Endomorphismes diagonalisables

Plan

Remarque d'ordre général: il ne s'agit pas de faire la leçon *Réduction des endomorphismes*, il faut donc éviter de faire un paragraphe sur la trigonalisation, sur la décomposition de Dunford... L'idée est d'introduire ces notions et ce que vous savez dessus sous l'optique de la leçon (cf. ci-dessous). Il est en outre bienvenu de commencer par préciser les notions que l'on suppose connues (rapport endomorphismes-matrices, notions de valeurs propres, polynôme caractéristique, polynôme minimal, espaces caractéristiques...) afin de se concentrer sur le sujet. C'est donc a vous de bien préciser les choses.

- il faut sûrement commencer par introduire les définitions sur valeurs propres, espaces propres et donner la définition d'un endomorphisme diagonalisable (les sous-espaces propres sont en somme directe, si cette somme directe est l'espace tout entier alors l'endomorphisme est dit diagonalisable);

- ensuite vous pouvez motiver l'intitulé de la leçon en disant:

  (1) l'ensemble des matrices diagonalisables est dense,

  (2) Dunford nous ramène à étudier les endomorphismes diagonalisables (si on est sur un corps algébriquement clos, ou plus généralement les endomorphismes semi-simples) et les endomorphismes nilpotents (ainsi vous caser Dunford de manière naturelle, et pour les plus téméraires vous pouvez parler des endomorphismes semi-simples)

- Ensuite vous faites un paragraphe sur les critères de diagonalisation; donnez aussi un contre-exemple et introduisez, en remarque, le fait que sur un corps algébriquement clos, on peut trigonaliser

- il faut sûrement parler de diagonalisation simultanée. Pour les plus téméraires, vous pouvez introduire la notion de représentation d'un groupe fini $\rho : G \to GL(V)$: dans le cas où le groupe est commutatif, les $\rho(g)$ sont simultanément diagonalisables: on pourra ici case le théorème de Burnside;

- il faut ensuite parler des familles connues d'endomorphismes diagonalisables: symétrique réelles, hermitiennes, normaux. On en profite pour donner les applications: classification des coniques (projectives, euclidienne), réduction simultanée des formes quadratiques...

- Faites un paragraphe topologique, par exemple: les matrices diagonalisables complexes à valeurs propres distinctes sont denses alors que sur $\mathbb{R}$ leur adhérence est l'ensemble des matrices trigonalisables, $SU(n)$ et $U(n)$ sont connexes par arcs; f est diagonalisable si et seulement si son orbite est fermée.

  Vous pouvez parler de l'exponentielle et des applications (homéomorphisme entre les symétriques (resp. hermitiennes) et les symétriques (resp. hermitiennes) définies positives; si χ_A est scindé alors $\exp(A)$ est diagonalisable si et seulement si A l'est

- Pour finir, vous pouvez ouvrir le sujet en parlant de matrices diagonales par bloc, par exemple les isométries réelles, la réduction de Jordan ... et en rajouter une couche sur les propriétés topologiques (ex: $SO(n)$ est connexe par arcs

Développements

- critère de diagonalisation

- exp réalise un homéomorphisme entre les symétriques (resp. hermitiennes) et les symétriques (resp. hermitiennes) définies positives

- si χ_A est scindé alors $\exp(A)$ est diagonalisable si et seulement si A l'est: en application sur $\mathbb{C}$, on a $\exp A = I_n \Leftrightarrow A$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$; sur $\mathbb{R}$, A est diagonale si et seulement si $\exp A$ l'est;

- diagonalisation des matrices de permutation;

- mélange de propriétés topologiques par exemple: sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
  - l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices avec n valeurs propres distinctes;
  - l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables.
  - sur $\mathbb{C}$, on pourra montrer la connexité des matrices diagonalisables, et de l'ensemble des matrices possédant n valeurs propres distinctes.
- les endomorphismes normaux sont diagonalisables;
- classification des coniques (projective et euclidienne)
- Burnside: G sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C}$ alors: G fini $\Leftrightarrow$ G d'exposant fini.
- f est diagonalisable si et seulement si son orbite est fermée
- Dunford plus le rayon spectral.

Questions

- Donnez les sous-groupes commutatifs de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant r. En déduire que $GL_n(\mathbb{C}) \simeq GL_m(\mathbb{C})$ si et seulement si $n = m$.
- Comment savoir si une matrice est diagonalisable à valeurs propres distinctes (sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$)
- Soient A et B simultanément diagonalisables; existe-t-il C ainsi que des polynômes P_A, P_B tels que $A = P_A(C)$ et $B = P_B(C)$?
- Les matrices suivantes sont-elles des carrés dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Soit A non diagonalisable, trouvez les polynômes P tel que $P(A)$ soit diagonalisable (traitez le cas de $\mathbb{C}$ puis de $\mathbb{R}$).
- soit $\rho : G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes avec G commutatif; les $\rho(g)$ sont-ils diagonalisables? (regarder les matrices de rotation)
- Décrire le commutant d'un endomorphisme diagonalisable (on trouve $\prod_i GL_{r_i}$ où les r_i sont les dimensions des sous-espaces propres).
- Donner les invariants de similitude d'un endomorphisme diagonalisable.
- Décrivez l'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan (toutes les nilpotentes).
- Montrez que si un ouvert de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier.
- Montrer que toute matrice semi-simple est semblable à une matrice normale.
- Décrivez $\mathbb{C}[u]$ dans le cas où u est diagonalisable (on trouve $\mathbb{C}^n$)
- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Donner ses valeurs propres.
- Montrer que A de $GL_n(\mathbb{C}$ est diagonalisable si et seulement si il existe k tel que A^k l'est.

- Montrez que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe et dense. Quel est son intérieur? Qu'en est-il sur $\mathbb{R}$?
- Montrez que la classe de similitude de A est fermée si et seulement si A est diagonalisable.

Exercices corrigés

Exercice 1. *Donnez les sous-groupes commutatifs d'exposant r de $GL_n(\mathbb{C})$. En déduire que $GL_n(\mathbb{C}) \simeq GL_m(\mathbb{C})$ si et seulement si $n = m$.*

Preuve : Soit G un sous-groupe commutatif de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant r. Pour tout $g \in G$, on a donc $g^r = \mathrm{Id}$ i.e. $X^r - 1$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de g de sorte que g est diagonalisable dans une base $(e_1, \cdots, e_n)$. Pour tout $g' \in G$, g et g' commutent et sont diagonalisables, on en déduit donc qu'ils sont simultanément diagonalisables. Ainsi la matrice de tout $g \in G$ dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$, est diagonale de la forme $\mathrm{diag}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ où ξ_i est une racine r-ième de l'unité. On en déduit donc que $G \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$.

Si les deux groupes $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{C})$ sont isomorphes, leurs sous-groupes commutatifs d'exposant r se correspondent soit $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^m$ et donc $n = m$ par cardinalité.

Exercice 2. *Montrer que A de $GL_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si il existe k tel que A^k l'est.*

Preuve : Le sens direct est évident. Dans l'autre sens, on raisonne dans chacun des espaces caractéristiques de sorte que l'on se ramène à une unique valeur propre λ. On écrit A sous la forme $\lambda(I_n + N)$ avec N nilpotent. On a alors $(I_n + N)^k = I_n + kN + \cdots$. Or on remarque que $kN + \cdots$ est nilpotent et semblable à N (utiliser Jordan), d'où le résultat.

Exercice 3. *Proposez un test effectif pour savoir si une matrice complexe est diagonalisable à valeurs propres distinctes. Traitez ensuite le cas des matrices réelles.*

Preuve : Une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ est diagonalisable à valeurs propres distinctes si et seulement si son polynôme minimal est de degré n et est scindé à racines simples. Sur $\mathbb{C}$, il suffit alors de tester si le polynôme caractéristique χ est à racines simples. Pour cela il suffit de vérifier qu'un pgcd de χ et χ' est égal à 1.

Sur $\mathbb{R}$, il faut en plus tester si χ est scindé. Pour cela on dispose des suites de Sturm qui nous donnent le nombre de racines réelles de χ.

Exercice 4. *Soient A et B deux matrices simultanément diagonalisables. Existe-t-il un polynôme P tel que $B = P(A)$? Montrer qu'il existe une matrice C ainsi que des polynômes P_A, P_B tels que $A = P_A(C)$ et $B = P_B(C)$.*

Preuve : Si on prend $A = I_n$ alors $P(A) = P(1)I_n$ de sorte que si B est diagonalisable sans être scalaire, il ne peut exister un tel P.

Le problème dans la question précédente venait des racines multiples. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base de diagonalisation commune de A et B: $PAP^{-1} = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ et $PBP^{-1} = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n)$. Prenons alors C tel que $PCP^{-1} = \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)$ avec les c_i distincts deux à deux, par exemple $c_i = i$. On choisit alors P_A (resp. P_B) tel que pour tout i, $P_A(c_i) = a_i$ (resp. $P_B(c_i) = b_i$): c'est possible en utilisant par exemple les polynômes d'interpolation de Lagrange. On a donc bien $A = P_A(C)$ et $B = P_B(C)$.

Exercice 5. *Soit a un endomorphisme non diagonalisable, trouvez les polynômes P tel que $P(a)$ soit diagonalisable (traitez le cas de $\mathbb{C}$ puis de $\mathbb{R}$).*

Preuve : Sur $\mathbb{C}$: on note $\mu_a(X) = \prod_\lambda (X - \lambda)^{r_\lambda}$ le polynôme minimal de a. Pour toute valeur propre λ, on se place sur le sous-espace caractéristique associé $E_{(\lambda)}$. Si $P(a)$ est diagonalisable alors sa restriction à $E_{(\lambda)}$ est $P(\lambda)\mathrm{Id}$. Or on a $P(a) - P(\lambda)\mathrm{Id} = (a - \lambda\mathrm{Id})Q_\lambda(a)$; pour que ce dernier soit nul il faut que $Q_\lambda(a)(E_{(\lambda)}) \subset E_\lambda$ où E_λ est le sous-espace propre. Ainsi il faut que $(X - \lambda)^{r_\lambda - 1}$ divise $Q_\lambda(X)$ ce qui est équivalent, pour $r_\lambda > 1$ à

$$P'(\lambda) = P"(\lambda) = \cdots = P^{(r_\lambda - 1)}(\lambda) = 0$$

Réciproquement si cette dernière condition est vérifiée pour tout valeur propre λ alors $P(a)$ est diagonalisable.

Sur $\mathbb{R}$: on se place dans $\mathbb{C}$ de sorte qu'il faut que la condition précédente soit vérifiée pour toute valeur propre λ. En outre il faut s'assurer que les valeurs propres $P(\lambda)$ sont réelles. Réciproquement si ces deux conditions sont vérifiées alors la matrice de a dans la base canonique est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale réelle. Il est bien connu alors qu'elle y est semblable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. *Donnez les invariants de similitude d'un endomorphisme diagonalisable.*

Preuve : On écrit le polynôme caractéristique de a, $\chi(X) = \prod_\lambda (X-\lambda)^{r_\lambda}$. Celui-ci étant supposé diagonalisable, son polynôme minimal est $\mu(X) = \prod_\lambda (X-\lambda)$. On rappelle que les invariants de similitude sont des polynômes

$$\mu_1 | \mu_2 | \cdots \mu_r$$

avec $\mu = \mu_r$ et $\chi = \prod_i \mu_i$. On en déduit ainsi que tous les invariants de similitudes sont sans multiplicité, que $r = \max_\lambda(r_\lambda)$ et que

$$\mu_i(X) = \prod_{\lambda \ / \ r_\lambda \geq r-i+1} (X-\lambda)$$

Exercice 7. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable? Donnez ses valeurs propres.*

Preuve : La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. Par ailleurs son rang est clairement égal à 2 de sorte que 0 est valeur propre à l'ordre $n-2$; reste alors à trouver deux autres valeurs propres λ_1 et λ_2. La trace nous donne $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ tandis que la trace de A^2 donne $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2n + n - 2$ ce qui donne λ_1 et λ_2.

Exercice 8. *Les matrices suivantes sont-elles des carrés dans* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$*:* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Preuve : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Supposons qu'il existe B réelle telle que $A = B^2$. Le polynôme $(X^2+1)(X^2+4)$ est alors un polynôme annulateur de B de sorte que son polynôme minimal, qui est de degré 1 ou 2, doit être X^2+1 ou X^2+4 (qui sont irréductibles sur $\mathbb{R}$). Mais alors on aurait $A + \mathrm{Id} = 0$ ou $A + 4\mathrm{Id} = 0$ ce qui n'est pas.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Supposons qu'il existe B tel que $A = B^2$. Le polynôme $(X^2+1)^2$ est alors un polynôme annulateur de B de sorte que son polynôme minimal de B est X^2+1 et donc $A + \mathrm{Id} = 0$ ce qui n'est pas.

Exercice 9. *Montrez que si un ouvert de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *tout entier.*

Preuve : Soit F le fermé complémentaire; s'il était non vide il contiendrait une matrice $M = S + N$, sa décomposition de Dunford, et contiendrait aussi sa partie semi-simple S, laquelle est dans l'adhérence de la classe de similitude de M, d'où la contradiction.

Exercice 10. *(1) Sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, montrez que*

(i) l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}$ *des matrices diagonalisables est l'ensemble* $\mathcal{D}^1$ *des matrices avec* n *valeurs propres distinctes;*

(ii) l'adhérence de $\mathcal{D}$ *est l'ensemble* $\mathcal{T}$ *des matrices trigonalisables.*

(2) Sur $\mathbb{C}$*, montrez la connexité de* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}^1$*.*

Preuve : (1) (i) Soit A une matrice possédant n valeurs propres distinctes de sorte que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. D'après la continuité du polynôme caractéristique et de celle des racines d'un polynôme, on en déduit que pour tout A' proche de A, le polynôme caractéristique de A' possède, sur $\mathbb{C}$, n racines distinctes. Si A et A' sont réelles, alors leurs racines le sont aussi: pour A c'est vrai par hypothèse, pour A', ses racines sont complexes conjuguées et proches de celles de χ_A, on conclut en remarquant que ces dernières sont simples.

Ainsi $\mathcal{D}^1$ est ouvert, en outre toute matrice diagonalisable est limite de matrices de $\mathcal{D}^1$: en effet pour tout $a_1, \cdots, a_n$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ tels que $0 < \epsilon_i < \epsilon$ et les $a_i + \epsilon_i$ sont distincts deux à deux. Ainsi pour $A = P\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)P^{-1}$, la boule de centre A et de rayon ϵ contient $A' = P\mathrm{diag}(a_1+\epsilon_1, \cdots, a_n+\epsilon_n) \in \mathcal{D}^1$.

On en déduit alors que l'adhérence de $\mathcal{D}^1$ contient $\mathcal{D}$ et donc que $\mathcal{D}$ est l'intérieur de $\mathcal{D}$.

(ii) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers A. D'après la continuité du polynôme caractéristique, χ_k converge vers χ. Les χ_k étant scindé, on en déduit comme ci-dessus que χ est scindé: ses racines complexes sont limites des racines de χ_k, si celles-ci sont toutes réelles, leurs limites aussi. On rappelle alors que A est trigonalisable.

Réciproquement si A est trigonalisable $PAP^{-1} = T$, soit alors $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ petits tels que les $t_{i,i} + \epsilon_i$ sont tous distincts. La matrice $T + \mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ est alors diagonalisables car elle a n valeurs propres distinctes. Ainsi A est dans l'adhérence de $\mathcal{D}$.

(2) Pour $\mathcal{D}$: on a une application surjective $GL_n(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^n$ sur l'ensemble des matrices diagonalisables: on envoie $(P, (a_1, \cdots, a_n))$ sur $P\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)P^{-1}$. L'ensemble $GL_n(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^n$ étant connexe, il en est de même de l'ensemble des matrices diagonalisables.

On rappelle que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe: soient P_1, P_2 deux matrices inversibles. On considère le polynôme $\det(P_1 z + (1-z)P_2)$. Le complémentaire de l'ensemble (fini) des zéros de ce polynôme est connexe; on considère alors un chemin qui relie 0 à 1 dans ce complémentaire, ce qui fournit un chemin de P_1 à P_2 dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Pour $\mathcal{D}^1$: on remarque que $\mathcal{D}^1$ est le complémentaire des zéros du polynôme en n^2 variable définit comme le discriminant du polynôme caractéristique.

Exercice 11. *Décrivez l'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan*

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve : On va montrer que cette adhérence est l'ensemble des matrices nilpotentes. Rappelons que d'après la décomposition de Jordan, tout matrice nilpotente est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec sur la diagonale des blocs de Jordan de taille distinctes $J(n_1, \cdots, n_r) := \mathrm{diag}(J_{n_1}, \cdots, J_{n_r})$ avec $\sum_i n_i = n$. On remarque alors que J_n est semblable à

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & \epsilon E_{n_1,n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \epsilon E_{n_2,n_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & J_{n_{r-1}} & \epsilon E_{n_{r-1},n_r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_{n_r} \end{pmatrix}$$

où $E_{i,j}$ est la matrice de taille $i \times j$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui du coin en bas à gauche qui vaut 1, et où $\epsilon > 0$. En faisant tendre ϵ vers zéro on en déduit que $J(n_1, \cdots, n_r)$ est dans l'adhérence de l'orbite de J_n.