

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Plan

Remarque d'ordre général: il conviendra en préambule de donner le contexte: un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

- Dans un premier paragraphe, donnez les définitions élémentaires de rigueur: définition de l'adjoint, d'un endomorphisme symétrique (ou auto-adjoint), anti-symétrique, orthogonal et l'interprétation matricielle.
- Donnez la réduction des endomorphismes symétriques et antisymétriques: soit via les multiplicateurs de Lagrange, soit par les sous-espaces stables et le cas de dimension 2, soit par complexification via la réduction des endomorphismes normaux,
- en application on pourra citer:

– pour u symétrique de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ alors

$$\lambda_k = \inf_{F \in \mathcal{E}_k} \sup_{0 \neq x \in F} \frac{(u(x), x)}{\|x\|^2} = \sup_{F \in \mathcal{E}_{n-k+1}} \inf_{0 \neq x \in F} \frac{(u(x), x)}{\|x\|^2}$$

- classification des formes quadratiques;
- classification des coniques euclidiennes;
- réduction simultanée: pour A symétrique définie positive et B symétrique, il existe P inversible telle que ${}^tPAP = I_n$ et tPBP soit diagonale (attention tP n'est pas à priori égale à P^{-1} , il s'agit de réduction simultanée de formes bilinéaires). Rappelons brièvement l'argument: $U = A^{-1}B$ est symétrique relativement à la forme quadratique f_A définie par A de sorte qu'il existe P orthogonale pour f_A et donc ${}^tPAP = I$ et $P^{-1}UP = D$...
- l'exponentielle réalise un homéomorphisme des symétriques sur les symétriques définies positives.
- Dans un autre paragraphe on étudiera le groupe orthogonal en mettant en avant les points suivants:
 - le centre est l'ensemble des λI_n où λ est une racine de l'unité;
 - description de $SO(2)$ puis de $SO(3)$ via les quaternions;
 - réduction générale des isométries: on pourra utiliser la réduction des endomorphismes hermitiens et invoquer le fait que deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables
 - $O(n)$ et $SO(n)$ sont connexes par arcs;
 - $O(n)$ est homéomorphe à $SO(n) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; en tant que groupe $O(n) \simeq SO(n) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le produit pouvant être pris direct seulement en dimension impaire;
 - $O(n)$ est un sous-groupe compact maximal et tout sous-groupe compact maximal est conjugué à $U(n)$;
 - Soit $u \in O(n)$ et $F_u = \{x \in E / u(x) = x\}$ et on note $p_u = n - \dim F_u$. Montrez par récurrence sur p_u , que u est le produit d'au plus p_u réflexions. Montrez ensuite que u est le produit d'au moins p_u réflexions.
 - Montrez que pour $n \geq 3$, tout élément de $SO(n)$ est produit d'au plus n renversements.
 - Soient u_1 et u_2 deux symétries orthogonales de même nature (i.e. tels que $\dim \text{Ker}(u_1 - Id) = \dim \text{Ker}(u_2 - Id)$). Montrez que u_1 et u_2 sont conjuguées par $SO(n)$. En déduire alors que $D(O(n)) = D(SO(n)) = O(n)$.
 - $PO(4, \mathbb{R})^+ \simeq O(3, \mathbb{R})^+ \times O(3, \mathbb{R})^+$.
 - $SO(n)$ est simple pour $n > 2$;
 - $O(n)$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité $B = \{a \in \text{End}(\mathbb{R}^n) : |a| \leq 1\}$;
 - $d_2(0, Sl_n(\mathbb{R})) := \inf_{M \in Sl_n(\mathbb{R})} \|M\|_2 = \sqrt{n}$ et le lieu où cette distance est atteinte est exactement $SO_n(\mathbb{R})$;

- pour tout $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $d(M, O(n)) = \|\sqrt{tMM} - I\|_2$;
- pour tout n , il n’y a pas de sous-groupe coincé entre $SO(n)$ et $SL_n(\mathbb{R})$.
- Soit G un sous-groupe de $O(n)$ alors G fini si et seulement si G est d’exposant fini si et seulement si l’ensemble des traces des éléments de G est fini.
- En général deux rotations engendrent un sous-groupe dense dans $SO(3)$.
- les décompositions classiques avec des applications topologiques:
 - décomposition QR : pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (Q, R) avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à éléments diagonaux dans \mathbb{R}_+^* tel que $A = QR$.
 - décomposition polaire; $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $SL_n(\mathbb{R})$) est homéomorphe à $O(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$ (resp. $SO(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$); $O(n)$ est un sous-groupe compact maximal
 - décomposition d’Iwasawa;
 - décomposition de Cartan;
 - l’enveloppe convexe de $O(n)$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité;
- d’autres thèmes possibles, plus ou moins difficiles:
 - les déterminants de Gram
 - une matrice symétrique réelle est algorithmiquement semblable à une matrice tridiagonale
 - sous-groupe fini de $SO(3)$ puis $O(3)$ et enfin $GL_3(\mathbb{R})$.

Développements

- $O(n)$ est l’ensemble des points extrémaux de la boule unité $B = \{a \in \text{End}(\mathbb{R}^n) : |a| \leq 1\}$;
- $d_2(0, Sl_n(\mathbb{R})) := \inf_{M \in Sl_n(\mathbb{R})} \|M\|_2 = \sqrt{n}$ et le lieu où cette distance est atteinte est exactement $So_n(\mathbb{R})$;
- pour tout $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $d(M, O(n)) = \|\sqrt{tMM} - I\|_2$;
- pour tout n , il n’y a pas de sous-groupe coincé entre $SO(n)$ et $SL_n(\mathbb{R})$.
- réduction des endomorphismes symétriques
- la décomposition polaire est un homéomorphisme
- tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est contenu dans un conjugué de $O(n)$
- l’exponentielle réalise un homéomorphisme des symétriques sur les symétriques définies positives
- décomposition de Cartan
- décomposition d’Iwasawa
- matrices de Householder et réduction à une forme tridiagonale
- le paradoxe de Banach-Tarski
- Soit G un sous-groupe de $O(n)$ alors G fini si et seulement si G est d’exposant fini si et seulement si l’ensemble des traces des éléments de G est fini.
- En général deux rotations engendrent un sous-groupe dense dans $SO(3)$.

Questions

- Montrez que deux matrices normales A et B sont semblables si et seulement si $\text{Tr}A^k = \text{Tr}B^k$. (le théorème de Specht est une vaste généralisation: les fonctions $A \mapsto \text{Tr}(m(A, A^*))$ où m est un mot quelconque (de degré $\leq 2n^2$ d'après un théorème de Percy), séparent les orbites sous l'action de la conjugaison de $U(n)$).
- (Tauvel p.417) Montrez que u est diagonalisable de spectre réel si et seulement si u est le produit de deux endomorphismes hermitiens, l'un au moins d'entre eux étant défini positif
- (Tauvel p.418) Pour $n \geq 2$ et A hermitienne non nulle de taille n , montrez que A est définie positive ou négative si et seulement si pour toute matrice B hermitienne, AB est diagonalisable.
- (M-T p.219 ou M p.92) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice complexe $A = (a_{i,j})$. Montrez que A est normale si et seulement si $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$. (remarquez que $\text{Tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$ est $U(n)$ -invariante)
- Montrer que A est normale si et seulement si $\text{Tr}(AA^*)^2 = \text{Tr}A^2A^{*2}$. (notez que la matrice hermitienne $H = AA^* - A^*A$ est nulle si et seulement si $\text{Tr}H^2 = 0$)
- A est normale si et seulement si A^* est un polynôme en A
- Si A est normale, montrez que l'orbite de A est homéomorphe à $U(n)/U(k_1) \times \dots \times U(k_r)$.
- Montrez que deux matrices sont unitairement équivalentes si et seulement si elles ont même valeurs singulières.
- Les matrices de Householder sont exactement les matrices de $U(n)$ qui sont hermitiennes de signature $(n-1, 1)$.

Exercices corrigés

Exercice 1. Montrez que les seules matrices de Bourdaud (i.e. les valeurs propres se lisent sur la diagonale) réelles symétriques sont les matrices diagonales.

Preuve : Soit λ_1 la plus grande des valeurs propres, on a $\lambda_1 = \sum_{\|x\|=1} (A(x), x)$ et là où le sup est atteint, on est en présence d'un vecteur propre associé à λ_1 : en effet la différentielle s'annule en x_0 sur l'espace tangent à la sphère en x_0 (extrema liés), soit $(A(x_0), y) = 0$ pour tout y tel que $(x_0, y) = 0$ de sorte que $A(x_0)$ est colinéaire à x_0 .

On remarque ensuite qu'il existe k tel que $\lambda_1 = a_{k,k} = (A(e_k), e_k)$ et on raisonne par récurrence sur l'orthogonal à e_k .

On aurait aussi pu utiliser la forme quadratique $A \mapsto \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j}^2$ qui est clairement invariante sous l'action par conjugaison du groupe orthogonal de sorte que $\text{Tr}({}^tAA) = \sum_i \lambda_{i,i}^2$, d'où le résultat.

Exercice 2. Soit G un sous-groupe de $O(n)$ alors G fini si et seulement si G est d'exposant fini si et seulement si l'ensemble des traces des éléments de G est fini.

Preuve : Si G est fini il est clairement d'exposant fini. Si G est d'exposant fini alors tout élément de G est semblable à une matrice diagonale par blocs avec sur la diagonale $I_r, -I_s$ et des matrices de taille 2, de rotations dont les angles sont alors de la forme $\frac{2k\pi}{n}$, ce qui donne donc un ensemble fini de traces possibles.

Si l'ensemble des traces est fini, considérons $\text{Vect } G$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ engendré par les éléments de G dont on fixe une base g_1, \dots, g_r . On considère aussi le produit scalaire $(A, B) := \text{Tr}({}^tAB)$. On note $a_i(g)$ la composante de g sur g_i , soit $g = \sum_i a_i(g)g_i$. On compose à droite avec g_j^{-1} et on prend la trace. Comme $g_i^{-1} = {}^t g_j$, on a $\text{Tr}(g_i g_j^{-1}) = (g_i, g_j)$ et donc

$$\text{Tr}(g g_j^{-1}) = \sum_i a_i(g) (g_i, g_j)$$

et comme les g_i sont linéairement indépendants, la matrice M dont les éléments sont les (g_i, g_j) est inversible donc

$$a_i(g) = \sum_j (M^{-1})_g \text{Tr}(g g_j^{-1})$$

de sorte que l'on obtient un nombre fini de $a_i(g)$ et donc de g .

Exercice 3. Une rotation de $SO(3)$ sera notée par $r = (k, \theta)$ où k est le vecteur unitaire de l'axe de la rotation et θ son angle.

Soient alors $r = (OA, 2\alpha)$ et $s = (OB, 2\beta)$ deux rotations telles que $\frac{\alpha}{\pi}$ et $\frac{\beta}{\pi}$ soient irrationnels. Montrez que si l'on excepté une infinité dénombrable de valeurs pour la mesure c de l'angle entre les axes OA et OB , le groupe engendré par r et s est dense dans $SO(3)$.

Preuve : Si P_3 est le plan OAB et $P_2 = (OA, -\alpha)(P_3)$ alors r s'écrit comme le produit des réflexions par rapport aux plans P_2 et P_3 . De même s est le produit de P_1 et P_2 où $P_1 = (OB, \beta)(P_3)$.

Afin d'approcher une rotation $(k, 2\theta)$, on approche son axe puis son angle. Pour approcher $\mathbb{R}k$, on approche les plans qu'il détermine avec OA , et OB . D'après le théorème de Jacobi-Kronecker, ils sont respectivement approchés par $P'_2 = (OA, -p\alpha)(P_3)$ et $P'_1 = (OB, q\beta)(P_3)$ si p et q sont des entiers adéquats. Ainsi $\mathbb{R}k' = P'_1 \cap P'_2$ approche $\mathbb{R}k$.

Puisque $r^p = (OA, 2p\alpha) = (P_3)(P'_2)$ et $s^q = (OB, 2q\beta) = (P'_1)(P_3)$, on a $s^q r^p = (P'_1)(P'_2)$ dont la mesure $2\gamma'$ de l'angle est donnée par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos \gamma' = \sin(p\alpha) \sin(q\beta) \cos c - \cos(p\alpha) \cos(q\beta)$$

On cherche $\frac{\gamma'}{\pi}$ irrationnel; la formule précédente montre que si p et q décrivent les entiers et si $\frac{\gamma'}{\pi}$ décrit les rationnels, $\cos c$ ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs. On choisit alors c pour que $\cos c$ n'appartienne pas à cet ensemble de valeurs. Il en résulte alors que $\frac{\gamma'}{\pi}$ est irrationnel pour tout p, q . Le théorème de Jacobi-Kronecker montre alors que l'on peut choisir n pour que $2n\gamma'$ approche 2θ de sorte que $(s^q r^p)^n$ approche $(k, 2\theta)$.

Exercice 4. (Tauvel p.417) Montrez que u est diagonalisable de spectre réel si et seulement si u est le produit de deux endomorphismes hermitiens, l'un au moins d'entre eux étant défini positif

Preuve : Supposons que u est diagonalisable de spectre réel: soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée et soit (x_1, \dots, x_n) une base formée de vecteurs propres de u de valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On définit f et g par $f(x_i) = e_i$ et $g(e_i) = \lambda_i e_i$ de sorte que $u = f^{-1} \circ g \circ f$. Soit alors $f = qr$ la décomposition polaire de f avec q unitaire et r hermitienne définie positive. On obtient ainsi en posant $l = r \circ l \circ r^{-1} = q^* \circ g \circ q$ qui est hermitienne, alors $u = r^{-1} \circ l \circ r = (r^{-1} \circ l \circ r^{-1}) \circ r^2$ avec donc $r^{-1} \circ l \circ r^{-1}$ et r^2 hermitiennes.

Réciproquement si $u = v \circ w$ avec w (resp. v) hermitienne (resp. hermitienne définie positive). Notons $l = v^{1/2}$ qui est hermitienne définie positive, on a $u = l \circ (l \circ w \circ l) \circ l^{-1}$. Comme $l \circ w \circ l$ est hermitienne, elle est diagonalisable à spectre réel et il en est donc de même de u qui lui est semblable.

Exercice 5. (Tauvel p.418) Pour $n \geq 2$ et A hermitienne non nulle de taille n , montrez que A est définie positive ou négative si et seulement si pour toute matrice B hermitienne, AB est diagonalisable.

Preuve : Le sens direct découle de l'exercice précédent. Supposons donc que pour toute matrice hermitienne B , AB est diagonalisable. Soit P unitaire telle que $A = PDP^*$ avec D diagonale réelle. Comme $AB = P(DP^*BP)P^{-1}$, on voit que AB est diagonalisable si et seulement si DP^*BP l'est. Par ailleurs comme P^*BP est hermitienne, on peut supposer $A = D$.

On se ramène aisément en dimension 2 avec $A = \text{diag}(x^2, -y^2)$ avec x, y réels. Soient alors $B = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $y \neq 0$, on a $AB \neq 0$ et $(AB)^2 = 0$. Si $y = 0$ alors $AB' \neq 0$ et $(AB')^2 = 0$. Ainsi AB (resp. AB') est nilpotente non nulle et donc non diagonalisable.

Exercice 6. (M-T p.219 ou M p.92) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice complexe $A = (a_{i,j})$. Montrez que A est normale si et seulement si $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$.

Preuve : Rappelons que $\text{Tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$ est $U(n)$ -invariante de sorte que si A est normale elle est alors unitairement semblable à la matrice diagonale des λ_i d'où le sens direct. Réciproquement toute matrice complexe est unitairement semblable à une matrice triangulaire T de diagonale formée des λ_i . L'égalité implique alors que les termes qui ne sont pas sur la diagonale sont nulle, i.e. que T est diagonale.

Exercice 7. Montrer que A est normale si et seulement si $\text{Tr}(AA^*)^2 = \text{Tr}A^2A^{*2}$.

Preuve : D'après l'exercice précédent, la matrice hermitienne $H = AA^* - A^*A$ est nulle si et seulement si $\text{Tr}H^2 = 0$. Ainsi A est normale si et seulement si la trace de $(AA^*)^2 - A(A^*)^2A - A^*A^2A^* + (A^*A)^2$ est nulle. Or rappelons que $\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$ de sorte que $\text{Tr}(A^*A)^2 = \text{Tr}(AA^*)^2$ et $\text{Tr}A^*A^2A^* = \text{Tr}A(A^*)^2A = \text{Tr}A^2A^*2$, d'où le résultat.

Exercice 8. Montrez que deux matrices sont unitairement équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs singulières

Preuve : Le sens direct découle de $PAP^* = B$, $PA^*P^* = B^*$ soit $PAA^*P^* = BB^*$. Réciproquement, la décomposition polaire donne $A = H_AU_A$, $B = H_BU_B$ avec H_A, H_B hermitiennes définies positives, et U_A, U_B unitaires. On a donc $AA^* = H_AH_A^*$ et $BB^* = H_BH_B^*$. Les matrices H_A, H_B sont diagonalisables de sorte que si AA^* et BB^* ont même valeurs propres alors les valeurs propres de H_A sont égales à celles de H_B au signe près, soit $H_A = P_A D P_A^*$ et $H_B = P_B D D' P_B^*$ avec $D' = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ où les ϵ_i sont égaux à ± 1 de sorte que D' est unitaire. On a donc $D = P_B^* U_B^* B P_B D'$ et $A = U_A P_A P_B^* U_B^* B P_B D' P_A^*$ d'où le résultat.

Exercice 9. Donnez le centre Z de $O(q)$ (resp. Z^+ de $O^+(q)$) et montrez que $O(q)$ est un produit semi-direct de $O^+(q)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; à quelle condition ce produit semi-direct peut-il être pris direct ?

Preuve : Il est clair que $\{Id, -Id\} \subset Z$; réciproquement soit $z \in Z$ et τ_D une réflexion de droite D . On a $z\tau_D z^{-1} = \tau_D = \tau_{z(D)}$ de sorte que z laisse stable toutes les droites de l'espace; c'est donc une homothétie (résultat classique) et donc $z = \pm Id$.

En ce qui concerne Z^+ remarquons que $-Id$ appartient à $O^+(q)$ si et seulement si n est pair. Pour $n \geq 3$ soit τ_P un renversement de plan P ; on a $z\tau_P z^{-1} = \tau_P = \tau_{z(P)}$ de sorte que z laisse stable tous les plans de l'espace. Toute droite étant l'intersection de deux plans, on en déduit de même que z laisse stable toutes les droites de l'espace, soit $Z^+ = \{Id\}$ pour n impair et sinon $Z^+ = Z$ pour n pair. Pour $n = 2$, il est bien connu que O^+ est commutatif.

Il est clair que la suite exacte $1 \rightarrow O^+(q) \rightarrow O(q) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ est scindée, un relèvement étant donné par exemple par une réflexion quelconque. Pour obtenir un produit direct, il faut trouver un élément d'ordre 2 qui n'est pas dans O^+ et qui commute à tous les éléments de O^+ ; la seule possibilité est alors $-Id$ en dimension impaire. □

Exercice 10. Soit $u \in O(q)$ et $F_u = \{x \in E / u(x) = x\}$ et on note $p_u = n - \dim F_u$. Montrez par récurrence sur p_u , que u est le produit d'au plus p_u réflexions. Montrez ensuite que u est le produit d'au moins p_u réflexions.

Preuve : On raisonne par récurrence sur p_u , le cas $p_u = 0$ correspondant à $u = Id$. Supposons donc $p_u > 0$ et soit $x \in F_u^\perp$ non nul et soit $y = u(x) \neq x$ car $x \notin F_u$; on a $y \in F_u^\perp$ car F_u étant stable par u , F_u^\perp l'est aussi. De plus comme x et y ont même norme, on en déduit que $(x - y, x + y) = 0$ (triangle isocèle). On considère alors la réflexion τ définie par $x - y$ de sorte que $\tau(x - y) = y - x$ et $\tau(x + y) = x + y$ soit donc $\tau(y) = x$ avec $\tau|_{F_u} = Id$. Ainsi on a $F_u \subset F_{\tau \circ u}$ ce dernier contenant x de sorte que $p_{\tau \circ u} < p_u$ et on conclut par récurrence.

En outre si u est le produit de r réflexions alors F_u est clairement de dimension supérieure ou égale à $n - r$ (l'intersection de r hyperplans) soit donc $p_u \leq r$. □

Exercice 11. Montrez que pour $n \geq 3$, tout élément de $O^+(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Preuve : Le cas $n = 3$ est évident en remarquant que si τ est une réflexion, alors $-\tau$ est un renversement de sorte que le produit de deux réflexions (et donc tout produit d'un nombre pair) est un produit de deux renversements $\tau_1 \circ \tau_2 = (-\tau_1) \circ (-\tau_2)$.

Pour $n \geq 3$, soient τ_1 et τ_2 des réflexions par rapport aux hyperplans H_1 et H_2 et $u = \tau_1 \circ \tau_2$. Soit alors $V \subset H_1 \cap H_2$ un sous-espace de dimension $n - 3$: $u|_V = Id$ et V^\perp est stable sous u . D'après le cas $n = 3$, on a $u_{V^\perp} = \sigma_1 \circ \sigma_2$ où σ_1, σ_2 sont des renversements de V^\perp . On obtient le résultat en prolongeant les σ_i par l'identité sur V . □

Exercice 12. Soient u_1 et u_2 deux symétries orthogonales de même nature (i.e. tels que $\dim \text{Ker}(u_1 - Id) = \dim \text{Ker}(u_2 - Id)$). Montrez que u_1 et u_2 sont conjuguées par $O^+(q)$. En déduire alors que $D(O(q)) = D(O^+(q)) = O^+(q)$.

Preuve : On décompose l'espace $E = E_1 \oplus E_1^\perp = E_2 \oplus E_2^\perp$ où $E_i = \text{Ker}(u_i - Id)$. On choisit alors des bases orthonormées (e_i^1) et (e_i^2) de E adaptées à ces décompositions. Soit alors u tel que $u(e_i^1) = e_i^2$; u est une isométrie et quitte à changer ϵ_1 en $-\epsilon_1$, on peut supposer que u est positive. On vérifie alors immédiatement que $u \circ u_1 \circ u^{-1} = u_2$.

L'inclusion $D(O(q)) \subset O^+(q)$ est évidente; réciproquement soient τ_1 et τ_2 deux réflexions et soit u tel que $u \circ \tau_1 \circ u^{-1} = \tau_2$ de sorte que $\tau_1 \circ \tau_2 = [\tau_1, u]$. Comme tout élément de $O^+(q)$ est le produit d'un nombre pair de réflexions, on obtient bien l'inclusion réciproque.

De même pour montrer que $O^+(q) \subset D(O^+(q))$ pour $n \geq 3$, il suffit de montrer que tout renversement est un commutateur. Soit V un sous-espace de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les renversements définis par $(\sigma_i)_{|V^\perp} = Id$ et $\sigma_i(e_i) = e_i$ et donc $\sigma_i(e_j) = -e_j$ pour $i \neq j$. On a alors $\sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2$. En outre il existe $u \in O^+(q)$ tel que $\sigma_2 = u \circ \sigma_1 \circ u^{-1}$ et donc $\sigma_3 = [\sigma_1, u]$. □

Exercice 13. Montrez que pour tout $u \in O(q)$, il existe une décomposition orthogonale

$$E = \text{Ker}(u - Id) \oplus \text{Ker}(u + Id) \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_r$$

où les P_i sont des plans stables par u , tels que la restriction de u y soit une rotation.

Preuve : On procède par récurrence sur la dimension, les cas $n = 1$ et $n = 2$ étant bien connus. Si u admet une valeur propre réelle (forcément ± 1), c'est terminé (en particulier si n est impair). Sinon soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre du complexifié de $u_{\mathbb{C}}$, de sorte que $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre. Soit alors $x \in E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ un vecteur propre du complexifié relativement à λ et soit \bar{x} son conjugué qui est alors propre pour $\bar{\lambda}$ relativement à $u_{\mathbb{C}}$. Le plan complexe $P = \mathbb{C}x + \mathbb{C}\bar{x}$ est alors invariant par $u_{\mathbb{C}}$. On remarque alors que les vecteurs $\frac{x+\bar{x}}{2}$ et $\frac{x-\bar{x}}{2i}$ sont réels et forment une base de P de sorte que le plan réel qu'ils engendrent est stable sous u . □

Exercice 14. - On veut prouver la simplicité de $O^+(3, \mathbb{R})$. Soit donc N un sous-groupe distingué non réduit à l'identité; expliquez pourquoi il suffit de montrer que N contient un renversement.

- Soit alors $u \in N$, une rotation d'axe D et soit P le plan orthogonal à D à l'origine de sorte que la restriction de u à P est une rotation d'angle θ que l'on suppose $0 < \theta < \pi$. Soient alors x et $y = u(x)$ des points de la sphère unité de E ; on note d la distance entre x et y . Montrez que pour tout $0 \leq d' \leq d$, il existe x_1, x_2 des points de la sphère unité à distance d' l'un de l'autre et tels que $x_2 = u(x_1)$.

- Déduire de ce qui précède qu'étant donnés y_1, y_2 des points de la sphère unité distant de d' avec $0 \leq d' \leq d$, il existe $u' \in N$ tels que $u'(y_1) = y_2$. En considérant la rotation d'axe z et d'angle π/m pour m assez grand, construire un retournement de N et conclure.

Preuve : - Comme les renversements engendrent $O^+(3, \mathbb{R})$ et sont conjugués sous $O^+(3, \mathbb{R})$, il suffit de montrer que N en contient un.

- Un calcul classique donne $d^2 = 2(1 - \cos \theta)$. Soit a un des points de $D \cap S^2$; le résultat découle de l'observation que u envoie le méridien contenant a et x , sur celui contenant a et y et que lorsque x_1 varie de x à a , la distance $\|x_1 - u(x_1)\|$ varie continûment de d à 0. De façon précise, on considère $x + \lambda a$ de norme au carré égale à $1 + \lambda^2$ de sorte que $x_1 = \frac{x + \lambda a}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \in S^2$. On a alors $\|u(x_1) - x_1\| = \frac{d}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$ de sorte qu'il suffit de prendre $\lambda = \frac{\sqrt{d^2 - m^2}}{m}$.

- Soit x_3 (resp. y_3) un vecteur de norme 1 orthogonal au plan engendré par x_1 et x_2 (resp. y_1 et y_2) et soit u tel que $u(x_i) = y_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Il est clair que u conserve le produit scalaire et donc $u \in O(3, \mathbb{R})$; quitte à changer y_3 en $-y_3$, on peut supposer que u est positive. On pose $u' := u \circ u \circ u^{-1} \in N$ et $u'(y_1) = y_2$. Soit alors r_n la rotation d'angle π/n et d'axe a . Comme \mathbb{R} est archimédien, le rapport π/n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc pour n assez grand $\|x - r_n(x)\| \leq d$. On pose alors $x_0 = x$ et $x_{i+1} = r_n(x_i)$ avec donc $x_n = -x$. Comme on a $\|x_{i+1} - x_i\| \leq d$ il existe alors $u_i \in N$ tel que $u_i(x_i) = x_{i+1}$ de sorte que $v = u_n \circ \dots \circ u_1 \in N$ et $v(x) = -x$ et v est donc un renversement, d'où le résultat. □

Exercice 15. On note H le corps des quaternions et soit G ceux de norme 1: $G = \{a+bi+cj+dk / a^2+b^2+c^2+d^2 = 1\}$. On considère alors l'action de G sur H par automorphismes intérieurs. En restreignant cette action à l'ensemble P des quaternions purs, montrez que l'on obtient alors un isomorphisme $G/\{\pm 1\} \simeq O(3, \mathbb{R})^+$. La suite exacte associée est-elle scindée ?

Preuve : On a $P \simeq \mathbb{R}^3$ et on vérifié aisément que l'action de conjugaison de G est \mathbb{R} -linéaire et conserve la norme de sorte qu'elle définit un morphisme de groupes $G \longrightarrow O(3, \mathbb{R})$. On note en outre que $G \simeq S^3$ est connexe et que le morphisme précédent est continue de sorte que l'image de $G \rightarrow O(3, \mathbb{R}) \rightarrow \{\pm 1\}$ est connexe et donc égale à $\{1\}$. On obtient donc bien un morphisme de groupe $\phi : G \longrightarrow O^+(3, \mathbb{R})$. Montrons la surjectivité: soit $p \in P \cap G$, on a $\phi_p(p) = p$ ce qui prouve que ϕ_p fixe p (et est non triviale), c'est donc une rotation d'axe p . En outre on a $p^2 = -1$ soit ϕ_p d'ordre 2; c'est donc un renversement. On obtient donc tous les renversements, or ceux-ci engendrent $O^+(3, \mathbb{R})$, d'où la surjectivité. Pour le noyau, on a $\phi_g(p) = p$ pour tout $p \in P$ si et seulement si g commute à tous les éléments de P et donc à tous les éléments de H , soit donc $g \in \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$.

Si la suite exacte

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow G \xrightarrow{\phi} O^+(3, \mathbb{R}) \rightarrow 1$$

était scindée, on aurait un sous-groupe H de G tel que $\phi|_H$ soit un isomorphisme de H sur $O^+(3, \mathbb{R})$. Mais alors pour $g \in G$, on aurait g ou $-g$ qui appartiendrait à H . En prenant $o \in P \cap G$, on a $p^2 = (-p)^2 = -1$ soit donc $-1 \in H$, contradiction. □

Exercice 16. On considère l'action de $G \times G$ sur H définie par $(q_1, q_2).q := q_1q\bar{q}_2$. Montrez que l'on définit ainsi un isomorphisme $G \times G/\{(1, 1), (-1, -1)\} \simeq O(4, \mathbb{R})^+$ et en déduire que $PO(4, \mathbb{R})^+ \simeq O(3, \mathbb{R})^+ \times O(3, \mathbb{R})^+$.

Preuve : L'application ϕ_{q_1, q_2} est clairement \mathbb{R} -linéaire et conserve la norme. Par continuité, on conclut comme précédemment que son image est contenue dans les isométries positives soit donc

$$\phi : G \times G \longrightarrow O^+(4, \mathbb{R})$$

Soit $(q_1, q_2) \in \text{Ker } \phi$, i.e. $q_1q\bar{q}_2 = q$ pour tout $q \in H$. Pour $q = 1$, on trouve $q_1 = q_2$ de sorte qu'ensuite q_1 est central et donc $\text{Ker } \phi = \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

Pour la surjectivité, soit $u \in O^+(4, \mathbb{R})$, si on a $u(1) = 1$, comme $P = 1^\perp$, on a $u(P) = P$ avec $u|_P \in O^+(3, \mathbb{R})$ et d'après ce qui il existe $q \in G$ tel que $\phi_{q, q} = u$. Si on a $u(1) = g$, on a alors $\phi_{\bar{g}, 1} \circ u(1) = 1$ et on conclut grâce au cas précédent. Finalement on obtient donc

$$G \times G/\{(1, 1), (-1, -1)\} \simeq O(4, \mathbb{R})^+$$

En passant au groupe projectif, on cherche les couples (q_1, q_2) tels que $\phi_{q_1, q_2} = -Id$, i.e. $q_1q\bar{q}_2 = -q$ pour tout $q \in H$. En faisant $q = 1$, on obtient $q_1 = -q_2$, puis on voit que q_1 est central soit alors

$$G \times G/V \simeq PO(4, \mathbb{R})^+$$

où $V = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$. En outre la projection canonique $G \rightarrow G/\{\pm 1\}$ induit un isomorphisme

$$(G \times G)/V \simeq G/\{\pm 1\} \times G/\{\pm 1\}$$

et donc d'après ce qui précède

$$PO(4, \mathbb{R})^+ \simeq O(3, \mathbb{R})^+ \times O(3, \mathbb{R})^+.$$

□

Exercice 17. Le paradoxe de Banach-Tarski (a) On considère les deux rotations vectorielles de \mathbb{R}^3 , u, v dont les matrices dans la base canonique sont

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Soit G le groupe engendré par u et v . Montrez que tout élément $r \in G \setminus \{Id, u\}$ s'écrit de manière unique sous la forme $r = u^{\epsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} u \dots u v^{n_k} u^{\epsilon_2}$ avec $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ et les $n_i \in \{1, 2\}$.

(b) On définit une partition (I, J, K) de G de la manière suivante

- pour tout n , $(v^2 u)^n \in I$;
- pour tout n , $u(v^2 u)^n \in J$;
- pour tout n , $vu(v^2 u)^n \in K$;
- les éléments de G qui ne sont pas de cette forme appartiennent à I, J, K respectivement suivant que leur écriture commence à gauche par u, v, v^2 respectivement.

Montrez que $K = vJ$, $I = vK$ et $I = u(J \cup K)$.

Exercice 18. (a) Deux parties A et B de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 sont dites superposables et on notera ADB , s'il existe un déplacement r de \mathbb{R}^3 tel que $B = r(A)$. Montrez que l'on définit bien ainsi une relation d'équivalence.

(b) Soit S la sphère unité de \mathbb{R}^3 ; on pose

$$D = \{x \in S \mid \exists r \in G \setminus \{Id\}, r(x) = x\}$$

Montrez que D est dénombrable et est stable par G .

(c) Les orbites de $S \setminus D$ sous l'action de G , constituent une partition de $S \setminus D$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble T contenant un élément de chaque orbite. En posant $A = I(T)$, $B = J(T)$ et $C = K(T)$, montrez que l'on a ainsi une partition finie (A, B, C, D) de S avec D dénombrable, A, B, C superposables et $AD(B \cup C)$.¹

Exercice 19. (a) On appelle découpage d'une partie A de \mathbb{R}^3 , une partition finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A . On dira que deux parties A, B de \mathbb{R}^3 sont puzzle-équivalentes s'il existe un entier n et des découpages $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que pour tout $1 \leq i \leq n$, A_i et B_i sont superposables. Vérifiez que l'on obtient bien ainsi une relation d'équivalence que l'on notera \mathcal{P} .

(b) Soient S_1 et S_2 deux sphères disjointes de rayon 1, de centres respectifs O_1, O_2 et soient (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) les découpages obtenus en translatant (A, B, C, D) . Montrez que

$$(S \setminus D) \mathcal{P}((S_1 \setminus D_1) \cup (S_2 \setminus D_2))$$

(c) On cherche à éliminer les ensembles dénombrables dans la duplication de la sphère ci-dessus. On veut prouver le résultat suivant: si Σ est une sphère et Δ est un sous-ensemble dénombrable de Σ , alors

$$\Sigma \mathcal{P}(\Sigma \setminus \Delta)$$

Pour cela montrez que l'on peut choisir $\delta \in \Sigma$ tel que $\pm\delta \notin \Delta$. En déduire que l'ensemble des rotations d'axe (O, δ) vérifiant qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x, y \in \Delta$ tels que $r^n(x) = y$ est dénombrable. Soit alors ρ une rotation n'appartenant pas à cet ensemble, de sorte que les ensembles $\rho^n(\Delta)$ sont deux à deux disjoints. En considérant $U = \bigcup_{n \geq 0} \rho^n(\Delta)$, prouvez le résultat.

(d) On veut désormais dupliquer les boules fermées. Montrez que

$$(K \setminus \{O\}) \mathcal{P}((K_1 \setminus \{O_1\}) \cup (K_2 \setminus \{O_2\}))$$

En considérant $\Delta = \{(\cos n, \sin n, 0), n \in \mathbb{N}\}$, montrez que la rotation d'axe z et d'angle 1 radian envoie Δ sur $\Delta \setminus \{(1, 0, 0)\}$. En déduire que

$$K \mathcal{P} K \setminus \{(1, 0, 0)\}$$

puis le résultat de duplication des boules.

Remarque: De manière plus générale, on peut montrer le théorème suivant

Théorème (Banach-Tarski) Si A et B sont deux parties de \mathbb{R}^3 bornées et d'intérieurs non vides, alors A et B sont puzzle-équivalentes.

¹En quelque sorte, A est à la fois la moitié et le tiers de la sphère.