Endomorphismes nilpotents.

1. Un exemple de plan

prérequis : les notions essentielles de réduction des endomorphismes, notamment le lemme de décomposition des noyaux, les propriétés relatives aux matrices compagnons et aux sous-espaces cycliques.

Dans la suite K désigne un corps ; E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, et pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on note respectivement π_u et χ_u son polynôme minimal et caractéristique.

1.1. Pourquoi étudier les matrices nilpotentes. —

1.1.1. Décomposition de Dunford. — il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d semi-simple, n nilpotente tel que :
- $u = d + n$;
- $nd = dn$.

On est ainsi ramené, en quelque sorte, à étudier d'un côté les endomorphismes semi-simples, i.e. diagonalisables sur une extension finie de K, et les endomorphismes nilpotents.

1.1.2. Triangularisation simultanée. —

Théorème 1.1. — *(cf.* [**1**] *1.3.2) Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ alors $\mathcal{A}$ est triangularisable si et seulement si tout commutateur $BC - CB$ avec $B, C \in \mathcal{A}$ est nilpotent.*

Remarque : on peut ainsi voir la triangularisabilité comme une généralisation de la commutativité ; on relâche la condition d'être nul pour un commutateur, en demandant qu'il soit nilpotent.

Théorème 1.2. — *(**McCoy** cf.* [**1**] *1.3.4) La paire $\{A, B\}$ est triangularisable si et seulement si $p(A, B)(AB - BA)$ est nilpotent pour tout polynôme commutatif p en A et B.*

Corollaire 1.3. — *Une sous-algèbre unitaire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est triangularisable si et seulement si $\mathcal{A}/\mathrm{Rad}\mathcal{A}$ est commutatif, où $\mathrm{Rad}\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A} : \sigma(AB) \subset \{0\}\ \forall B \in \mathcal{A}\}$ est le radical de A, i.e. l'intersection de tous les idéaux à droite (ou à gauche) maximaux de $\mathcal{A}$.*

1.2. Premières propriétés. —

u désigne ici un endomorphisme nilpotent i.e. tel qu'il existe m pour lequel u^m est l'endomorphisme nul.

1.2.1. Indice de nilpotence. — il s'agit du plus petit entier r pour lequel $u^r = 0$; r est alors caractérisé par

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} u \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} u^r = \operatorname{Ker} u^{r+1} = \cdots \operatorname{Ker} u^m = E$$

où encore avec les images $E \supsetneq \operatorname{Im} u \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{Im} u^r = \{0\}$. On en déduit en particulier que $r \leq n$.

Exemples : : $r = 0$ si et seulement si $u = 0$, pour un bloc de Jordan

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

l'indice de nilpotence est maximal égal à la dimension n de l'espace.

1.2.2. Diverses caractérisations. — un endomorphisme u est nilpotent s'il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :
- $u^n = 0$;
- $\chi_u = X^n$;
- $\sigma(u) = \{0\}$;
- (en caractéristique nulle) $\mathrm{tr} u^k = 0$ pour tout $k > 0$; ($I_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ a ses puissances de trace nulle sans être nilpotente)
- il existe une base dans laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure ;
- (si K est algébriquement clos) u et $2u$ son semblables.

Remarque : en utilisant la caractérisation par les traces, on peut montrer le théorème de Burnside, i.e. que tout sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini.

1.3. Réduction de Jordan et tableaux de Young. —

1.3.1. Tableaux de Young. — Pour $i = 0, \cdots$, on note $d_i = \dim N_i$ où $N_i = \operatorname{Ker} u^i$; du fait que u induit une injection $E_{i+1}/E_i \hookrightarrow E_i/E_{i-1}$ on remarque que la suite $(d_{i+1} - d_i)$ est décroissante positive. Le tableau de Young associé à u est tel que ses colonnes sont de taille $d_i - d_{i-1}$; ses lignes définissent alors une partition $(n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_s)$ de $n = n_1 + \cdots + n_s$.

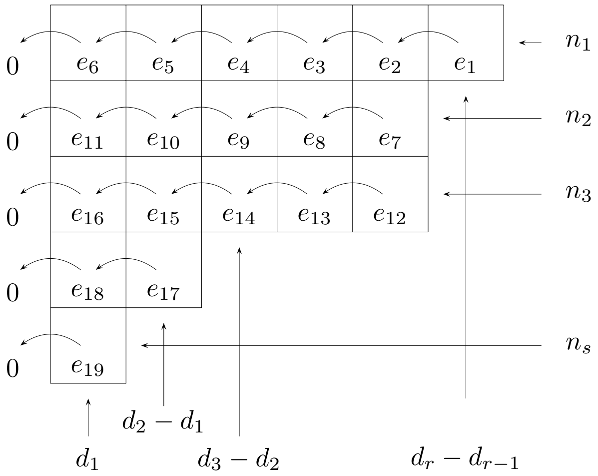

FIG. 1. Tableau de Young associé à un endomorphisme

Une façon de construire ce tableau de Young est la suivante : on prend un vecteur e_1 de $N_r - N_{r-1}$ et on note pour $i = 1, \cdots, r-1$, $e_{i+1} = u^i(e_1)$. Si $\dim N_r/N_{r-1} > 1$ on choisit un vecteur $e_{r+1} \in N_r$ tel que les images de e_1, e_{r+1} dans N_r/N_{r-1} soient libres et on pose pour $i = 1, \cdots, r-1$, $e_{r+1+i} = u^i(e_{r+1})$. On continue le procédé jusqu'a obtenir une base

$e_1, e_{r+1}, \cdots, e_{kr+1}$ de N_r/N_{r-1}. On choisit alors un vecteur $e_{(k+1)r+1}$ de N_{r-1} tel que les images de $u(e_1), \cdots, u_(e_{kr+1}), e_{(k+1)r+1}$ forment une famille libre de N_{r-1}/N_{r-2} et on pose pour tout $i = 1, r-2$, $e_{(k+1)r+1+i} = u(e_{(k+1)r+1})$. On continue ce procédé jusqu'à épuiser tous les N_i. Parallèlement on remplit le tableau de Young comme dans la figure 1 dans laquelle l'image de e_1 est une base de $\operatorname{Ker} u^6 / \operatorname{Ker} u^5$, les images de $u(e_1), e_7, e_{12}$ forment une base de $\operatorname{Ker} u^5 / \operatorname{Ker} u^4$, les images de $u^4(e_1), u^3(e_7), u^3(e_{12}), e_{17}$ forment une base de $\operatorname{Ker} u^2 / \operatorname{Ker} u$ et $u^5(e_1), u^4(e_7), u^4(e_{12}), u(e_{17}), e_{19}$ forment une base de $\operatorname{Ker} u$.

1.3.2. Réduction de Jordan. — Dans la base construite précédemment la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs étant des matrices de Jordan de taille $n_1, \cdots, n_s$. La structure de $K[X]$-module sur E induite par u donne un isomorphisme $E \simeq K[X]/(X^{n_1}) \times \cdots \times K[X]/(X^{n_s})$.

1.3.3. Applications. — *Racines carrées* : la réduite de Jordan de J_n est $\operatorname{diag}(J_{\lceil n/2 \rceil}, J_{\lfloor n/2 \rfloor})$, i.e. si n est pair (resp. impair) alors le tableau de Young de J_n^2 admet deux lignes de même taille $n/2$ (resp. de taille $(n+1)/2$ et $(n-1)/2$).

Proposition 1.4. — *L'équation matricielle $X^2 = A$ a des solutions si et seulement si le tableau de Young de A vérifie une des conditions équivalentes suivantes :*
- *en regroupant les lignes deux par deux en partant du haut (avec la convention que la dernière ligne est nulle si* $\dim N_1$ *est impaire), les lignes d'une même paire différent d'au plus une case ;*
- *il n'y a pas deux colonnes consécutives de même longueur impaire.*

Dimension du commutant : il s'agit de déterminer le nombre de degré de liberté dans le choix d'un opérateur M qui commute avec A. On raisonne dans une base de Jordanisation de A. On rappelle que l'on a

$$\operatorname{Ker} A \subsetneq \operatorname{Ker} A^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} A^r = \operatorname{Ker} A^{r+1}.$$

On considère une base $e_n, \cdots, e_{n-d_r+1}$ de $\operatorname{Ker} A^r - \operatorname{Ker} A^{r-1}$ de cardinal la longueur d_r de la dernière colonne du tableau de Young associé à A. L'image de cette base est totalement libre ce qui donne $d_r n$ degré de liberté ; en contrepartie l'image des u^k de ces vecteurs sont fixés. Soit alors r_1 maximal tel que $d_{r_1} \neq d_r$; on obtient alors $d_{r_1} \dim \operatorname{Ker} A^{r_1}$ nouveau degrés de liberté. On procède ainsi de suite jusqu'à épuiser tout l'espace. On vérifie alors aisément qu'on obtient un nombre de degré de liberté égal à la somme des carrés des longueurs des colonnes du tableau de Young.

Adhérence des orbites : l'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan de taille maximale est l'ensemble des nilpotents. Plus généralement l'ordre de Chevalley sur les orbites nilpotentes, est défini par $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ si et seulement si $\mathcal{O}_1$ est dans l'adhérence de $\mathcal{O}_2$: celui-ci correspond à l'ordre habituel sur les tableaux de Young, i.e. $(n_1 \geq n_2 \geq \cdots) \geq (m_1 \geq m_2 \geq \cdots)$ si et seulement si $n_1 \geq m_1$, $n_1 + n_2 \geq m_1 + m_2$ ...

1.4. Le cône nilpotent.

— L'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes est un cône, i.e. si N est nilpotente alors tN aussi pour tout $t \in K$.

1.4.1. Espaces vectoriels et $\mathcal{N}$. — Evidemment $\mathcal{N}$ n'est pas un espace vectoriel : par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes alors que $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Proposition 1.5. — *Le sous-espace vectoriel engendré par l'un des ensembles suivant*

(a) $\mathcal{N}$;
(b) les matrices nilpotentes de rang 1 ;
– les matrices d'une classe de similitude quelconque de matrices nilpotentes,
est l'hyperplan des matrices de trace nulle.

Preuve : Dans les trois cas, l'inclusion est immédiate. On va montrer directement (b). Comme d'habitude cela repose sur un petit calcul en dimension 2, à savoir : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en considérant la nouvelle base $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$. Soit alors A une matrice de trace nulle ; en ajoutant une combinaison linéaire de matrice nilpotente de rang 1, on se ramène à A diagonale $\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_b)$ avec $\sum_i a_i = 0$ que l'on écrit sous la forme

$$\mathrm{diag}(a_1, -a_1, 0, \cdots, 0) + \mathrm{diag}(0, a_2 + a_1, a_3, \cdots, a_n).$$

D'après le calcul précédent la première matrice est semblable à une combinaison linéaire de matrice nilpotentes de rang 1 ; la deuxième aussi par hypothèse de récurrence.

(c) L'orbite d'une classe de similitude quelconque contient dans son adhérence la classe de similitude des matrices nilpotentes de rang 1. On conclut alors d'après (b). □

Proposition 1.6. — *Tout hyperplan H de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ contient au moins $n^2 - n - 1$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes.*

Preuve : On se ramène au cas où H a pour équation $tr(TX) = 0$ avec T triangulaire et on considère les intersections de H avec les sous-espaces des matrices nilpotentes triangulaires supérieures ou inférieures. □

Proposition 1.7. — *Tout sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathcal{N}$ est de dimension inférieur à $\frac{n(n-1)}{2}$.*

Preuve : On considère la forme quadratique q définie sur l'espace des matrices qui à X associe $\mathrm{tr}X^2$. De manière évidente le cône isotrope est constitué de vecteurs isotropes de sorte que l'espace vectoriel en question sera totalement isotrope. Par ailleurs, si $X \neq 0$ est symétrique (resp. antisymétrique) alors $q(X) > 0$ (resp. $q(X) < 0$) de sorte que la signature de q est $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$. Ainsi un sous-espace totalement isotrope est de dimension inférieure ou égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. L'égalité est clairement atteinte pour les matrices strictement triangulaires supérieures. □

Remarque : évidemment ce maximum est atteint pour les matrices strictement triangulaires supérieures.

1.4.2. Exponentielle. — On prend K de caractéristique nulle. Si A est nilpotente la série $\exp A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$ est finie. Par ailleurs en écrivant $\exp A$ sous la forme $I + N$, on remarque N est nilpotente d'indice celui de A et donc $\exp A$ est unipotente d'indice d'unipotence égal à l'indice de nilpotence de A.

Proposition 1.8. — *L'exponentielle réalise un homéomorphisme de l'ensemble $\mathcal{N}_p$ des matrices nilpotentes d'indices p dans $\mathcal{U}_p$ des matrices unipotentes d'indice p.*

Remarque : l'homéomorphisme réciproque est défini par $\log(I + N) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{N^i}{i}$.

1.4.3. Réduction simultanée. — le théorème de Burnside dit que toute sous-algèbre propre de $\mathcal{L}(E)$ est réductible ; comme la propriété d'être nilpotent est stable par quotient, on en déduit alors que toute algèbre d'endomorphismes nilpotents est triangularisable.

Proposition 1.9. — *Un ensemble $\mathcal{N}'$ d'éléments nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifie une des propriétés suivantes est trigonalisable :*
- *$\mathcal{N}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$;*
- ***théorème de Jacobson*** *: pour tout $A, B \in \mathcal{N}'$, il existe un scalaire c tel que $AB - cBA \in \mathcal{N}$;*
- ***théorème de Engel*** *: pour tout $A, B \in \mathcal{N}'$, $[A, B] = AB - BA \in \mathcal{N}'$;*
- *pour tout $A, B \in \mathcal{N}'$, $AB + BA \in \mathcal{N}'$;*
- ***Levitzki*** *: tout semi-groupe S d'éléments nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ est triangularisable.*

1.5. Développements. —
- toute sous-algèbre $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ de $\mathcal{L}(E)$ est triangularisable (ou alors le théorème de Engel dans le cas où $\mathcal{N}'$ est une algèbre de Lie) ;
- adhérence des orbites via l'ordre de Chevalley ;
- exp réalise un homéomorphisme entre les nilpotents et les unipotents ;
- réduction de Jordan et tableaux de Young ;
- Burnside : un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement s'il est d'exposant fini ;
- décomposition de Dunford ;
- dimension du commutant ;
- petit mélange de résultats sur les espaces vectoriels et $\mathcal{N}$;
- résolution de l'équation matricielle $X^2 = A \in \mathcal{N}$.

2. Questions

Exercice 2.1. — *(a) Montrer que si* $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$, *alors il existe un pseudo-inverse X, i.e. tel que $AX = XA$, $AXA = A$ et $XAX = X$.*

(b) A quelle condition sur les invariants de similitude de A a-t-on $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 2 \dim \operatorname{Ker} A$ *?*

Exercice 2.2. — *On considère la suite des dimensions des noyaux emboîtés. Décrivez l'ensemble des suites obtenues.*

Exercice 2.3. — *Soit u un endomorphisme nilpotent ; pour tout $i \geq 0$, on note K_0^i le noyau de u^i soit d_0^i sa dimension. On suppose que la suite (d_0^i) est égale à $(4, 7, 9, 10, 10, \cdots)$. Déterminer alors les invariants de similitudes de u.*

Exercice 2.4. — *Soit $M = S + N$ la décomposition de Dunford de M en semi-simple plus nilpotent. Montrez que S est dans l'adhérence de la classe de similitude de M.*

3. Solutions

2.1 (a) On décompose l'espace en sous-espace caractéristique pour A. Sur les espaces caractéristiques associés aux valeurs propres non nulles, on pose $X = A^{-1}$. Sur l'espace caractéristique associé à la valeur propre 0, l'hypothèse implique que A y est nulle, on prend donc X quelconque.

(b) Cela correspond à dire que les deux première colonnes du tableau de Young associé à A sont de même longueur ce qui est équivalent à demander qu'il n'y ait aucun bloc de Jordan de taille 1.

2.2 Notons pour $k \geq 0$, $a_k := \dim \operatorname{Ker} a^k$. Il s'agit d'une suite croissante majorée par la dimension de l'espace n. On a $a_0 = 0$ et si $a_1 = 0$ alors pour tout k, $a_k = 0$. Plus généralement soit r le premier indice tel que $a_r = a_{r+1}$. Soit alors $x \in \operatorname{Ker} a^{r+2}$ de sorte que $a(x) \in \operatorname{Ker} a^{r+1} = \operatorname{Ker} a^r$ et donc $a^{r+1}(x) = 0$ soit $x \in \operatorname{Ker} a^{r+1}$ et donc $a_{r+1} = a_r$ et par récurrence $a_r = a_{r+k}$ pour tout $k \geq 0$.

On introduit la suite $d_k := a_k - a_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Remarquons que cette suite est décroissante : en effet a induit un endomorphisme injectif de $\operatorname{Ker} a^k / \operatorname{Ker} a^{k-1}$ dans $\operatorname{Ker} a^{k-1} / \operatorname{Ker} a^{k-2}$.

Réciproquement soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite croissante majorée par n telle que la suite des différences d_k est décroissante. On considère alors la matrice nilpotente A sous forme de Jordan dont le nombre de blocs de Jordan de taille r est égal à $d_r - d_{r+1}$. On vérifie alors aisément que $a_k = \dim \operatorname{Ker} A^k$.

Par ailleurs, une manière graphique de représenter les classes de similitude de matrices nilpotentes, est d'introduire le diagramme de Young dont les colonnes sont les d_i pour $i = 1, \cdots, r$. Les blocs de Jordan se lisent alors sur les lignes.

2.3 On note $V = K^n$ l'espace vectoriel en question, que l'on munit de la structure de $A = K[X]$-module définie par la matrice à étudier ; on notera $a_r(X)| \cdots |a_1(X)$, ses invariants de similitude. Le polynôme minimal est alors $a_1(X)$ et le polynôme caractéristique est le produit des invariants de similitude. On note r l'indice i tel que $K_0^{i-1} \neq K_0^i = K_0^j$ pour tout $j \geq i$. L'entier r est la multiplicité de 0 dans $a_1(X)$ tandis que sa dimension est la multiplicité de 0 dans le produit des a_i. On note $\delta^i = \dim K_0^i - \dim K_0^{i-1}$; partant de la forme de Jordan il est aisé de voir que δ_0^i est égal au nombre de a_k divisible par X^i. On remarque ainsi que le nombre r d'invariants de similitude est égal au maximum des dimensions des sous-espaces propres.

Ainsi le nombre d'invariants de similitude est égal à la dimension du noyau soit donc 4 invariants de similitude a_1, a_2, a_3, a_4. Le polynôme minimal s'écrit sous la forme X^{α_1} avec $\alpha_1 = r_0$ où r_0 est l'indice i tel que $K_0^{i-1} \neq K_0^i = K_0^{i+k}$ pour tout $k \geq 0$, soit donc ici $a_1(X) = X^4$. De même on écrit les $a_i(X)$ sous la forme $a_i(X) = X^{\alpha_i}$ pour $2 \leq i \leq 4$ avec $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ et $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 10$.

On introduit comme ci-avant $\delta_0^i = \dim K_0^i - \dim K_0^{i-1}$; δ_0^i est le nombre d'invariants de similitude divisibles par X^i. De $\delta_0^4 = 1$ on déduit $\alpha_2 \leq 3$; en outre $\delta_0^3 = 2$ impose $\alpha_2 \geq 3$ soit $\alpha_2 = 3$ et $\alpha_3 \leq 2$. Enfin $\delta_0^2 = 3$ donne $\alpha_3 = 2$ et $\alpha_4 = 1$.

2.4 Cela découle simplement du fait que 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude de N.

Références

[1] H. Radjavi and P. Rosenthal. *Simultaneous Triangularization.* Springer, 2000.