2\beta + \sin 2\gamma, \sin 2\alpha + \sin 2\gamma, \sin 2\alpha + \sin 2\beta)$:

Preuve : Rappelons que l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$ transforme les hauteurs de ABC en celles de $A'B'C'$ qui sont les médiatrices de ABC de sorte que $\overrightarrow{GO} = -1/2.\overrightarrow{GH}$; par ailleurs le centre Ω du cercle circonscrit de $A'B'C'$ est tel que $\overrightarrow{G\Omega} = -1/2.\overrightarrow{GO}$. La droite joignant O, G, H, Ω s'appelle la droite d'Euler. Notons A_1, B_1, C_1 les pieds des hauteurs et soient U, V, W les milieux de $[A, H]$, $[B, H]$ et $[C, H]$. Comme Ω est le milieu de $[O, H]$, il appartient à la médiatrice de $[A', A_1]$ de sorte que A_1, B_1, C_1 appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à A', B', C' ; en outre l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$ envoie le cercle circonscrit à ABC sur celui de $A'B'C'$ et donc U, V, W appartiennent à $\mathcal{C}$ qui s'appelle le cercle d'Euler.

D'après ce qui précède, on a $(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)O = \sin 2\alpha A + \sin 2\beta B + \sin 2\gamma C$ de sorte que par application de l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$, on obtient

$$\begin{aligned}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)\Omega &= \sin 2\alpha(\tfrac{B+C}{2}) + \sin 2\beta\tfrac{C+A}{2} + \sin 2\gamma\tfrac{A+B}{2} \\ &= \tfrac{\sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2}A + \tfrac{\sin 2\gamma + \sin 2\alpha}{2}B + \tfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2}C\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. $\square$

– pour le point de Fermat $(x_A, x_B, x_C) = (a\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma), b\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma), c\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha))$.

Preuve : Rappelons qu'étant donné un triangle ABC avec $0 < \alpha, \beta, \gamma < 2\pi/3$, le point de Fermat est l'unique point P qui minimise $PA + PB + PC$ et s'obtient comme l'intersection des droites (AA'), (BB') et (CC') où A', B', C' sont tels que BAC', CBA' et ACB' soient des triangles équilatéraux construits à l'extérieur de ABC (point dit de Toricelli). Notons que l'aire de ABA' est égale à $\frac{ac}{2}\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)$ de sorte que

$$\frac{x_C}{x_B} = \frac{aire(ABP)}{aire(ACP)} = \frac{aire(ABA')}{aire(ACA')} = \frac{c\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)}{b\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)}$$

et par permutation circulaire $\frac{x_A}{x_C} = \frac{a\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)}{b\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)}$ ce qui donne le résultat. □

1.3. Constructions. —

1.3.1. Bissectrices. — de deux droites affines D_1, D_2 s'intersectant en un point A. Il s'agit de deux droites D, D' telles que $(\widehat{D_1, D}) = (\widehat{D, D_2})$ caractérisée aussi comme l'ensemble des points du plan à égale distance de D_1 et D_2 ce qui permet de les construire simplement à l'aide d'un compas.
Remarque : étant données 4 droites concourantes qui sont en division harmonique dans $\mathbb{P}(E^*)$, i.e. $[D, D', S, S'] = -1$ alors $S \perp S'$ est équivalent à dire que S et S' sont les bissectrices de $(\widehat{D, D'})$.

Théorème de Lehmus-Steiner : *un triangle est isocèle si et seulement s'il possède deux bissectrices de même longueur*

Preuve : Evidemment si le triangle est isocèle, il possède deux bissectrices de même longueur. Réciproquement soit ABC un triangle tel que $\hat{B} > \hat{C}$, montrons que la bissectrice BB' est plus courte que la bissectrice CC'. Soit M le point d'intersection de CC' et du cercle circonscrit à BCB' : on a $\widehat{MBB'} = \widehat{MCB'}$ parce qu'ils interceptent le même arc. Donc $\widehat{MBC} = \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$ est plus grand que $\widehat{BCB'} = \frac{\hat{C}+\hat{C}'}{2}$. L'arc MC intercepté par $\widehat{MBC}$ est donc supérieur à l'arc BB' intercepté par $\widehat{BCB'}$, puisqu'ils sont tous les deux intérieurs à un droit. Mais M est intérieur au segment CC' car $\widehat{MBB'} < \widehat{ABB'}$. Par suite $CC' > CM > BB'$: contradiction. □

Caractérisation du centre du cercle inscrit : *un point I de la bissectrice intérieure en A d'un triangle ABC est le centre du cercle inscrit si et seulement si $\widehat{BIC} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.*

Preuve : Dans le sens direct : on a $\widehat{BIC} + \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \pi$ et $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \pi$ d'où le résultat. Réciproquement les lignes de niveau $\widehat{BMC} = cte$ étant des arcs de cercle passant par B et C, on remarque que l'angle d'un point de la bissectrice issue de A et allant de A à $A' \in (BC)$ est strictement décroissant de sorte qu'il n'y a qu'un seul point de cette bissectrice vérifiant $\widehat{BMC} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, d'où le résultat. □

Bissectrices et coniques :

- soit C une conique propre de foyer F et de directrice D. Soient $M, N \in C$ et $P = (MN) \cap D$, alors (PF) est la bissectrice de (FM, FN) :
  Preuve : Avec les notations de la figure 2, on applique la loi des sinus dans les triangles FMP et FNP de sorte que
  $$\frac{\sin\alpha}{PM} = \frac{\sin\widehat{FPM}}{FM}, \quad \frac{\sin(\pi-\alpha')}{PN} = \frac{\sin\widehat{FPM}}{FN}$$
  avec d'après le théorème de Thalès, $\frac{PM}{PN} = \frac{HM}{H'N} = \frac{FM}{FN}$ et donc $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha')$ soit $\alpha = \alpha'$. □
  Remarque : on peut ainsi construire la directrice connaissant le foyer et 3 points.
- En passant à la limite quand N tend vers M, le tiret précédent montre qu'étant donnée une conique propre C qui n'est pas un cercle, F un foyer et D la directrice correspondante, si $M \in C$ et P est le point d'intersection de la perpendiculaire à (MF) en F à D, alors PM est tangente à C en M.
  Remarque : on peut ainsi tracer des tangentes connaissant le foyer et la directrice.

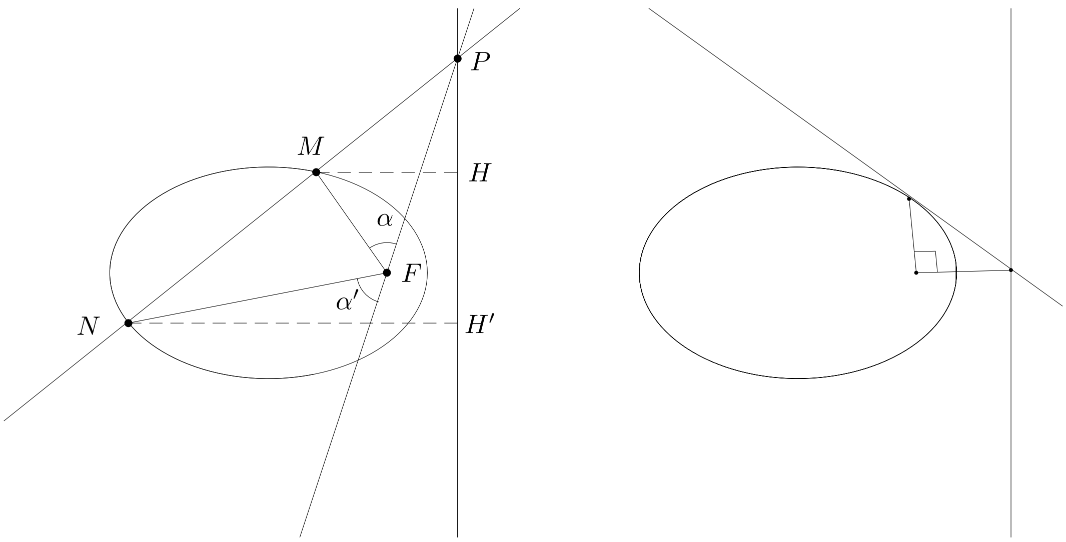


FIG. 2.

– soit C une conique propre à centre de foyers F et F'. La tangente à C en M est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle en M de triangle MFF' si C est une hyperbole (resp. une ellipse) ;

Preuve : Dans le cas d'une ellipse avec les notations de la figure 3 : $\frac{MH}{MP} = \frac{MH'}{MP'}$ et comme $\frac{MH}{MF} = \frac{MH'}{MF'}$, on obtient $\cos\alpha = \frac{MF}{MP} = \frac{MF'}{MP'} = \cos\alpha'$. $\square$

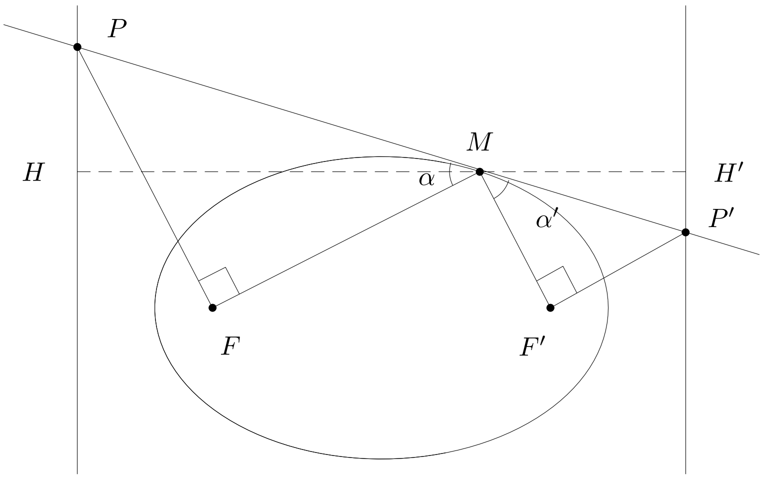


FIG. 3.

Remarque : en particulier, pour une antenne parabolique les rayons venant selon la direction de la directrice après réflexion sur la surface passent tous par le foyer ; le signal sera donc particulièrement puissant en ce point.

Remarque : l'ellipse correspond à l'ensemble des zéros d'une forme quadratique non dégénérée, définie positive ; celle-ci définit une identification de l'espace E avec son dual E^*, autrement dit elle associe à tout point p (resp. droite D) de E une droite $p^\perp$ (resp. un point $D^\perp$) telle que $(p^\perp)^\perp = p$ (resp. $(D^\perp)^\perp = D$). On note alors que si f est un foyer alors $f^\perp$ est une directrice : en effet si D est une droite passant par f et recoupant l'ellipse en deux points m, n, d'après ce qui précède l'intersection des tangentes en m et n appartient à la directrice et est égale à $(mn)^\perp$. Autrement dit tout droite D passant par f est telle que $D^\perp$ appartient à la directrice, d'où le résultat.

Pour une droite D passant par f, la droite $D' := fD^\perp$ s'appelle la conjuguée de D ; on vient alors de voir que $\widehat{(D, D')} = \pi/2$. Cette propriété caractérise en fait les foyers. Concrètement notons I, J les droites isotropes complexes associées à une forme quadratique correspondant à l'ellipse ; un foyer est alors défini comme un point réel f tel que les droites fI et fJ soient tangentes à l'ellipse complexifiée $\bar{C}$. Une directrice est alors $f^\perp$ et on peut vérifier que l'on retrouve bien la définition usuelle, cf. [**3**] §17.4.4.

– si C est une ellipse de foyers F, F' ; pour un point M extérieur à C soient $T, T' \in C$ les points de contact des deux tangentes à C passant par M alors $(\widehat{MT, MF}) = (\widehat{MF', MT'}) \mod \pi$.

Preuve : Avec les notations de la figure 4 et d'après le premier tiret, il suffit de vérifier que $\widehat{MFP} = \pi/2$, ce qui d'après le tiret précédent revient à montrer que les points F, M, N sont alignés. En utilisant la dualité induite par l'ellipse, cela découle directement du fait que $M^\perp \cap N^\perp = P$ appartient à la directrice $F^\perp$. □

Application : ellipse de Steiner : si w_1, w_2 sont les racines de P' où $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré 3, alors il existe une ellipse C de foyers w_1, w_2 telle que les côtés du triangle M_1, M_2, M_3 (les points dont les affixes sont les racines de P) soient tangents à C en leur milieu : cf. l'exercice 8.8.

Polygones de lumière : cf. [**2**] §9.4. Rappelons que le chemin le plus court de A à B en passant par un point M à déterminer sur une droite D est tel D est la bissectrice extérieure de $\widehat{AMB}$. Soit P un polygone convexe à n côtés de sommets $A_1, \cdots, A_n$ et soient $\alpha_i \in [A_i, A_{i+1}]$:

– il existe toujours des polygones inscrits de périmètre minimal, ce sont des polygones de lumières si $\alpha_i \in]A_i, A_{i+1}[$;
– tout polygone de lumière dans P est de périmètre minimal. S'il en existe un alors
  – si n est impair, il est unique ;
  – si n est pair, il en existe une infinité
– pour $n = 2p$, une condition nécessaire d'existence est $\sum_{i=1}^p \widehat{D_{2i-1}D_{2i}} = 0 \mod \pi$ où $D_i = (A_i A_{i+1})$;
– une condition suffisante d'existence est : il existe une droite D telle que $f(D) = D$ et
$$D \cap g_i(]A_{i+1}A_{i+2}[) \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \cdots, n$$
  où $f = \sigma_{D_n} \circ \cdots \sigma_{D_1}$ et $g_1 = \sigma_{D_1}$ et $g_{i+1} = \sigma_{g_i}(D_{i+1}) \circ g_i$.
– pour $n = 3$, un triangle possède un polygone de lumière si et seulement s'il est acutangle.

1.3.2. Trissectrices. — Les angles constructibles à la règle et au compas : ce sont ceux de la forme $2^\alpha p_1 \cdots p_k$ où les p_i sont des nombres premiers de Fermat. En particulier qu'en général

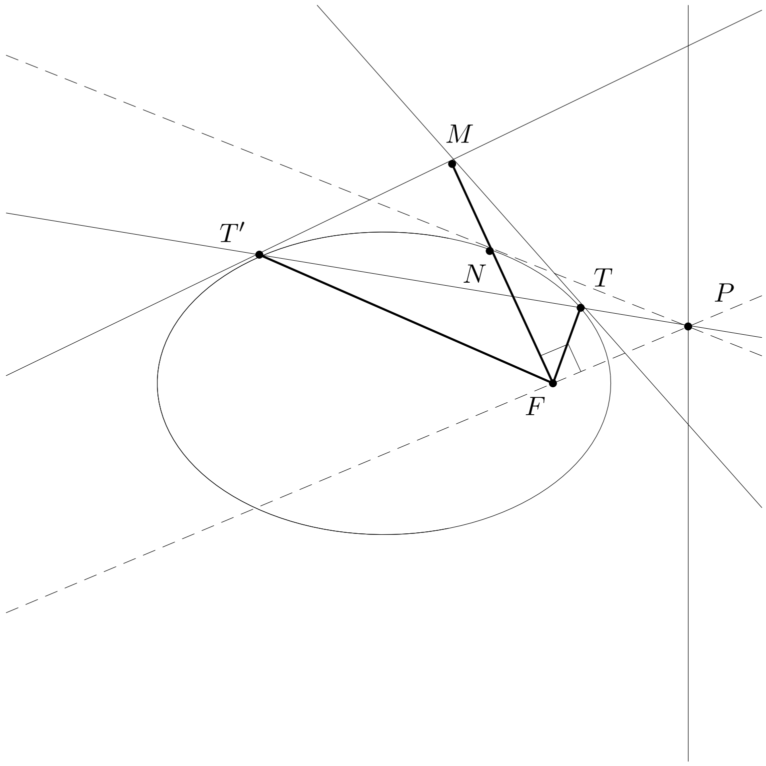


FIG. 4.

il n'est pas possible de trissecter un angle à la règle et au compas. Evidemment ce serait dommage d'en rester à ce constat d'échec, signalons les techniques suivantes :

- *un instrument trissecteur* : la méthode d'Archimède consiste à ce donner une marque sur la règle. Soit alors à trissecter l'angle ABC de la figure 5 : on suppose que AB correspond à la distance donnée par la marque sur notre règle. On trace le cercle de centre A et passant par B et grâce à notre règle marquée, on construit en faisant glisser notre règle, la droite BED telle que $DE = AB$. Les triangles BAE et AED étant isocèles, on a $\widehat{ABE} = \widehat{AEB}$ et $\widehat{DAE} = \widehat{ADE}$ avec en outre $\widehat{AEB} = \widehat{EAD} + \widehat{ADE}$ de sorte que $3\widehat{CBD} = \widehat{CBA}$.
- *une courbe annexe* : considérons la parabole d'équation $y = x^2$ et suivant la figure 6 cherchons à trissecter l'angle $\widehat{BOA}$. On trace le cercle de centre O et de rayon 2 et on trace le segment $[ED]$ parallèle à l'axe des abscisses et de longueur $\frac{1}{2}CA$. On trace ensuite le cercle de centre D passant par O qui recoupe la parabole en F. On note alors G l'intersection de la droite parallèle à l'axe (Oy) passant par F avec le cercle de centre O et de rayon 2. On vérifie alors que $3\widehat{BOG} = \widehat{BOA}$.
- *Les origami* : on s'autorise à tracer des droites selon la technique des pliages. Les axiomes sont les suivants illustrés à la figure 7 :
  - O_1 : étant donnés deux points p_1 et p_2, on peut plier selon la droite les reliant ;

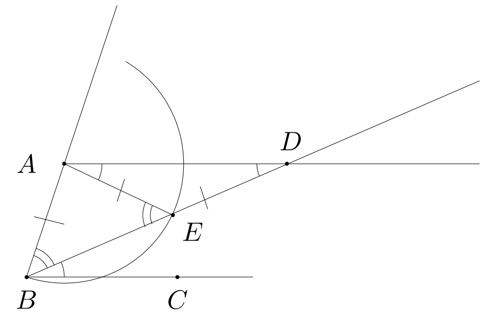


FIG. 5. Méthode d'Archimède de trissection des angles

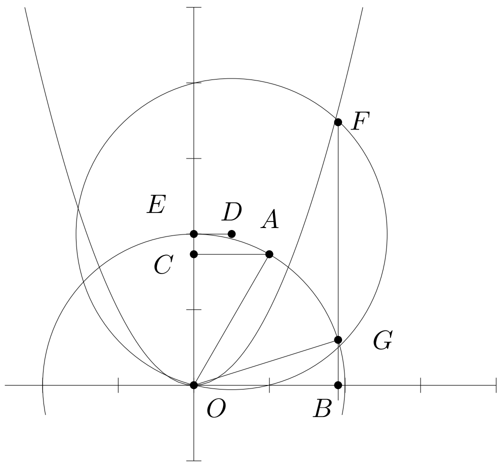


FIG. 6. Trissection des angles à l'aide d'un parabole.

- O_2 : étant donnés deux points p_1 et p_2, on peut plier selon la médiatrice de $[p_1, p_2]$: autrement dit on autorise un pliage qui envoie p_1 sur p_2 ;
- O_3 : étant donnés deux droites l_1 et l_2, on peut plier selon leur bissectrice intérieure ; autrement dit on autorise un pliage qui envoie l_1 sur l_2 ;
- O_4 : étant donnés un point p et une droite l, on peut plier selon la droite orthogonale à l et passant par p ;
- O_5 : étant donnés deux points p_1, p_2 et une droite l, on peut plier selon une droite passant par p_2 et envoyant p_1 sur l ;
- O_6 : étant donnés deux points p_1, p_2 et deux droites l_1, l_2, on peut plier selon une droite qui envoie p_1 sur l_1 et p_2 sur l_2.

Le pliage de la figure 8 explique, selon Abe, la trissection des angles : par réflexion $\beta = \widehat{ABC} = \widehat{BAD}$ et $BD = AC$ de sorte que le triangle ABC est isocèle en A et donc $\alpha = \widehat{CAA'} = \widehat{A'AB}$ avec $\alpha + \beta = \pi/2$ et donc $\alpha = \widehat{IAB} = \frac{1}{3}\widehat{IAC}$.

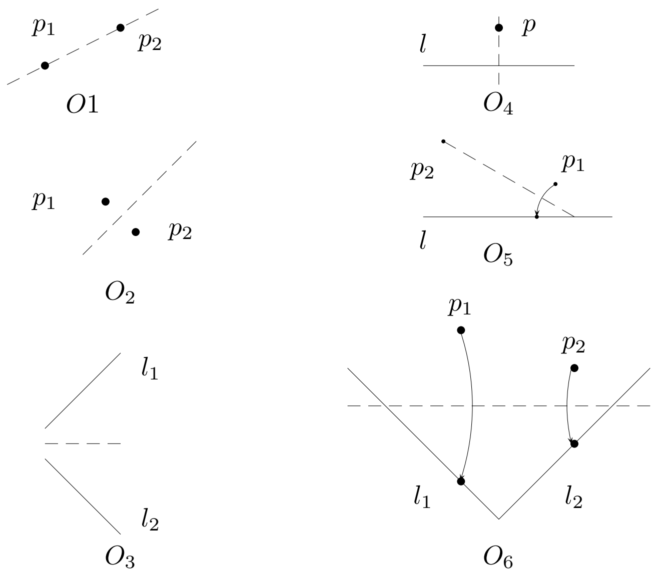


Fig. 7. Listes des axiomes des origami

Remarque : les angles constructibles par origami sont les $2^a 3^b p_1 \cdots p_r$ où les p_i sont des nombres premiers de Fermat. Les points constructibles $z \in \mathbb{C}$ par origami sont le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison complexe, extraction de racines carrées et cubiques. Plus précisément si on autorise seulement les 5 premiers axiomes, on obtient exactement les mêmes constructions qu'avec la règle et le compas, i.e. le corps des nombres constructibles euclidiens caractérisé comme étant le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ stable par racines carrées. Dans l'axiome O_6, la droite de pliage est tangente aux paraboles de foyers p_1 et p_2 et de directrices respectives l_1 et l_2. Montrons que cet axiome permet de trouver une solution réelle à une équation de degré 3 que l'on peut supposer de la forme $X^3 + aX + b$. On considère les paraboles $(y - a/2)^2 = 2bx$ et $y = x^2/2$ dont on trace une tangente commune de pente μ. Notons (x_0, y_0) et (x_1, y_1) les points d'intersection ; on a alors

$$\frac{b}{y_0 - a/2} = \mu = x_1, \quad y_1 = \mu^2/2, \quad x_0 = \frac{(y_0 - a/2)^2}{2b} = b\mu^2/2$$

de sorte que

$$\mu = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\mu^2/2 - a/2 - b/\mu}{\mu - b\mu^2/2}$$

et donc $\mu^3 + a\mu + b = 0$. Ainsi avec ces six axiomes, on peut résoudre toutes les équations de degré ≤ 4.

Il s'avère en fait qu'il y a une nouvelle construction naturelle qui ne peut pas s'obtenir avec les précédentes ; autrement dit on peut rajouter un 7-ième axiome qui est :
O_7 : *étant donnés un point et deux droites, on peut plier perpendiculairement à la deuxième droite de sorte à envoyer le point sur la première droite.*

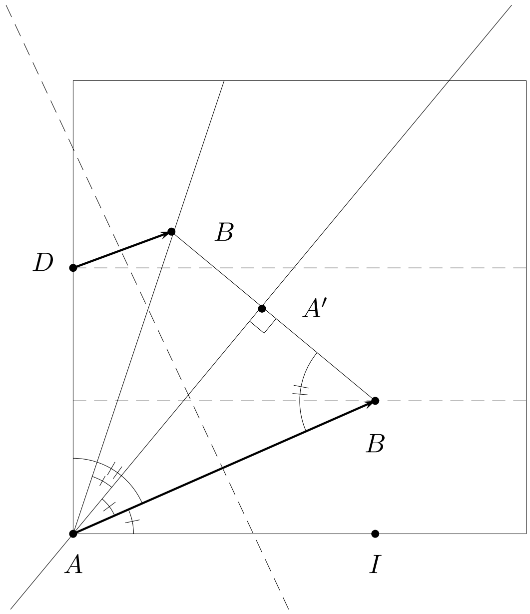


FIG. 8. Trissection des angles par pliage

Robert Lang a alors montré qu'il n'y a pas d'autres axiomes cachés. Malheureusement O_7 ne permet pas de résoudre d'équations de degré > 4. Par contre en considérant des pliages multiples (comme pour la version artistique des origami), Robert Lang a montré que l'on pouvait résoudre des équations de degré ≥ 5 : on pourra ainsi trouver sur sa page http ://www.langorigami.com, la construction du partage en 5 parts égales d'un angle (quintisection des angles).

1.3.3. Géométrie conforme. — En dimension 2, il s'agit de la sphère de Riemann S^2, en dimension quelconque on prend le plan affine euclidien E auquel on rajoute un point à l'infini $\hat{E} = E \cup \{\infty\}$ (on passe de l'une à l'autre par la projection stéréographique) ; la topologie sur $\hat{E}$ est celle de E à laquelle on rajoute les ouverts du type $(E \backslash K) \cup \{\infty\}$ où K est un compact de E ; la projection stéréographique est un homéomorphisme.

– Pour une similitude f du plan affine euclidien, on la prolonge en posant $f(\infty) = \infty$; les inversion et les similitudes de $\hat{E}$ engendrent un groupe appelé le groupe conforme ou groupe des homographies ; la géométrie conforme est l'étude de l'action du groupe conforme sur $\hat{E}$.
– Si on rajoute la conjugaison, on obtient le groupe circulaire qui vu comme automorphismes de S^2, correspond aux automorphismes qui conservent les cercles tracés sur S^2. Une transformation circulaire droite ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) (resp. gauche $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$) conserve (resp. change en son opposé) les angles orientés de droites.

Définitions : - *la puissance d'un point P par rapport à un cercle $\mathcal{C}(O, R)$* est la quantité $s = \overline{PA}.\overline{PB}$, où A, B sont les points d'intersection d'une droite quelconque passant par P et coupant $\mathcal{C}$ aux points A, B. En introduisant le point A' diamétralement opposé à A et en utilisant que le triangle ABA' est rectangle en B, on a $s = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PA'} = PO^2 - R^2$ et ne dépend donc pas de la droite choisie.

- *L'axe radical de* $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ est l'ensemble des points d'égale puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ donné par l'équation $OM^2 - O'M^2 = R^2 - R'^2$ soit $2.\overrightarrow{O'M}.\overrightarrow{O'O} = R'^2 - R^2 + O'O^2$ qui est donc la droite perpendiculaire à OO' et passant par $I \in (OO')$ tel que $\overline{O'I} = \frac{R'^2 - R^2 + O'O^2}{2\overline{O'M}}$.

Invariant conforme de deux cercles : *soient* $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *deux cercles de rayon respectifs* R, R' *et de centre* O, O' *avec* $d = OO'$. *La quantité* $c = \frac{|R^2 - R'^2 - d^2|}{2RR'}$ *est invariante par inversion.*

Preuve : Dans le cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ s'intersectent en un point P, dans le triangle $OO'P$, on a $OO'^2 = PO^2 + PO'^2 - 2.PO.PO'.\cos\widehat{OPO'}$ et donc l'invariant en question n'est autre que que le cosinus de l'angle $\widehat{OPO'}$ qui est aussi celui entre les tangentes en P de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ lequel est conservé par inversion.

Dans le cas général, soit P n'appartenant ni à $\mathcal{C}$ ni à $\mathcal{C}'$ le pôle de l'inversion et μ son rapport ; on note Γ et Γ' les cercles images de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centre ω, ω' et de rayon ρ, ρ'. On rappelle que Γ (resp. Γ') est l'image de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) par l'homothétie de centre S et de rapport $\frac{\mu}{s}$ (resp. $\frac{\mu}{s'}$) où s (resp. s') est la puissance de S par rapport à $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) de sorte que la puissance de S par rapport à Γ (resp. Γ') est $\sigma = \frac{\mu^2}{s}$ (resp. $\sigma' = \frac{\mu^2}{s'}$). Dans les triangles POO' et $P\omega\omega'$, on écrit

$$d^2 = PO^2 + PO'^2 - 2.PO.PO'.\cos\widehat{OPO'}, \quad \omega\omega'^2 = \delta^2 = P\omega^2 + P\omega'^2 - 2P\omega.P\omega'.\cos\widehat{\omega P\omega'}$$

avec $\alpha = \widehat{OPO'} = \widehat{\omega P\omega'}$, de sorte que

$$\frac{R^2 + R'^2 - d^2}{\rho^2 + \rho'^2 - \delta^2} = \frac{s + s' - 2.PO.PO'\cos\alpha}{\sigma + \sigma' - 2.P\omega.P\omega'.\cos\alpha} = \frac{ss'}{\mu^2} = \frac{RR'}{\rho\rho'}$$

en utilisant $\frac{\sigma+\sigma'}{s+s'} = \frac{\mu^2}{ss'} = \frac{P\omega.P\omega'}{PO.PO'}$. □

Remarque : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont non sécants (resp. sécants, resp. tangents) si et seulement si $c >$ (resp. $c < 1$, resp. $c = 1$).

Proposition : *soient* $\mathcal{C}(O, R)$ *et* $\mathcal{C}'(O', R')$ *deux cercles non sécant ; les cercles orthogonaux à* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *sont ceux centrés sur l'axe radical et passant par les points* L, L' *tels que* $LI^2 = L'I^2 = IO^2 - R^2 = IO'^2 - R'^2$.

Preuve : Soit $\mathcal{C}"(\omega, \rho)$ un tel cercle de sorte que $R^2 + \rho^2 = O\omega^2$ et $R'^2 + \rho^2 = O'\omega^2$ et donc $O\omega^2 - R^2 = O'\omega^2 - R'^2 = \rho^2$ et donc ω appartient à l'axe radical. Notons L, L' l'intersection de $\mathcal{C}" \cap (OO')$: $LI^2 + I\omega^2 = L\omega^2 = \rho^2 = O\omega^2 - R^2$ et donc $LI^2 = OI^2 - R^2$ et de même $L'I^2 = O'I^2 - R'^2$ avec $LI = LI'$. □

Corollaire : *soient deux cercles* $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *non sécants ; il existe alors une inversion* f *telle que* $f(\mathcal{C})$ *et* $f(\mathcal{C}')$ *soient deux cercles concentriques.*

Preuve : Soit f une inversion de pôle L et de puissance μ quelconque. Les images $f(\mathcal{C})$ et $f(\mathcal{C}')$ sont des cercles qui sont orthogonales à tous les $f(\Sigma)$ où Σ est un cercle quelconque centré sur l'axe radical de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et passant par L. Or les $f(\Sigma)$ sont des droites qui passent donc par les centres de $f(\mathcal{C})$ et $f(\mathcal{C}')$ lesquels sont donc dans l'intersection de tous les $f(\Sigma)$ et sont donc confondus. □

Porisme de Steiner : *soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux cercles non sécants tels que* $\mathcal{C}'$ *soit à l'intérieur de* $\mathcal{C}$. *On construit alors une chaîne de cercles* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots$ *telle que* $\mathcal{C}_1$ *est tangent à* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *quelconque, puis pour* $i \geq 2$, $\mathcal{C}_i$ *est tangent à* $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *et* $\mathcal{C}_{i-1}$. *La chaîne est alors finie si et* *seulement si l'invariant conforme c de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est de la forme*

$$c = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'} = \frac{1 + \sin^2(\pi p/k)}{\cos^2(\pi p/k)},$$

où p est le nombre de tours. En particulier cela ne dépend pas du choix du cercle $\mathcal{C}_1$ de départ.

Preuve : S'agissant clairement d'un énoncé de géométrie conforme, on applique une inversion de sorte que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soient deux cercles concentriques : la figure étant alors clairement invariante par rotation, on remarque bien que l'alternative, la chaîne est finie ou infinie, est indépendante du choix de $\mathcal{C}_1$. La chaîne sera finie si et seulement si l'angle $\frac{\widehat{O_1OO_2}}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. Notons $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{O_1OO_2} = \widehat{O_1OT}$ où T est le point de contact entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$: $\alpha = \pi\frac{p}{k}$. On note ρ, ρ' les rayons des deux cercles concentriques de sorte que d'après ce qui précède $\frac{\rho}{\rho'} = c + \sqrt{c^2-1}$ avec $\sin\alpha = \frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}$ et donc $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ soit

$$c + \sqrt{c^2-1} = \frac{1+\sin\frac{\pi p}{k}}{1-\sin\frac{\pi p}{k}}$$

ce qui donne le résultat. □

1.4. Pavages euclidiens. — Etant donné un espace topologique E localement compact et un groupe G de bijections continues de E : on choisit des compacts $K_1, \cdots, K_l$ de E appelés pavés standards. On appelle alors pavé compact P de E, les compacts $g(K_i)$ pour $g \in G$. Un pavage de E est alors un ensemble $\mathcal{P}$ de pavés tels que

(i) $\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P = E$

(ii) $\forall P, Q \in \mathcal{P}$, l'intersection de leur intérieur est vide ;

(iii) pour tout compact K de E, les pavés P de $\mathcal{P}$ qui rencontrent K sont en nombre fini.

Remarque : le pavage est dit périodique s'il existe un ensemble fini $\mathcal{F}$ de pavés de $\mathcal{P}$ tels que tout pavé de $\mathcal{P}$ est l'image d'un pavé de $\mathcal{F}$ par un élément g du groupe de symétrie du pavage $\Gamma_{\mathcal{P}} = \{g \in G : \ g\mathcal{P} = \mathcal{P}\}$. Un groupe de la forme $\Gamma_{\mathcal{P}}$ est dit cristallographique.

Remarque : dans le cas euclidien (iii) est un conséquence de (i) et (ii), cf. [**2**] p.35.

1.4.1. Groupes cristallographiques. — En ce qui concerne les pavages périodiques, la description des groupes cristallographiques de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est réglé par les théorèmes suivants dus à **Bieberbach** :

- le sous-groupe Γ' des translation d'un groupe cristallographique Γ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est d'indice fini engendré et isomorphe à $\mathbb{Z}^n$;
- tout isomorphisme de groupes abstraits entre deux groupes cristallographiques est de la forme $\phi(g) = h \circ g \circ h^{-1}$ où h est une bijection affine de $\mathbb{R}^n$;
- il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques (17 en dimension 2, 219 en dimension 3, un meilleure compréhension de la table est toujours un sujet d'actualité.

Preuve : (en dimension 2 suivant [**2**] : notons Γ le sous-groupe des translations de G. Si $\Gamma = \{\mathrm{Id}\}$ alors pour r, s des rotations de G, $[r,s] = rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation de G et donc G est commutatif de sorte que r, s sont des rotations de même centre et alors $\bigcup_{g\in G} g(P)$ est contenu dans un disque d'où la contradiction.

Supposons ensuite que toutes les translations de Γ ont la même direction : pour r une rotation de G et $t_v \in \Gamma$, rtr^{-1} est la translation $t_{r(v)}$ de sorte que $r(v)$ est colinéaire à v et donc toutes les rotations non triviales de G sont des symétries autour de points. Pour deux telles rotations r,s rs est une translation de vecteurs $2\overrightarrow{aa'}$ et donc tous les centres des rotations de G sont alignés et donc $\bigcup_{g\in G} g(P)$ est contenu dans une bande, d'où la contradiction.

Soient alors $u\in\Gamma$ de norme minimale et v non colinéaire à u de norme minimale : $\mathbb{Z}u+\mathbb{Z}v\subset\Gamma$ et notons $Q_a=\{a+tu+sv:\ t,s\in[0,1]\}$. Si l'orbite de a sous G n'est pas dans $a+\mathbb{Z}u+\mathbb{Z}v$, il existe un point de cette orbite appartenant à Q et distincts des 4 sommets et donc à une distance de l'un des 4 sommets de norme strictement plus petite que celle de u ou v ce qui contredirait la minimalité de ceux-ci.

Si $G=\Gamma$, un pavage associé est le domaine fondamental Q_0 de Γ. Supposons $G\neq\Gamma$. Si tous les $g\in G-\Gamma$ sont d'ordre 2 alors un pavage associé est $\frac{1}{2}Q_0$. Supposons qu'il existe $r\in G-\Gamma$ qui n'est pas une symétrie : son ordre $n_g\geq 3$ est nécessairement fini, notons alors a son centre et $2\pi/\alpha$ avec $\alpha=n_g$ son angle. Soit alors b un centre d'un élément s de $G-\Gamma$ tel que la distance $d(a,b)$ soit minimale : quitte à prendre s^i on peut supposer que s est une rotation de centre b et d'angle $2\pi/\beta$ pour $\beta=n_{g_1}\geq 3$. On note $t=(rs)^{-1}$ de sorte que $rst=Id$: le centre c de t est tel que le triangle abc a pour angles $\frac{\pi}{\alpha},\frac{\pi}{\beta},\frac{\pi}{\gamma}$ avec $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1$, et t est d'ordre γ. La résolution de cette équation donne pour solution $(3,3,3),(2,4,4)$ et $(2,3,6)$. □

Nous allons à présent cherche les tuiles qui sont de polygones convexes, et on renvoie à [**2**] p.33 pour des illustrations plus artistiques. Plus loin nous montrons que le nombre de côtés de ce polygone doit être ≤ 6.

- *Cas des polygones réguliers* : l'angle intérieur en un sommet est $\pi(1-2/n)$ doit être tel qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ avec
$$2\pi=k\pi(1-2/n),\qquad (k-2)(n-2)=4,$$
et donc $n=3,4,6$, lesquels donnent bien des pavages.
- *Cas des triangles et des quadrilatères* : étant donné un triangle (resp. quadrilatère) quelconque après rotation d'angle π autour du milieu d'un côté, on obtient un parallélogramme (resp un hexagone à côtés opposés parallèles) dont on pave aisément le plan. Le groupe cristallographique correspondant est donc $\mathbb{Z}^2\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}^2$, cf. ci-dessous le cas des hexagones à cotés opposés parallèles et de même longueur).
- En ce qui concerne *les hexagones convexes*, remarquons que s'ils sont tels que les côtés opposés sont parallèles et de même longueur, alors on obtient un pavage du plan relativement au groupe cristallographique $\mathbb{Z}^2$. Plus généralement Reinhardt les a classifiés en trois types, où a,b,c,d,e,f désignent les longueurs des côtés et $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D},\hat{E},\hat{F}$ les angles aux sommets correspondant :
  - $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2\pi$ avec $a=d$;
  - $\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}=2\pi$ avec $a=d$ et $c=e$;
  - $\hat{A}=\hat{C}=\hat{E}=2\pi/3$ avec $a=b$, $c=d$ et $e=f$.
- En ce qui concerne *les pentagones convexes* la situation est plus complexe, on connaît 14 type de pentagones qui permettent de paver mais il semble que l'on ne sache pas encore si celle-ci est exhaustive (cette liste a plusieurs fois était élargie). Citons, parmi les pavages par des pentagones équilatéraux, le pavage du Caire dont le motif est un pentagone ayant cinq côtés égaux et deux angles droits que l'on peut tracer comme suit, cf. la figure 9 :
  - à partir d'un segment $[AB]$, on trace sa médiatrice $\mathcal{D}$ à partir du milieu I de $[AB]$;
  - on trace les bissectrices de $(\widehat{AB),\mathcal{D}}$ issue de I qui recoupent le cercle de centre B (resp. A) et de rayon AB en un point C (resp. E) ;
  - la perpendiculaire en C (resp. E) recoupe $\mathcal{D}$ en un point D.

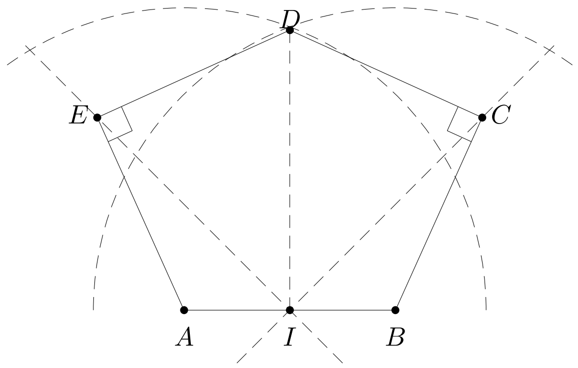


FIG. 9. Construction du pentagone équilatéral à deux angles droits

Le cercle de diamètre BD passe en C et I de sorte que $\widehat{BDC} = \pi/4$ et donc $CD = BC$ et les 5 côtés sont de même longueur. On vérifie alors aisément que l'assemblage de 4 de ces pentagones forme un hexagone dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur ce qui fournit un pavage du plan, cf. la figure 10.

1.4.2. Triangles paveurs. — *Soit T un triangle euclidien d'angles $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. On effectue des symétries par rapport aux côtés puis on recommence avec les triangles obtenus. On obtient alors un pavage du plan si et seulement si $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{2\pi}{p}, \frac{2\pi}{q}, \frac{2\pi}{r})$ avec $(p, q, r) \in \{(3, 12, 12), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (6, 6, 6)\}$.*

Preuve : Considérons une suite de réflexions autour d'un sommet A du triangle ABC de départ : par la réflexion d'axe AC le point B s'envoie en B' puis par la réflexion d'axe AB', C s'envoie en C'... de sorte qu'au bout d'un nombre fini n d'étapes on doit revenir sur le triangle initial : si n est impair vu qu'un produit impair de réflexions est une réflexion et que la réflexion d'axe AB ne laisse pas le triangle stable, nécessairement B s'envoie sur C et donc ABC est isocèle. Autrement dit p, q, r sont des entiers et si l'un deux est impair alors les deux autres $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ ce qui, après énumération des cas, donne les 4 solutions de l'énoncé.

Il reste alors à voir que l'on obtient effectivement des pavages par des triangles respectivement isocèle d'angle au sommet $2\pi/3$, rectangles avec un angle de $\pi/3$, rectangles isocèles et équilatéraux, ce qui ne pose aucun problème. □

Remarque : si on demande en outre de pouvoir colorier les triangles en noir et blanc de sorte que deux triangles d'une même couleur n'ait pas de faces communes, il faut enlever la première solution.

Remarque : l'exemple le plus célèbre de pavage non périodique est du à Penrose : cerf volant et flèche...

1.4.3. Pavages impossibles. — Ce qui suit est largement inspiré de [**8**] ; dans la suite on se fixe des réels positifs α, β de sorte que tous les polygones concernés son d'aire $\geq \alpha$ et de périmètre $\leq \beta$.

Théorème : *il est impossible de paver le plan par des polygones vérifiant les deux conditions ci-avant et ayant tous plus de 7 côtés.*

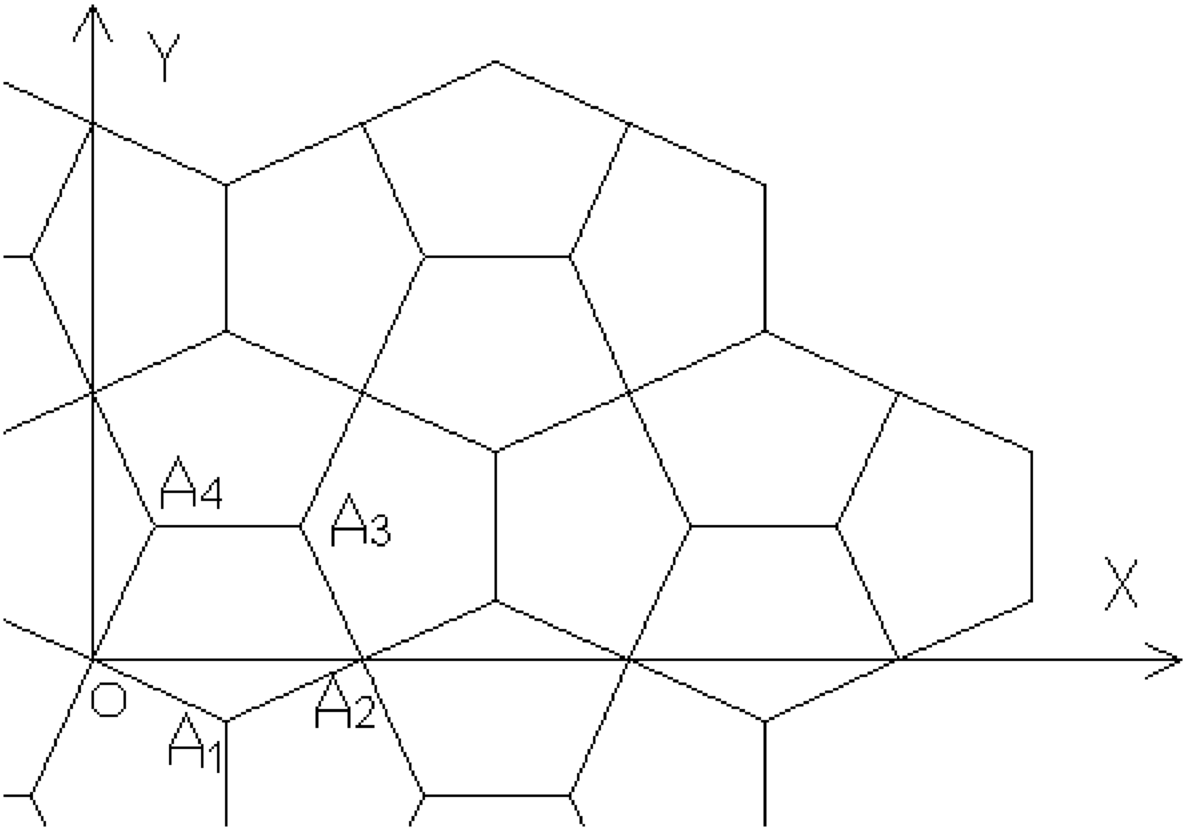


FIG. 10. Pavage du Caire

Remarque : on ne demande pas que la collection de polygones aient tous le même nombre de côtés, ce qui permet en particulier, quitte à rajouter des sommets avec des angles de mesure π, de considérer des polygones dont leur intersection soit une partie d'une arête.
Remarque : en fait la démonstration prouve un peu plus, qu'il est impossible de recouvrir, i.e. certains des polygones peuvent « déborder », un carré de côté $4\beta + 32\beta^3\alpha^{-1}$; en particulier étant donné un pavage du plan par des polygones convexes vérifiant les conditions ci-avant, une infinité parmi eux ont moins de six côtés.
Preuve : On raisonne par l'absurde ; pour cela on introduit $S(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r, |y| \leq r\}$ et nous choisirons r assez grand afin d'aboutir à une contradiction. On modifie nos polygones en rajoutant des sommets sur les côtés avec un angle π de sorte que deux polygones qui s'intersectent le font sur un côté commun : les nouveaux polygones sont alors appelés les mailles du réseau. On note R_1 le réseau recouvrant $S(r)$, c'est à dire la collection de maille M qui intersecte $S(r)$: par ailleurs si une maille M est entourée de mailles qui rencontrent $S(r)$, on l'inclut dans le réseau. Comme l'aire de tout polygone est d'aire $\geq \alpha$, R_1 contient un nombre fini f_1 de mailles : soit s_1 son nombre de sommets et a_1 son nombre d'arêtes. Le périmètre d'une maille étant $\leq \beta$, on en déduit que R_1 est contenu dans $S(r+\beta)$. On note R le réseau associé à $S(r+\beta)$ comme défini ci-dessus : on note f (resp. s, a) son nombre de mailles (resp. de sommets, d'arêtes). D'après la formule d'Euler, on a $s + f = a + 1$.

On considère alors les angles intérieurs des mailles du réseau R_1 : comme il y a f_1 telles mailles, dont la somme des angles intérieurs est $\geq (7-2)\pi$, cette somme est $\sigma \geq 5\pi f_1$. Par ailleurs la somme des angles en un sommet intérieur au réseau est 2π et $\leq 2\pi$ si le sommet est au bord du réseau de sorte que $2\pi s_1 \geq 5\pi f_1$. En ce qui concerne R, comme chaque sommet appartient au moins à 2 arêtes, on a $s \leq 2a$; en outre tout sommet intérieur appartient à au moins 3 mailles de sorte que le nombre de sommets intérieur à R est $\leq 2a/3$ de sorte que comme R_1 est à l'intérieur de R, on a :

$$2a \geq 3s_1 + 2(s - s - 1) = 2s + s_1.$$

De la relation d'Euler $2s+2f > 2a$, on en déduit alors $2f > s_1$ ce qui en utilisant la minoration ci-dessus donne $4f > 2s_1 \geq 5f_1$. En notant $f_2 = f - f_1$ le nombre de mailles de $R - R_1$, on obtient alors $4f_2 > f_1$.

Chaque maille étant de périmètre $\leq \beta$, on en déduit qu'elle est contenue dans le disque de centre l'un de ses sommets et de rayon $\beta/2$ de sorte que son aire est $\leq \pi\beta^2/4 < \beta^2$. Ainsi on en déduit que $\beta^2 f_1 > 4r^2$ puisque les f_1-mailles de R_1 recouvrent $S(r)$. Par ailleurs les f_2 mailles de $R - R_1$ sont tous d'aire $\geq \alpha$, on en déduit

$$4(r + 2\beta)^2 - 4r^2 \geq \alpha f_2,$$

de sorte que $64\beta^3(R = \beta) \geq 4\beta^2\alpha f_2 > \beta^2\alpha f_1 > 4\alpha r^2$, d'après ce qui précède et donc $r < 16\beta^3\alpha^{-1}(1 + \beta/r)$ relation clairement fausse pour $r \geq \beta + 16\beta^3\alpha^{-1}$. $\square$

Remarque : si on enlève l'une quelconque des conditions (la convexité, le nombre de côtés, la minoration sur les aires, la majoration sur les périmètres) imposées sur nos polygones, le théorème est faux, cf. [**8**] pour des constructions.

Remarque : une autre façon d'énoncer le résultat est : si le plan est pavé par des polygones ayant tous plus de 7 côtés, alors les quotients des périmètres par les aires n'est pas borné.

2. D'autres angles en dimension 2

2.1. Géométrie sphérique. — On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, orientée. Pour N un point S et H un plan parallèle au plan tangent à S en N, distinct de celui-ci, *la projection stéréographique* associée (i.e. l'application qui à $M \in S - \{N\}$ associe l'intersection de la droite MN avec H) est la restriction à S d'une inversion de $\mathbb{R}^3$: c'est donc en particulier une application conforme (i.e. qui respecte les angles). On s'en sert pour faire des cartes des pôles terrestres par exemple.

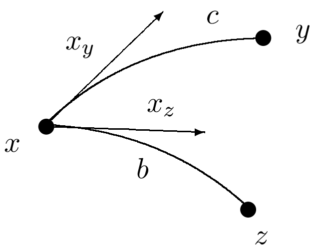
On paramètre la sphère via deux angles (θ, ϕ) respectivement appelés *latitude et longitude. La projection de Mercator* est l'unique application conforme $(\phi, \theta) \mapsto (\phi, V(\theta))$ définie donc par (cf. [**3**] p.376)

$$V(\theta) = \log\Big(\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})\Big).$$

2.1.1. Triangles sphériques. — : nous verrons plus loin qu'étudier les triangles sphériques revient à étudier les trièdres de l'espace euclidien de dimension 3 ; la trigonométrie sphérique étudie les relations entre les six nombres que sont les trois angles des faces de ce trièdre et les trois angles de ses dièdres.

- Un triangle de S est un triplet (x, y, z) de points de S linéairement indépendants en tant que vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
- Ses cotés sont les morceaux de grand cercle qui relient les points entre eux ; leurs longueurs sont définies par la distance suivante sur S : pour $x, y \in S$, on note $d(x, y) = \arccos\langle x, y\rangle$.

– Les angles sont définis par l'angle entre les vecteurs tangents dans le plan tangent euclidien : $\alpha = d(x_y, x_z)$ où x_y (resp. x_z) est le deuxième vecteur fourni après x par l'orthonormalisation de Schmidt appliqué à $\{x, y\}$, i.e. $x_y = \frac{\lambda}{||\lambda||}$ avec $\lambda = y - \langle x, y\rangle.x$ (cela correspond aussi à l'angle dièdre formé par les plans correspondants).



2.1.2. Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. — : pour tout triangle sphérique on a :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

Preuve : On a $y = \cos c.x + \sin c.x_y$ et $z = \cos b.x + \sin b.x_z$ avec $\langle x_y, x_z\rangle = \cos\alpha$. En utilisant $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle = 0$ on obtient par définition de a :

$$\cos a = \langle y, z\rangle = \langle \cos x.x + \sin c x_y, \cos b.x + \sin b.x_z\rangle = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha.$$

□

2.1.3. Inégalités triangulaires. — : pour tout triangle sphérique on a

$$|b - c| < a < b + c \text{ et } a + b + c < 2\pi.$$

Réciproquement si trois réels a, b, c vérifient les inégalités précédentes, il existe alors un triangle de côtés égaux à a, b, c.

Preuve : D'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, en utilisant que $|\cos\alpha| < 1$, on a donc

$$\left|\frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\sin b.\sin c}\right| < 1$$

ce qui équivaut à $\cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c)$ et comme $0 < a, b, c < \pi$ ceci entraîne $a < b + c < 2\pi - a$. Ainsi on obtient $a + b + c < 2\pi$ puis $b < c + a$ et $c < a + b$ par permutation d'où $|b - c| < a$. Réciproquement si a, b, c vérifient les deux conditions de l'énoncé alors $\left|\frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\sin b.\sin c}\right| < 1$ d'où l'existence de $0 < \alpha < \pi$ tel que $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$. On prend alors $x \in S$ quelconque puis deux vecteurs unitaires dans le plan tangent à S formant un angle α de sorte qu'avec y, z sur les grands cercles correspondant à distance respective de b et c, on a bien $d(y, z) = a$, d'où le résultat. □

Inégalités sur les angles : *pour tout triangle sphérique on a :*

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi, \quad \alpha + \pi > \beta + \gamma, \quad \beta + \pi > \gamma + \alpha, \quad \gamma + \pi > \alpha + \beta.$$

Preuve : On introduit le *triangle polaire* (x', y', z') défini par $\langle x', y\rangle = \langle x', z\rangle = 0$ et $\langle x', x\rangle > 0$ et de même pour y', z'. Dans le plan orthogonal à x, les vecteurs y', z', x_y, x_z vérifient les conditions suivantes :

$$\langle z', x_y\rangle = 0, \quad \langle y', x_z\rangle = 0, \quad \langle x_z, z'\rangle > 0, \quad \langle y', x_y\rangle > 0$$

d'où résulte que $a'+\alpha=\pi$ comme on peut le voir sur la figure 11. Par symétrie et en utilisant que (x,y,z) est le triangle polaire de (x',y',z'), on obtient aussi

$$a+\alpha'=b+\beta'=c+\gamma'=a'+\alpha=b'+\beta=c'+\gamma=\pi.$$

En sommant les trois dernière égalité, on a $\alpha+\beta+\gamma=3\pi-a'+b'+c'>2\pi$ d'après l'inégalité triangulaire. On écrit aussi

$$\gamma+\beta=2\pi-(b'+c')=\pi+\alpha+a'-(b'+c')<\pi+\alpha$$

par inégalité triangulaire. □

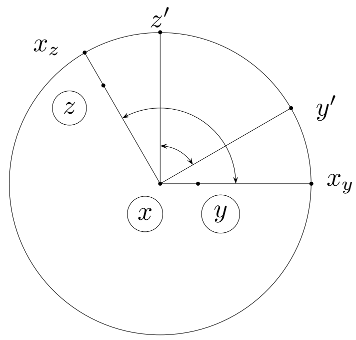


Fig. 11.

2.1.4. Loi des sinus. — : étant donné un triangle de côtés de longueur a,b,c et d'angle α, β et γ, on a la relation : $\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}$.

Preuve : Soit le repère orthonormée de $\mathbb{R}^3$ défini par $e_1=x$, $e_2=x_y$ et $e_3=e_1\wedge e_2$, on a alors

$$\det(x,y,z)=\begin{vmatrix}1 & \cos c & \cos b\\ 0 & \sin c & \cos\alpha\sin b\\ 0 & 0 & \sin\alpha\sin b\end{vmatrix}=\sin\alpha\sin b\sin c$$

ce qui donne le résultat en faisant tourner les lettres. □

2.1.5. Triangles isométriques. — : *soient (x,y,z) et $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ deux triangles sphériques de côtés et angles respectifs $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ et $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) *il existe une isométrie f de S telle que $f(x)=\tilde{x}$, $f(y)=\tilde{y}$ et $f(z)=\tilde{z}$;*

(ii) $a=\tilde{a}$, $b=\tilde{b}$, $c=\tilde{c}$;

(iii) $\alpha=\tilde{\alpha}$, $b=\tilde{b}$, $c=\tilde{c}$;

(iv) $a=\tilde{a}$, $\beta=\tilde{\beta}$, $\gamma=\tilde{\gamma}$;

(v) $\alpha=\tilde{\alpha}$, $\beta=\tilde{\beta}$, $\gamma=\tilde{\gamma}$.

Preuve : (i) implique clairement les quatres autres propriétés. L'introduction des triangles polaires montre l'équivalence de (ii) avec (v) et de (iii) avec (iv). Il reste donc à démontrer par exemple (iii) ⇒ (i) ce qui est très simple. Pour construire y on part de x et on descend de c le long du grand cercle partant de x et dirigé par x_y ; idem pour z. L'isométrie qui envoie x

sur $\tilde{x}$ et x_y sur $\tilde{x}_{\tilde{y}}$ envoie x_z sur $\tilde{x}_{\tilde{z}}$ (quitte à composer par une réflexion par le plan (x, x_y)) car $\alpha = \tilde{\alpha}$. Celle-ci envoie alors y sur $\tilde{y}$ et z sur $\tilde{z}$. $\square$

Remarque : par rapport au cas euclidien les triangles semblables sont isométriques.

2.1.6. Aires des triangles sphériques. — L'aire d'un triangle sphérique est égale à $\alpha+\beta+\gamma-\pi$.

Preuve : On appelle *fuseau d'angle* α de S la partie F comprise entre deux demi-grands cercles de mêmes extrémités $\pm m$ dont les vecteurs tangents unitaires en m font l'angle α : son aire $\mathcal{A}(F)$ est égale à 2α. Soit alors D la demi-sphère délimitée par le grand cercle y, z et contenant x dans son intérieur. A des ensembles de mesure nulle près, D admet la partition en quatre ensembles T, A, B, C où T est le triangle considéré, $T \cup B$ (resp. $T \cup C$) est un fuseau d'angle β (resp. γ) tandis que $T \cup A$ a même aire que $A \cup (-T)$ qui est un fuseau d'angle α ce qui donne

$$2\pi = \mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B) + \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(T) + 2\alpha - \mathcal{A}(T) + 2\beta - \mathcal{A}(T) + 2\gamma - \mathcal{A}(T)$$

ce qui donne le résultat. $\square$

Remarque : par triangulation **l'aire d'un polygone sphérique convexe** à n sommets et d'angles α_i est égale à $\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi$.

Remarque : le calcul de l'aire d'un triangle sphérique est un cas particulier de la formule générale de Gauss-Bonnet, valable pour toute variété riemannienne de dimension 2 et qui dit que, pour un triangle T dont les côtés sont des géodésiques aors $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_T K d\sigma$ où K désigne la courbure de la variété et $d\sigma$ sa mesure canonique. Dans le cas de la sphère la courbure est constante égale à 1 et pour le plan euclidien, elle est nulle.

Remarque : toutes les droites se coupent en 2 point, en passant en projectif et donc en identifiant x et $-x$; on obtient un modèle de la géométrie elliptique, où toutes les droites se coupent en un point (pas de droites parallèles).

2.1.7. Triangles paveurs. — avec coloriage : ils sont de trois types :
- ceux avec un angle de π et les deux autres de $\frac{\pi}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$;
- les triangles rectangles avec un angle de $\frac{\pi}{3}$ et l'autre de $\frac{\pi}{n}$ avec $3 \leq n \leq 5$;
- les triangles birectangles avec un angle de $\frac{\pi}{n}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : On reprend le même raisonnement que dans le cas euclidien : l'existence d'un coloriage impose que $p = 2p' \leq q = 2q' \leq r = 2r'$ sont pairs. La sphère étant compact, notons n le nombre de triangles de sorte que

$$4\pi = n(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \Leftrightarrow \frac{4}{n} + 1 = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}.$$

On en déduit en particulier $p' \leq \frac{3n}{n+4} < 3$.
- *Cas* $p' = 1$: ce qui correspond à $\alpha = \pi$ de sorte que les deux autres angles sont égaux $q = r$ avec $n = 2q'$.
- *Cas* $p' = 2$: on trouve alors $(n, p', q', r') = (24, 2, 3, 3)$ ou $(48, 2, 3, 4)$ ou $(120, 2, 3, 5)$.

$\square$

Remarque : si on n'impose pas l'existence d'un coloriage il faut rajouter le cas où l'un des p, q, r est impair et les deux autres étant alors égaux ce qui donne en suivant le même raisonnement $(p, q, r) = (3, q, q)$ avec $q = 3, 4, 6, 8, 10$ puis $(5, 5, 5)$ et $(5, 6, 6)$.

2.2. Angles lorentziens. — Cette fois-ci la forme quadratique q est de signature $(1, 1)$, dans la base des vecteurs isotropes (e_1, e_2), la matrice de la forme quadratique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

– Un élément f de $O^+(q)$ (resp. $O^-(q)$) est alors tel que sa matrice dans la base (e_1, e_2) est de la forme $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k & 0 \end{pmatrix}$) pour $k \in \mathbb{R}^*$. On note $O^{++}(q)$ la composante connexe de $O^+(E)$.
– On fait agir $O^{++}(q)$ sur les droites de E ; il y a alors trois orbites, les droites telles que la restriction de la forme quadratique est nulle, strictement positive, strictement négative. On définit comme précédemment la notion d'angle hyperbolique de "deux" droites ainsi que sa mesure qui est alors un nombre réel.
– on retrouve la trigonométrie hyperbolique habituelle avec ch, sh et th.

3. Angles en dimension 3

3.1. Définitions. —

– l'angle non orienté de deux vecteurs en considérant le plan qu'ils engendrent ;
– l'angle non orienté de deux plans en considérant des vecteurs normaux et l'angle non orienté de droite qu'ils définissent ;
– *l'angle dièdre* est l'orbite sous $SO(3, \mathbb{R})$ de deux demi-plans limités par une droite commune orientée : les deux demi-plans P, Q sont appelés les faces et la droite commune $\overrightarrow{xy}$ l'arête du dièdre $P.\overrightarrow{xy}.Q$. On appelle rectiligne du dièdre l'angle plan orienté obtenu en coupant le dièdre par un plan perpendiculaire dont la mesure est celle des deux plans en utilisant l'orientation de xy et du choix d'une orientation de l'espace. On définit la somme de deux dièdres en faisant coïncider leur arête orientée et en additionnant leur rectiligne. On peut parler de plan bissecteur d'un dièdre.
– plus généralement on appelle *angle polyèdre* la figure formée par plusieurs plans passant par un même point S appelé sommet, et limités à leurs intersections successives, lesquelles sont des demi-droites appelées arêtes. Un angle polyèdre est dit convexe s'il est tout entier d'un même côté par rapport au plan d'une quelconque de ses faces. Les trièdres sont nécessairement convexes. Les angles polyèdres sont en bijection avec les polygones sphériques de la sphère unité de centre S : à un tel polygone on associe l'angle polyèdre dont les arêtes sont les demi-doites joignant S au sommet du polygone (la convexité se traduit alors par le fait que le polygone est situé sur l'une des demi-sphère limitée par chacun des grands cercles sur lesquels sont ses côtés). Les rectilignes des dièdres de l'angle polyèdre sont respectivement égaux aux angles du polygone sphérique correspondant. On peut alors traduire chacune des propriétés des polygones sphériques en des énoncés sur les angles polyèdres : c'est la méthode développée par J. Hadamard (cf. par exemple les cas d'égalités des trièdres...) ;
– *l'angle solide* sous lequel est vue une surface depuis un point est l'aire de la portion de sphère de rayon 1 (de centre ce point) délimitée par les rayons joignant la surface au point. L'unité dans laquelle on mesure l'angle solide est le stéradian. L'angle solide de tout l'espace est 4π et celui du demi-espace est 2π : l'angle d'un cône de révolution d'angle au centre θ est $2\pi(1 - \cos\theta)$.

Trajectoires

– soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$, C^1 et $\vec{d}$ une direction du plan alors il existe un unique arc régulier C^2 orienté à isométrie près tel que son vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$ vérifie

$$\forall s \in I \quad \widehat{(\vec{d}, \vec{\tau}(s))} = \alpha(s) \mod 2\pi$$

– dans l'espace : un arc C^3 sans point d'inflexion est une hélice si et seulement si ses binormales forment un angle constant avec une direction fixe

3.2. Polyèdres. — On nomme polyèdre un volume limité par des surfaces toutes planes : les portions de plan qui le délimitent sont appelés ses faces. Il est dit convexe s'il est situé tout entier d'un seul et même côté par rapport au plan d'une quelconque d'une de ses faces.

Formule d'Euler *pour les polyèdres convexes : soient F (resp. A, resp. S) le nombre de faces (resp. d'arêtes, resp. de sommets) de ce polyèdre, on a alors $F - A + S = 2$.*

Preuve : Choisissons un point s à l'extérieur du polyèdre P, au dessus de l'une de ses faces f. Soit alors la projection stéréographique à partir de s sur un plan H parallèle à f à l'extérieur de P et de l'autre côté par rapport à s. Par convexité de P et si s est assez proche de f, l'image P' de P est un polygone de points extrémaux les images des sommets de f, découpé par d'autres polygones qui sont les images des autres faces. Soit k le nombre de sommets de la face f ; on rappelle que dans un polygone convexe à $3 \leq i$ sommets, la somme de ses angles est égale à $(i-2)\pi$. On calcule alors la somme de tous les angles de P' de deux façons différentes :

$$(S-k)2\pi + k\pi(1 - \frac{2}{k}) = \pi(2S - k - 2)$$

qui est aussi égale à

$$\sum_i (f_i - \delta_{i,k}) i\pi(1 - \frac{2}{i}) = \pi(2A - k - 2F + 2)$$

où f_i désigne le nombre de faces formées de polygones à i côtés. Le résultat découle directement de l'égalité de ces deux calculs. $\square$

3.2.1. Angle polyèdre régulier. — C'est un angle polyèdre convexe tel que toutes ses faces (i.e. les angles de demi-droite) sont égales et tous ses dièdres sont égaux : en terme de polygone sphérique cela correspond à demander que tous les côtés ont même longueur et que tous les angles sont égaux. *Un polyèdre est dit régulier* s'il est convexe et toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux et tous les angles polyèdres sont réguliers et égaux.

Symbole d'un polyèdre régulier : *notons alors m le nombre de côtés d'une face et n le nombre d'arêtes de chaque angle polyèdre. On a alors*

$$mF = 2A, \quad nS = 2A, \text{ avec } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}.$$

de sorte que $(A, F, S) \in \{(6,4,4),\ (12,8,6),\ (12,6,8),\ (30,20,12),\ (30,12,20)\}$.

Preuve : Chaque angle d'une face a pour mesure $\pi - \frac{2\pi}{m}$ et comme la somme des angles des faces d'un angle polyèdre est inférieur strictement à 2π (cf. l'énoncé équivalent sur les polygones sphériques), il vient $\pi - \frac{2\pi}{m} < 2\frac{\pi}{n}$ et donc $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ ce qui fournit les possibilités suivantes sur les couples (m,n) : $(3,3)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(5,3)$ et $(3,5)$. En outre on a $mF = 2A$ et $nS = 2A$ de sorte que la formule d'Euler s'écrit $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$ ce qui donne respectivement pour les triplets (A,F,S) : $(6,4,4)$, $(12,8,6)$, $(12,6,8)$, $(30,20,12)$ et $(30,12,20)$. $\square$

Remarque : il est impossible de paver la sphère par des polygones convexes ayant tous p côtés dès que $p \geq 6$. En effet comme tout sommet (resp. d'arêtes) est commun à exactement trois faces (resp. deux faces), on en déduit que le nombre de sommets (resp. de arêtes) est $S = pF/3$ (resp. $A = pF/2$) où F désigne le nombre de faces. Or la relation d'Euler $2 = F - A + S = F(6-p)/6$ abouti à une contradiction.

Remarque : dans [**3**] §12.5, un polytope P de dimension d est dit régulier si son stabilisateur $G(P)$ est transitif sur les drapeaux $(F_0, F_1, \cdots, F_{d-1})$ où les F_i sont des i-faces de P (i.e. $\dim F_i = i$) avec $F_i \subset F_{i+1}$. En dimension 3 cela correspond à demander que les faces sont isométriques et tous les dièdres sont égaux. En notant O le centre de P, l'étoile P^* de P régulier est défini comme suit : soit A un sommet de P et a une arète de sommets A, B ; on note H l'hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et passant par B. Par transitivité de l'action de $G(P)$, $P \cap H$ contient tous les C tels qu'il existe une arête AC de P et $P \cap H$ est un polytope régulier de dimension $d-1$: en dimension 3 cela correspond aux angles polyèdres. Le symbole d'un polytope régulier de dimension d que l'on note $(r_1(P), \cdots, r_{d-1}(P))$ défini par récurrence sur d comme suit : $r_1(P)$ est le nombre de côtés des 2-faces de P et $(r_2(P), \cdots, r_{d-1}(P))$ est le symbole de l'étoile de P : en dimension 3 cela correspond à la notation utilisée plus haut. En outre cela permet de donner pour chaque dimension, une liste finie des symboles possibles.
Relation fondamentale : on pose $\rho(P) = \frac{l^2}{4r^2}$ où l est la longueur commune des arêtes et r le rayon de la sphère circonscrite ; on a alors

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1(P)}}{\rho(P^*)}$$

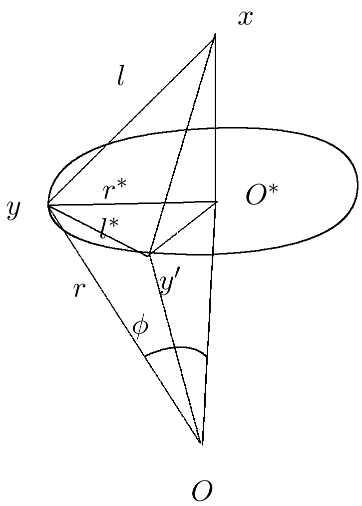
Preuve : On prend les notations de la figure 12 : les points y, x, y' sont trois sommets consécutifs d'une 2-face de P qui est un polygone régulier à r_1 côtés, de centre O' centre du cercle circonscrit de rayon r' de sorte que

$$l = xy = xy' = 2r' \sin \frac{\pi}{r_1}, \quad l^* = 2r' \sin \frac{2\pi}{r_1},$$

et donc $l^* = 2l \cos \frac{\pi}{r_1}$. En utilisant $r^* = l \cos \phi$ et $l = 2r \sin \phi$, on obtient

$$\rho(P) = \sin^2 \phi, \quad \rho(P^*) = \frac{4l^2 \cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{4l^2 \cos^2 \phi} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\cos^2 \phi}$$

ce qui donne le résultat.



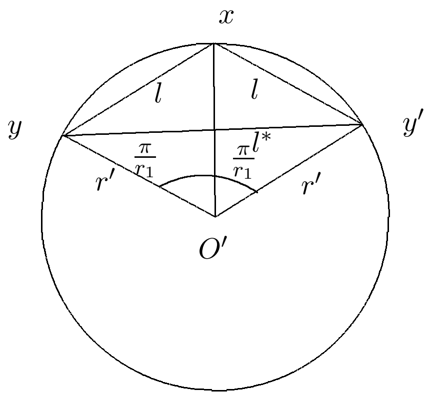


Fig. 12.

□

3.2.2. Théorème de Cauchy. — *Soient P et P' deux polyèdres convexes de frontières respectives ∂P et $\partial P'$. On suppose qu'il existe une bijection $f : \partial P \to \partial P'$ respectant les relations d'incidence entre sommets, arêtes et faces, et dont la restriction à chaque face F est une isométrie sur une face F' de P'. Il existe alors une isométrie g de l'espace telle que $g(P) = P'$ et dont la restriction à la frontière de P est égale à f.*

Remarque : autrement dit un polyèdre convexe est rigide, c'est-à-dire qu'on ne peut pas le déformer sans changer la forme de ses faces, aux déplacement de $\mathbb{R}^2$ près.

Preuve : Commençons par montrer le résultat sous l'hypothèse supplémentaire que f *conserve les angles dièdres*. Quitte à composer par une isométrie on peut supposer que P et P' ont une face commune F sur laquelle f induit l'identité, et situés dans le même demi-espace délimité par cette face. Pour a une arête de F, notons G, G' les faces de P et P' ayant, outre F, a pour arête. On désigne par δ et δ' les angles dièdres correspondant. La bijection f envoie isométriquement G sur G' et par conservation des angles dièdres, et comme G et G' sont dans le même demi-espace, on en déduit que $G = G'$. La conclusion, $P = P'$, découle du fait que deux faces quelconques d'un polyèdre peuvent être reliées par une chaîne de faces adjacentes.

Il reste alors à montrer que f conserve les angles dièdres. On colorie alors les arêtes de P comme suit : en noire (resp. blanc) si l'angle intérieur des deux facettes adjacentes est strictement plus grand (resp. petit) dans P' que dans P. On obtient ainsi un graphe planaire (i.e. on peut le représenter dans $\mathbb{R}^2$ sans que les arêtes ne se recoupent) à deux couleurs obtenu par projection radiale (en prenant O à l'intérieure de P), à partir du graphe sur la sphère unité. On suppose que le graphe est non vide, de la formule d'Euler $s - a + f = 2$, on en déduit qu'il existe un sommet qui présente au plus deux changements de couleurs relativement à l'ordre cyclique des arêtes autour de ce sommet : en effet soit c le nombre de coins où se produisent des changements de couleurs, si l'affirmation est fausse, puisqu'à chaque sommet il y a un nombre pair de changement de couleurs, on a $c \geq 4n$. Comme chaque face ayant $2k$ ou $2k+1$ côtés présente au plus $2k$ coins de ce type on a

$$4n \leq c \leq 2f_3+4f_4+4f_5+\cdots \leq 2f_3+4f_4+6f_5+\cdots = 2(3f_3+4f_4+\cdots)-4(f_3+f_4+\cdots) = 4a-4f$$

et donc $s \geq a + f$ ce qui contredit la formule d'euler. Soit donc p un sommet adjacent à une arête noire ou blanche au moins tel qu'il y ait au plus deux changements entre arêtes noires et blanches. On coupe P avec une petite sphère S_ϵ de rayon ϵ centrée en p ; idem avec P' et S'_ϵ. Dans S_ϵ et S'_ϵ on obtient alors des polygones convexes sphériques Q et Q' dont les arcs correspondants ont même longueur, car les faces sont isométriques et que les rayons des sphères sont les mêmes. On marque d'un signe + (resp. -) si l'angle dans Q' est strictement plus grand (resp. plus petit) que dans Q. Le choix de p implique qu'un certain nombre de signes + et - apparaissent et que relativement à l'ordre cyclique il y a au plus deux changements de signes. Si un seul type de signes apparaît alors le lemme qui suit implique directement une contradiction, une arête devant changer de longueur. Si les deux types de signes apparaissent alors, comme il n'y a que deux changement de signe, il y a une ligne de séparation qui relie les milieux des arêtes et sépare les + des -. La contradiction découle alors du lemme suivant puisque la ligne de séparation ne peut pas être à la fois plus grande et plus petite dans Q' que dans Q. □

Le lemme du bras de Cauchy : *soient Q, Q' des n-gones convexes (planaires ou sphériques) numérotés comme dans la figure 13 tels que les longueurs des arêtes $q_iq_{i+1} = q'_iq'_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$ et que les mesures des angles correspondants vérifient l'inégalité $\alpha_i \leq \alpha'_i$ pour*

$2 \le i \le n-1$, alors la longueur de l'arête manquante vérifie $q_1q_n \le q_1'q_n'$ avec égalité si et seulement si $\alpha_i = \alpha_i'$ pour tout i.

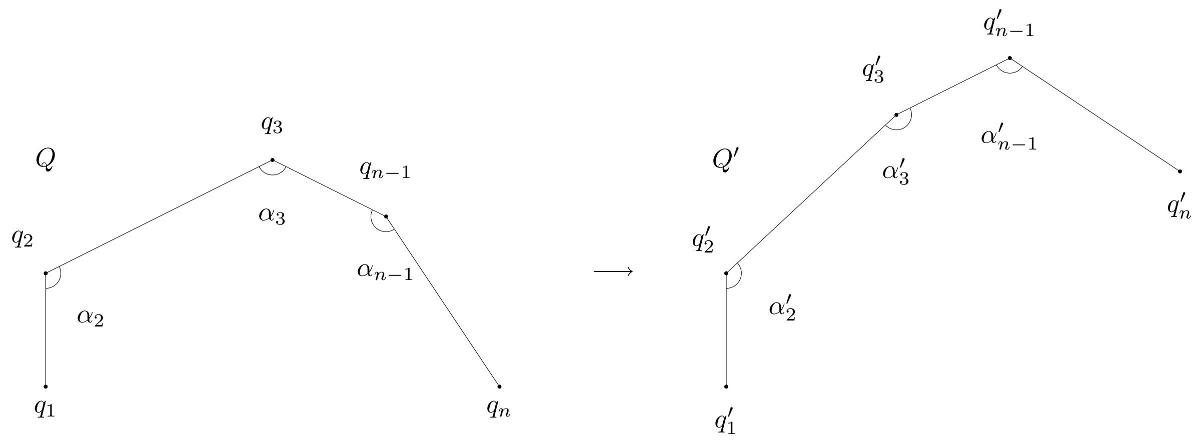


Fig. 13. Lemme du bras de Cauchy

Preuve : On raisonne par récurrence sur n : pour $n = 3$, si dans un triangle on augmente l'angle γ entre deux côtés alors la longueur c du côté opposé augment aussi, analytiquement ce la résulte de la relation $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ dans le cas planaire et de son analogue $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$ en trigonométrie sphérique. Pour $n \ge 4$, si pour un certain $i \in \{2, \cdots, n-1\}$ nous avons $\alpha_i = \alpha_i'$, alors le sommet correspondant peut être supprimé en introduisant la diagonale de q_{i-1} à q_{i+1} avec $q_{i-1}q_{i+1} = q_{i-1}'q_{i+1}'$ et le résultat est démontré d'après l'hypothèse de récurrence. On définit alors un nouveau polygone Q^* à partir de Q en remplaçant α_{n-1} par le plus grand angle $\alpha_{n-1}^* \le \alpha_{n-1}'$ possible tout en laissant Q^* convexe : $q_1q_n \le q_1q_n^*$ d'après le cas $n = 3$. Par ailleurs si on peut prendre $\alpha_{n-1}^* = \alpha_{n-1}'$ le résultat se déduit d'après l'hypothèse de récurrence. Dans la situation contraire, on se retrouve avec q_2, q_1, q_n^* colinéaires avec $\overline{q_2q_1} + \overline{q_1q_n^*} = \overline{q_2q_n^*}$ avec d'après l'hypothèse de récurrence en ignorant q_1, q_1', $q_2q_n^* \le q_2'q_n'$ et donc en utilisant l'inégalité triangulaire

$$q_1'q_n' \ge q_2'q_n' - q_1' - q_1'q_2' \ge q_2q_n^* - q_1q_2 = q_1q_n^* > q_1q_n.$$

□

Au cours des années 1970, R. Connelly a construit un exemple de polyèdre flexible, c'est à dire qu'il existe une famille continue à un paramètre $(P_t)_{t\in[0,1]}$, avec $P_0 = P$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, P_t ait la même combinatoire que P et des arêtes de même longueur : les « flexions » que l'on considère ne doivent pas consister en de simples déplacements. L'exemple le plus simple construit par K. Steffen peu après n'a que neuf sommets.

Théorème des soufflets d'après Sabitov [**11**] : *Soit P un polyèdre flexible dans $\mathbb{R}^3$. Lors d'une flexion de P, son volume ne change pas.*

La preuve de ce résultat découle de la « généralisation » suivante de la formule de Cayley-Menger : le volume de chaque polyèdre de $\mathbb{R}^3$ est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients dépendent seulement (de manière polynomiale) des longueurs de ses arêtes. Plus

précisément 12vol(P) est entier sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des arêtes de P de sorte que le volume ne peut pas varier continûment et doit donc rester constant.
Exemple : pour 4 points en utilisant la symétrie du déterminant de Cayley-Menger, on remarque en développant que chacun des termes apparaît deux fois de sorte que $(12\mathrm{vol}(A_0, A_1, A_2, A_3))^2$ est dans l'anneau engendré par les carrés des longueurs entre les A_i. Finalement $12\mathrm{vol}(A_0, A_1, A_2, A_3)$ est entier sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des distances entre les A_i. On obtient ainsi le théorème des soufflets pour les simplexes et plus généralement pour tous les polyèdres qu'on peut décomposer en simplexes sans ajouter d'arête. Pour le cas général on renvoie le lecteur à l'excellent [**12**].

3.3. Invariants de Dehn. — Etant donné un polyèdre P de dimension 3, on note M_P l'ensemble de tous ses angles dièdres auxquels on ajoute le nombre π. Ainsi pour un cube C on obtient $M_C = \{\pi, \frac{\pi}{2}\}$ tandis que pour un tétraèdre régulier T, on a $M_T = \{\pi, \arccos \frac{1}{3}\}$. Pour un ensemble fini $M \subset \mathbb{R}$ contenant M_P et une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire

$$f : V(M) \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad f(\pi) = 0$$

où $V(M)$ est le sous-$\mathbb{Q}$-espace linéaire de $\mathbb{R}$ engendré par M, *l'invariant de Dehn* de P relativement à f est le réel

$$D_f(P) := \sum_{a \in P} l(a).f\Big(\alpha(a)\Big)$$

où la somme porte sur toutes les arêtes a de P, $l(a)$ désigne la longueur de a et $\alpha(a)$ l'angle dièdre associé à a.

On dit que deux polyèdres P et Q sont
- *équidécomposables* s'ils peuvent être décomposés en un nombre fini de polyèdres $P_1, \cdots, P_n$ et $Q_1, \cdots, Q_n$ tels que P_i et Q_i soient isométriques pour tout $1 \leq i \leq n$;
- *équicomplémentaires* s'il existe des polyèdres $P_1, \cdots, P_m$ et $Q_1, \cdots, Q_m$ tels que les intérieurs des P_i soient deux à deux disjoints et disjoints de P, même hypothèse pour les Q_i et Q, tels que P_i, Q_i sont isométriques et tels que $\tilde{P} = P \cup P_1 \cup \cdots \cup P_m$ et $\tilde{Q} = Q \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ soient équidécomposables.

Théorème de Dehn-Hadwiger : *Soit P (resp. Q) un polyèdre d'angles dièdres $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ (resp. $\beta_1, \cdots, \beta_q$) et M un ensemble fini de réels tels que*

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q, \pi\} \subset M.$$

Si $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ est une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire telle que $f(\pi) = 0$ et telle que $D_f(P) \neq D_f(Q)$ alors P et Q ne sont pas équicomplémentaires.

Preuve : Le résultat repose sur l'additivité des invariants de Dehn : précisément si P admet une décomposition en une famille finie de polyèdres $P_1, \cdots, P_n$ et si tous les angles dièdres de ceux-ci appartiennent à M, alors pour tout $f : V(M) \to \mathbb{Q}$, on a

$$D_f(P) = D_f(P_1) + \cdots + D_f(P_n).$$

Pour le vérifier, on associe une masse à toute partie a' d'arête a d'un polyèdre par la formule suivante : $m_f(a') = l(a')f(\alpha(a'))$. Considérons alors la réunion de toutes les arêtes des P_i, pour $i = 1, \cdots, n$. Le long des arêtes a' contenues dans les arêtes de P, les angles dièdres des parties s'ajoutent pour donner l'angle dièdre de P en a'. En une arête a" de l'un des P_i d'une face de P ou dans l'intérieur de P, les angles s'additionnent pour faire respectivement π et 2π : comme $f(\pi) = f(2\pi) = 0$, les masses s'additionnent encore.

Ainsi si P et Q étaient équicomplémentaires, nous pourrions élargir M en M' qui contiendrait tous les angles dièdres ; on prolonge alors f en une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire $f' : V(M') \to \mathbb{Q}$ de sorte que

$$D_{f'}(P) + D_{f'}(P_1) + \cdots + D_{f'}(P_m) = D_{f'}(Q) + D_{f'}(Q_1) + \cdots + D_{f'}(Q_m)$$

avec $D_{f'}(P_i) = D_{f'}(Q_i)$ puisque P_i et Q_i sont isométriques et donc $D_f(P) = D_f(Q)$ ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. $\square$

Exemples : nous avons vu que pour le cube $M_C = \{\pi, \frac{\pi}{2}\}$ de sorte que tous les invariants de Dehn sont nuls. Pour le tétraèdre régulier T_0 (resp. le tétraèdre T_1 porté par le repère canonique) on a $M_{T_0} = \{\pi, \arccos\frac{1}{3}\}$ (resp. $M_{T_1} = \{\pi, \frac{\pi}{2}, \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\}$). De la proposition suivante et du théorème précédent, on en déduit que le cube et chacun des tétraèdres T_0 et T_1 ne sont pas équicomplémentaires. Pour T_2 le tétraèdre ayant trois arêtes consécutives mutuellement orthogonales et de même longueur, on a $M_{T_2} = \{\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\}$ et donc tous ses invariants de Dehn sont nuls : on pourrait aussi remarquer qu'en considérant le centre, le milieu des arêtes et le centre des faces d'un cube, que celui-ci se décompose en six tétraèdres de la forme T_2, ce qui donne $D_f(T_2) = 0$. En particulier T_1 et T_2 ne sont pas équicomplémentaires.

Proposition : *pour tout entier imair $n \geq 3$, le nombre*

$$A(n) = \frac{1}{\pi} \arccos\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

est irrationnel.

Preuve : Notons $\phi_n = \arccos(\frac{1}{\sqrt{n}})$; en utilisant la formule

$$\cos(k+1)\phi = 2\cos\phi\cos k\phi - \cos(k-1)\phi,$$

on en déduit que $\cos k\phi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}$ où A_k est un entier qui n'est divisible par n pour aucun $k > 0$. En effet le résultat est vrai pour $k = 0, 1$ puisque $A_0 = A_1 = 1$ et par récurrence sur k on obtient

$$\cos(k+1)\phi_n = 2\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{A_k}{\sqrt{n}^k} - \frac{A_{j-1}}{\sqrt{n}^{k-1}} = \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}}$$

ainsi $A_{k+1} = 2A_k - nA_{k-1}$. Si $n \geq 3$ est impair et si A_k n'est pas divisible par n alors A_{k+1} ne peut pas non plus être divisible par n. Supposons $A(n) = k/l$ de sorte que $l\phi_n = k\pi$ et donc

$$\pm 1 = \cos k\pi = \frac{A_l}{\sqrt{n}^l}$$

et donc $\sqrt{n}^l = \pm A_l$ est un entier et par conséquent $n | A_l$ ce qui n'est pas, d'où le résultat. $\square$

Remarque : ce résultat est d'autant plus étonnant qu'en dimension 2, ce phénomène ne se produit pas. Rappelons brièvement comment tout polygone d'aire a^2 est décomposable en un carré de côté a :

- la figure 14 montre comment fusionner deux carrés ;
- par triangulation et en utilisant le point précédent, on se ramène au cas d'un triangle ;
- dans la figure 15, les triangles T_1, T_1' et T_2, T_2' sont semblables de sorte qu'en plaçant correctement la droite D, ils seront isométriques (on prendra simplement soin de choisir les deux angles marqués obtus) ;
- la figure 16, montre comment transformer un rectangle en un carré ; pour cela on utilise le fait que deux parallélogramme de même aire et de même base sont équidécomposables : le lecteur notera que pour cette dernière figure, il faut que le point P appartienne au

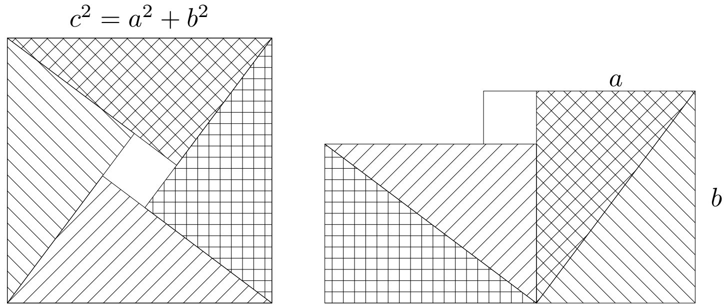


FIG. 14. Fusion de deux carrés

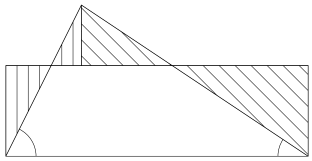


FIG. 15. équidécomposabilité d'un triangle et d'un rectangle

segment AB ; dans le cas contraire, on découpe les parallélogrammes de façon à s'y ramener.

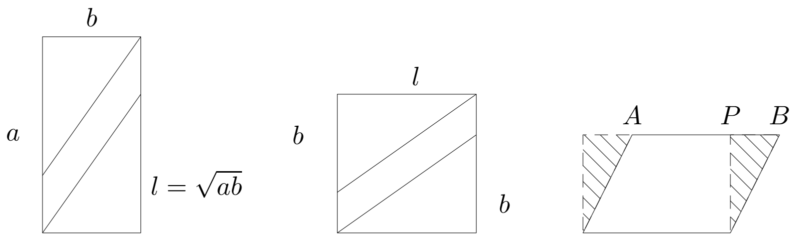


FIG. 16. équidécomposabilité d'un rectangle et d'un carré

3.4. Quelques propriétés sur $SO(3,\mathbb{R})$. — Soit H le corps des quaternions et soit G ceux de norme 1 : $G = \{a + bi + cj + dk \ / \ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$. On considère alors l'action de G sur H par automorphismes intérieurs, cf. l'exercice 8.6 :
- en restreignant cette action à l'ensemble P des quaternions purs, on obtient alors un isomorphisme $s : G/\{\pm 1\} \simeq O(3,\mathbb{R})^+$;
- $s_{bi+cj+dk}$ est une rotation d'angle π et d'axe (b, c, d) ;
- $s_{a+b_i+cj+dk}$ est une rotation d'axe (b, c, d) et d'angle $\arccos a$.
- soient r la rotation d'axe Ox et d'angle $\pi/2$ et r' la rotation d'axe Oy d'angle $\pi/2$. On introduit donc $q = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et $q' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$. On a alors $qq' = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$ et donc $r \circ r'$ est la rotation d'axe $\mathbb{R}_+(1, 1, 1)$ et d'angle $2\pi/3$.

Application : une rotation de $SO(3)$ sera notée par $r = (k, \theta)$ où k est le vecteur unitaire de l'axe de la rotation et θ son angle. Soient alors $r = (OA, 2\alpha)$ et $s = (OB, 2\beta)$ deux rotations telles que $\frac{\alpha}{\pi}$ et $\frac{\beta}{\pi}$ soient irrationnels. Sauf pour une infinité dénombrable de valeurs pour la mesure c de l'angle entre les axes OA et OB, le groupe engendré par r et s est dense dans $SO(3)$; cf. l'exercice 8.5.

Application : on considère les deux rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$, u, v dont les matrices dans la base canonique sont

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Soit G le groupe engendré par u et v : tout élément $r \in G \backslash \{Id, u\}$ s'écrit de manière unique sous la forme $r = u^{\epsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} u \cdots u v^{n_k} u^{\epsilon_2}$ avec $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ et les $n_i \in \{1, 2\}$. On définit alors une partition (I, J, K) de G de la manière suivante
- pour tout n, $(v^2 u)^n \in I$;
- pour tout n, $u(v^2 u)^n \in J$;
- pour tout n, $vu(v^2 u)^n \in K$;
- les éléments de G qui ne sont pas de cette forme appartiennent à I, J, K respectivement suivant que leur écriture commence à gauche par u, v, v^2 respectivement.

Il est aisé de vérifier que $K = vJ$, $I = vK$ et $I = u(J \cup K)$ ce qui permet alors de prouver le fameux **Théorème de Banach-Tarski** : si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^3$ bornées et d'intérieurs non vides, alors A et B sont puzzle-équivalentes.

4. Angles en dimension supérieure

4.1. Angles d'une famille de points. — Dans ce qui suit E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n et $\mathcal{E}$ l'espace affine de vectorialisé E.

4.1.1. Familles obtusangles. — : *soit $e_1, \cdots, e_r \in E$ tels que pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle < 0$ alors $r \leq n + 1$.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur la dimension, le cas $n = 1$ étant évident. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$ et traitons le cas de la dimension n. On note $f_1, \cdots, f_{r-1}$ les projetés orthogonaux des e_i sur $e_r^{\perp}$: $e_i = f_i + \lambda_i e_r$. La famille $(e_1, \cdots, e_r)$ étant obtusangles, les λ_i sont strictement négatifs et

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle + \lambda_i \lambda_j \langle e_r, e_r \rangle$$

de sorte que $(f_1, \cdots, f_{r-1})$ est une famille obtusangle de $e_r^\perp$ et donc $r-1 \leq n$ d'où le résultat. $\square$

4.1.2. Tout grand ensemble de points détermine un angle obtus. — : soit $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille de points de $\mathcal{E}$ tels que pour tout i, j, k deux à deux distincts, $\widehat{a_i a_j a_k} \leq \frac{\pi}{2}$ alors $r \leq 2^n$.

Preuve : Nous allons suivant [**1**] montrer la série d'inégalités suivantes dues à Danzer L. et Grünbaum B. :

$$\begin{aligned}
2^n \quad & \leq^{(1)} \max \sharp\{S \subset \mathcal{E} : \ \widehat{a_i, a_j, a_k} \leq \tfrac{\pi}{2} \forall \{a_i, a_j, a_k\} \subset S\} \\
& \leq^{(2)} \max \sharp \Big\{ S \subset \mathcal{E} \mid \forall \{a_i, a_j\} \subset S, \ \exists \text{ une bande} S(i,j) \supset S \Big\} \\
& =^{(3)} \max \sharp \Big\{ S \subset \mathcal{E} \mid \text{les } \mathrm{Conv}(S) - a_i \text{ se coupent en un même point et y sont contigus} \Big\} \\
& \leq^{(4)} \max \sharp \Big\{ S \subset \mathcal{E} \ \Big| \begin{array}{l} \text{les } Q + a_i \text{ où } Q \text{ est un certain polytope} \\ \text{convexe de dimension } n \text{ sont 2 à 2 contigus} \end{array} \Big\} \\
& \leq^{(5)} \max \sharp \Big\{ S \subset \mathcal{E} \ \Big| \begin{array}{l} \text{les } Q^* + a_i \text{ où } Q^* \text{ est un certain polytope} \\ \text{convexe à symétrie centrale sont 2 à 2 contigus} \end{array} \Big\} \\
& \leq^{(6)} 2^n
\end{aligned}$$

où une bande $S(i,j)$ est le domaine de $\mathcal{E}$ compris entre deux hyperplans passant respectivement par a_i et a_j.

(1) On prend pour S un cube : pour a_i, a_j, a_k on prend le repère en $a_j = 0$ de sorte que le cube soit contenu dans $x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ de sorte que

$$\cos \widehat{a_i, a_j, a_k} = \frac{\langle a_i, a_k \rangle}{||s_i||.||s_k||} \geq 0.$$

(2) Pour tout $i \neq j$, on note $H_{i,j}$ l'hyperplan de E orthogonal à $\overrightarrow{a_i a_j}$. Si S ne contient pas d'angles obtus, il est alors contenu dans la bande entre les hyperplans $H_{i,j} + a_i$ et $H_{i,j} + a_j$.

(3) P est contenu dans le demi-espace délimité par $H_{i,j} + a_j$ et contenant a_i si et seulement si $P - a_j$ est contenu dans le demi-espace délimité par $H_{i,j}$ et contenant $a_i - a_j$; ainsi P est contenu dans la bande délimitée par $H_{i,j} + a_i$ et $H_{i,j} + a_j$ si et seulement si $P - a_i$ et $P - a_j$ appartiennent à différents demi-espaces relatifs à l'hyperplan $H_{i,j}$ et passent tous par 0.

(4) C'est clair puisque l'on relâche la condition que $P = \mathrm{Conv}(S)$ et qu'ils passent par un même point.

(5) La minoration $\geq$ est évidente. Réciproquement pour Q un polytope arbitraire on note $Q^* = \{\frac{x-y}{2} \in \mathcal{E} : \ x, y \in Q\}$ son symétrisé (de Minkowski) : c'est un polytope convexe à symétrie centrale. Remarquons alors que $(Q^* + a_i) \cap (Q^* + a_j) \neq \emptyset \Leftrightarrow (Q + a_i) \cap (Q + a_j) \neq \emptyset$. En effet pour $q'_i, q"_i, q'_j, q"_j \in Q$ on a

$$\frac{q'_i - q_i"}{2} + a_i = \frac{q'_j - q"_j}{2} + a_j \Leftrightarrow \frac{q'_i + q"_j}{2} + a_i = \frac{q'_j + q"_i}{2} + a_j$$

avec par convexité de Q, $\frac{q'_i + q"_j}{2}, \frac{q'_j + q"_i}{2} \in Q$, ce qui montrer le sens direct : pour la réciproque on écrit simplement $q = \frac{q+q}{2}$ et on utilise l'équivalence précédente. En ce qui concerne la conservation de la propriété de contiguïté, elle découle du fait suivant : $Q = a_i$ et $Q + a_j$ sont contigus si et seulement s'ils se coupent et que $Q + a_i$ et $Q + a_j + \epsilon(a_j - a_i)$ ne se coupent pour aucun $\epsilon > 0$.

(6) Supposons $Q^* + a_i$ et $Q^* + a_j$ contigus ; pour $x \in (Q^* + a_i) \cap (Q^* + a_j)$ nous avons $x - a_i, x - a_j \in Q^*$ et donc puisque Q^* est convexe à symétrie centrale

$$\frac{a_i - a_j}{2} = \frac{(x - a_j) + (a_i - x)}{2} \in Q^*$$

et donc $\frac{a_i + a_j}{2} \in Q^* + a_j$ pour tout i. Ainsi pour $P = \mathrm{Conv}(S)$ on a

$$P_j = \frac{1}{2}(P + a_j) = \mathrm{Conv}\{\frac{a_i + a_j}{2} : a_i \in S\} \subset Q^* + a_j$$

ce qui implique que les P_j peuvent seulement être contigus. La conclusion découle du fait quevol$(P_j) = 2^{-n}\mathrm{vol}(P)$ et que les P_j sont contenus dans P par convexité de ce dernier. □

Remarque : si on interdit les angles droits, Erdos et Füredi ont montré qu'il existe un ensemble S de sommets du cube unité de cardinal $\lfloor \frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}})^n \rfloor$ qui ne déterminent que des angles aigus. Pour $n \geq 3$, Grünbaum a montré que le nombre optimal était $2n - 1$.

4.2. Systèmes de racines. — Des références classiques, dont est inspiré ce qui suit, sont [**4**] et [**5**]. Soit V un espace euclidien de dimension finie, muni du produit scalaire euclidien standard noté $\langle \Delta, \Delta \rangle$.

4.2.1. Définition. — Un système de racines dans V est un ensemble fini Φ de vecteurs non nuls (appelés racines) qui satisfont les propriétés suivantes :
– les racines engendrent V comme espace vectoriel ;
– les seuls multiples scalaires d'une racine $\alpha \in \Phi$ qui sont dans Φ sont $\pm\alpha$;
– pour chaque racines $\alpha \in \Phi$, l'ensemble Φ est stable par la réflexion à travers l'hyperplan perpendiculaire à α i ;e. pour toutes racines α, β on a

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha \in \Phi$$

– (condition d'intégralité) si α et β sont des racines dans Φ alors

$$n_{\alpha,\beta} = 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{||\alpha||^2} \in \mathbb{Z}$$

autrement dit $\beta - \sigma_\alpha(\beta) \in \mathbb{Z}\alpha$.

- Le groupe des isométries de V engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans associés aux racines de est nommé le groupe de Weyl de . Comme il agit fidèlement sur l'ensemble fini , le groupe de Weyl est toujours fini.

- Si Φ est un système de racines dans V et W est un sous-espace de V, alors $\Psi = \Phi \cap W$ est un système de racines dans W.

Lemme cf. [**4**] p.148. *Si $\alpha, \beta \in \Phi$ alors l'angle géométrique $\theta_{\alpha,\beta}$ entre ces deux racines appartient à l'ensemble*

$$\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}.$$

Preuve : On a $n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha} = 4\frac{\langle \alpha,\beta \rangle}{||\alpha||^2.||\beta||^2} = 4\cos(\theta_{\alpha,\beta})^2$ qui est donc un entier inférieur ou égal à 4 de sorte que $\cos\theta_{\alpha,\beta} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, ce qui donne le résultat. □

On en déduit ensuite une liste de possibilités sur les triplets $(\theta_{\alpha,\beta}, (n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}), \frac{||\beta||}{||\alpha||})$. Remarquons tout d'abord que $(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}) \notin \{\pm(1,4); \pm(4,1)\}$: en effet sinon on aurait $\theta_{\alpha,\beta} = 0$

mod π de sorte que $\beta = \pm\alpha$ et donc $n_{\alpha,\beta} = n_{\beta,\alpha}$. Dans le cas où $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$, on a

$$\frac{n_{\alpha,\beta}}{n_{\beta,\alpha}} = \frac{||\beta||^2}{||\alpha||^2}$$

de sorte que si on choisit $||\alpha|| \leq ||\beta||$, ce que l'on supposera par la suite, on a $n_{\alpha,\beta} \geq n_{\beta,\alpha}$. On en déduit alors le tableau suivant

$\theta_{\alpha,\beta}$	$(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha})$	$\frac{\|\|\beta\|\|}{\|\|\alpha\|\|}$
$0 \mod \pi$	$\pm(2,2)$	1
$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\pm(1,1)$	1
$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$\pm(2,1)$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$\pm(3,1)$	$\sqrt{3}$

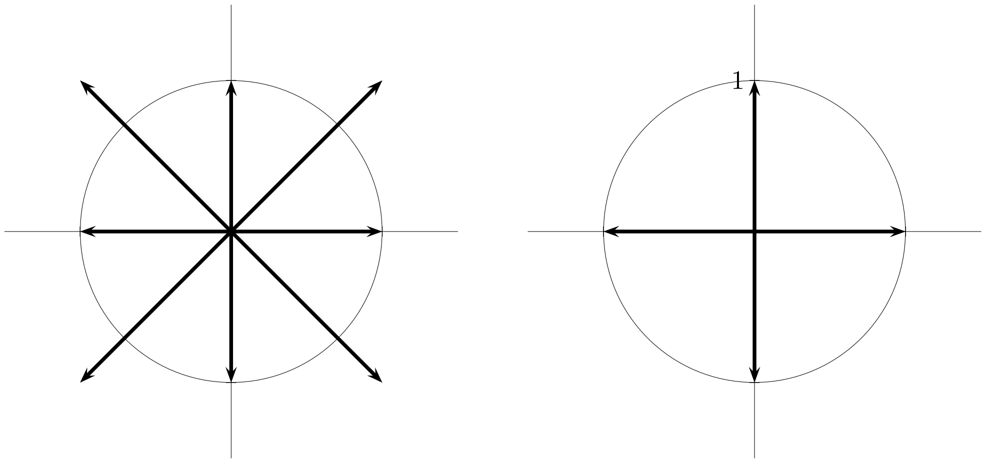
4.2.2. Classification dans $\mathbb{R}^2$. — On se propose ici de déterminer tous les systèmes de racines du plan euclidien.

Proposition *Il existe, à isomorphisme près,* 4 *systèmes de racines dans* $\mathbb{R}^2$ *contenant respectivement* $4, 6, 8$ *et* 12 *éléments.*

Remarque : deux systèmes de racines sont dits isomorphes s'il existe $g \in GL(\mathbb{R}^n)$ tel que $g(\Phi) = \Phi'$ avec pour tout $\alpha, \beta \in \Phi$, $n_{g(\alpha),g(\beta)} = n_{\alpha,\beta}$.

Preuve : Soit α de norme minimal qui, quitte à appliquer une similitude, peut être supposé égal à $(1, 0)$; soit ensuite β tel que $\theta_{\alpha,\beta}$ est minimal. En remarquant que $n_{\alpha,s_\alpha(\beta)} = -n_{\alpha,\beta}$, on peut même supposer que $n_{\alpha,\beta} > 0$ i.e. $\theta_{\alpha,\beta} \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(i) Si $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{\pi}{4}$ alors d'après le tableau précédent et en appliquant les différentes symétries $s_\alpha, s_\beta \cdots$, on obtient la configuration de la figure 17(a). S'il existait une neuvième racine,



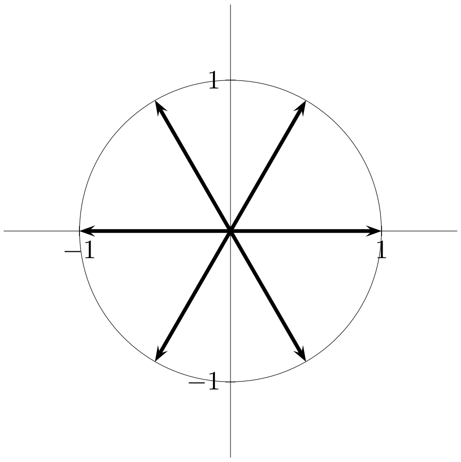
(a) Système de racines B_2 (b) Système de racines $A_1 \times A_1$

après application des différentes symétries s_γ pour γ une des 8 racines déjà construites, on se ramène dans la chambre contenant α, β, i.e. le cône engendré par α et β, ce qui contredirait la minimalité de $\theta_{\alpha,\beta}$.

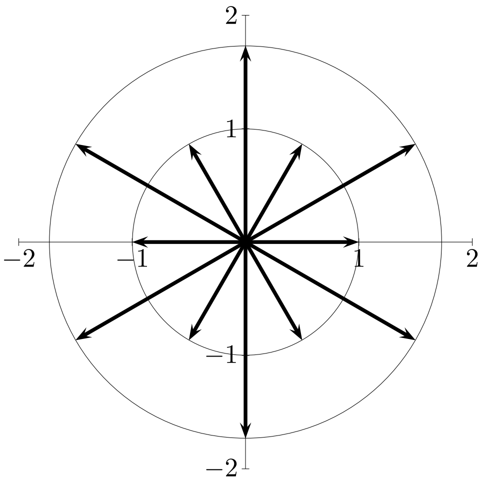
(ii) Si $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{\pi}{2}$, en raisonnant comme en (i), on arrive au système de la figure 17(b).

(iii) Dans le cas où $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{\pi}{3}$, on arrive au système de la figure 17(c).

(iv) Enfin si $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{\pi}{6}$, on obtient le système de la figure 17(d). $\square$



(c) Système de racines A_2



(d) Système de racines G_2

Remarque : il résulte de l'étude précédente que pour $\alpha \neq \pm\beta \in \Phi$, si $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ (resp. < 0) alors $\alpha - \beta \in \Phi$ (resp. $\alpha + \beta \in \Phi$).

Les hyperplans H_α orthogonaux aux racines $\alpha \in \Phi$ forment une partition de V ; les composantes connexes s'appellent les chambres associées à Φ. Pour une forme linéaire $l : V \to \mathbb{R}$ telle que $l(\alpha) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$, on partitionne $\Phi = \Phi^+ \coprod \Phi^-$ selon que $l(\alpha)$ est strictement positif ou strictement négatif. Une racine positive est alors dite *simple* s'il elle ne peut pas s'écrire comme la somme de deux autres racines positives. On a alors les propriétés suivantes :

- si $\alpha, \beta \in \Phi$ avec $\beta \neq \pm\alpha$, l'ensemble I des entiers rationnels j tels que $\beta + j\alpha \in \Phi$ est un intervalle $[-q, p]$ de $\mathbb{Z}$ contenant 0 avec $p - q = -n_{\beta,\alpha}$: cet ensemble de racines est appelé la α-chaîne de β.

  Preuve : Soit p (resp. $-q$) le plus grand (resp. le plus petit) élément de I ; si $[-q, p] \neq I$, il existe alors $r < s \neq r+1$ dans $[-q, p] \cap I$ tels que : $r+k \notin I$ pour tout $k = 1, \cdots, s-r-1$. D'après la remarque précédente, on en déduit alors que $\langle \alpha, \beta + s\alpha \rangle \leq 0$ et $\langle \alpha, \beta + r\alpha \rangle \geq 0$ ce qui est absurde puisque $\langle \alpha, \beta + s\alpha \rangle > \langle \alpha, \beta + r\alpha \rangle$. Par ailleurs on a $s_\alpha(\beta + j\alpha) = \beta + j'\alpha$ avec $j' = -j - n_{\beta,\alpha}$ qui induit donc sur I une bijection décroissante de sorte que $s_\alpha(\beta + p\alpha) = \beta - q\alpha$ avec $p - q = -n_{\beta,\alpha}$. □
- si $\alpha \neq \beta$ sont des racines simples alors $\pm(\alpha - \beta) \notin \Phi$.

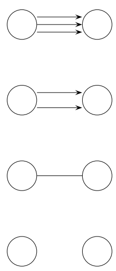
  Preuve : On a $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ et par définition d'une racine simple on en déduit $(\alpha - \beta) \notin \Phi^+$. De même de l'égalité $\beta = \alpha - (\alpha - \beta)$, on obtient que $(\alpha - \beta) \notin \Phi^-$, d'où le résultat. □
- l'angle entre deux racines simples ne peut pas être aigu.

  Preuve : Cela découle directement de la remarque ci-dessus. □
- les racines simples sont linéairement indépendantes.

  Preuve : cf. le paragraphe précédent sur les familles obtusangles. □
- il y a exactement n racines simples et toute racine positive s'écrit de manière unique comme une somme à coefficients positifs ou nuls de racines simples.

  Preuve : Cela découle directement de la définition de racine simple et du fait que les racines simples forment une base de V. □

4.2.3. Le diagramme de Dynkin. — d'un système de racines est le graphe orienté pondéré dont les sommets sont indexés par les racines simples et le poids d'une arête entre deux sommets associés à deux racines simples est 0 (resp. 1, 2, 3) si l'angle entre ces deux racines est $\pi/2$ (resp. $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$) l'arête étant orientée dans les deux derniers cas vers la racine la plus longue



$\theta_{\alpha,\beta} = 5\pi/6$

$\theta_{\alpha,\beta} = 3\pi/4$

$\theta_{\alpha,\beta} = 2\pi/3$

$\theta_{\alpha,\beta} = \pi/2$

Théorème *Les diagrammes de Dynkin des systèmes de racines irréductibles sont ceux donnés dans la figure 17.*

Preuve : On commence par déterminer tous les diagrammes de Dynkin sans orientation (on les appelle les diagrammes de Coxeter) c'est à dire que l'on ne s'intéresse qu'aux angles et pas au longueur : la question est alors de savoir si étant donné un diagramme de Coxeter, il existe des vecteurs unitaires indépendant $e_1, \cdots, e_n$ de l'espace euclidien tels que leurs angles mutuels soient ceux prescrits par le diagramme. Dans l'affirmative un tel diagramme sera dit admissible.

(i) Remarquons tout d'abord que tout sous-diagramme d'un diagramme admissible, obtenu en supprimant des sommets et les arêtes entre eux, est admissible.

(ii) Il y a au plus $(n-1)$ paires de sommets connectés par des arêtes et le diagramme n'a pas de cycles.

Preuve : Si e_i et e_j sont reliés alors $2(e_i, e_j) \leq -1$ et

$$0 < \langle \sum_i e_i, \sum_i e_i \rangle = n + 2 \sum_{i<j} \langle e_i, e_j \rangle$$

d'où la première affirmation. La seconde en découle directement en utilisant (i). $\square$

(iii) Aucun sommet n'a plus de trois arêtes.

Preuve : D'après (i), on se ramène au cas où e_1 est relié à tous les autres sommets de sorte que d'après (ii) il n'y a plus d'autres arêtes. Ainsi comme $e_2, \cdots, e_n$ sont des vecteurs unitaires orthogonaux et que e_1 n'appartient pas à l'espace qu'ils engendrent on a

$$1 = (\langle e_1, e_1 \rangle^2 > \sum_{j=2}^{n} \langle e_1, e_j \rangle^2$$

ce qui donne le résultat puisque $4\langle e_i, e_j \rangle^2$ est égal au nombre de lignes reliant e_i et e_j. $\square$

(iv) Soit dans un diagramme admissible une chaîne de sommets reliés entre eux par une seule ligne tel qu'hormis éventuellement les extrémités, aucun autre sommet n'est relié à un

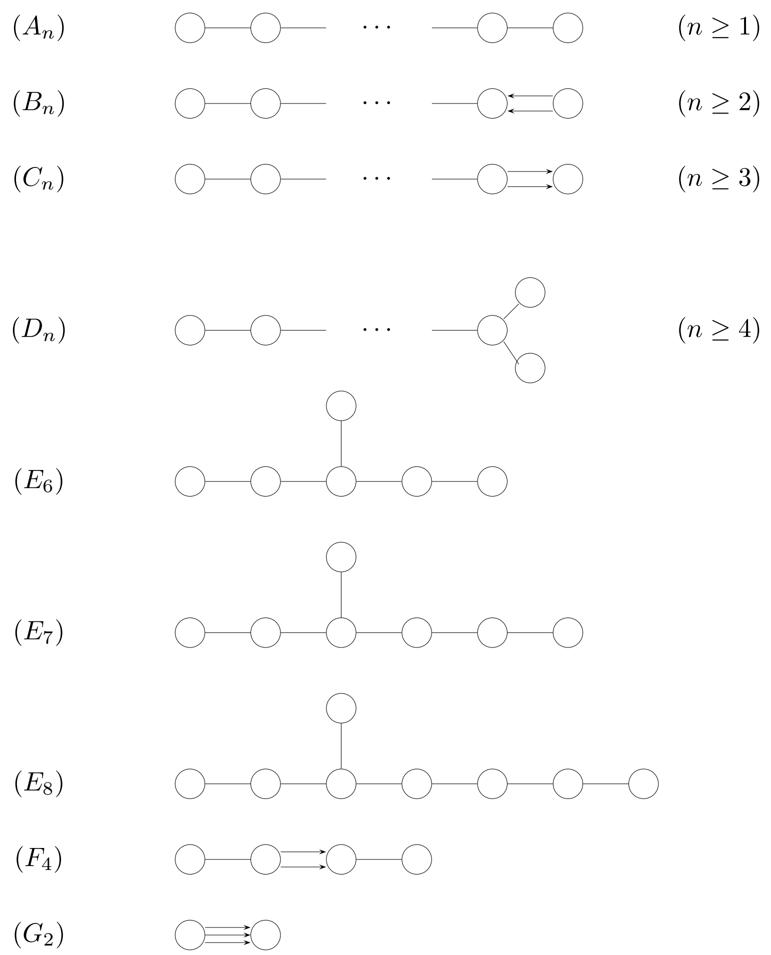


FIG. 17. Diagrammes de Dynkin

autre sommet n'appartenant pas à la chaîne. Alors le diagramme obtenu en remplaçant la chaîne par un unique sommet est encore admissible.

Preuve : Notons $e_1, \cdots, e_r$ les vecteurs unitaires associés à la chaîne de sorte que $e' = e_1 + \cdots + e_r$ est unitaire car

$$\langle e', e' \rangle = r + 2\sum_{i=1}^{r-1} \langle e_i, e_{i+1} \rangle = r - (r-1) = 1.$$

Par ailleurs pour $i > r$, on a $\langle e', e_j \rangle$ est égal soit à $\langle e_1, e_j \rangle$ ou $\langle e_r, e_j \rangle$ ce qui permet de remplacer $(e_1, \cdots, e_r)$ par e'. $\square$

(v) Ainsi d'après (iii) (G_2) est le seul diagramme connexe avec une ligne triple. En utilisant (iv) et (iii), on observe alors qu'il ne peut pas y avoir deux lignes doubles, qu'il y a au plus un sommet avec trois arêtes et qu'il ne peut pas y avoir une ligne double avec un sommet triple. Pour en finir avec les lignes doubles il faut montrer que le diagramme (F_5) obtenu à partir de (F_4) en rajoutant un sommet relié par une ligne simple à l'extrémité droite, n'est pas admissible. Posons $v = e_1 + 2e_2$ et $w = 3e_3 + 2e_4 + e_5$ de sorte que

$$||v||^2 = 3, \quad ||w||^2 = 6, \text{ et } \langle v, w\rangle = 18,$$

ce qui contredit l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

(vi) En ce qui concerne les cas où il y a un sommet d'où part trois arêtes, il faut montrer que D_n, E_6, E_7 et E_8 sont les seuls diagrammes admissibles. Notons p, q, r les longueurs des chaînes partant de ce point triple. Le résultat découle alors du fait que (p, q, r) est égal à permutation près à l'un des triplets $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$ et $(1, 1, m)$ pour $m \geq 1$ quelconque.

Preuve : Notons e_0 le vecteur associé au sommet triple et $e_1, \cdots, e_p$ (resp. $f_1, \cdots, f_q$, resp. $g_1, \cdots, g_r$) les sommets dans l'ordre de chacune des trois chaînes. On pose

$$\begin{aligned} x &= e_p + 2e_{p-1} + \cdots + pe_1 \\ y &= f_q + 2f_{q-1} + \cdots + qf_1 \\ z &= g_r + 2g_{r-1} + \cdots + rg_1 \end{aligned}$$

de sorte que $||x||^2 = p(p+1)/2$, $||y||^2 = q(q+1)/2$ et $||z||^2 = r(r+1)/2$. Par ailleurs e_0 est orthogonal à $e_2, \cdots, e_p, f_2, \cdots, f_q, g_2, \cdots, g_r$ et donc $< e_0, x\rangle = -p/2$, $\langle e_0, y\rangle = -q/2$ et $\langle e_0, z\rangle = -r/2$. Ainsi les vecteurs unitaires $\frac{x}{||x||}$, $\frac{y}{||y||}$ et $\frac{z}{||z||}$ sont deux à deux orthogonaux et e_0 n'appartient pas au sous-espace qu'ils engendrent et donc

$$0 < ||e_0||^2 - \langle e_0, \frac{x}{||x||}\rangle^2 - \langle e_0, \frac{y}{||y||}\rangle^2 - \langle e_0, \frac{z}{||z||}\rangle^2$$

ce qui donne $(p+q)^{-1} + (q+1)^{-1} + (r+1)^{-1} > 1$ et qui conduit classiquement à la liste annoncée. □

□

Remarque : étant donnée une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de Cartan, une racine de $\mathfrak{G}$ par rapport à $\mathfrak{H}$ est une forme linéaire non nulle α sur $\mathfrak{H}$ telle qu'il existe un élément x non nul de $\mathfrak{G}$ avec $[h, x] = \alpha(h)x$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$. Ces racines forment dans l'espace vectoriel $\mathfrak{H}*$ dual de $\mathfrak{H}$ un système de racines réduit au sens précédent. Les algèbres semi-simples correspondant respectivement au système A_n, B_n, C_n, D_n sont $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$. De la coïncidence $C_1 = B_1 = A_1$, on en déduit les isomorphismes

$$\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

$D_2 = A_1 \times A_1$ à $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $C_2 = b_2$ à $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$ et $D_3 = A_3$ à $\mathfrak{so}_6(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$.

5. Angles et distances

On rappelle qu'un espace métrique est dit intrinsèque s'il est connexe par arcs et si la distance entre deux points est l'infinimum des longueurs des courbes reliant x à y ; il est dit excellent si cet infinimum est un minimum. Par exemple $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ muni de la distance euclidienne est intrinsèque sans être excellent ; la sphère unité muni de la distance euclidienne de $\mathbb{R}^3$ n'est pas intrinsèque et donc pas excellent.

5.1. Cas de la sphère. — Nous avons déjà utilisé la distance suivante sur S : $d(x,y) = \arccos\langle x,y\rangle \in [0,\pi]$ qui est bien une distance, l'inégalité triangulaire découlant de l'inégalité des triangles sphériques montrées plus haut. Celle-ci muni alors S d'une métrique excellente et donc intrinsèque, les plus courts chemins étant des parties de grand cercle.

Impossibilité des cartes isométriques : *soit U un ouvert quelconque de S, il n'existe pas d'application $f : U \to \mathbb{R}^2$ qui soit isométrique.*

Preuve : (cf. [**3**] p.392) Soit dans U un triangle sphérique équilatéral et t l'intersection de médiatrice (ce sont des grands cercles) de sorte $r = d(x,t) = d(y,t) = d(z,t)$ et $a = d(x,y) = d(x,z) = d(y,z)$; Soit m le milieu de yz : le triangle sphérique mty est rectangle en m et par symétrie l'angle en t de ytm est $\frac{\pi}{3}$. La loi des sinus donne alors

$$\frac{\sin r}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(\frac{a}{2})}{\sin(\frac{\pi}{3})}$$

et donc $\sin(\frac{a}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin r$. En prenant $0 < r < \pi/2$ et en utilisant la stricte décroissance de $\frac{\sin x}{x}$ sur $]0,\pi/2[$, on en déduit que $\sin(a/2) < \sin r$ et donc $0 < a/2 < r$ avec $\frac{\sin r}{\sin(a/2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2r/a$ on obtient $a < \sqrt{3}r$. Raisonnons alors par l'absurde : soient x', y', z', t' les images respectives de x, y, z, t de sorte que t' est le centre du triangle équilatéral $x'y'z'$ avec $\frac{t'x'}{y'z'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ d'où la contradiction. □

Remarque : le groupe des isométries de S muni de sa distance est le sous-groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui laisse S stable : en effet comme arccos est bijective de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$, conserver $d(.,.)$ est équivalent à conserver le produit scalaire. En remarquant qu'un couple de points antipodaux est envoyé sur un couple de points antipodaux, on observe que O est conservé et donc le groupe des isométries de S est $O(3,\mathbb{R})$.

5.2. Géométrie hyperbolique. — cf. [**3**] §19.2.

L'espace $E = \mathbb{R}^{n+1}$ est identifié au produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et les vecteurs notés $v = (z,t)$ avec $z \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. L'hyperplan affine H est défini par $t = 1$ et on désigne par q la forme quadratique $-\sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2$ de signature $(1,n)$, par ϕ sa forme polaire et on note $Q = q^{-1}(0)$ son cône isotrope. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des droites de E telles q y soit strictement positive et on définit

$$\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{B} \qquad (z,t) \mapsto \frac{z}{t}$$

où $\mathcal{B}$ est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$.

5.2.1. Distance hyperbolique. — Pour $D \neq D' \in \mathcal{P}$, on note $d(D,D')$ la valeur absolue de leur angle lorentzien quand on les considère comme des droites du plan (D,D') qu'elles engendrent muni de la restriction de q à celui-ci :

$$d(D,D') = \operatorname{arcch}\frac{\phi(\xi,\xi')}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}},$$

où ξ et ξ' sont des vecteurs non nuls de respectivement D et D'. Dans $\mathcal{P}$, on appelle *droite* toute intersection non vide de $\mathcal{P}$ avec une droite projective de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: dans $\mathcal{B}$ les droites sont des segments ouverts dont les extrémités sont deux points distincts de S^{n-1} frontière de $\mathcal{B}$. On définit de même la notion de demi-droite d'origine D qui se décrit donc comme l'ensemble des droites engendrées par les vecteurs $\mathrm{ch}t.\xi + \mathrm{sh}t.u$ avec $q(\xi) = 1$, $q(u) = -1$ et $u \in \xi^\perp$, lorsque $t \in \mathbb{R}^+$.

Pour définir l'angle entre deux demi-droites de même origine, on regarde l'angle qu'elles définissent dans le plan tangent au point en question qui via q est muni d'une structure anti-euclidienne. Précisément le fibré tangent à $\mathcal{P}$ s'identifie au quotient de l'ensemble des couples (ξ, u) où $q(\xi) = 1$ et $u \in \xi^\perp$, l'orthogonal pour q, par la relation d'équivalence $(\xi, u) \sim (\xi', u')$ si $\xi' = \epsilon\xi$ et $u' = \epsilon u$ avec $\epsilon = \pm 1$. L'angle entre les demi-droites associées à (ξ, u) et $-\xi, u')$ est alors le réel $\alpha \in [0, \pi]$ défini par

$$\cos\alpha = -\frac{\phi(u,u')}{\sqrt{q(u)q(u')}}.$$

Remarque : on notera que le modèle $\mathcal{B}$ n'est pas conforme, i.e. l'angle entre les demi-droites de même origine (i.e. les segments avec une extrémité commune dans $\mathcal{B}$ et l'autre sur S^{n-1}) n'est pas l'angle « euclidien » que l'on pourrait lire directement dans $\mathcal{B}$.
Formule fondamentale : *soient trois points distincts $z, z', z"$ de $\mathcal{B}$: on note $a = d(z', z")$, $b = d(z", z)$, $c = d(z, z')$ et α l'angle en z des demi-droites d'origine z qui passent par z' et $z"$; on a alors*

$$\mathrm{ch}a = \mathrm{ch}b\ \mathrm{ch}c - \mathrm{sh}b\ \mathrm{sh}c\ \cos\alpha$$

Preuve : Le raisonnement est similaire à celui fait dans le cadre de la géométrie sphérique : soient $D = \Phi^{-1}(z)$, $D' = \Phi^{-1}(z')$ et $D" = \Phi^{-1}(z")$ et choisissons $\xi \in D$, $u, v \in \xi^\perp$ et $k, h \in \mathbb{R}_+$ tels que $q(\xi) = 1$, $q(u) = q(v) = -1$ avec $\xi' = \xi + ku \in D'$ et $\xi" = \xi + hv \in D"$. On a alors

$$q(\xi') = 1 - k^2, \quad q(\xi") = 1 - h^2, \quad \mathrm{ch}c = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}},$$

$$\mathrm{sh}c = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \mathrm{ch}b = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}, \quad \mathrm{sh}b = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}},$$

$$\phi(u,v) = -\cos\alpha, \quad \phi(\xi', \xi") = 1 - \cos\alpha.kh,$$

et donc

$$\mathrm{ch}a = \frac{1-\cos\alpha.kh}{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-h^2}} = \mathrm{ch}b.\mathrm{ch}c - \mathrm{sh}b.\mathrm{sh}c.\cos\alpha.$$

□

Remarque : puisque $\cos\alpha \geq -1$, on a $\mathrm{ch}a \leq \mathrm{ch}b\mathrm{ch}c + \mathrm{sh}b\mathrm{sh}c = \mathrm{ch}(b + c)$ et donc $a \leq b + c$ car ch est croissante. Par ailleurs le cas d'égalité ne peut avoir lieu que si $\alpha = \pi$ ou encore si dans $\mathcal{B}$, z appartient au segment d'extrémités $z', z"$. Il en résulte alors que le segment $[z', z"]$ est le plus court chemin entre z' et $z"$ de sorte que $d(., .)$ muni $\mathcal{B}$ d'une métrique excellente et donc intrinsèque. On notera par ailleurs sur la figure 18 qu'étant donné un point z de $\mathcal{B}$ n'appartenant pas à une droite Δ, il existe une infinité de droites passant par z et parallèle à Δ.
Remarque : Le groupe des isométries de $\mathcal{P}$ contient évidemment le groupe $PO(q)$: il y a en fait égalité, cf. [**3**] 19.4.4. On peut alors montrer que toute mesure sur $\mathcal{B}$ invariante par les isométries est de la forme $k\lambda\omega$ où $k \in \mathbb{R}^*$, ω est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ restreinte à $\mathcal{B}$ et λ est la fonction $z \mapsto (1 - ||z||^2)^{-(n)/2}$.
Loi des sinus : pour un triangle du plan hyperbolique de côtés de longueur a, b, c et d'angles α, β, γ on a les formules :

$$\frac{\sin\alpha}{\mathrm{sh}a} = \frac{\sin\beta}{\mathrm{sh}b} = \frac{\sin\gamma}{\mathrm{sh}c}, \qquad \cos\gamma = \sin\beta\sin\alpha\ \mathrm{ch}c - \cos\beta\cos\alpha$$

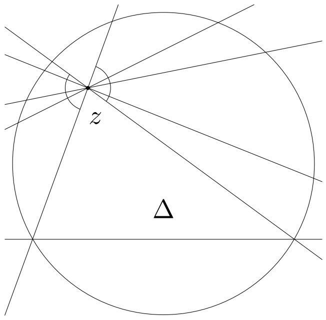


FIG. 18. Infinité de droites parallèles

Preuve :

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(\tfrac{-\mathrm{ch}a+\mathrm{ch}b\mathrm{ch}c}{\mathrm{sh}b\mathrm{sh}c})^2} \\
&= \tfrac{\sqrt{(\mathrm{ch}b-1)^2(\mathrm{ch}c-1)^2-\mathrm{ch}^2a+2\mathrm{ch}a\mathrm{ch}b\mathrm{ch}c-\mathrm{ch}^2b\mathrm{ch}^2c}}{\mathrm{sh}b\mathrm{sh}c} \\
\tfrac{\sin\alpha}{\mathrm{sh}a} &= \tfrac{\sqrt{1-\mathrm{ch}^2a-\mathrm{ch}^2b-\mathrm{ch}^2c+2\mathrm{ch}a\mathrm{ch}b\mathrm{ch}c}}{\mathrm{sh}b\mathrm{sh}c\mathrm{sh}a}
\end{aligned}
$$

relation qui est symétrique en les variables a, b, c et donc égale à $\frac{\sin\beta}{\mathrm{sh}b} = \frac{\sin\gamma}{\mathrm{sh}c}$. En ce qui concerne la deuxième relation, on part de $\mathrm{ch}c = \mathrm{ch}a\mathrm{ch}b - \mathrm{sh}a\mathrm{sh}b\cos\gamma$ puis

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}c &= \mathrm{ch}b(\mathrm{ch}b\mathrm{ch}c - \mathrm{sh}b\mathrm{sh}c\cos\alpha) - \mathrm{sh}^2b\tfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\gamma \\
&= \mathrm{ch}^2b_chc - \mathrm{ch}b\mathrm{sh}^2b\cos\alpha\tfrac{\sin\gamma}{\sin\beta} - \mathrm{sh}^2b\cos\gamma\tfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\
&= \tfrac{\mathrm{ch}b\cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta} \\
&= \tfrac{\sin\gamma\cos\alpha}{\sin\beta}(\tfrac{\mathrm{ch}c\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}) + \tfrac{\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\beta} \\
&= \mathrm{ch}c\cos^2\alpha + \tfrac{\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\beta} \\
&= \tfrac{\cos\beta\cos\alpha+\cos\gamma}{\sin\beta\sin\alpha}
\end{aligned}
$$

□

5.2.2. Le modèle conforme $\mathcal{C}$. — On considère la projection stéréographique $f : S^n\backslash v \to \mathbb{R}^n$ de pôle nord v et appelons Σ l'hémisphère sud de S^n. Soit $\pi : (z,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$; restreinte à Σ et à $\mathcal{B}$, π est bijective, on notera g son inverse. On pose $\Xi = f \circ g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ et $\Omega = \Xi^{-1}$. On appelle modèle conforme $\mathcal{C}$ de l'espace hyperbolique, l'ensemble $\mathcal{B}$ muni de la métrique δ définie par $\delta(x,y) = d(\Omega(x), \Omega(y))$ où d est la distance hyperbolique de $\mathcal{B}$. Signalons les résultats suivant dont le lecteur pourra trouver des preuves dans [**3**] §19.6.

– Soit D la droite de $\mathcal{B}$ portée par la droite affine $\bar{D}$ qui coupe S^{n-1} en u, v. On remarque alors que $g(\bar{D})$ est un cercle de S^n qui coupe S^{n-1} en u, v à angle droit. Ainsi les droites de $\mathcal{C}$ sont les arcs de cercles ouverts intersection avec $\mathcal{B}$ des cercles orthogonaux à S^{n-1} ; les demi-droites de $\mathcal{C}$ sont des arcs semi-ouverts.
– Le groupe des isométries de $\mathcal{C}$ est engendré par les restrictions à $\mathcal{C}$ des inversions de $\mathbb{R}^n$ qui laissent $\mathcal{C}$ stable et de pôle extérieur à $\mathcal{C}$ et par les symétries hyperplanes de centre 0. En particulier en dimension 2, les bijections holomorphes (resp. anti holomorphes) sont

les restrictions au disque des homographies de la formes

$$z \mapsto \frac{e^{i\theta}z+a}{\bar{a}e^{i\theta}z+1} \qquad \text{resp. } z \mapsto \frac{e^{i\theta}\bar{z}+a}{\bar{a}e^{i\theta}\bar{z}+1}$$

On en déduit que le modèle $\mathcal{C}$ est conforme : on notera qu'en 0 les angles euclidiens et hyperboliques de $\mathcal{B}$ coincident ce qui est donc encore vrai pour $\mathcal{C}$, on conclut alors en utilisant que le groupe des isométries de $\mathcal{C}$ conserve les angles.

– La métrique de $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\delta(x,y) = \Big|\log(\frac{xu}{xv}/\frac{yu}{yv})\Big|$$

où u, v désigne les points de S^{n-1} où le cercle orthogonal à S^{n-1} passant par x, y coupe S^{n-1}. On en déduit alors que les cercles de $\mathcal{C}$ de centre z sont les cercles euclidiens contenu dans S^1 du faisceau de cercle contenant S^1 et de point limite z.

Remarque : on peut aussi obtenir ce résultat en utilisant la formule $\mathrm{ch}a = \mathrm{ch}b\ \mathrm{ch}c - \mathrm{sh}b\ \mathrm{sh}c\ \cos\alpha$.

5.2.3. Le modèle $\mathcal{H}$ du demi-espace de Poincaré. — On considère l'image de $\mathcal{C}$ par une inversion de $\mathbb{R}^n$ dont le pôle est situé sur S^{n-1} : on note H l'hyperplan image de S^{n-1}.

– Les droites de $\mathcal{H}$ sont les droites-cercles orthogonales à H.
– Pour $n = 2$ la distance hyperbolique entre $x = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ est donnée par la formule

$$\mathrm{ch}d(z,z') = \frac{(x-x')^2+y^2+y'^2}{2yy'}$$

et que la mesure invariante est $\frac{dxdy}{y^2}$ puis que le sous-groupe des isométries s'identifie à $PGL_2(\mathbb{R})$, où les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant positif (resp. négatif) agissent par les homographies

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{resp. } z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

Ainsi le groupe des automorphismes "holomorphes" et géométriques sont les mêmes ; on pourra comparer avec ce qui passe pour la sphère de Riemann où $SO(3,\mathbb{R}) \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, ou encore le plan complexe $\mathbb{C} \rtimes SO(2) \hookrightarrow \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\times$.

– Le groupe des isométries est simplement 3-transitif sur le bord $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

5.2.4. Quelques propriétés des triangles hyperboliques. — Ce qui suit est inspiré largement de l'excellent papier [**6**].

Formule de Gauss-Bonnet : *soit $\mathcal{T}$ un triangle du disque hyperbolique $\mathcal{B}$ dont les angles sont α, β et γ. L'aire de $\mathcal{T}$ est alors égale à $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.*

Preuve : On considère d'abord le cas où les trois points sont sur le bord : par exemple dans $\mathcal{C}$, on considère le triangle dont l'intérieur est $-1 \leq x \leq 1$ et $\sqrt{1-x^2} \leq y \leq +\infty$ ce qui donne

$$\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty}\frac{dy}{y^2}dx = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

Par ailleurs comme le groupe des isométries opère transitivement sur les triplets de points distincts du bord, le résultat est valide quelque soit le triangle dont les 3 sommets sont au bord du disque. Ensuite pour un angle $\alpha \in [0, \pi]$, la figure 19 montre que l'aire de d'un triangle $T(\alpha)$ dont un angle est α et les deux autres sommets étant à l'infini est une fonction $f(\alpha)$ telle que $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)-\pi$ d'où il résulte que $F(\alpha) = \pi - f(\alpha)$ vérifie $F(\alpha+\beta) = F(\alpha)+F(\beta)$

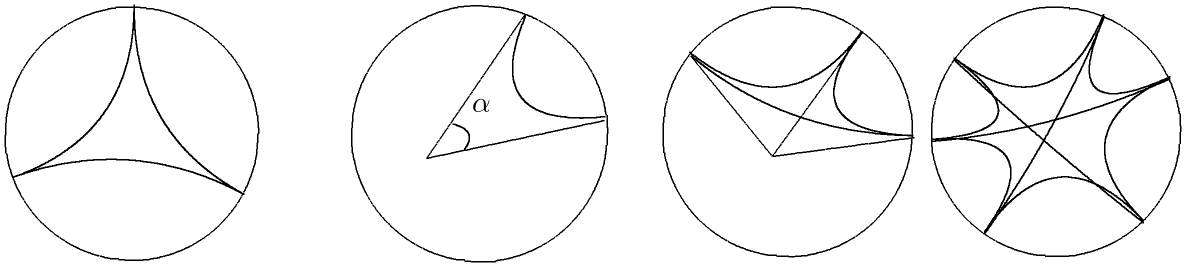


FIG. 19.

et donc par continuité de F, il existe c telle que $F(\alpha) = c\alpha$. Comme $f(\pi) = 0$, on obtient $c = 1$ et $f(\alpha) = \pi - \alpha$. Considérons finalement un vrai triangle $T(\alpha, \beta, \gamma)$ dont les trois sommets sont à distance finie. En prolongeant les côtés jusqu'à l'infini, on obtient un hexagone idéal comme sur la figure 19. Chaque sommet du triangle détermine deux copies isométriques de $T(\alpha)$, $T(\beta)$ et $T(\gamma)$ dont l'une exactement contient $T(\alpha, \beta, \gamma)$. L'aire de l'hexagone est donc

$$2\Big[(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)\Big] - 2\mathrm{aire}(T(\alpha, \beta, \gamma)).$$

Comme par ailleurs cet hexagone se découpe en quatre triangles idéaux, son aire vaut 4π de sorte que l'aire de $T(\alpha, \beta, \gamma)$ est bien égale à $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. $\square$

Remarque : il résulte facilement de la formule précédente que dans le disque de Poincaré, deux polygones de même aire sont équidécomposables tout comme dans le cas euclidien.

Remarque : l'aire d'un triangle est bornée par π alors que les longueurs des côtés peuvent être arbitrairement grands. L'aire d'un disque de rayon ρ est donnée par le calcul suivant :

$$A(\rho) = \int_0^{\mathrm{th}\rho} \frac{2\pi t}{(1 - t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2}(\mathrm{ch}\rho - 1).$$

On remarque que cette aire tend vers l'infini quand le rayon tend vers l'infini, il en résulte donc que le rayon ρ du cercle inscrit dans un triangle est borné indépendamment du triangle puisque $\frac{\pi}{2}(\mathrm{ch}\rho - 1) \leq \pi$ entraîne $\rho \leq 1$. Par conséquent en géométrie hyperbolique, les triangles sont fins : chaque côté n'est pas très éloigné de la réunion des deux autres. On en déduit donc la propriété suivante :

Hyperbolicité de l'espace hyperbolique (Gromov) : *pour $\delta = 2$, $\mathcal{C}$ est δ-hyperbolique, i.e. pour tout triangle hyperbolique, tout point situé sur un des cotés est à distance au plus δ d'un point situé sur l'un des deux autres côtés.*

Pavages hyperboliques : soient p, q, r des entiers ≥ 3 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Le triangle hyperbolique dont les angles valent $\alpha = \pi/p$, $\beta = \pi/q$ et $\gamma = \pi/r$ est alors un triangle paveur au sens ci-dessus. La situation est donc totalement différente des cas euclidiens et elliptiques, puisque l'on obtient une infinité de pavages du plan hyperbolique.

5.3. Métriques de Hilbert. — :

Formule de Laguerre :

– soit E le plan euclidien orienté et soit $E_{\mathbb{C}}$ le complexifié ; on note I, J les droite isotropes. Pour deux droites D, D' de E, alors l'angle orienté entre D et D' est égal à $\frac{1}{2}\log[D_{\mathbb{C}}, D'_{\mathbb{C}}, I, J]$ où $[D_{\mathbb{C}}, D'_{\mathbb{C}}, I, J]$ est le birapport dans $P(E_{\mathbb{C}})$. L'orientation consiste alors à choisir I et J.

– Dans le cas lorentzien, notons I, J les droites isotropes de (E, q), alors pour deux droites D, D' où q est strictement positive, la mesure de l'angle hyperbolique orienté entre D et D' est donné par
$$\mathrm{meas}(\widehat{DD'}) = \frac{1}{2}\log([D, D', J, I])$$
et que $\overline{DD'} := \frac{1}{2}|\log([D, D', J, I])|$ définit une distance telle que
$$\widehat{DD'} = \mathrm{argch}\Big(\frac{< v, v' >}{\sqrt{q(v)}\sqrt{q(v')}}\Big)$$
où v et v' sont des vecteurs directeurs de respectivement D et D'.

Soit V est un espace réel affine de dimension finie et soit C un convexe ouvert borné. Pour $x \neq y \in C$, on considère la droite (xy) qui coupe l'adhérence de C en deux points u du côté de x et v du côté de y. On pose alors
$$d(x, y) = \log[x, y, v, u] == \log(\frac{v - x}{v - y} : \frac{u - x}{u - y})$$
où $\frac{v-x}{v-y}$ désigne le quotient $\frac{f(v)-f(x)}{f(v)-f(y)}$ pour une (et donc toutes) bijection affine f de (xy) sur $\mathbb{R}$. L'application d définit une métrique sur C qui dans le cas du disque unité redonne la distance hyperbolique du disque de Poincaré.

On vérifie l'inégalité triangulaire pour trois points $x, y, z \in C$. Dans le cas où ils sont alignés alors $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Dans le cas où x, y, z ne sont pas colinéaires, on introduit les points suivants suivant la figure 20 :

– u, v les points de (xy) sur le bord γ de C ;
– a, c les points de (zy) sur γ ;
– b, d les points de (xz) sur γ ;
– $p = (ab) \cap (cd)$;
– $u' = (ab) \cap (xy)$, $z' = (pz) \cap (xy)$ et $v' = (dc) \cap (xy)$.

D'après l'invariance du birapport par homographies, on en déduit que
$$[x, z, d, b] = [x, z', v', u'] \qquad [z, y, c, a] = [z', y, v', u']$$
Par ailleurs on a
$$[x, y, v', u'] = [x, z', v', u'].[z', y, v', u'] \qquad [x, y, v, u] \leq [x, y, v', u']$$
On en déduit alors que $d(x, y) \leq \log[x, z', v', u'] + \log[z', y, v', u'] = d(x, z) + d(z, y)$.

6. Développements

– coniques : bissectrices et tangentes application à la trissection de l'angle via la conique $y = x^2/2$;
– trissection des angles : impossibilité avec la règle et le compas et construction via la règle marquée ou les origami ;
– triangles de lumières [**2**] (à la limite)
– rotation dans $\mathbb{R}^3$ avec les quaternions ;
– triangles paveurs plus polyèdres paveurs (impossibilité pour $p \geq 7$) ;
– triangles podaires ;
– loi des sinus et théorème de Morley ;
– angles eccentriques sur une ellipse et cocyclicité

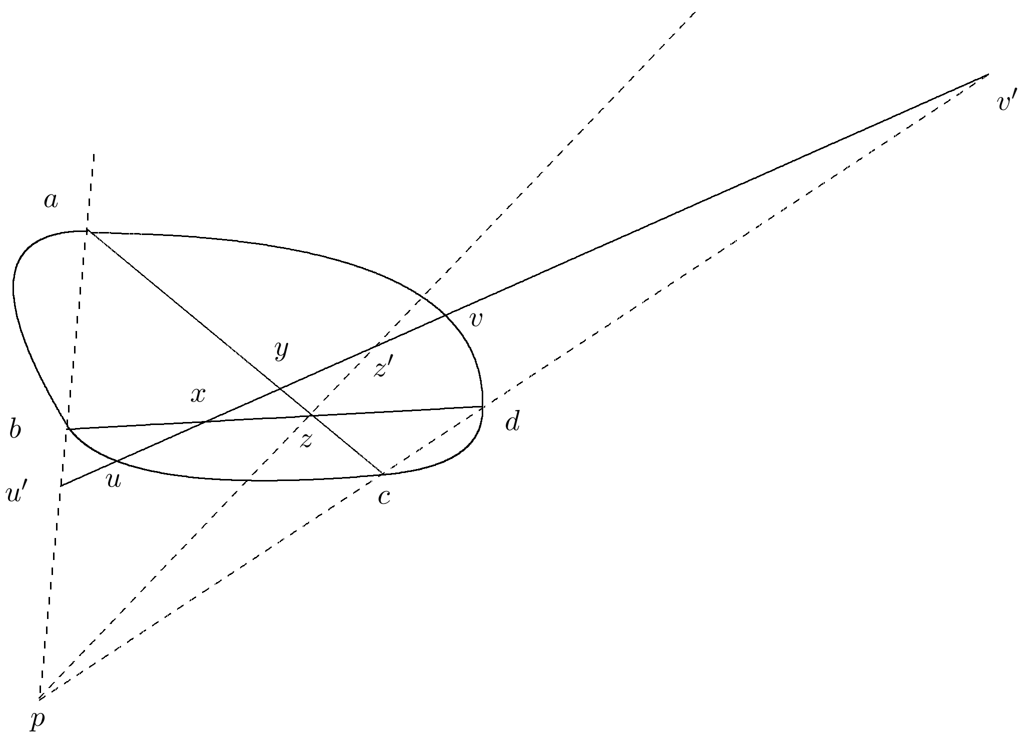


FIG. 20. Inégalité triangulaire pour la métrique de Hilbert

– problème de Steiner, point de Fermat
– triangles sphériques [**3**] : formule fondamentale plus carte conformes et isométriques ;
– angles lorentziens ;
– droites de Simpson + Steiner [**7**]
– symbole des polyèdres réguliers ;
– théorème de Cauchy ;
– invariants de Dehn [**1**] ;
– théorème de Jacobi-Kronecker et généralisation en dimension 3 ;
– systèmes de racines en dimension 2 ;
– diagrammes de Dynkin [**4**] ;
– géométrie hyperbolique...
– simplicité de $SO(3,\mathbb{R})$ (à la limite) [**9**].

7. Questions

– **Droite de Simson** : montrez que les pieds A_1, B_1, C_1 des trois perpendiculaires menées d'un point P sur les trois côtés d'un triangle sont alignés si et seulement si P appartient au cercle circonscrit.
  Preuve : Supposons que P appartienne au cercle circonscrit ; comme A_1, B, C_1, P sont cocycliques on a

$$(\widehat{\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \pi - (\widehat{\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BA_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{PA_1}, \overrightarrow{PC_1}}),$$

$$(\widehat{\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PC}}) = (\widehat{\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PA}}) - (\widehat{\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PA}}) = (\widehat{\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PA}}) - (\widehat{\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PC_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{PC_1},\overrightarrow{PA}}).$$

Comme P, A_1, C, B_1 sont cocycliques, on a $(\widehat{\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PC}}) = (\widehat{\overrightarrow{B_1A_1},\overrightarrow{B_1C}})$ et comme P, C_1, B_1, A sont cocycliques,

$$(\widehat{\overrightarrow{B_1A},\overrightarrow{B_1C_1}}) = \pi - (\widehat{\overrightarrow{PC_1},\overrightarrow{PA}}) = \pi - (\widehat{\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PC}}) = \pi - (\widehat{\overrightarrow{B_1A_1},\overrightarrow{B_1C}}) = (\widehat{\overrightarrow{B_1A},\overrightarrow{B_1A_1}})$$

et donc A_1, B_1, C_1 sont alignés. Réciproquement on remonte les calculs ci-dessus de sorte que $(\widehat{\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PA}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ et donc P appartient au cercle circonscrit. □

– Quels sont les angles dièdres de deux faces adjacentes d'un tétraèdre régulier :
  Preuve : En utilisant qu'une base est un triangle équilatéral dans lequel les médiatrices sont les médianes qui se coupent en leur tier, on obtient $\cos\alpha = 1/3$. On peut aussi raisonner en géométrie sphérique : le triangle sphérique associé est équilatéral, les longueurs des côtés étant égale à $\pi/3$ ce qui donne par la relation fondamentale de la géométrie sphérique $\cos\alpha = 1/3$ et donc $\alpha = \arccos(1/3)$. □
– Donnez les angles dièdres du tétraèdre engendré par trois arêtes ortonormales.
  Preuve : On calcule directement $\cos\phi = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □
– Quelle est la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe à n sommets.
  Preuve : A partir d'un sommet, on triangule le polygone en $n-2$ triangles dont la somme des angles est $(n-2)\pi$. □
– Montrez que 5 points du plan affine euclidien déterminent toujours un angle obtus.
  Preuve : Si les 5 points peuvent déterminer un pentagone convexe alors comme la somme des angles de celui-ci est égale à 3π alors il possède un angle de mesure $\geq \frac{3\pi}{5}$ d'où le résultat. Sinon il y a un point contenu dans l'enveloppe convexe de trois autres qui forment un triangle. Ce point voit les trois arêtes du triangle sous trois angles dont la somme est 2π et donc l'un des angles est de mesure $\geq \frac{2\pi}{3}$. □
– Expliquez l'intérêt des antennes paraboliques.
– Décrivez $\mathcal{T}/GA(E)$, $\mathcal{T}/SLA(E)$.
– Montrez que les intersections des bissectrices intérieures d'un quadrilatère forment un quadrilatère inscriptible (i.e. les 4 sommets sont cocycliques). Montrez que si le quadrilatère est un parallélogramme alors les bissectrices intérieures et extérieures forment deux rectangles.
  Preuve : D'après le théorème de l'angle inscrit, il s'agit de montrer, avec les notations de la figure 21 que $(\widehat{\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NK}}) + (\widehat{\overrightarrow{LK},\overrightarrow{LM}}) = \pi$:

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NK}}) + (\widehat{\overrightarrow{LK},\overrightarrow{LM}}) &= \pi(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{ND}}) + (\widehat{\overrightarrow{LC},\overrightarrow{LB}}) \\
&= \pi - (\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AN}}) - (\widehat{\overrightarrow{DN},\overrightarrow{DA}}) + \pi - (\widehat{\overrightarrow{BL},\overrightarrow{BC}}) - (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CL}}) \\
&= \frac{1}{2}\Big((\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) + (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})\Big) \\
&= \frac{1}{2}(-2\pi) = \pi
\end{aligned}$$

□

– au rugby, pour transformer un essai, le buteur doit placer son ballon sur une ligne parallèle à la ligne de touche, passant par le point où l'essai a été marqué. Expliquez comment placer le ballon pour que l'angle sous lequel on voit les poteaux, y soit maximal.

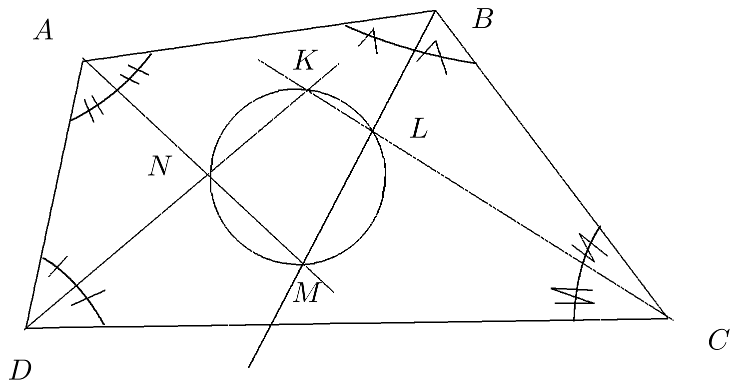


FIG. 21.

Preuve : On considère les lignes de niveau où l'angle est constant : ce sont des cercles passant par les poteaux. L'angle sera maximal quand le cercle en question sera tangent à la ligne autorisée. On connaît donc le rayon de ce cercle, c'est la distance du centre des poteaux à l'endroit où le ballon a été aplati : en utilisant que le centre du cercle appartient à la médiatrice des poteaux, il est alors aisé de placer le centre du cercle et donc ensuite l'endroit cherché. □

– Montrez que s'il existe un pavage du plan, obtenu à partir d'un unique polygone régulier à n côtés et de ses isométriques, alors $n = 3, 4, 6$.

Preuve : L'angle intérieur en un sommet est $\pi(1 - 2/n)$ doit être tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ avec

$$2\pi = k\pi(1 - 2/n), \qquad (k - 2)(n - 2) = 4,$$

d'où le résultat. □

8. Exercices

Exercice 8.1. — **Problème de Steiner** *: trouvez un point M intérieur à un triangle ABC tel que $MA + MB + MC$ soit minimal.*

Exercice 8.2. — **Théorème de Morley** *: montrez que les trois points d'intersection des trissectrices intérieures d'un triangle forment un triangle équilatéral.*

Exercice 8.3. — **Triangles podaires** *: soit ABC un triangle et P un point intérieur au triangle. On considère A_1, B_1, C_1 les pieds des perpendiculaires menées de P aux cotés du triangle. Le triangle $A_1B_1C_1$ est dit triangle podaire de ABC pour P. Soit alors $A_2B_2C_2$ le triangle podaire de $A_1B_1C_1$ pour P et $A_3B_3C_3$ le triangle podaire de $A_2B_2C_2$ pour P.*

(i) Montrez que ABC et $A_3B_3C_3$ sont semblables.

(ii) Calculez le rapport de similitude.

(iii) Trouver P tel que l'aire de $A_3B_3C_3$ soit minimale.

Exercice 8.4. — *Soit E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont positifs distints et non nuls. On appelle* ***angle eccentrique*** *d'un point $P \in E$ un réel t tel que $P = (a\cos t, b\sin t)$.*

(1) Montrez que quatre points de E d'angles eccentriques respectifs α_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sont cocycliques si et seulement si la matrice 4×4 dont la i-ème ligne est

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & \cos 2\alpha_i \end{pmatrix}$$

est de déterminant nul.

(2) *Montrez que le déterminant ci-dessus est égal à*

$$32\sin(\frac{\sum_{i=1}^4 \alpha_i}{2}) \prod_{1\leq i<j\leq 4} \sin(\frac{\alpha_i-\alpha_j}{2})$$

(3) *Avec les notations de (1) et en supposant les points distincts, montrez que ceux(ci sont cocycliques si et seulement si la somme de leurs angles eccentriques est un multiple entier de 2π.*

Exercice 8.5. — *Une rotation de $SO(3)$ sera notée par $r=(k,\theta)$ où k est le vecteur unitaire de l'axe de la rotation et θ son angle. Soient alors $r=(OA,2\alpha)$ et $s=(OB,2\beta)$ deux rotations telles que $\frac{\alpha}{\pi}$ et $\frac{\beta}{\pi}$ soient irrationnels. Montrez que si l'on excepté une infinité dénombrable de valeurs pour la mesure c de l'angle entre les axes OA et OB, le groupe engendré par r et s est dense dans $SO(3)$.*

Exercice 8.6. — *On note H le corps des quaternions et soit G ceux de norme 1 : $G=\{a+bi+cj+dk \ / \ a^2+b^2+c^2+d^2=1\}$. On considère alors l'action de G sur H par automorphismes intérieurs.*

(1) *En restreignant cette action à l'ensemble P des quaternions purs, montrez que l'on obtient alors un isomorphisme s :$G/\{\pm 1\} \simeq O(3,\mathbb{R})^+$. La suite exacte associée est-elle scindée ?*
(2) *Montrez que $s_{bi+cj+dk}$ est une rotation d'angle π d'axe (b,c,d).*
(3) *Montrez que $s_{a+b_i+cj+dk}$ est une rotation d'axe (b,c,d) et d'angle* $\arccos a$.
(4) *Expliciter une méthode de calcul du composé de deux rotations.*

Exercice 8.7. — *On se place dans le plan complexe P. Etant donné 4 points de P d'affixes respectives z_1,z_2,z_3,z_4, on définit leur birapport, que l'on note $W(z_1,z_2,z_3,z_4)$, comme le nombre :*

$$W(z_1,z_2,z_3,z_4)=\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right) \ / \ \left(\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\right)$$

(1) *Montrer que les quatre points d'affixes z_1,z_2,z_3,z_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si $W(z_1,z_2,z_3,z_4)$ est réel.*
(2) *On rajoute formellement un "point à l'infini" que l'on note ∞ et on étend les opérations de $\mathbb{C}$ en posant : $\infty=1/0$, avec $\infty/\infty=1$ et*

$$\forall z \ z+\infty=\infty \quad \forall z\neq 0 \ z\times\infty=\infty$$

$$\forall z\neq\infty \ z-\infty=\infty, \ \infty/z=\infty, \ z/\infty=0$$

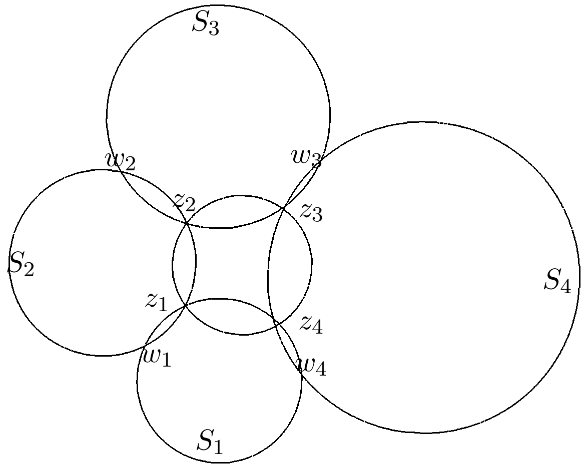
Remarque : $0\times\infty$ n'est pas défini, tout comme $\infty-\infty$.

Montrer que les points d'affixes z_1,z_2,z_3 sont alignés si et seulement si $W(z_1,z_2,z_3,\infty)$ est réel.

(3) *Soient S_1,S_2,S_3 et S_4 quatre cercles du plan, tels que S_1 coupe S_2 en deux points z_1,w_1, qui lui-même coupe S_3 en z_2,w_2, qui coupe S_4 en z_3,w_3 qui coupe S_1 en z_4,w_4. On suppose que les points z_1,z_2,z_3,z_4 sont alignés ou cocycliques, montrer alors qu'il en est de même des points w_1,w_2,w_3,w_4.*

Indication : utiliser que z_1,z_2,w_1,w_2 sont cocycliques.

Généraliser au cas où S_1,S_2,S_3,S_4 sont des cercles ou des droites.



(4) Soient quatre droites en position générale : D_1, D_2, D_3, D_4*. On pose* $z_{i,j} = D_i \cap D_j$ *et* $S_{i,j,k}$ *le cercle circonscrit aux triangles formés par les droites* D_i, D_j, D_k*.*

(i) Montrer que $S_{1,2,3}$ *et* $S_{1,2,4}$ *qui se coupent en* $z_{1,2}$ *ne sont pas tangents ; on note* $z_{1,2,3,4}$ *le deuxième point d'intersection.*

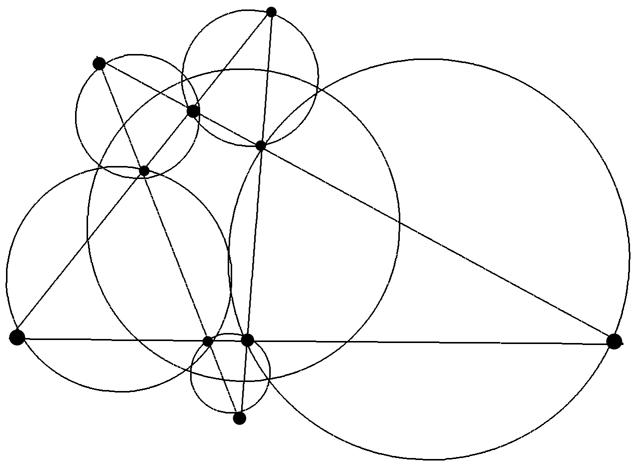
(ii) En considérant les quatre cercles-droites $S_{1,2,3}, D_3, D_4, S_{1,2,4}$*, montrer, en appliquant la question (3), que* $z_{1,2,3,4}$ *appartient au cercle* $S_{2,3,4}$*.*

(iii) En déduire que les cercles $S_{1,2,3}, S_{1,2,4}, S_{2,3,4}, S_{1,3,4}$ *sont concourants en* $z_{1,2,3,4}$ *; on l'appellera le point central des droites* D_1, D_2, D_3, D_4*.*

(5) Soient cinq droites $D_1, \cdots, D_5$ *en position générale. Montrer que les* 5 *points centraux* $z_{1,2,3,4}, z_{1,2,3,5}, z_{1,2,4,5}, z_{1,3,4,5}$ *et* $z_{2,3,4,5}$ *des cinq quadruplets de droites sont cocycliques ou alignés.*

Indication : utiliser les cercles $S_{1,3,4}, S_{1,2,3}, S_{1,2,5}, S_{1,4,5}$ *et la question (3).*

En déduire que les intersections des cercles circonscrits aux triangles externes successifs d'une étoile à cinq branches sont cocycliques.



Exercice 8.8. — *(**van der Berg** cf. [**10**] p.14) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 ; montrez que les racines de P' sont les foyers de l'ellipse de Steiner du triangle formé par les racines de P.*

9. Solutions

8.1 A partir d'une solution M_0, on considère la ligne de niveau $MB+MC = M_0B+M_0C$ qui est ellipse de foyer B et C. L'ellipse étant convexe, M_0 est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur l'ellipse. Mais la tangente en un point d'une ellipse est bissectrice extérieure de l'angle formé par les rayons vecteurs aboutissant en ce point. Il en résulte que $\widehat{AM_0C} = \widehat{AM_0C}$ qui par symétrie est encore égal $\widehat{CM_0B}$. Ainsi le point M_0 est donc le point d'où l'on voit les trois côtés du triangle sous le même angle, c'est le point de Steiner (Fermat, Toricelli ?) du triangle. On le construit en considérant les triangles équilatéraux extérieurs sur les côtés du triangle, dont on note A', B', C' les sommets. Le point cherché est alors l'intersection des droites $A'A, B'B, CC'$ (considérer les rotations d'angle $\pi/3$ de sommets A, B ou C.
Remarque : pour être certain que le point soit à l'intérieur, il faut supposer que les angles du triangle sont strictement inférieurs à $2\pi/3$.

8.2 Les notations sont celles de la figure 22.
Première preuve trigonométrique, cf. [**2**] p.332 : l'idée est d'exprimer RQ comme une quantité invariante par permutation des lettres de sorte que $RQ = RP = PQ$. On applique la loi des sinus à ABC en notant r le rayon du cercle circonscrit ce qui donne

$$RA = 2r\frac{\sin\beta\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

En utilisant $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ et $\alpha+\beta+\gamma = \pi/3$, on obtient

$$\begin{aligned}\tfrac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} &= 3 - 4\sin^2(\tfrac{\pi}{3}-\gamma) = -1 + 4\cos^2(\tfrac{\pi}{3}-\gamma) \\ &= 1 + 2\cos(\tfrac{2\pi}{3}-2\gamma) = 1 - 2\cos(\tfrac{\pi}{3}+2\gamma) \\ &= 1 + 2\Big(2\sin\gamma\sin(\tfrac{\pi}{3}+\gamma) - \tfrac{1}{2}\Big)\end{aligned}$$

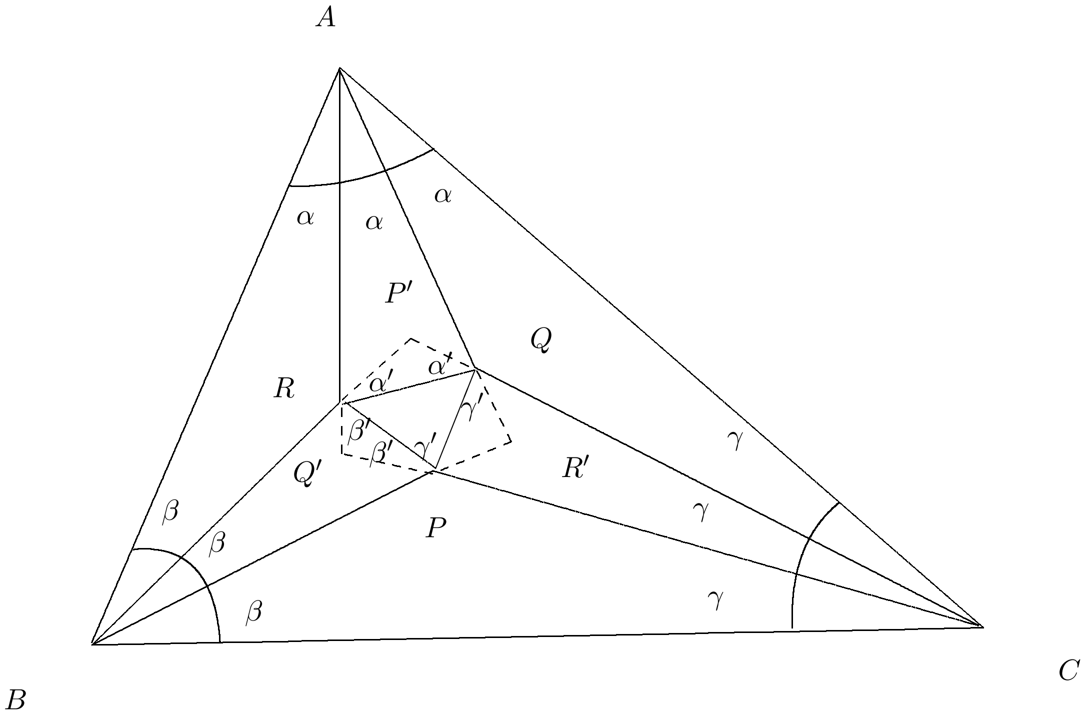


FIG. 22. Théorème de Morley

et donc $RA = 8r \sin\beta \sin\gamma \sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)$. Par symétrie, on obtient aussi $QA = 8r \sin\beta\sin\gamma\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)$ et donc

$$\frac{RA}{\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)} = \frac{QA}{\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)} = 8R\sin\beta\sin\gamma$$

et comme $(\frac{\pi}{3}+\gamma)+(\frac{\pi}{3}+\beta)+\alpha = \pi$, et en utilisant le fait qu'un triangle à similitude près est défini par un angle et les longueurs des deux côtés adjacents, la loi des sinus montre que le triangle ARQ a pour angle $\frac{\pi}{3}+\gamma$, $\frac{\pi}{3}+\beta$ et α de sorte que la troisième égalité de cette loi donne $RQ = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ formule qui est symétrique en A, B, C et donc le triangle est bien équilatéral.

Deuxième preuve géométrique cf. [**2**] p.372 : considérons les angles $\alpha' = \frac{\pi}{3}-\alpha$, $\beta' = \frac{\pi}{3}-\beta$ et $\gamma' = \frac{\pi}{3}-\gamma$. On considère alors un triangle équilatéral quelconque du plan PQR à l'extérieur duquel on construit des triangles isocèles $P'RQ$, $Q'PR$ et $R'QP$ dont les angles égaux sont respectivement α', β' et γ'. On note alors $A = (R'Q)\cap(Q'R)$, $B = (P'R)\cap(R'P)$ et $C = (Q'P)\cap(P'Q)$. On a alors $\widehat{P'QA} = \pi-\alpha'-\gamma'-\pi/3 = \beta'$ et de même pour les autres angles. On en déduit alors que $\widehat{RAQ} = \pi - 2\alpha'-\beta'-\gamma' = \alpha$. En outre (PP') est la médiatrice de RQ et donc la bissectrice intérieure de $\widehat{BP'C}$ avec

$$\widehat{BPC} = 2\pi - 2\alpha' - \beta' - \gamma' - \pi/3 = \pi - \alpha' = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{BP'C}$$

et donc P est le centre du cercle inscrit de $P'BC$. Donc (CP) est la bissectrice de $\widehat{QCP}$ soit $\widehat{QCP} = \widehat{PCB}$ ce qui donne l'égalité des trois angles au sommets de C et donc de A et B

par symétrie du problème. Il suffit pour conclure d'appliquer une similitude quelconque qui envoie ce triangle ABC sur celui qui nous est donné.

8.3 (i) Remarquons déjà que A, C_1, P, B_1 (resp. B, A_1, P, C_1, resp. C, B_1, P, A_1) sont cocycliques car les triangles rectangles AC_1P et APB_1 ont même hypoténuse. Par permutation circulaire, il s'agit donc de montrer que les angles $\hat{A}$ et $\hat{A}_3$ ont même mesure. Or on a $\alpha := (\widehat{AC_1, AP}) = (B_1\widehat{C_1, B_1}P)$ car A, C_1, P, B_1 sont cocycliques, qui est égal à $(B_1\widehat{A_2, B_1}P)$ car C_1, A_2, B_1 sont alignés, qui est égal à $(C_2\widehat{A_2, C_2}P)$ car A_2, B_1, C_2, P sont cocycliques, qui est égal à $(C_2\widehat{B_3, C_2}P)$ car A_2, B_2, P sont alignés, qui est égal à $(A_3\widehat{B_3, A_3}P)$ car B_3, C_2, A_3, P sont cocycliques. De la même façon on a $(\widehat{AP, AB_1}) = (A_3\widehat{P, A_3}C_3)$ et donc

$$(\widehat{AC_1, AP}) + (\widehat{AP, AB_1}) = (A_3\widehat{B_3, A_3}P) + (A_3\widehat{P, A_3}C_3)$$

d'où le résultat.

(ii) Notons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (resp. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$) les angles $\widehat{PAA_1}$, $\widehat{PBB_1}$, $\widehat{PCC_1}$ (resp. $\widehat{C_1AP}$, $\widehat{A_1BP}$, $\widehat{B_1CP}$). On a alors $\sin\alpha_1 = PA_1/PA$ ... de sorte que $PA_3/PA = \sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3 = \sin\beta_1.\sin\beta_2.\sin\beta_3$ qui est encore égal au rapport du produit des distances de P aux trois côtés sur le produit des distances aux trois sommets.

(iii) Il s'agit donc de maximiser $(\sin\alpha_1.\sin\beta_1)(\sin\alpha_2.\sin\beta_2)(\sin\alpha_3.\sin\beta_3)$ sachant que $\alpha_i+\beta_i$ est constant. Ainsi le maximum est obtenu pour $\alpha_i = \beta_i$ ou $\alpha_i = \pi - \beta_i$ cas exclu puisque l'on est à l'intérieur du triangle. Le résultat découle alors par compacité du fait qu'aux bords, i.e. sur les côtés du triangle, l'aire est nulle.

8.4 (1) L'équation du cercle passant par les points $P_i = (x_i, y_i)$ pour $i = 1, 2, 3$, est

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2+y^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

En remplaçant (x_i, y_i) par $(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)$, on obtient une matrice dont la i-ème ligne est

$$ab(1 \quad \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad a^2\cos^2\alpha_i + b^2\sin^2\alpha_i)$$

Or $a^2\cos^2\alpha_i + b^2\sin^2\alpha_i = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + \frac{1}{2}(a^2-b^2)\cos(2\alpha_i)$. Le déterminant de cette matrice est donc égal à $[ab(a^2-b^2)/2]^4$ fois le déterminant de la matrice dont la i-ème ligne est $(1 \quad \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad \cos 2\alpha_i)$.

(2) Le déterminant précédent est la partie réelle du déterminant de $(1 \quad \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad e^{2\alpha_i})$. En utilisant les formules d'Euler pour le cos et le sin, on obtient

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ \det(1 \quad e^{i\alpha_i} \quad ie^{-i\alpha_i} \quad e^{2i\alpha_i})$$

En changeant l'ordre des colonnes et en mettant $e^{-i\alpha_i}$ en facteur dans chaque ligne, on fait apparaître un Vandermonde et on obtient

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ \left(e^{-i\sum_{j=1}^4 \alpha_j} \prod_{1\leq i<j\leq 4} (e^{i\alpha_i} - e^{i\alpha_j})\right)$$

En mettant en facteur $e^{i\frac{\alpha_i-\alpha_j}{2}}$ pour chaque $i<j$, on obtient le résultat.

(3) C'est une conséquence directe de ce qui précède.

8.5 Si P_3 est le plan OAB et $P_2 = (OA, -\alpha)(P_3)$ alors r s'écrit comme le produit des réflexions par rapport aux plans P_2 et P_3. De même s est le produit de P_1 et P_2 où $P_1 = (OB, \beta)(P_3)$.

Afin d'approcher une rotation $(k, 2\theta)$, on approche son axe puis son angle. Pour approcher $\mathbb{R}.k$, on approche les plans qu'il détermine avec OA, et OB. D'après le théorème de Jacobi-Kronecker, ils sont respectivement approchés par $P_2' = (OA, -p\alpha)(P_3)$ et $P_1' = (OB, q\beta)(P_3)$ si p et q sont des entiers adéquats. Ainsi $\mathbb{R}k' = P_1' \cap P_2'$ approche $\mathbb{R}k$.

Puisque $r^p = (OA, 2p\alpha)) = (P_3)(P_2')$ et $s^q = (OB, 2q\beta) = (P_1')(P_3)$, on a $s^q r^p = (P_1')(P_2')$ dont la mesure $2\gamma'$ de l'angle est donnée par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos\gamma' = \sin(p\alpha)\sin(q\beta)\cos c - \cos(p\alpha)\cos(q\beta)$$

On cherche $\frac{\gamma'}{\pi}$ irrationnel ; la formule précédente montre que si p et q décrivent les entiers et si $\frac{\gamma'}{\pi}$ décrit les rationnels, $\cos c$ ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs. On choisit alors c pour que $\cos c$ n'appartienne pas à cet ensemble de valeurs. Il en résulte alors que $\frac{\gamma'}{\pi}$ est irrationnel pour tout p, q. Le théorème de Jacobi-Kronecker montre alors que l'on peut choisir n pour que $2n\gamma'$ approche 2θ de sorte que $(s^q r^p)^n$ approche $(k, 2\theta)$.

8.6 (1) On a $P \simeq \mathbb{R}^3$ et on vérifié aisément que l'action de conjugaison de G est $\mathbb{R}$-linéaire et conserve la norme de sorte qu'elle définit un morphisme de groupes $G \longrightarrow O(3, \mathbb{R})$. On note en outre que $G \simeq S^3$ est connexe et que le morphisme précédent est continue de sorte que l'image de $G \to O(3, \mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ est connexe et donc égale à $\{1\}$. On obtient donc bien un morphisme de groupe $\phi : G \longrightarrow O^+(3, \mathbb{R})$. Montrons la surjectivité : soit $p \in P \cap G$, on a $\phi_p(p) = p$ ce qui prouve que ϕ_p fixe p (et est non triviale), c'est donc une rotation d'axe p. En outre on a $p^2 = -1$ soit ϕ_p d'ordre 2 ; c'est donc un renversement. On obtient donc tous les renversements, or ceux-ci engendrent $O^+(3, \mathbb{R})$, d'où la surjectivité. Pour le noyau, on a $\phi_g(p) = p$ pour tout $p \in P$ si et seulement si g commute à tous les éléments de P et donc à tous les éléments de H, soit donc $g \in \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$.

Si la suite exacte $1 \to \{\pm 1\} \longrightarrow G \longrightarrow^{\phi} O^+(3, \mathbb{R}) \to 1$ était scindée, on aurait un sous-groupe H de G tel que $\phi_{|H}$ soit un isomorphisme de H sur $O^+(3, \mathbb{R})$. Mais alors pour $g \in G$, on aurait g ou $-g$ qui appartiendrait à H. En prenant $o \in P \cap G$, on a $p^2 = (-p)^2 = -1$ soit donc $-1 \in H$, contradiction.

(2) Notons $q = bi + cj + dk$, on a $s_q(q) = q.q.\bar{q} = q$ et donc le vecteur (b, c, d) est fixé par s_q qui est donc une rotation d'axe (b, c, d). D'autre part comme q est un quaternion pur de norme 1, on a $q^2 = -1$ de sorte que $s_q^2 = s_{q^2}$ est la conjugaison par -1 et donc l'identité. Ainsi s_q est soit l'identité soit le demi-tour d'axe (b, c, d). Comme q n'est pas dans le centre de $\mathbb{H}$, le premier cas est exclu.

(3) Soit $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin(\frac{\theta}{2}q'$ avec $q' = xi + yj + zk$. Alors

$$s_q(q') = (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}q')q'(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}q') = (\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2})q' = q'$$

et donc s_q est une rotation d'axe (x, y, z). Si $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ désigne un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et p le quaternion $x_1 i + y_1 j + z_1 k$ alors on a

$$s_q(p) = (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}q')p(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}q') = (\cos^2\frac{\theta}{2}p + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2})(q'p - pq') - \sin^2\frac{\theta}{2}q'pq'$$

mais $-q'pq' = s_{q'}(p) = -p$ puisque $s_{q'}$ est le demi-tour d'axe (x,y,z) et donc $pq' = q'\bar{q}'pq' = q'(-q'pq') = q'(-p) = -q'p$. On obtient

$$s_q(p) = (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})p + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}q'p = \cos\theta p + \sin\theta q'p$$

Il suffit alors de remarquer que le produit $q'p$ correspond au produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base orthonormale directe et l'égalité précédente se retraduit en $s_q(\vec{v}) = \cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{w}$ et donc s_q est la rotation d'axe (x,y,z) et d'angle θ.

(4) On traite un exemple : soient r la rotation d'axe Ox et d'angle $\pi/2$ et r' la rotation d'axe Oy d'angle $\pi/2$. On introduit donc $q = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $q' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$. On a alors $qq' = \frac{1}{2}(1+i+j+k)$ et donc $r \circ r'$ est la rotation d'axe $\mathbb{R}_+(1,1,1)$ et d'angle $2\pi/3$.

8.7 (1) la condition classique de cocyclicité est $(\vec{z_3z_2}, \vec{z_3z_1}) \equiv (\vec{z_4z_2}, \vec{z_4z_1}) \mod \pi$, on traduit cette égalité via les complexes ...

(2) le rapport $\left(\frac{z_1-\infty}{z_2-\infty}\right)$ est égal à 1, ce qui nous ramène à $W(z_1,z_2,z_3,\infty) = \left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)$. Or les 3 points sont alignés ssi $(\vec{z_3z_1}, \vec{z_3z_2}) \equiv 0 \mod \pi$...

(3) par construction les birapports suivant sont réels

$$W(z_1,w_2,z_2,w_1),\ W(z_2,w_3,z_3,w_2),\ W(z_3,w_4,z_4,w_3),\ W(z_4,w_1,z_1,w_4)$$

L'expression $\frac{W(z_1,w_2,z_2,w_1).W(z_3,w_4,z_4,w_3)}{W(z_2,w_3,z_3,w_2).W(z_4,w_1,z_1,w_4)}$ est donc réelle et se simplifie en $W(z_1,z_3,z_2,z_4)W(w_1,w_3,w_2,w_4)$...

pour la généralisation, on remarque que l'on a seulement utilisé le critère de birapport...

(4) (i) en effet sinon D_3 et D_4 seraient parallèles : considérer une homothétie de centre $z_{1,2}$

(ii) - $S_{1,2,3}$ coupe D_3 en $z_{1,3}$ et $z_{2,3}$;
- D_3 coupe D_4 en ∞ et $z_{3,4}$;
- D_4 coupe $S_{1,2,4}$ en $z_{1,4}$ et $z_{2,4}$;
- $S_{1,2,4}$ coupe $S_{1,2,3}$ en $z_{1,2}$ et $z = z_{1,2,3,4}$

Comme les quatres points $z_{1,3}, \infty, z_{1,4}, z_{1,2}$ sont alignés (sur D_1), les quatre points $z_{2,3}, z_{3,4}, z_{2,4}, z$ sont alignés ou cocycliques ; les trois premiers sont sur le cercle $S_{2,3,4}$ et distincts, de sorte que z est sur $S_{2,3,4}$.

(iii) de même $z_{2,3}, \infty, z_{2,4}, z_{1,2}$ sont alignés (sur D_2) donc $z_{1,3}, z_{3,4}, z_{1,4}, z$ sont cocyliques sur $Z_{1,3,4}$ d'où le résultat. (on peut aussi conclure par symétrie du problème : si 3 cercles sont concourants le quatrième aussi !)

(5) - $z_{1,2,3,4}$ est l'intersection des cercles $S_{1,3,4}$ et $S_{1,2,3}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,3}$;
- $z_{1,2,3,5}$ est l'intersection des cercles $S_{1,2,3}$ et $S_{1,2,5}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,2}$;
- $z_{1,2,4,5}$ est l'intersection des cercles $S_{1,2,5}$ et $S_{1,4,5}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,5}$;
- $z_{1,3,4,5}$ est l'intersection des cercles $S_{1,4,5}$ et $S_{1,3,4}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,4}$;

Comme $(z_{1,3}, z_{1,2}, z_{1,5}, z_{1,4})$ sont alignés (sur D_1), les autres sont alignés ou cocylciques

Comme c'est vrai pour toute combinaison de quatre points parmi les cinq...

Pour l'application il s'agit du problème posé par Yang Zemin au congrès mondial (Pekin 2000) ; deux branches successives correspondent au choix de 4 droites sur les cinq qui portent les cotés du pentagone étoilé. L'intersection des cercles circonscrits (2 sur les 4) aux deux branches est donc le point central des 4 droites en question ... (ils ne peuvent pas être alignés)
Remarque : : cas général : tout système de n droites en position générale avec n pair (resp. impair) détermine un point central (resp. un cercle central) qui est l'intersection des cercles

centraux des n systèmes possibles de $n-1$ de ces droites (resp. qui passe par les points centraux des n systèmes possibles de ces droites) (preuve par récurrence...)

8.8 Notons que pour $Q(z) = P(z-z_0)$ on a $Q'(z) = P'(z-z_0)$ de sorte que l'on peut placer l'origine en n'importe quel point. De même pour $Q(z) = P(re^{i\theta}z)$ on a $Q'(z) = re^{i\theta}P'(re^{i\theta})$ on peut appliquer une similitude à la figure sans changer l'énoncé. Enfin comme toute transformation affine est la composée d'une similitude avec une affinité de la forme $(x,y) \mapsto (x, y\cos\alpha)$, on peut supposer que les racines A, B, C de P sont les images des points d'affixes $1, j, j^2$ par

$$z \mapsto \frac{z+\bar{z}}{2} + \frac{z-\bar{z}}{2}\cos\alpha = z\cos^2\frac{\alpha}{2} + \bar{z}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Les demi-axes a, b de l'ellipse considérée sont alors égaux à $\frac{1}{2}$ et $\frac{\cos\alpha}{2}$; la distance entre les foyers F_1, F_2 est $\sqrt{a^2-b^2} = \frac{\sin\alpha}{2}$. L'homothétie de rapport

$$(\frac{\sin\alpha}{2})^{-1} = \Big(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\Big)^{-1}$$

transforme alors F_1 et F_2 en ± 1. La composition de cette homothétie avec l'affinité précédente est la transformation $z \mapsto z\cot\frac{\alpha}{2} + \bar{z}\tan\frac{\alpha}{2}$ de sorte qu'en posant $a = \cot\frac{\alpha}{2}$ le polynôme de racines A, B, C est

$$P(z) = \Big(z - a - \frac{1}{a}\Big)\Big(z - aj - \frac{1}{aj}\Big)\Big(z - aj^2 - \frac{1}{aj^2}\Big)$$

et on vérifie que les racines de $P'(z) = 3z^2 + 3j + 3j^2 = 3x^2 - 3$ sont bien ± 1.

Références

[1] M. Aigner and Ziegler G. *Raisonnements divins.* Springer, 2003.

[2] M. Berger. *Géométrie 1.* Nathan, 1990.

[3] M. Berger. *Géométrie 2.* Nathan, 1990.

[4] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chapitres 4,5 et 6.* Masson, 1981.

[5] W. Fulton and J. Harris. *Representation theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1999.

[6] E. Ghys. Poincaré et son disque. *http ://www.umpa.ens-lyon.fr/~ghys/articles/disque-poincare.pdf.*

[7] R. Goblot. *Algèbre commutative.* Masson, 1996.

[8] I. Niven. Convex polygons that cannot tile the plane. *The American Monthly*, 85(10) :785–792, 1978.

[9] D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1998.

[10] V. Prasolov. *Polynomials.* Springer, 2004.

[11] I.Kh. Sabitov. The volume of a polyhedron as a function of its metric. *Fundam. Prokl. Mat.*, 2(4) :1235–1246, 1996.

[12] J.-M. Schlenker. La conjecture des soufflets, d'après I Sabitov. *Astérisque*, 294 :77–95, 2004.

Boyer Pascal