PROBLÈMES D'ANGLES ET DE DISTANCES EN DIMENSION 2 ET 3

par

Boyer Pascal

Table des matières

1. Géométrie des figures en dimension 2

On se propose d'étudier les relations métriques d'une figure et plus particulièrement les polygones et les cercles.

1.1. Triangles en dimension 2. — On commence par étudier, la figure de base constituée par une base affine du plan, i.e. un triangle. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des triangles non dégénérés alors $\mathcal{T}/\sim(E)$ est en bijection avec l'ensemble des couples (θ_1, θ_2) d'éléments de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ tels que $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ (autrement dit la somme des angles d'un triangle est égale à π). (aussi en bijection avec $(a,b,c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})/\mathfrak{S}_3$, ou encore $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})/\mathfrak{S}_2$) ;

Ainsi étant données $0 < a \leq b \leq c$ tels que $c \leq a+b$, il existe à isométrie près, un unique triangle dont les côtés ont pour longueur a, b, c. En ce qui concerne les angles $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, le triangle n'est déterminé qu'à similitude près.
Remarque : en géométrie sphérique, la donnée des angles détermine à isométrie près un unique triangle sphérique.
Applications : le théorème de Pythagore : $\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = 1$ (il s'agit d'un énoncé de géométrie semblable). *Preuve :* On note AH la hauteur menée de A sur BC, les triangles ABC et AHB sont semblables de sorte que $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$. De même on a $CH^2 = CH.CB$ et donc $AB^2 + AC^2 = (BH+HC)BC = BC^2$; □
Triangles podaires (cf. l'exercice 9.5) inspiré de [**3**] §1.9 : soit ABC un triangle et P un point intérieur au triangle. On considère A_1, B_1, C_1 les pieds des perpendiculaires menées de P aux cotés du triangle. Le triangle $A_1B_1C_1$ est dit triangle podaire de ABC pour P. Soit alors $A_2B_2C_2$ le triangle podaire de $A_1B_1C_1$ pour P et $A_3B_3C_3$ le triangle podaire de $A_2B_2C_2$ pour P. Alors ABC et $A_3B_3C_3$ sont semblables et le rapport de similitude est égal au rapport du produit des distances de P aux trois côtés sur le produit des distances aux trois sommets.

La loi des sinus : (cf. [**3**] §1.1) étant donné un triangle ABC de côtés de longueur a, b, c et d'angles α, β, γ, on note S son aire et R le rayon du cercle circonscrit. On a alors

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

Preuve : On a clairement $S = \frac{bc\sin\alpha}{2}$ ce qui donne les trois premières égalités. Pour la dernière, on considère dans le cercle circonscrit le point A' diamétralement opposé à A. Le triangle $AA'C$ étant rectangle en C, on en déduit alors $b = 2R\sin\beta$, en utilisant le théorème de l'angle au centre (en effet $\sin\beta = \sin\widehat{AA'C}$). □
Quelques relations trigonométriques dans le triangle : on pose $p = (a+b+c)/2$:
– $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$:
Preuve : $a^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2$. □

– $\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$:

Preuve : on a $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{-b^4-c^4-a^4+2b^2c^2+2b^2a^2+2c^2a^2}{4b^2c^2}$ et on vérifie en développant que $16p(p-a)(p-b)(p-c) = -b^4-c^4-a^4+2b^2c^2+2b^2a^2+2c^2a^2$. □

– $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$:

Preuve : on a $\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2 = (2bc - b^2 - c^2 + a^2)/2$ et on vérifie que $4(p-b)(p-c) = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$. □

– $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$:

Preuve : on a $\cos^2(\alpha/2) = 1 - \sin^2(\alpha/2) = p(p-a)/bc$. □

– **Formule de Heron** : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$:

Preuve : On part de $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ et de

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{ab}{2}\sqrt{(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)} \\ &= \tfrac{ab}{2}\sqrt{\left(1 - \tfrac{c^2-a^2-b^2}{2ab}\right)\left(1 + \tfrac{c^2-a^2-b^2}{2ab}\right)} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\Big((a+b)^2 - c^2\Big)\Big(c^2 - (a-b)^2\Big)} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c)} \end{aligned}$$

et la formule s'obtient en substituant $a = 2p - b - c$. □

Remarque : la formule de Heron présente une instabilité numérique pour les triangles dont un côté est très petit par rapport aux deux autres ; pour y remédier mieux vaut utiliser la formule

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+(b+c))(c-(a-b))(c+(a-b))(a+(b-c))}$$

où $a > b > c$.

1.2. Polygones du plan. — On se propose ici de donner quelques résultats sur les polygones du plan.

la somme des angles d'un polygone à n côtés est égale à $(n-2)\pi$.

Preuve : On triangule notre polygone en joignant un sommet à tous les autres sommets, ce qui donne $n-2$ triangles dont la somme des angles est $(n-2)\pi$. □

Remarque : en particulier si le polygone est régulier l'angle en un sommet est $(1-2/n)\pi$.

En ce qui concerne les distances, la question naturelle est de savoir donner des CNS sur des réels positifs $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ pour qu'il existe un polygone régulier dont les longueurs des côtés sont les a_i.

– pour $n = 3$, la CNS est $a_3 \leq a_1 + a_2$;
– pour $n = 4$, une condition suffisante est $a_4 \leq a_1 + a_2 + a_3$;
– pour n quelconque, on renvoie au paragraphe sur les déterminants de Cayley-Menger qui traite le cas de la dimension quelconque.

Dans le cas des quadrangles, on note qu'il est possible de le déformer de sorte qu'il soit inscriptible dans un cercle, cf. plus bas le paragraphe sur le théorème de Ptolémée et sa généralisation en dimension quelconque. La question naturelle est de savoir combien de segment il faut rajouter pour le rendre rigide ; pour $n = 4$ il est clair qu'une diagonale suffit à rigidifier un quadrangle. On peut montrer simplement qu'une condition nécessaire est que le nombre de segments minimal de segments pour rigidifier un polygone à n côtés est $2n - 3$, mais cette condition n'est pas nécessaire. Nous verrons plus bas qu'en ce qui concerne les polyèdres convexes de l'espace ils sont tous rigides.

1.3. Géométrie des cercles. — Le cercle est une des figures basiques de la géométrie euclidienne cependant dans le cas où on n'étudie que des configurations de cercle, la bonne géométrie à considérer est la géométrie conforme.

1.1 — Cercles et triangles : tout triangle non plat possède un cercle circonscrit ainsi qu'un cercle inscrit, on se propose ici de donner quelques relations entre ces données

Sur les cercles inscrits : (cf. [**3**] p.11) *avec les notations de la figure 1, on a* $x = p - a$, $y = p - b$ *et* $z = p - c$ *où* $2p = a + b + c$. *Par ailleurs l'aire* $\mathcal{A}(ABC) = pr$.

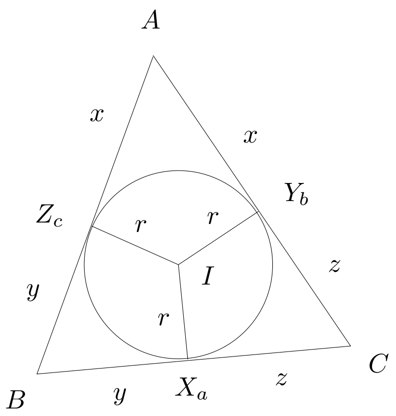


FIG. 1. Sur le cercle inscrit

Preuve : En additionnant les égalités $y+z = a$, $z+x = b$ et $x+y = c$, on obtient $x+y+z = p$ d'où la première salve d'égalités. Par ailleurs on a $\mathcal{A}(IBC) = ar/2$, $\mathcal{A}(IAB) = cr/2$ et $\mathcal{A}(IAC) = br/2$ et donc $\mathcal{A}(ABC) = pr$. □

Remarque : avec les notations de la figure 2, r_a désigne le rayon du cercle exinscrit du triangle ABC qui touche BC en X_a dont le centre est I_a. On a $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(I_aCA) + \mathcal{A}(I_aAB) - \mathcal{A}(I_aCB)$ de sorte que d'après le résultat précédent, on a $\mathcal{A}(ABC) = \frac{b+c-2a}{2} r_a = (p-a)r_a$. On peut aussi remarquer que les triangles AI_aY_a et AIY sont semblables de sorte que $\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}$. Par symétrie du problème, on a aussi $\frac{r_b}{r} = \frac{p}{p-b}$ et $\frac{r_c}{r} = \frac{p}{p-c}$ de sorte que

$$\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = \frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p} = 1.$$

Sur les cercles circonscrits : (cf. [**3**] §2.5) *soit* P *un point du plan à partir duquel on construits ses projetés orthogonaux* P, Q, R *sur les côtés d'un triangle* ABC. *Les points* P, Q, R *sont colinéaires si et seulement si* P *appartient au cercle circonscrit de* ABC *; la droite ainsi formée s'appelle la* ***droite de Simson*** *de* P.

Preuve : Supposons que P appartienne au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC ; quitte à renommer les sommets on suppose que P appartient à l'arc AC de sorte que $\widehat{APC} = \pi - \widehat{ABC} = \widehat{C'PA'}$ et donc en soustrayant $\widehat{APA'}$ on obtient $\widehat{A'PC} = \widehat{C'PA}$. Par ailleurs on

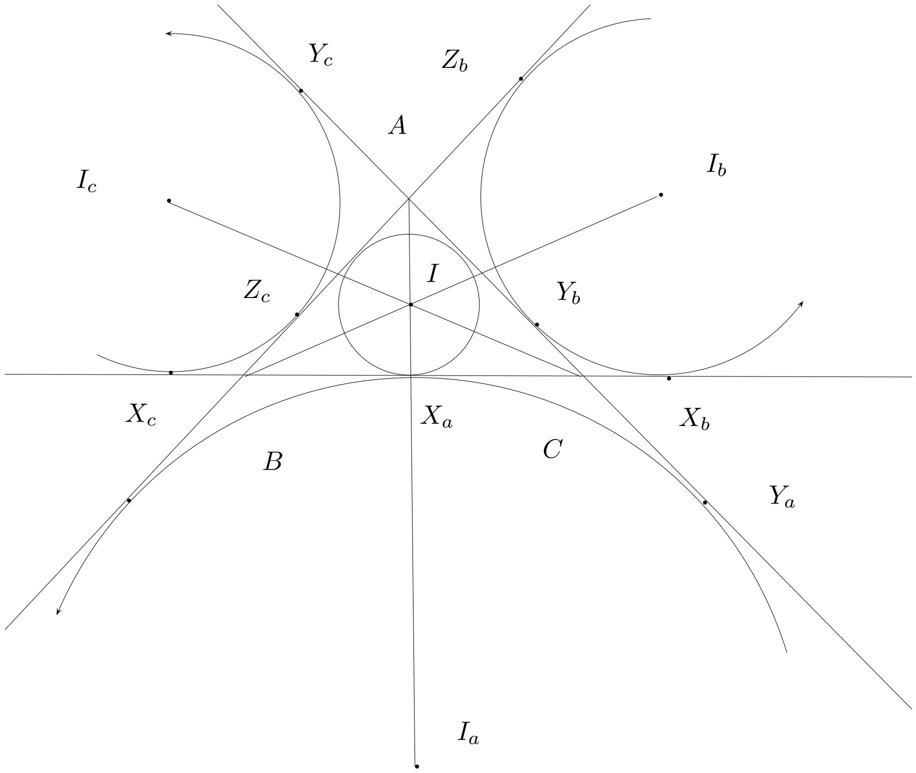


Fig. 2. Sur le cercle inscrit

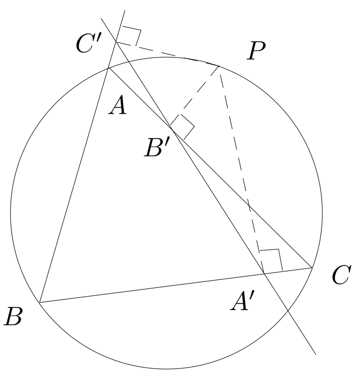


Fig. 3. Droite de Simson

a $\widehat{A'PC} = \widehat{A'B'C}$ et $\widehat{C'PA} = \widehat{C'B'A}$ et donc $\widehat{A'B'C} = \widehat{C'B'A}$ i.e. les points A', B', C' sont alignés.

Réciproquement si A', B', C' sont alignés, alors quitte à renommer les sommets, on peut supposer que P appartient à la région délimitée par le secteur angulaire $\widehat{CBA}$ au delà du segment AC comme dans la figure 3. On remonte alors les égalités précédentes pour obtenir que $\widehat{APC} = \pi - \widehat{ABC}$ et donc $P \in \mathcal{C}$. $\square$

Cas particulier du grand théorème de Poncelet : *soient deux cercles $C(I;r)$ et $C(O;R)$ tels que $D(I;r) \subset D(O;R)$; pour un point $M \in C(O,R)$, on trace une tangente à $C(I;R)$ passant par M qui recoupe alors $C(O;R)$ en un point nommé M_1. On recommence alors le processus pour M_1 et on construit ainsi une suite M_n de points de $\mathcal{C}(0;R)$. Cette suite est alors périodique de période 3 si et seulement si $OI^2 = R^2 - 2rR$.*

Remarque : en particulier on remarque que cette condition est indépendante du point M de départ comme l'affirme plus généralement le grand théorème de Poncelet.

Preuve : Cela revient en fait à montrer que $C(O;R)$ (resp. $C(I;r)$) est le cercle circonscrit (resp. inscrit) d'un triangle ABC si et seulement si $OI^2 = R^2 - 2rR$. Montrons tout d'abord le sens direct qui correspond à *la relation d'Euler*, cf. la figure 4. On note P_1 l'intersection

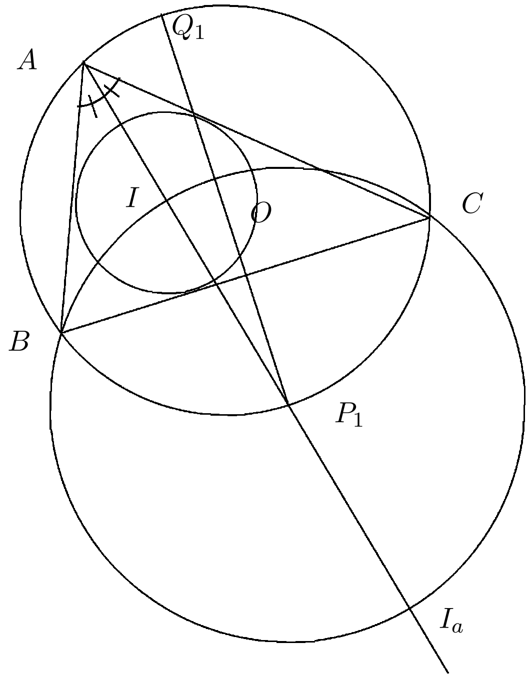


FIG. 4. Relation d'Euler

de la droite (IA) avec $C(O;R)$, Q_1 le symétrique de P_1 par rapport à O et I_a le centre du cercle exinscrit par rapport au segment $[BC]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $(\widehat{BP_1, BC}) = (\widehat{AP_1, AC}) = (\widehat{AB, AP_1}) = (\widehat{CB, CP_1})$ de sorte que BP_1C est isocèle de sommet P_1 qui appartient donc à la médiatrice de $[BC]$. Les triangles I_aBI et I_aCI étant rectangles d'hypothénuse I_aI, on en déduit que I_aIBC sont cocycliques le centre du cercle étant un point appartenant à (II_a) et à la médiatrice de $[BC]$, c'est donc P_1. En particulier on a $P_1B = P_1I$. Calculons alors $\sigma = \overrightarrow{IP_1}.\overrightarrow{IA}$ de deux façons différentes :

– on a $\sigma = -IP_1.IA = -P_1B.IA$ avec dans le triangle rectangle P_1Q_1B (resp. AIC_1 où C_1 est le point de contact de $C(I;r)$ avec (AB)) $P_1B = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$ (resp. $AI = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$) et donc $\sigma = -2Rr$;

– $\sigma = \overrightarrow{IP_1}.(\overrightarrow{IQ_1} + \overrightarrow{Q_1A}) = \overrightarrow{IP_1}.\overrightarrow{IQ_1} = IO^2 - R^2$.

De ces deux calculs on en déduit bien la relation d'Euler : $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Réciproquement étant donnés $C(O;R)$ et $C(I;r)$ tels que $OI^2 = R^2 - 2Rr$, pour un point A quelconque de $C(O;R)$, on construit les tangentes issues de A à $C(I;r)$ qui recoupent $C(O;R)$ en B, C. On note P_1 l'intersection de (AI) avec $C(O;R)$ de sorte que, d'après ce qui précède, le centre I' du cercle inscrit à ABC est l'intersection du cercle de centre P_1 et de rayon P_1B. Celui-ci est tel que $(OI')^2 = R^2 - 2r'R$ où r' est le rayon du cercle inscrit ce qui impose $I = I'$ et donc $r = r'$. En effet, notons O' le projeté orthogonal de O sur (AI) et pour M un point variable sur $(O'A)$ orienté de de O' vers A, notons $x = \overline{O'M}$ et considérons l'équation $OM^2 = R^2 - 2Rr$ qui s'écrit $(OO')^2 + x^2 = R^2 - 2R(AO' - x)\sin(\alpha/2)$, équation de degré 2 dont une solution évidente est $M = A$ soit $x = O'A$ et donc pour unique autre solution I. □

1.2 — Cercles et quadrangles : on s'intéresse ici aux quadrangles inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$.

Théorème de Ptolémée : (cf. [**3**] §2.6) *étant donné un quadrilatère la somme des produits des longueurs des côtés opposés est supérieure ou égale au produit des longueurs de ses diagonales avec égalité si et seulement si le quadrilatère est inscriptible dans un cercle.*

Preuve : Avec les notations de la figure 5, on a

$$B'C' = \frac{a.AP}{2R}, \quad A'C' = \frac{b.BP}{2R}, \quad \frac{A'B'}{=}\frac{c.CP}{2R}$$

de sorte que si P appartient au cercle circonscrit à ABC, les points A', B', C' sont alignés sur la droite de Simson associée à P et donc $A'B' + B'C' = A'C'$ et donc $AB.CP + BC.AP = AC.BP$. Dans le cas contraire on a $A'B' + b'C' > A'C'$ ce qui donne le résultat. □

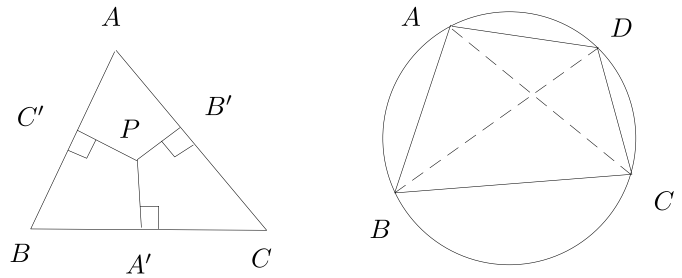


FIG. 5.

Remarque : une autre façon de démontrer le résultat est de considérer une inversion de centre P de sorte que les images A_1, B_1, C_1 de A, B, C sont alignées ; le résultat découle alors de l'égalité $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$ et du calcul des distances $A_1B_1 = \frac{k^2AB}{PA.PB}$, où k est le rapport de l'inversion.

Le théorème du papillon : (cf. [**3**] §2.9) *soit* $[PQ]$ *une corde d'un cercle* $\mathcal{C}$ *; on note* M *le milieu de* $[PQ]$ *et on considère deux cordes* $[AB]$ *et* $[CD]$ *de* $\mathcal{C}$ *passant par* M*. On note* X *et* Y *les intersections de* AD *et* CB *avec* PQ *alors* M *est aussi le milieu de* $[XY]$*.*

Preuve : Les notations sont celles de la figure 6 : X_1 et X_2 (resp. Y_1 et Y_2) sont les projetés orthogonaux de X (resp. Y) sur AB et CD. On note $a = MP = MQ$, $x = XM$ et $y = YM$. On observe alors un certain nombre de triangles semblables qui nous donne des relations :

- MX_1X et MY_1Y : $x/y = XX_1/YY_1$;
- MX_2X et MY_2Y : $x/y = XX_2/YY_2$;
- AX_1X et CY_2Y : $XX_1/YY_2 = AX/CY$;
- DXX_2 et BYY_1 : $XX_2/YY_1 = XD/YB$.

On en déduit alors
$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{XX_1}{YY_2}.\frac{XX_2}{YY_1} = \frac{AX.XD}{CY.YB} = \frac{PX.XQ}{PY.YQ}$$
et donc $x^2/y^2 = (a-x)(a+x)/(a-y)(a+y) = (A^2-x^2)/(a^2-y^2) = a^2/a^2 = 1$ et donc $x = y$. □

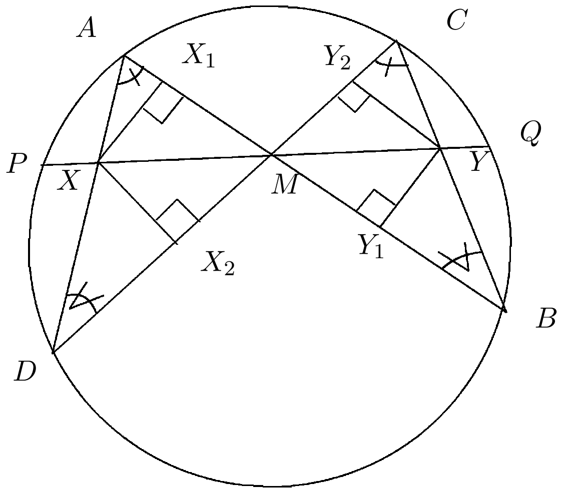


FIG. 6. Butterfly

Remarque : pour une généralisation de ce résultat cf. l'exercice 9.3.

Formule de Brahmagupta (cf. [**3**] §3.2) *étant donnés* 4 *longueurs distinctes telles que chacune est inférieure ou égale à la somme des trois autres, alors il existe* 3 *quadrangles cycliques distincts ayant ces longueurs pour côtés. Par ailleurs si* a, b, c, d *sont les longueurs des côtés d'un quadrangle inscriptible, son aire* $\mathcal{A}$ *est donnée par la formule*
$$\mathcal{A}^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$
où $2p = a+b+c+d$*.*

Preuve : Étant données a, b, c, d tels que chacune de ces longueurs soit inférieures ou égales à la somme des trois autres, on peut construire un quadrangle dont les longueurs des côtés

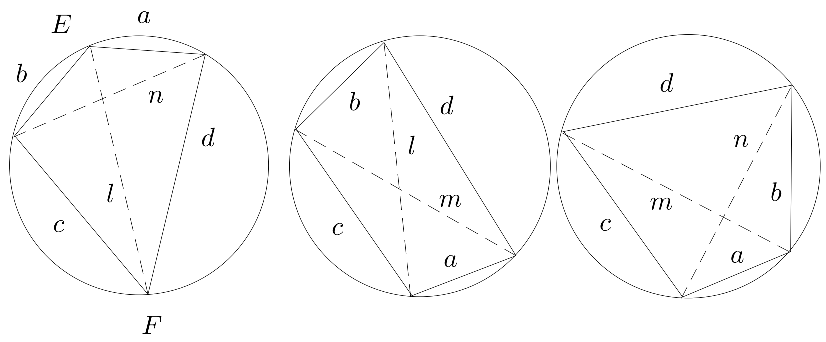


FIG. 7. Théorème de Brahmagupta

soient a, b, c, d : on dispose même d'un degré de liberté (le quadrangle n'est pas rigide cf. plus haut) ce qui permet d'augmenter et de diminuer deux angles opposés de sorte qu'ils soient complémentaires et donc le quadrangle est inscriptible. Notons comme sur la figure 7 l et n les longueurs des diagonales. On garde ensuite les triangles formés par l'une des diagonales en renversant les côtés b et c, on obtient un nouveau quadrangle sur lequel on peut recommencer le procédé pour en obtenir un troisième. On note alors qu'il n'y a pas d'autres constructions possibles.

En ce qui concerne le calcul de l'aire, avec les notations de la première configuration de la figure 7, on a $\cos\hat{F} = -\cos\hat{E}$ et $\sin\hat{F} = \sin\hat{E}$ de sorte que

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{E} = n^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\hat{F}$$

et donc $2(ab + cd)\cos\hat{E} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ et comme

$$2K = ab\sin\hat{E} + cd\sin\hat{F} = (ab + cd)\sin\hat{E}$$

on obtient en utilisant $\cos^2\hat{E} + \sin^2\hat{E} = 1$

$$16K^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2).$$

En utilisant de manière répétée l'égalité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
16K^2 &= \Big(2ab + 2cd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\Big)\Big(2ab + 2cd + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\Big)\\
&= \Big(c^2 + 2CD + d^2 - a^2 + 2ab - b^2\Big)\Big(a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2\Big)\\
&= \Big((c + d)^2 - (a - b)^2\Big)\Big((a + b)^2 - (c - d)^2\Big)\\
&= (c + d - a + b)(c + d + a - b)(a + b - c + d)(a + b + c - d)\\
&= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)
\end{aligned}$$

□

Remarque : pour $d = 0$ on retrouve la formule de Heron.

Théorème japonais : *étant donné un polygone convexe inscrit dans un cercle, pour toute triangulation de ce polygone, la somme des rayons des cercles inscrits est constante.*

Preuve : On commence par le montrer pour un quadrilatère, puis on continue par récurrence sur le nombre de côtés du polygone convexe, en étant attentif à montrer que l'on peut effectivement utiliser l'hérédité dans la preuve par récurrence.
Étape 1 : cas du quadrilatère
Notations : en notant a, b, c les côtés d'un triangle, R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit on sait que $2Rr = abc/(a+b+c)$ qui s'obtient par exemple à partir de $abc/4R = S = pr$ (avec p le demi périmètre). On note a, b, c, d les longueurs AB, BC, CD, DA, puis $m = AC$ et $n = BD$. On notera S_1, S_2 les aires de ABC et ACD, S'_1 et S'_2 les aires de ABD et BCD.
Les hypothèses : $ABCD$ inscrit signifie que les quatres triangles en jeu ont même cercle circonscrit de rayon R. Le fait que $ABCD$ soit convexe entraine que $S1+S2 = S'1+S'2 = S$ l'aire de $ABCD$, ce qui se traduit par : $(ab+cd)m = (ad+bc)n = S$, en multipliant les aires par le rayon R commun aux 4 triangles. Le théorème de Ptolémée (inscrit + convexe) permet d'écrire $ac + bd = mn$.
Preuve : on part de

$$2R(r_1 + r_2) = \frac{abm}{a+b+m} + \frac{cdm}{c+d+m} \text{ et } 2R(r'_1 + r'_2) = \frac{adn}{a+d+n} + \frac{bcn}{b+c+n}$$

On montre alors, à l'aide des relations ci-dessus, que le rapport des deux $(r_1 + r_2)/(r'_1 + r'_2)$ est égal à 1.

Étape 2 : récurrence sur le nombre n de côtés
- Vrai pour $n = 4$ (étape 1)
- Pour n supérieur, dans toute triangulation du polygone, il existe un triangle formé de trois points consécutifs $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, sinon on n'a pas une triangulation (on se ramène au cas $n = 4$).
- Considérons un triangulation. On peut supposer, à une renumérotation près, qu'elle contient le triangle $A_1A_2A_3$.
- On applique alors l'hypothèse de récurrence sur $A_1A_3A_4...A_n$, le cas $n = 4$ sur $A_1A_2A_3A_4$. Il en résulte que le résultat est vrai pour la triangulation contenant $A_1A_2A_4$ et $A_2A_3A_4$, donc par hypothèse de récurrence pour toute triangulation contenant $A_2A_3A_4$.
- On atteint ainsi toutes les triangulations possibles □

Une configuration de 8 **cercles** : (cf. [**5**]) *étant donnés quatre cercles tangents deux à deux, on considère les* 4 *cercles circonscrit à trois des* 4 *points de contact des quatre premiers cercles, comme sur la figure 8. On note* c_1, c_2, c_3, c_4 *et* d_1, d_2, d_3, d_4 *les courbures de ces cercles. On a alors*

$$2\sum_{i=1}^4 c_i^2 = (\sum_{i=1}^4 c_i)^2, \quad 2\sum_{i=1}^4 d_i^2 = (\sum_{i=1}^4 d_i)^2, \quad \sum_{i=1}^4 c_i d_i = 0.$$

Preuve : Avec les notations de la figure 9, on pose dans la première situation

$$\frac{1}{d_1} = r,\ \frac{1}{c_2} = p-a,\ \frac{1}{c_3} = p-b,\ \frac{1}{c_4} = p-c$$

et dans la deuxième

$$\frac{1}{d_1} = r_a,\ \frac{1}{c_2} = -p,\ \frac{1}{c_3} = p-c,\ \frac{1}{c_4} = p-b$$

de sorte qu'en calculant $c_3c_4 + c_4c_2 + c_2c_3 = \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}\right)c_2c_3c_4$ on obtient, dans les deux cas, d_1^2. Ainsi dans la configuration de la figure 8, on obtient aussi $d_3d_4 + d_4d_2 + d_2d_3 = c_1^2$

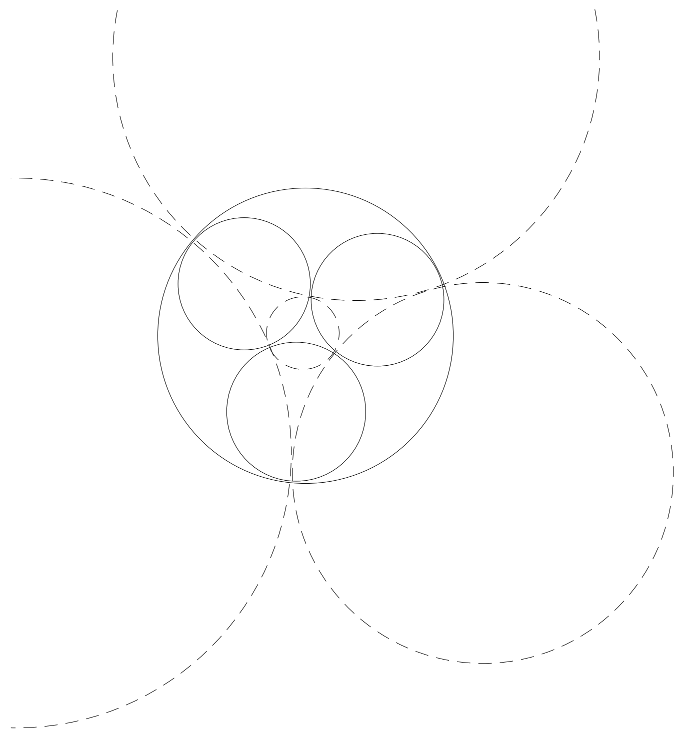


FIG. 8.

ainsi que les égalités obtenues par permutation de $\{1,2,3,4\}$. On a ainsi

$$(\sum_{i=1}^{4} c_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} c_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq 4} c_i c_j = \sum_{i=1}^{4} c_i^2 + \sum_{i=1}^{4} d_i^2 = (\sum_{i=1}^{4} d_i)^2$$

et donc $\sum_{i=1}^4 c_i = \sum_{i=1}^4 d_i$. En outre on a

$$\begin{aligned} -c_1^2 + (c_2+c_3+c_4)^2 &= -c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + 2d_1^2 \\ &= 2d_1(d_2+d_3+d_4) + 2d_1^2 = 2d_1 \textstyle\sum_{i=1}^4 d_i \\ &= 2d_1 \textstyle\sum_{i=1}^4 c_i \end{aligned}$$

et donc $-c_1+c_2+c_3+c_4 = 2d_1$. En passant au carré cette équation et en l'additionnant aux trois autres équations du même type, on obtient $\sum_{i=1}^4 c_i^2 = \sum_{i=1}^4 d_i^2$ et donc $2\sum_{i=1}^4 c_i^2 = \sum_{i=1}^4 c_i^2 + \sum_{i=1}^4 d_i^2 = (\sum_{i=1}^4 c_i)^2$.

En outre de la relation $-c_1+c_2+c_3+c_4 = 2d_1$, on obtient $c_1 + d_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 c_i$ et donc $c_1+d_1 = c_2+d_2 = c_3+d_3 = c_4+d_4$ ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{4} c_i d_i = \sum_{i=1}^{4} c_i(c_i+d_i) - \sum_{i=1}^{4} c_i^2 = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{4} c_i)^2 - \sum_{i=1}^{4} c_i^2 = 0.$$

$\square$

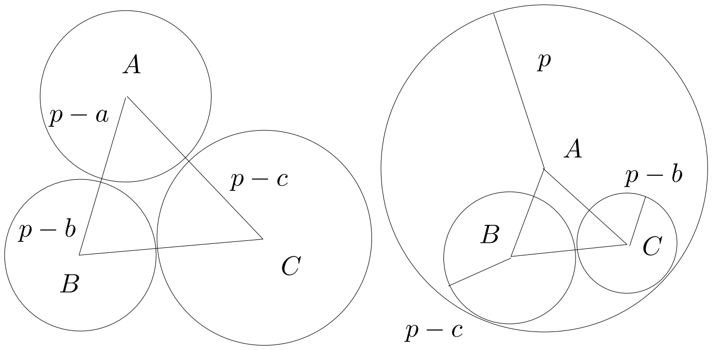


FIG. 9.

2. Géométrie des polyèdres

On se propose ici de reprendre en partie les résultats du paragraphe précédent en dimension supérieure et en particulier en dimension 3.

2.1. Généralisation du théorème de Pythagore. — Rappelons la *formule de Cauchy-Binet :* soient $A \in \mathbb{M}_{m,r}$ et $B \in \mathbb{M}_{r,m'}$; pour $n \leq \min(m, m', r)$ et des sous-ensembles I, J de cardinal n de respectivement $\{1, \cdots, m\}$ et $\{1, \cdots, m'\}$, on a alors

$$\det(AB)_{IJ} = \sum_{K \in \mathcal{F}(n,r)} \det(A_{IK}) \det(A_{KJ})$$

où A_{IK} désigne la matrice extraite de A dont les lignes (resp. les colonnes) sont données par les éléments de I (resp. K) et de même pour les autres matrices extraites.

On considère alors le cas particulier $A = {}^tB$. D'après le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt, il existe une matrice triangulaire supérieure T avec des 1 sur la diagonale (i.e. T est unipotente) telle que les vecteurs colonnes de BT forment une base orthogonale de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de B. Ainsi ${}^t(BT)(BT)$ est diagonale ; son déterminant qui est donc égale au produit des longueurs au carré des vecteurs de cette base s'interprète alors comme le carré du volume du paralépipède de dimension m dans $\mathbb{R}^n$ qui est donc égal à $\det({}^tBB)$. La formule de Cauchy-Binet donne alors

$$\det({}^tBB) = \sum_{I \in \mathcal{F}(m,n)} \det(B_I)^2$$

ce qui s'interprète en disant que le carré du volume est la somme des carré des volumes des projetés de la figure dans tous les plans de dimension m construits à partir de la base canonique. Le cas $m = 1$ correspond au théorème de Pythagore.

2.2. Déterminants de Cayley-Menger. — Soient $(A_i)_{I=0,1,\cdots,n}$ $n+1$ points de l'espace affine euclidien de dimension $n-1$. On note d_{ij} la distance A_iA_j et on définit, cf. [**1**] 9.7.3.2, le *déterminant de Cayley-Menger* des $(A_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ par

$$CM(A_0, A_1, \cdots, A_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & \cdots & d_{0k}^2 \\ 1 & d_{10}^2 & 0 & \cdots & d_{1k}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & d_{k0}^2 & d_{k1}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

On rappelle que la formule de Héron relie l'aire S d'un triangle avec les longueurs a, b, c des cotés : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ où $2p = a+b+c$. Le premier résultat sur les déterminants de Cayley-Menger est une généralisation de ce résultat en dimension supérieure :

$$\text{vol}(A_0, A_1, \cdots, A_k)^2 = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} CM(A_0, \cdots, A_k) \tag{1}$$

où le volume du membre de gauche signifie l'hypervolume de dimension k du parallépidède qui s'appuie sur le simplexe et donc égal à $n!$ fois le volume du simplexe.

Preuve : On rappelle que $\text{vol}(A_0, A_1, \cdots, A_k)^2 = \text{Gram}(\overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_k})$ où ce dernier par définition est égal au déterminant de A^tA avec $A = \begin{pmatrix} x_1^1 - x_0^1 & \cdots & x_1^k - x_0^k \\ \vdots & & \vdots \\ x_k^1 - x_0^1 & \cdots & x_k^k - x_0^k \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1^0 \cdots x_0^k & 1 & & \\ x_1^1 & \cdots & x_1^k & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_k^1 & \cdots & x_k^k & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^0 \cdots x_0^k & 1 & 0 & & \\ x_1^1 & \cdots & x_1^k & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^1 & \cdots & x_k^k & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det {}^tA = \begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_k^1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ x_0^k & x_1^k & \cdots & x_k^k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

où les x_i^j sont les coordonnées de A_i, de sorte que

$$\text{vol}(A_0, \cdots, A_k)^2 = -\begin{vmatrix} (A_0|A_0) & (A_0|A_1) & \cdots & (A_0|A_k) & 1 \\ (A_1|A_0) & (A_1|A_1) & \cdots & (A_1|A_k) & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (A_k|A_0) & (A_k|A_1) & \cdots & (A_k|A_k) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

où le calcul vectoriel a lieu dans le repère choisi. En remplaçant les $(A_i|A_j)$ par $\frac{1}{2}(||A_i||^2 + ||A_j||^2 - d_{ij}^2)$ et en faisant disparaître toutes les normes en soustrayant convenablement un multiple de la dernière colonne puis de la dernière ligne, on arrive alors au résultat. $\square$

Remarque : une question « naturelle » est de savoir si comme en dimension 2 avec la formule de Héron, le déterminant de Cayley-Menger se factorise en un produit de formes linéaires. La réponse est négative et on peut même montrer que pour $n \geq 3$, le déterminant de Cayley-Menger est irréductible sur $\mathbb{C}[d_{ij} : 0 \leq i < j \leq n]$.

2.3. Polyèdres dont les longueurs des côtés sont fixées. — On rappelle qu'un ensemble $\{A_0, \cdots, A_k\}$ de points d'un espace affine définit un simplexe si, par définition, les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_k}$ forment une famille libre. Une question naturelle est alors de savoir à quelle condition étant donnés des réels d_{ij}, il existe des points de l'espace affine euclidien tels que ces réels soient les distances entre ces points. Dans le cas où l'on cherche à obtenir un simplexe la réponse est donnée dans le théorème suivant.

Théorème (cf. [**1**] théorème 9.7.3.4 et 9.14.23) : *étant donnés $\frac{k(k+1)}{2}$ réels d_{ij} pour $i, j = 0, 1, \cdots, k$, pour qu'il existe un simplexe $(A_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ d'un espace affine euclidien tel que $d_{ij} = A_iA_j$, il faut et il suffit que $(-1)^{k+1}CM(A_0, \cdots, A_k)$ soit strictement positif.*

Remarque : dans loc. cit., la preuve est en deux temps : tout d'abord 9.7.3.4, la CNS est que pour tout $h = 2, \cdots, k+1$ et pour toute sous-famille d'indices de cardinal h de $\{0, 1, \cdots, k\}$, le déterminant de Cayley-Menger associé est non nul du signe de $(-1)^h$. La preuve procède par récurrence sur k. En remarquant ensuite que si $\{A_0, \cdots, A_k\}$ définit un simplexe alors tout sous-ensemble aussi, 9.14.23 montre qu'il suffit de regarder le cas $h = k+1$.

Dans le cas général, on ne demande pas que $\{A_0, \cdots, A_k\}$ définisse un simplexe, la CNS est : pour tout $h = 2, \cdots, k+1$ et pour toute sous-famille de cardinal h de $\{0, \cdots, k\}$, le déterminant de Cayley-Menger associé doit être soit nul soit de signe $(-1)^h$.

2.4. Généralisation du théorème de Ptolémée. — Le théorème de Ptolémée donne une CNS sur les distances entre 4 points afin de savoir s'ils sont cocycliques. La généralisation en dimension supérieure est donnée par la proposition suivante où

$$\Delta(A_1, \cdots, A_k) := \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{1k}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & \cdots & d_{2k}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1}^2 & d_{k2}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Théorème (cf. [**1**] proposition 9.7.3.7) : *si $\{A_1, \cdots, A_n\}$ définit un simplexe de dimension $n-1$ alors le rayon de la sphère circonscrite à ce simplexe vaut*

$$R^2 = -\frac{1}{2}\frac{\Delta(A_1, \cdots, A_n)}{CM(A_1, \cdots, A_n)};$$

Pour que $n+2$ points $A_1, \cdots, A_{n+2}$ d'un espace affine euclidien de dimension n appartiennent à une même sphère ou un même hyperplan, il faut et il suffit que $\Delta(A_1, \cdots, A_{n+2}) = 0$.

2.5. Polyèdres réguliers. — On rappelle que *l'angle dièdre* est l'orbite sous $SO(3, \mathbb{R})$ de deux demi-plans limités par une droite commune orientée : les deux demi-plans P, Q sont appelés les faces et la droite commune $\overrightarrow{xy}$ l'arête du dièdre $P.\overrightarrow{xy}.Q$. On appelle rectiligne du dièdre l'angle plan orienté obtenu en coupant le dièdre par un plan perpendiculaire dont la mesure est celle des deux plans en utilisant l'orientation de xy et du choix d'une orientation de l'espace. On définit la somme de deux dièdres en faisant coïncider leur arête orientée et en additionnant leur rectiligne. On peut parler de plan bissecteur d'un dièdre.

Plus généralement on appelle *angle polyèdre* la figure formée par plusieurs plans passant par un même point S appelé sommet, et limités à leurs intersections successives, lesquelles sont des demi-droites appelées arêtes. Un angle polyèdre est dit convexe s'il est tout entier d'un même côté par rapport au plan d'une quelconque de ses faces. Les trièdres sont nécessairement convexes. Les angles polyèdres sont en bijection avec les polygones sphériques de la sphère unité de centre S : à un tel polygone on associe l'angle polyèdre dont les arêtes sont les demi-doites joignant S au sommet du polygone (la convexité se traduit alors par le fait que le polygone est situé sur l'une des demi-sphère limitée par chacun des grands cercles sur lesquels sont ses côtés). Les rectilignes des dièdres de l'angle polyèdre sont respectivement égaux aux angles du polygone sphérique correspondant. On peut alors traduire chacune des propriétés des polygones sphériques en des énoncés sur les angles polyèdres : c'est la méthode développée par J. Hadamard (cf. par exemple les cas d'égalités des trièdres...) ;

On nomme polyèdre un volume limité par des surfaces toutes planes : les portions de plan qui le délimitent sont appelés ses faces. Il est dit convexe s'il est situé tout entier d'un seul et même côté par rapport au plan d'une quelconque d'une de ses faces.

Formule d'Euler *pour les polyèdres convexes : soient F (resp. A, resp. S) le nombre de faces (resp. d'arêtes, resp. de sommets) de ce polyèdre, on a alors $F - A + S = 2$.*

Preuve : Choisissons un point s à l'extérieur du polyèdre P, au dessus de l'une de ses faces f. Soit alors la projection stéréographique à partir de s sur un plan H parallèle à f à l'extérieur de P et de l'autre côté par rapport à s. Par convexité de P et si s est assez proche de f, l'image P' de P est un polygone de points extrémaux les images des sommets de f, découpé par d'autres polygones qui sont les images des autres faces. Soit k le nombre de sommets de la face f ; on rappelle que dans un polygone convexe à $3 \leq i$ sommets, la somme de ses angles est égale à $(i-2)\pi$. On calcule alors la somme de tous les angles de P' de deux façons différentes :

$$(S-k)2\pi + k\pi(1 - \frac{2}{k}) = \pi(2S - k - 2)$$

qui est aussi égale à

$$\sum_i (f_i - \delta_{i,k}) i\pi(1 - \frac{2}{i}) = \pi(2A - k - 2F + 2)$$

où f_i désigne le nombre de faces formées de polygones à i côtés. Le résultat découle directement de l'égalité de ces deux calculs. □

Remarque : la preuve plus classique, cf. [**2**], est similaire à celle ci-dessus en raisonnant sur les angles des polygones sphériques.

Angle polyèdre régulier C'est un angle polyèdre convexe tel que toutes ses faces (i.e. les angles de demi-droite) sont égales et tous ses dièdres sont égaux : en terme de polygone sphérique cela correspond à demander que tous les côtés ont même longueur et que tous les angles sont égaux. *Un polyèdre est dit régulier* s'il est convexe et toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux et tous les angles polyèdres sont réguliers et égaux.

Symbole d'un polyèdre régulier : *notons alors m le nombre de côtés d'une face et n le nombre d'arêtes de chaque angle polyèdre. On a alors*

$$mF = 2A, \quad nS = 2A, \text{ avec } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}.$$

de sorte que $(A, F, S) \in \{(6,4,4),\ (12,8,6),\ (12,6,8),\ (30,20,12),\ (30,12,20)\}$.

Preuve : Chaque angle d'une face a pour mesure $\pi - \frac{2\pi}{m}$ et comme la somme des angles des faces d'un angle polyèdre est inférieur strictement à 2π (cf. l'énoncé équivalent sur les polygones sphériques), il vient $\pi - \frac{2\pi}{m} < 2\frac{\pi}{n}$ et donc $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ ce qui fournit les possibilités suivantes sur les couples (m, n) : $(3,3)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(5,3)$ et $(3,5)$. En outre on a $mF = 2A$ et $nS = 2A$ de sorte que la formule d'Euler s'écrit $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$ ce qui donne respectivement pour les triplets (A, F, S) : $(6,4,4)$, $(12,8,6)$, $(12,6,8)$, $(30,20,12)$ et $(30,12,20)$. □

Remarque : il est impossible de paver la sphère par des polygones convexes ayant tous p côtés dès que $p \geq 6$. En effet comme tout sommet (resp. d'arêtes) est commun à exactement trois faces (resp. deux faces), on en déduit que le nombre de sommets (resp. de arêtes) est $S = pF/3$ (resp. $A = pF/2$) où F désigne le nombre de faces. Or la relation d'Euler $2 = F - A + S = F(6-p)/6$ abouti à une contradiction.
Remarque : dans [**2**] §12.5, un polytope P de dimension d est dit régulier si son stabilisateur $G(P)$ est transitif sur les drapeaux $(F_0, F_1, \cdots, F_{d-1})$ où les F_i sont des i-faces de P (i.e. $\dim F_i = i$) avec $F_i \subset F_{i+1}$. En dimension 3 cela correspond à demander que les faces sont isométriques et tous les dièdres sont égaux. En notant O le centre de P, l'étoile P^* de P régulier est défini comme suit : soit A un sommet de P et a une arète de sommets A, B ; on note H l'hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et passant par B. Par transitivité de l'action de $G(P)$, $P \cap H$ contient tous les C tels qu'il existe une arête AC de P et $P \cap H$ est un polytope régulier de dimension $d-1$: en dimension 3 cela correspond aux angles polyèdres. Le symbole d'un polytope régulier de dimension d que l'on note $(r_1(P), \cdots, r_{d-1}(P))$ défini par récurrence sur d comme suit : $r_1(P)$ est le nombre de côtés des 2-faces de P et $(r_2(P), \cdots, r_{d-1}(P))$ est le symbole de l'étoile de P : en dimension 3 cela correspond à la notation utilisée plus haut. En outre cela permet de donner pour chaque dimension, une liste finie des symboles possibles.
Relation fondamentale : on pose $\rho(P) = \frac{l^2}{4r^2}$ où l est la longueur commune des arêtes et r le rayon de la sphère circonscrite ; on a alors

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1(P)}}{\rho(P^*)}$$

Preuve : On prend les notations de la figure 10 : les points y, x, y' sont trois sommets consécutifs d'une 2-face de P qui est un polygone régulier à r_1 côtés, de centre O' centre du cercle circonscrit de rayon r' de sorte que

$$l = xy = xy' = 2r' \sin \frac{\pi}{r_1}, \quad l^* = 2r' \sin \frac{2\pi}{r_1},$$

et donc $l^* = 2l \cos \frac{\pi}{r_1}$. En utilisant $r^* = l \cos \phi$ et $l = 2r \sin \phi$, on obtient

$$\rho(P) = \sin^2 \phi, \quad \rho(P^*) = \frac{4l^2 \cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{4l^2 \cos^2 \phi} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\cos^2 \phi}$$

ce qui donne le résultat.

□

2.6. Rigidité des polyèdres convexes. — Théorème de Cauchy *Soient P et P' deux polyèdres convexes de frontières respectives ∂P et $\partial P'$. On suppose qu'il existe une bijection $f : \partial P \to \partial P'$ respectant les relations d'incidence entre sommets, arêtes et faces, et dont la restriction à chaque face F est une isométrie sur une face F' de P'. Il existe alors une isométrie g de l'espace telle que $g(P) = P'$ et dont la restriction à la frontière de P est égale à f.*
Remarque : autrement dit un polyèdre convexe est rigide, c'est-à-dire qu'on ne peut pas le déformer sans changer la forme de ses faces, aux déplacement de $\mathbb{R}^2$ près.
Preuve : Commençons par montrer le résultat sous l'hypothèse supplémentaire que f *conserve les angles dièdres.* Quitte à composer par une isométrie on peut supposer que P et P' ont une face commune F sur laquelle f induit l'identité, et situés dans le même demi-espace délimité par cette face. Pour a une arête de F, notons G, G' les faces de P et P' ayant,

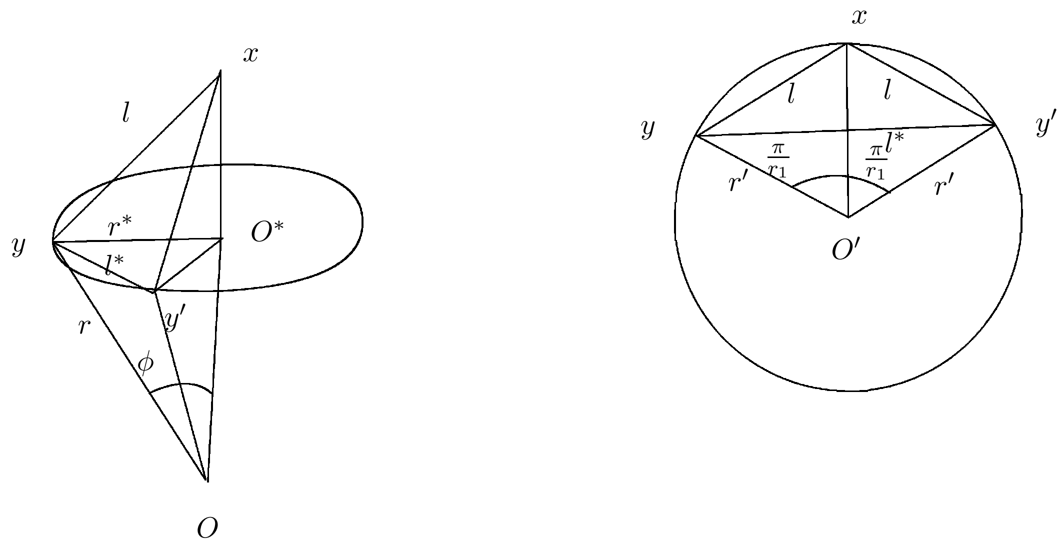


FIG. 10.

outre F, a pour arête. On désigne par δ et δ' les angles dièdres correspondant. La bijection f envoie isométriquement G sur G' et par conservation des angles dièdres, et comme G et G' sont dans le même demi-espace, on en déduit que $G = G'$. La conclusion, $P = P'$, découle du fait que deux faces quelconques d'un polyèdre peuvent être reliées par une chaîne de faces adjacentes.

Il reste alors à montrer que f conserve les angles dièdres. On colorie alors les arêtes de P comme suit : en noire (resp. blanc) si l'angle intérieur des deux facettes adjacentes est strictement plus grand (resp. petit) dans P' que dans P. On obtient ainsi un graphe planaire (i.e. on peut le représenter dans $\mathbb{R}^2$ sans que les arêtes ne se recoupent) à deux couleurs obtenu par projection radiale (en prenant O à l'intérieure de P), à partir du graphe sur la sphère unité. On suppose que le graphe est non vide, de la formule d'Euler $s - a + f = 2$, on en déduit qu'il existe un sommet qui présente au plus deux changements de couleurs relativement à l'ordre cyclique des arêtes autour de ce sommet : en effet soit c le nombre de coins où se produisent des changements de couleurs, si l'affirmation est fausse, puisqu'à chaque sommet il y a un nombre pair de changement de couleurs, on a $c \geq 4n$. Comme chaque face ayant $2k$ ou $2k+1$ côtés présente au plus $2k$ coins de ce type on a

$$4n \leq c \leq 2f_3+4f_4+4f_5+\cdots \leq 2f_3+4f_4+6f_5+\cdots = 2(3f_3+4f_4+\cdots)-4(f_3+f_4+\cdots) = 4a-4f$$

et donc $s \geq a + f$ ce qui contredit la formule d'euler. Soit donc p un sommet adjacent à une arête noire ou blanche au moins tel qu'il y ait au plus deux changements entre arêtes noires et blanches. On coupe P avec une petite sphère S_ϵ de rayon ϵ centrée en p ; idem avec P' et S'_ϵ. Dans S_ϵ et S'_ϵ on obtient alors des polygones convexes sphériques Q et Q' dont les arcs correspondants ont même longueur, car les faces sont isométriques et que les rayons des sphères sont les mêmes. On marque d'un signe + (resp. -) si l'angle dans Q' est strictement plus grand (resp. plus petit) que dans Q. Le choix de p implique qu'un certain nombre de signes + et - apparaissent et que relativement à l'ordre cyclique il y a au plus deux changements de signes. Si un seul type de signes apparaît alors le lemme qui suit implique directement une contradiction, une arête devant changer de longueur. Si les deux types de signes apparaissent alors, comme il n'y a que deux changement de signe, il y a une ligne de séparation qui relie les milieux des arêtes et sépare les + des -. La contradiction découle alors du lemme suivant puisque la ligne de séparation ne peut pas être à la fois plus grande et plus petite dans Q' que dans Q. □

Le lemme du bras de Cauchy : *soient Q, Q' des n-gones convexes (planaires ou sphériques) numérotés comme dans la figure 11 tels que les longueurs des arêtes $q_iq_{i+1} = q'_iq'_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$ et que les mesures des angles correspondants vérifient l'inégalité $\alpha_i \leq \alpha'_i$ pour $2 \leq i \leq n-1$, alors la longueur de l'arête manquante vérifie $q_1q_n \leq q'_1q'_n$ avec égalité si et seulement si $\alpha_i = \alpha'_i$ pour tout i.*

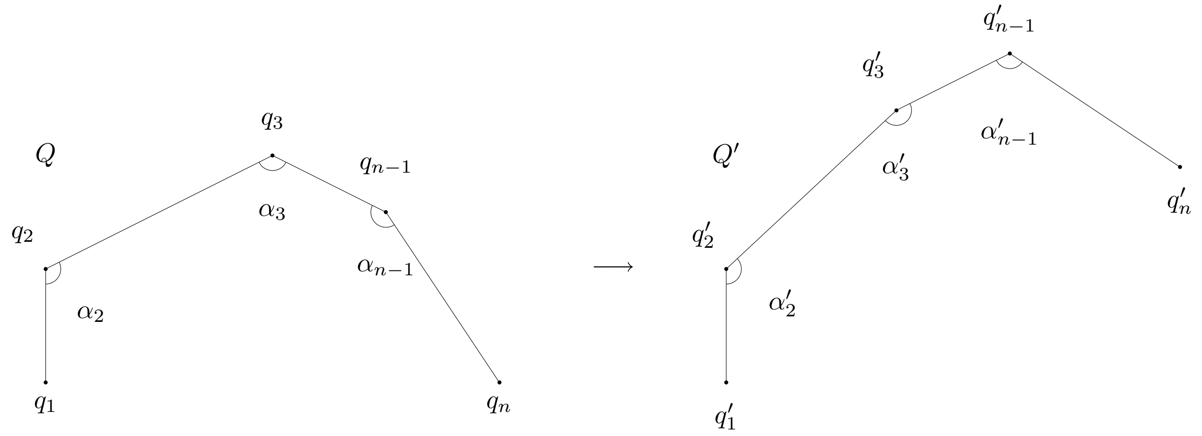


FIG. 11. Lemme du bras de Cauchy

Preuve : On raisonne par récurrence sur n : pour $n = 3$, si dans un triangle on augmente l'angle γ entre deux côtés alors la longueur c du côté opposé augment aussi, analytiquement ce la résulte de la relation $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ dans le cas planaire et de son analogue $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$ en trigonométrie sphérique. Pour $n \geq 4$, si pour un certain $i \in \{2, \cdots, n-1\}$ nous avons $\alpha_i = \alpha'_i$, alors le sommet correspondant peut être supprimé en introduisant la diagonale de q_{i-1} à q_{i+1} avec $q_{i-1}q_{i+1} = q'_{i-1}q'_{i+1}$ et le résultat est démontré d'après l'hypothèse de récurrence. On définit alors un nouveau polygone Q^* à partir de Q en remplaçant α_{n-1} par le plus grand angle $\alpha^*_{n-1} \leq \alpha'_{n-1}$ possible tout en laissant Q^* convexe : $q_1q_n \leq q_1q^*_n$ d'après le cas $n = 3$. Par ailleurs si on peut prendre $\alpha^*_{n-1} = \alpha'_{n-1}$ le résultat se déduit d'après l'hypothèse de récurrence. Dans la situation contraire, on se retrouve avec q_2, q_1, q^*_n colinéaires avec $\overline{q_2q_1} + \overline{q_1q^*_n} = \overline{q_2q^*_n}$ avec d'après l'hypothèse de récurrence en ignorant q_1, q'_1, $q_2q^*_n \leq q'_2q'_n$ et donc en utilisant l'inégalité triangulaire

$$q'_1q'_n \geq q'_2q'_n - q'_1 - q'_1q'_2 \geq q_2q^*_n - q_1q_2 = q_1q^*_n > q_1q_n.$$

□

Au cours des années 1970, R. Connelly a construit un exemple de polyèdre flexible, c'est à dire qu'il existe une famille continue à un paramètre $(P_t)_{t\in[0,1]}$, avec $P_0 = P$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, P_t ait la même combinatoire que P et des arêtes de même longueur : les « flexions » que l'on considère ne doivent pas consister en de simples déplacements. L'exemple le plus simple construit par K. Steffen peu après n'a que neuf sommets.

Théorème des soufflets d'après Sabitov [**7**] : *Soit P un polyèdre flexible dans $\mathbb{R}^3$. Lors d'une flexion de P, son volume ne change pas.*

La preuve de ce résultat découle de la « généralisation » suivante de la formule de Cayley-Menger : le volume de chaque polyèdre de $\mathbb{R}^3$ est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients dépendent seulement (de manière polynomiale) des longueurs de ses arêtes. Plus précisément $12\mathrm{vol}(P)$ est entier sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des arêtes de P de sorte que le volume ne peut pas varier continûment et doit donc rester constant.
Exemple : pour 4 points en utilisant la symétrie du déterminant de Cayley-Menger, on remarque en développant que chacun des termes apparaît deux fois de sorte que $(12\mathrm{vol}(A_0, A_1, A_2, A_3))^2$ est dans l'anneau engendré par les carrés des longueurs entre les A_i. Finalement $12\mathrm{vol}(A_0, A_1, A_2, A_3)$ est entier sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des distances entre les A_i. On obtient ainsi le théorème des soufflets pour les simplexes et plus généralement pour tous les polyèdres qu'on peut décomposer en simplexes sans ajouter d'arête. Pour le cas général on renvoie le lecteur à l'excellent [**8**].

3. Problèmes de trajectoires

3.1. Lignes de niveau. — On se propose d'étudier quelques lignes de niveau :
- $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = cte$ (idem avec les angles non orientés, les angles orientés ou pas de droites) sont des arcs de cercles.
- $\sum_{i=1}^{r} m_i MA_i^2 = cte$ est un cercle ....
- $MF + MF' = cte$ est une ellipse de foyers F et F' ;
- $|MF - MF'| = cte$ est une hyperbole de foyers F et F' ;
- $MF = ed(M, D)$ où D est une droite, est une conique de foyer F et de directrice D.

Chemins les plus courts :
- dans le plan il s'agit des lignes droites,
- sur la sphère ce sont les grands cercles,
- dans le disque de Poincaré muni de sa métrique $\delta(x, y) = \left|\log(\frac{xu}{xv}/\frac{yu}{yv})\right|$ où u, v sont les points du cercle unité sur la droite xy, ce sont les cercles orthogonaux au cercle unité.

3.2. Polygones de lumière. — La référence classique pour ce paragraphe est [**1**] §9.4. Rappelons que le chemin le plus court de A à B en passant par un point M à déterminer sur une droite D est tel D est la bissectrice extérieure de $\widehat{AMB}$.

Problème de Fragano (cf. loc. cit. ou [**3**] §4.5) : *trouvez le triangle de périmètre minimal dont les sommets appartiennent à un triangle ABC donné.*

Preuve : On considère comme sur la figure 12, les réflexions du triangle ABC successivement par rapport à ses côtés. Soit ensuite le triangle orthique de ABC constitué des pieds de ses hauteurs. Les côtés du triangle orthique sont des bissectrices extérieurs ; en effet comme $BFHD$ sont cocycliques, on a $\widehat{DFH} = \widehat{BFH} = \pi/2 - \widehat{BCA}$. De même comme $AFHE$ sont cocycliques, on a $\widehat{HFE} = \widehat{HAE} = \pi/2 - \widehat{BCA}$ d'où le résultat. Ainsi les images des côtés du triangle orthique, prise dans le bon ordre, sont alignées sur le segment PP' dont la longueur est donc égale à 2 fois celle du périmètre du triangle orthique.

Si on répète le procédé pour un triangle quelconque de ABC, on obtient une ligne brisée de P vers P' dont la longueur est 2 fois celle de son périmètre et donc supérieure ou égale à PP'. $\square$

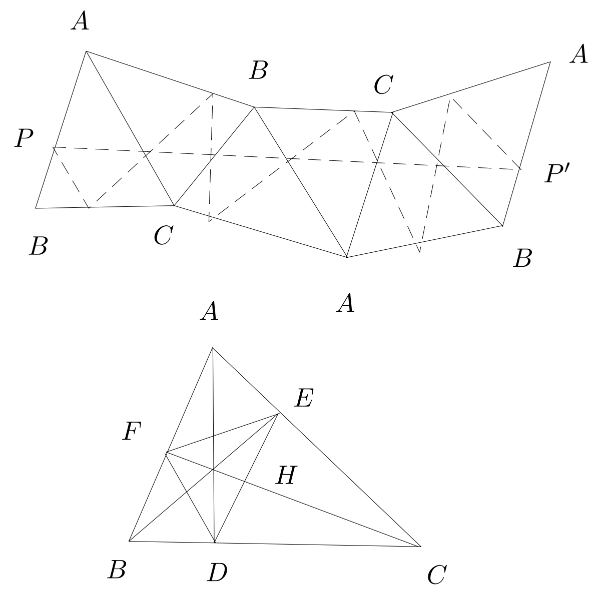


FIG. 12. Problème de Fragano

Cas d'un polygone P convexe à n côtés de sommets $A_1, \cdots, A_n$ et soient $\alpha_i \in [A_i, A_{i+1}]$:

- il existe toujours des polygones inscrits de périmètre minimal, ce sont des polygones de lumières si $\alpha_i \in]A_i, A_{i+1}[$;
- tout polygone de lumière dans P est de périmètre minimal. S'il en existe un alors
  - si n est impair, il est unique ;
  - si n est pair, il en existe une infinité
- pour $n = 2p$, une condition nécessaire d'existence est $\sum_{i=1}^{p} \widehat{D_{2i-1} D_{2i}} = 0 \mod \pi$ où $D_i = (A_i A_{i+1})$;
- une condition suffisante d'existence est : il existe une droite D telle que $f(D) = D$ et
$$D \cap g_i(]A_{i+1} A_{i+2}[) \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \cdots, n$$
où $f = \sigma_{D_n} \circ \cdots \sigma_{D_1}$ et $g_1 = \sigma_{D_1}$ et $g_{i+1} = \sigma_{g_i}(D_{i+1}) \circ g_i$.
- pour $n = 3$, un triangle possède un polygone de lumière si et seulement s'il est acutangle.

3.3. en dimension 3. — Trajectoires

- soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$, C^1 et $\vec{d}$ une direction du plan alors il existe un unique arc régulier C^2 orienté à isométrie près tel que son vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$ vérifie
$$\forall s \in I \quad (\widehat{\vec{d}, \vec{\tau}(s)}) = \alpha(s) \mod 2\pi$$
- dans l'espace : un arc C^3 sans point d'inflexion est une hélice si et seulement si ses binormales forment un angle constant avec une direction fixe

4. Aires et équidécomposabilité

4.1. en dimension 2. — Deux polygones de même aire du plan affine euclidien sont équidécomposables, i.e. il existe des triagulations de ces polygones en triangles isométriques. Rappelons brièvement comment tout polygone d'aire a^2 est décomposable en un carré de côté a :

– la figure 13 montre comment fusionner deux carrés ;

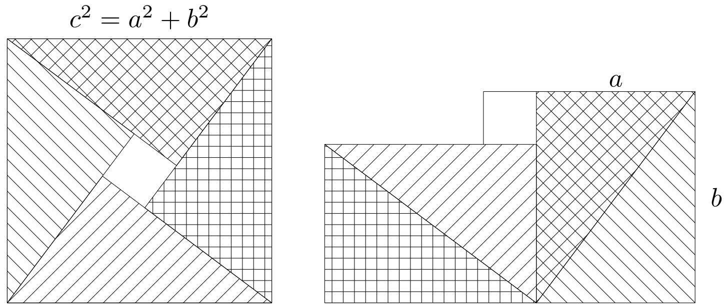


FIG. 13. Fusion de deux carrés

– par triangulation et en utilisant le point précédent, on se ramène au cas d'un triangle ;

– dans la figure 14, les triangles T_1, T_1' et T_2, T_2' sont semblables de sorte qu'en plaçant correctement la droite D, ils seront isométriques (on prendra simplement soin de choisir les deux angles marqués obtus) ;

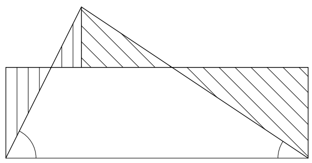


FIG. 14. équidécomposabilité d'un triangle et d'un rectangle

– la figure 15, montre comment transformer un rectangle en un carré ; pour cela on utilise le fait que deux parallélogramme de même aire et de même base sont équidécomposables : le lecteur notera que pour cette dernière figure, il faut que le point P appartienne au segment AB ; dans le cas contraire, on découpe les parallélogrammes de façon à s'y ramener.

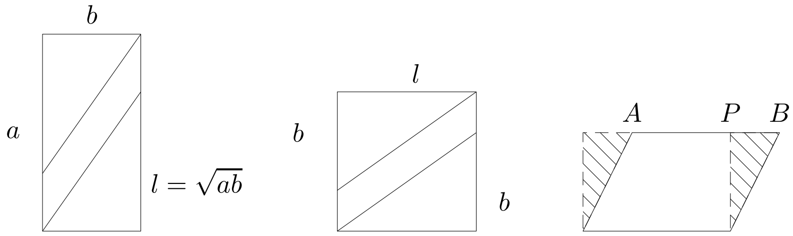


FIG. 15. équidécomposabilité d'un rectangle et d'un carré

4.2. en dimension 3. — Étant donné un polyèdre P de dimension 3, on note M_P l'ensemble de tous ses angles dièdres auxquels on ajoute le nombre π. Ainsi pour un cube C on obtient $M_C = \{\pi, \frac{\pi}{2}\}$ tandis que pour un tétraèdre régulier T, on a $M_T = \{\pi, \arccos\frac{1}{3}\}$. Pour un ensemble fini $M \subset \mathbb{R}$ contenant M_P et une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire

$$f : V(M) \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad f(\pi) = 0$$

où $V(M)$ est le sous-$\mathbb{Q}$-espace linéaire de $\mathbb{R}$ engendré par M, *l'invariant de Dehn* de P relativement à f est le réel

$$D_f(P) := \sum_{a\in P} l(a).f\Big(\alpha(a)\Big)$$

où la somme porte sur toutes les arêtes a de P, $l(a)$ désigne la longueur de a et $\alpha(a)$ l'angle dièdre associé à a.

On dit que deux polyèdres P et Q sont

- *équidécomposables* s'ils peuvent être décomposés en un nombre fini de polyèdres $P_1, \cdots, P_n$ et $Q_1, \cdots, Q_n$ tels que P_i et Q_i soient isométriques pour tout $1 \leq i \leq n$;
- *équicomplémentaires* s'il existe des polyèdres $P_1, \cdots, P_m$ et $Q_1, \cdots, Q_m$ tels que les intérieurs des P_i soient deux à deux disjoints et disjoints de P, même hypothèse pour les Q_i et Q, tels que P_i, Q_i sont isométriques et tels que $\tilde{P} = P \cup P_1 \cup \cdots \cup P_m$ et $\tilde{Q} = Q \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ soient équidécomposables.

Théorème de Dehn-Hadwiger : *Soit P (resp. Q) un polyèdre d'angles dièdres $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ (resp. $\beta_1, \cdots, \beta_q$) et M un ensemble fini de réels tels que*

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q, \pi\} \subset M.$$

Si $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ est une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire telle que $f(\pi) = 0$ et telle que $D_f(P) \neq D_f(Q)$ alors P et Q ne sont pas équicomplémentaires.

Preuve : Le résultat repose sur l'additivité des invariants de Dehn : précisément si P admet une décomposition en une famille finie de polyèdres $P_1, \cdots, P_n$ et si tous les angles dièdres de ceux-ci appartiennent à M, alors pour tout $f : V(M) \to \mathbb{Q}$, on a

$$D_f(P) = D_f(P_1) + \cdots + D_f(P_n).$$

Pour le vérifier, on associe une masse à toute partie a' d'arête a d'un polyèdre par la formule suivante : $m_f(a') = l(a')f(\alpha(a'))$. Considérons alors la réunion de toutes les arêtes des P_i, pour $i = 1, \cdots, n$. Le long des arêtes a' contenues dans les arêtes de P, les angles dièdres des parties s'ajoutent pour donner l'angle dièdre de P en a'. En une arête a" de l'un des P_i d'une face de P ou dans l'intérieur de P, les angles s'additionnent pour faire respectivement π et 2π : comme $f(\pi) = f(2\pi) = 0$, les masses s'additionnent encore.

Ainsi si P et Q étaient équicomplémentaires, nous pourrions élargir M en M' qui contiendrait tous les angles dièdres ; on prolonge alors f en une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire $f' : V(M') \to \mathbb{Q}$ de sorte que

$$D_{f'}(P) + D_{f'}(P_1) + \cdots + D_{f'}(P_m) = D_{f'}(Q) + D_{f'}(Q_1) + \cdots + D_{f'}(Q_m)$$

avec $D_{f'}(P_i) = D_{f'}(Q_i)$ puisque P_i et Q_i sont isométriques et donc $D_f(P) = D_f(Q)$ ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. $\square$

Exemples : nous avons vu que pour le cube $M_C = \{\pi, \frac{\pi}{2}\}$ de sorte que tous les invariants de Dehn sont nuls. Pour le tétraèdre régulier T_0 (resp. le tétraèdre T_1 porté par le repère canonique) on a $M_{T_0} = \{\pi, \arccos \frac{1}{3}\}$ (resp. $M_{T_1} = \{\pi, \frac{\pi}{2}, \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}\}$). De la proposition suivante et du théorème précédent, on en déduit que le cube et chacun des tétraèdres T_0 et T_1 ne sont pas équicomplémentaires. Pour T_2 le tétraèdre ayant trois arêtes consécutives mutuellement orthogonales et de même longueur, on a $M_{T_2} = \{\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\}$ et donc tous ses invariants de Dehn sont nuls : on pourrait aussi remarquer qu'en considérant le centre, le milieu des arêtes et le centre des faces d'un cube, que celui-ci se décompose en six tétraèdres de la forme T_2, ce qui donne $D_f(T_2) = 0$. En particulier T_1 et T_2 ne sont pas équicomplémentaires.

Proposition : *pour tout entier imair $n \geq 3$, le nombre*

$$A(n) = \frac{1}{\pi} \arccos\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

est irrationnel.

Preuve : Notons $\phi_n = \arccos(\frac{1}{\sqrt{n}})$; en utilisant la formule

$$\cos(k+1)\phi = 2\cos\phi \cos k\phi - \cos(k-1)\phi,$$

on en déduit que $\cos k\phi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}$ où A_k est un entier qui n'est divisible par n pour aucun $k > 0$. En effet le résultat est vrai pour $k = 0, 1$ puisque $A_0 = A_1 = 1$ et par récurrence sur k on obtient

$$\cos(k+1)\phi_n = 2\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{A_k}{\sqrt{n}^k} - \frac{A_{j-1}}{\sqrt{n}^{k-1}} = \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}}$$

ainsi $A_{k+1} = 2A_k - nA_{k-1}$. Si $n \geq 3$ est impair et si A_k n'est pas divisible par n alors A_{k+1} ne peut pas non plus être divisible par n. Supposons $A(n) = k/l$ de sorte que $l\phi_n = k\pi$ et donc

$$\pm 1 = \cos k\pi = \frac{A_l}{\sqrt{n}^l}$$

et donc $\sqrt{n}^l = \pm A_l$ est un entier et par conséquent $n | A_l$ ce qui n'est pas, d'où le résultat. $\square$

5. Pavages

Étant donné un espace topologique E localement compact et un groupe G de bijections continues de E : on choisit des compacts $K_1, \cdots, K_l$ de E appelés pavés standards. On appelle alors pavé compact P de E, les compacts $g(K_i)$ pour $g \in G$. Un pavage de E est alors un ensemble $\mathcal{P}$ de pavés tels que

(i) $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = E$

(ii) $\forall P, Q \in \mathcal{P}$, l'intersection de leur intérieur est vide ;

(iii) pour tout compact K de E, les pavés P de $\mathcal{P}$ qui rencontrent K sont en nombre fini.
Remarque : le pavage est dit périodique s'il existe un ensemble fini $\mathcal{F}$ de pavés de $\mathcal{P}$ tels que tout pavé de $\mathcal{P}$ est l'image d'un pavé de $\mathcal{F}$ par un élément g du groupe de symétrie du pavage $\Gamma_{\mathcal{P}} = \{g \in G : \ g\mathcal{P} = \mathcal{P}\}$. Un groupe de la forme $\Gamma_{\mathcal{P}}$ est dit cristallographique.
Remarque : dans le cas euclidien (iii) est un conséquence de (i) et (ii), cf. [**1**] p.35.

5.1. Groupes cristallographiques. — En ce qui concerne les pavages périodiques, la description des groupes cristallographiques de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est réglé par les théorèmes suivants dus à **Bieberbach** :

- le sous-groupe Γ' des translation d'un groupe cristallographique Γ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est d'indice fini engendré et isomorphe à $\mathbb{Z}^n$;
- tout isomorphisme de groupes abstraits entre deux groupes cristallographiques est de la forme $\phi(g) = h \circ g \circ h^{-1}$ où h est une bijection affine de $\mathbb{R}^n$;
- il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques (17 en dimension 2, 219 en dimension 3, un meilleure compréhension de la table est toujours un sujet d'actualité.

Preuve : (en dimension 2 suivant [**1**] : notons Γ le sous-groupe des translations de G. Si $\Gamma = \{\mathrm{Id}\}$ alors pour r, s des rotations de G, $[r, s] = rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation de G et donc G est commutatif de sorte que r, s sont des rotations de même centre et alors $\bigcup_{g \in G} g(P)$ est contenu dans un disque d'où la contradiction.

Supposons ensuite que toutes les translations de Γ ont la même direction : pour r une rotation de G et $t_v \in \Gamma$, rtr^{-1} est la translation $t_{r(v)}$ de sorte que $r(v)$ est colinéaire à v et donc toutes les rotations non triviales de G sont des symétries autour de points. Pour deux telles rotations r, s rs est une translation de vecteurs $2\overrightarrow{aa'}$ et donc tous les centres des rotations de G sont alignés et donc $\bigcup_{g \in G} g(P)$ est contenu dans une bande, d'où la contradiction.

Soient alors $u \in \Gamma$ de norme minimale et v non colinéaire à u de norme minimale : $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subset \Gamma$ et notons $Q_a = \{a + tu + sv : \ t, s \in [0, 1]\}$. Si l'orbite de a sous G n'est pas dans $a + \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$, il existe un point de cette orbite appartenant à Q et distincts des 4 sommets et donc à une distance de l'un des 4 sommets de norme strictement plus petite que celle de u ou v ce qui contredirait la minimalité de ceux-ci.

Si $G = \Gamma$, un pavage associé est le domaine fondamental Q_0 de Γ. Supposons $G \neq \Gamma$. Si tous les $g \in G - \Gamma$ sont d'ordre 2 alors un pavage associé est $\frac{1}{2}Q_0$. Supposons qu'il existe $r \in G - \Gamma$ qui n'est pas une symétrie : son ordre $n_g \geq 3$ est nécessairement fini, notons alors a son centre et $2\pi/\alpha$ avec $\alpha = n_g$ son angle. Soit alors b un centre d'un élément s de $G - \Gamma$ tel que la distance $d(a, b)$ soit minimale : quitte à prendre s^i on peut supposer que s est une rotation de centre b et d'angle $2\pi/\beta$ pour $\beta = n_{g_1} \geq 3$. On note $t = (rs)^{-1}$ de sorte que $rst = Id$: le centre c de t est tel que le triangle abc a pour angles $\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\beta}, \frac{\pi}{\gamma}$ avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$, et t est d'ordre γ. La résolution de cette équation donne pour solution $(3, 3, 3), (2, 4, 4)$ et $(2, 3, 6)$. $\square$

Nous allons à présent cherche les tuiles qui sont de polygones convexes, et on renvoie à [**1**] p.33 pour des illustrations plus artistiques. Plus loin nous montrons que le nombre de côtés de ce polygone doit être ≤ 6.

- *Cas des polygones réguliers* : l'angle intérieur en un sommet est $\pi(1 - 2/n)$ doit être tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ avec

$$2\pi = k\pi(1 - 2/n), \qquad (k - 2)(n - 2) = 4,$$

et donc $n = 3, 4, 6$, lesquels donnent bien des pavages.

– *Cas des triangles et des quadrilatères* : étant donné un triangle (resp. quadrilatère) quelconque après rotation d'angle π autour du milieu d'un côté, on obtient un parallélogramme (resp un hexagone à côtés opposés parallèles) dont on pave aisément le plan. Le groupe cristallographique correspondant est donc $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}^2$, cf. ci-dessous le cas des hexagones à cotés opposés parallèles et de même longueur).
– En ce qui concerne *les hexagones convexes*, remarquons que s'ils sont tels que les côtés opposés sont parallèles et de même longueur, alors on obtient un pavage du plan relativement au groupe cristallographique $\mathbb{Z}^2$. Plus généralement Reinhardt les a classifiés en trois types, où a, b, c, d, e, f désignent les longueurs des côtés et $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}, \hat{F}$ les angles aux sommets correspondant :
  – $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\pi$ avec $a = d$;
  – $\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 2\pi$ avec $a = d$ et $c = e$;
  – $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = 2\pi/3$ avec $a = b$, $c = d$ et $e = f$.
– En ce qui concerne *les pentagones convexes* la situation est plus complexe, on connaît 14 type de pentagones qui permettent de paver mais il semble que l'on ne sache pas encore si celle-ci est exhaustive (cette liste a plusieurs fois était élargie). Citons, parmi les pavages par des pentagones équilatéraux, le pavage du Caire dont le motif est un pentagone ayant cinq côtés égaux et deux angles droits que l'on peut tracer comme suit, cf. la figure 16 :

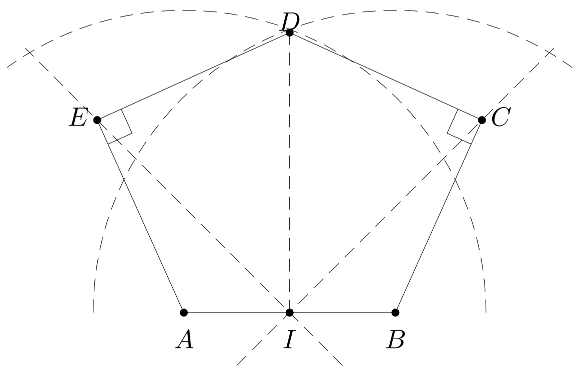


FIG. 16. Construction du pentagone équilatéral à deux angles droits

  – à partir d'un segment $[AB]$, on trace sa médiatrice $\mathcal{D}$ à partir du milieu I de $[AB]$;
  – on trace les bissectrices de $(\widehat{AB), \mathcal{D}}$ issue de I qui recoupent le cercle de centre B (resp. A) et de rayon AB en un point C (resp. E) ;
  – la perpendiculaire en C (resp. E) recoupe $\mathcal{D}$ en un point D.

Le cercle de diamètre BD passe en C et I de sorte que $\widehat{BDC} = \pi/4$ et donc $CD = BC$ et les 5 côtés sont de même longueur. On vérifie alors aisément que l'assemblage de 4 de ces pentagones forme un hexagone dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur ce qui fournit un pavage du plan, cf. la figure 17.

5.2. Triangles paveurs. — *Soit T un triangle euclidien d'angles $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. On effectue des symétries par rapport aux côtés puis on recommence avec les triangles obtenus. On obtient alors un pavage du plan si et seulement si $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{2\pi}{p}, \frac{2\pi}{q}, \frac{2\pi}{r})$ avec $(p, q, r) \in$ $\{(3, 12, 12), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (6, 6, 6)\}$.*

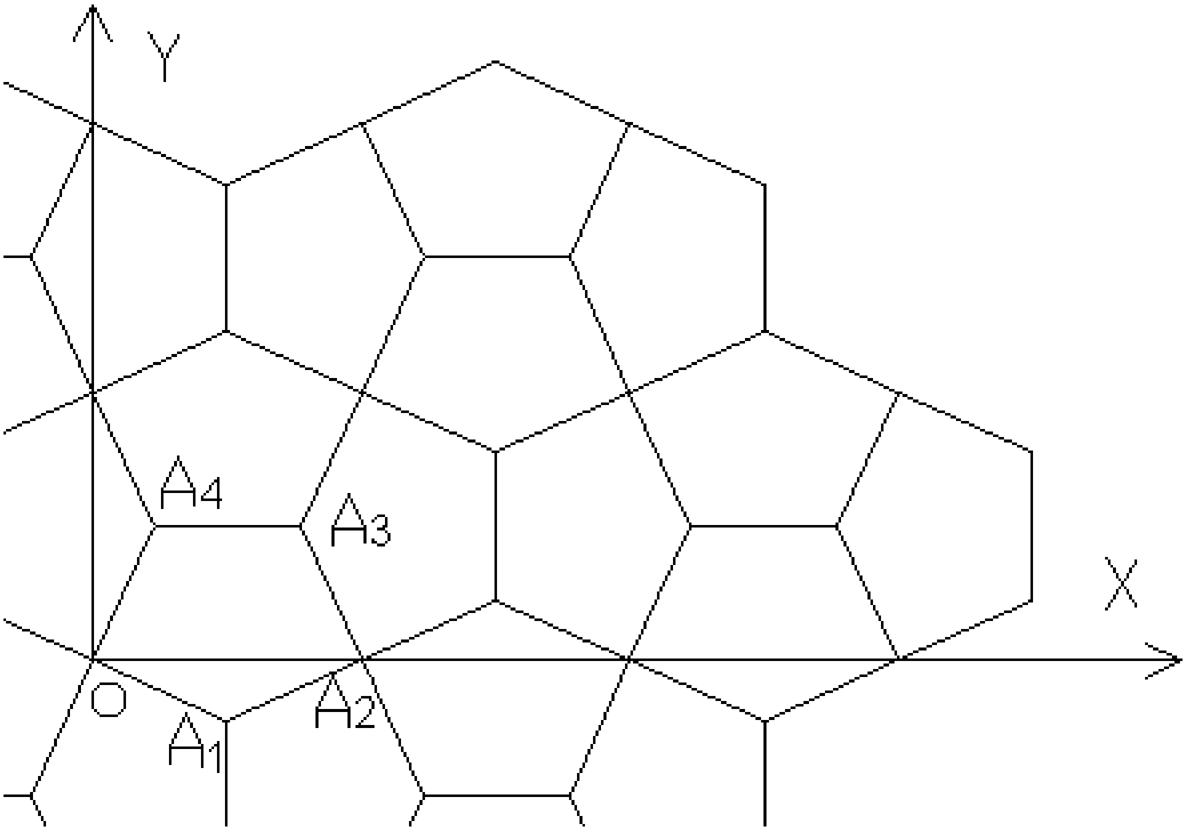


FIG. 17. Pavage du Caire

Preuve : Considérons une suite de réflexions autour d'un sommet A du triangle ABC de départ : par la réflexion d'axe AC le point B s'envoie en B' puis par la réflexion d'axe AB', C s'envoie en C'... de sorte qu'au bout d'un nombre fini n d'étapes on doit revenir sur le triangle initial : si n est impair vu qu'un produit impair de réflexions est une réflexion et que la réflexion d'axe AB ne laisse pas le triangle stable, nécessairement B s'envoie sur C et donc ABC est isocèle. Autrement dit p, q, r sont des entiers et si l'un deux est impair alors les deux autres $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ ce qui, après énumération des cas, donne les 4 solutions de l'énoncé.

Il reste alors à voir que l'on obtient effectivement des pavages par des triangles respectivement isocèle d'angle au sommet $2\pi/3$, rectangles avec un angle de $\pi/3$, rectangles isocèles et équilatéraux, ce qui ne pose aucun problème. $\square$

Remarque : si on demande en outre de pouvoir colorier les triangles en noir et blanc de sorte que deux triangles d'une même couleur n'ait pas de faces communes, il faut enlever la première solution.

Remarque : l'exemple le plus célèbre de pavage non périodique est du à Penrose : cerf volant et flèche...

5.3. Pavages impossibles. — Ce qui suit est largement inspiré de [**6**] ; dans la suite on se fixe des réels positifs α, β de sorte que tous les polygones concernés son d'aire $\geq \alpha$ et de périmètre $\leq \beta$.
Théorème : *il est impossible de paver le plan par des polygones vérifiant les deux conditions ci-avant et ayant tous plus de* 7 *côtés.*
Remarque : on ne demande pas que la collection de polygones aient tous le même nombre de côtés, ce qui permet en particulier, quitte à rajouter des sommets avec des angles de mesure π, de considérer des polygones dont leur intersection soit une partie d'une arête.
Remarque : en fait la démonstration prouve un peu plus, qu'il est impossible de recouvrir, i.e. certains des polygones peuvent « déborder », un carré de côté $4\beta + 32\beta^3\alpha^{-1}$; en particulier étant donné un pavage du plan par des polygones convexes vérifiant les conditions ci-avant, une infinité parmi eux ont moins de six côtés.
Preuve : On raisonne par l'absurde ; pour cela on introduit $S(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r, |y| \leq r\}$ et nous choisirons r assez grand afin d'aboutir à une contradiction. On modifie nos polygones en rajoutant des sommets sur les côtés avec un angle π de sorte que deux polygones qui s'intersectent le font sur un côté commun : les nouveaux polygones sont alors appelés les mailles du réseau. On note R_1 le réseau recouvrant $S(r)$, c'est à dire la collection de maille M qui intersecte $S(r)$: par ailleurs si une maille M est entourée de mailles qui rencontrent $S(r)$, on l'inclut dans le réseau. Comme l'aire de tout polygone est d'aire $\geq \alpha$, R_1 contient un nombre fini f_1 de mailles : soit s_1 son nombre de sommets et a_1 son nombre d'arêtes. Le périmètre d'une maille étant $\leq \beta$, on en déduit que R_1 est contenu dans $S(r + \beta)$. On note R le réseau associé à $S(r + \beta)$ comme défini ci-dessus : on note f (resp. s, a) son nombre de mailles (resp. de sommets, d'arêtes). D'après la formule d'Euler, on a $s + f = a + 1$.

On considère alors les angles intérieurs des mailles du réseau R_1 : comme il y a f_1 telles mailles, dont la somme des angles intérieurs est $\geq (7-2)\pi$, cette somme est $\sigma \geq 5\pi f_1$. Par ailleurs la somme des angles en un sommet intérieur au réseau est 2π et $\leq 2\pi$ si le sommet est au bord du réseau de sorte que $2\pi s_1 \geq 5\pi f_1$. En ce qui concerne R, comme chaque sommet appartient au moins à 2 arêtes, on a $s \leq 2a$; en outre tout sommet intérieur appartient à au moins 3 mailles de sorte que le nombre de sommets intérieur à R est $\leq 2a/3$ de sorte que comme R_1 est à l'intérieur de R, on a :

$$2a \geq 3s_1 + 2(s - s - 1) = 2s + s_1.$$

De la relation d'Euler $2s + 2f > 2a$, on en déduit alors $2f > s_1$ ce qui en utilisant la minoration ci-dessus donne $4f > 2s_1 \geq 5f_1$. En notant $f_2 = f - f_1$ le nombre de mailles de $R - R_1$, on obtient alors $4f_2 > f_1$.

Chaque maille étant de périmètre $\leq \beta$, on en déduit qu'elle est contenue dans le disque de centre l'un de ses sommets et de rayon $\beta/2$ de sorte que son aire est $\leq \pi\beta^2/4 < \beta^2$. Ainsi on en déduit que $\beta^2 f_1 > 4r^2$ puisque les f_1-mailles de R_1 recouvrent $S(r)$. Par ailleurs les f_2 mailles de $R - R_1$ sont tous d'aire $\geq \alpha$, on en déduit

$$4(r + 2\beta)^2 - 4r^2 \geq \alpha f_2,$$

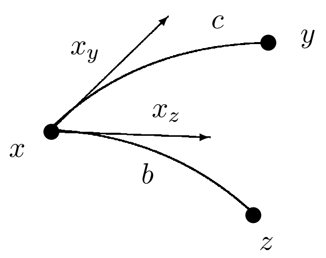
de sorte que $64\beta^3(R = \beta) \geq 4\beta^2\alpha f_2 > \beta^2\alpha f_1 > 4\alpha r^2$, d'après ce qui précède et donc $r < 16\beta^3\alpha^{-1}(1 + \beta/r)$ relation clairement fausse pour $r \geq \beta + 16\beta^3\alpha^{-1}$. □
Remarque : si on enlève l'une quelconque des conditions (la convexité, le nombre de côtés, la minoration sur les aires, la majoration sur les périmètres) imposées sur nos polygones, le théorème est faux, cf. [**6**] pour des constructions.

Remarque : une autre façon d'énoncer le résultat est : si le plan est pavé par des polygones ayant tous plus de 7 côtés, alors les quotients des périmètres par les aires n'est pas borné.

6. Cartes d'une partie de la sphère

6.1. Un peu de géométrie sphérique. — On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, orientée.

- Un triangle de S est un triplet (x, y, z) de points de S linéairement indépendants en tant que vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
- Ses cotés sont les morceaux de grand cercle qui relient les points entre eux ; leurs longueurs sont définies par la distance suivante sur S : pour $x, y \in S$, on note $d(x, y) = \arccos\langle x, y\rangle$.
- Les angles sont définis par l'angle entre les vecteurs tangents dans le plan tangent euclidien : $\alpha = d(x_y, x_z)$ où x_y (resp. x_z) est le deuxième vecteur fourni après x par l'orthonormalisation de Schmidt appliqué à $\{x, y\}$, i.e. $x_y = \frac{\lambda}{||\lambda||}$ avec $\lambda = y - \langle x, y\rangle.x$ (cela correspond aussi à l'angle dièdre formé par les plans correspondants).



Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique *pour tout triangle sphérique on a :*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

Preuve : On a $y = \cos c.x + \sin c.x_y$ et $z = \cos b.x + \sin b.x_z$ avec $\langle x_y, x_z\rangle = \cos\alpha$. En utilisant $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle = 0$ on obtient par définition de a :

$$\cos a = \langle y, z\rangle = \langle \cos x.x + \sin c x_y, \cos b.x + \sin b.x_z\rangle = \cos b. \cos c + \sin b. \sin c. \cos \alpha.$$

□

Inégalités triangulaires *pour tout triangle sphérique on a*

$$|b - c| < a < b + c \text{ et } a + b + c < 2\pi.$$

Réciproquement si trois réels a, b, c vérifient les inégalités précédentes, il existe alors un triangle de côtés égaux à a, b, c.

Preuve : D'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, en utilisant que $|\cos\alpha| < 1$, on a donc

$$\left|\frac{\cos a - \cos b. \cos c}{\sin b. \sin c}\right| < 1$$

ce qui équivaut à $\cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c)$ et comme $0 < a, b, c < \pi$ ceci entraîne $a < b+c < 2\pi - a$. Ainsi on obtient $a+b+c < 2\pi$ puis $b < c+a$ et $c < a+b$ par permutation d'où $|b - c| < a$. Réciproquement si a, b, c vérifient les deux conditions de l'énoncé alors $\left|\frac{\cos a - \cos b. \cos c}{\sin b. \sin c}\right| < 1$ d'où l'existence de $0 < \alpha < \pi$ tel que $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$. On prend alors $x \in S$ quelconque puis deux vecteurs unitaires dans le plan tangent à S formant un angle α de sorte qu'avec y, z sur les grands cercles correspondant à distance respective de b et c, on a bien $d(y, z) = a$, d'où le résultat. □

Loi des sinus étant donné un triangle de côtés de longueur a, b, c et d'angle α, β et γ, on a la relation : $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$.

Preuve : Soit le repère orthonormée de $\mathbb{R}^3$ défini par $e_1 = x$, $e_2 = x_y$ et $e_3 = e_1 \wedge e_2$, on a alors

$$\det(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ 0 & \sin c & \cos \alpha \sin b \\ 0 & 0 & \sin \alpha \sin b \end{vmatrix} = \sin \alpha \sin b \sin c$$

ce qui donne le résultat en faisant tourner les lettres. □

Métrique sur la sphère

La distance entre deux points $x, y \in S$ est par définition le réel positif $d(x, y) = \arccos\langle x, y \rangle \in [0, \pi]$: on a bien $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et l'inégalité triangulaire découle directement de l'inégalité des triangles sphériques montrées plus haut. On munit ainsi S d'une métrique excellente et donc intrinsèque, les plus courts chemins étant des parties de grand cercle.

Aires des triangles sphériques *L'aire d'un triangle sphérique est égale à* $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Preuve : On appelle *fuseau d'angle* α de S la partie F comprise entre deux demi-grands cercles de mêmes extrémités $\pm m$ dont les vecteurs tangents unitaires en m font l'angle α : son aire $\mathcal{A}(F)$ est égale à 2α. Soit alors D la demi-sphère délimitée par le grand cercle y, z et contenant x dans son intérieur. A des ensembles de mesure nulle près, D admet la partition en quatre ensembles T, A, B, C où T est le triangle considéré, $T \cup B$ (resp. $T \cup C$) est un fuseau d'angle β (resp. γ) tandis que $T \cup A$ a même aire que $A \cup (-T)$ qui est un fuseau d'angle α ce qui donne

$$2\pi = \mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B) + \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(T) + 2\alpha - \mathcal{A}(T) + 2\beta - \mathcal{A}(T) + 2\gamma - \mathcal{A}(T)$$

ce qui donne le résultat. □

Remarque : par triangulation **l'aire d'un polygone sphérique convexe** à n sommets et d'angles α_i est égale à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi$.

Remarque : le calcul de l'aire d'un triangle sphérique est un cas particulier de la formule générale de Gauss-Bonnet, valable pour toute variété riemannienne de dimension 2 et qui dit que, pour un triangle T dont les côtés sont des géodésiques alors $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_T K d\sigma$ où K désigne la courbure de la variété et $d\sigma$ sa mesure canonique. Dans le cas de la sphère la courbure est constante égale à 1 et pour le plan euclidien, elle est nulle.

6.2. Cartographies. — On paramètre la sphère via deux angles (θ, ϕ) respectivement appelés *latitude et longitude* ; on étudie alors les applications $f : (\phi, \theta) \in S \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéressera plus particulièrement aux applications f :

– équivalentes, i.e. qui conservent les surfaces ce qui revient à demander que

$$\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \phi} = \cos \theta.$$

En effet l'aire d'un élément infinitéssimal sur la sphère est $\cos \theta d\theta d\phi$ et sur $\mathbb{R}^2$, $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\phi d\theta$.

– conformes, i.e. qui conservent les angles (c'est pratique pour garder un cap !) ce qui revient à demander que

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial\theta} = 0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)^2 = \cos^2\theta\Big((\frac{\partial x}{\partial\theta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial\theta})^2\Big) \end{cases}$$

En effet f est conforme si et seulement si l'image du rectangle $d\phi(\cos\theta d\theta)$ est un rectangle semblable, i.e. le rapport des longueurs des côtés est égal à $\cos\theta$.

– équidistantes, i.e. qui conservent les distances sur les méridiens ce qui revient à demander que

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 = 1.$$

En ce qui concerne le dernier point, notons qu'il est impossible « d'aplatir » la sphère, i.e. que f conserve les distances comme le montre le paragraphe suivant.

6.3. Impossibilité des cartes isométriques. — *soit U un ouvert quelconque de S, il n'existe pas d'application $f : U \to \mathbb{R}^2$ qui soit isométrique.*

Preuve : (cf. [**2**] p.392) Soit dans U un triangle sphérique équilatéral et t l'intersection de médiatrice (ce sont des grands cercles) de sorte $r = d(x,t) = d(y,t) = d(z,t)$ et $a = d(x,y) = d(x,z) = d(y,z)$; Soit m le milieu de yz : le triangle sphérique mty est rectangle en m et par symétrie l'angle en t de ytm est $\frac{\pi}{3}$. La loi des sinus donne alors

$$\frac{\sin r}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(\frac{a}{2})}{\sin(\frac{\pi}{3})}$$

et donc $\sin(\frac{a}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin r$. En prenant $0 < r < \pi/2$ et en utilisant la stricte décroissance de $\frac{\sin x}{x}$ sur $]0,\pi/2[$, on en déduit que $\sin(a/2) < \sin r$ et donc $0 < a/2 < r$ avec $\frac{\sin r}{\sin(a/2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2r/a$ on obtient $a < \sqrt{3}r$. Raisonnons alors par l'absurde : soient x', y', z', t' les images respectives de x, y, z, t de sorte que t' est le centre du triangle équilatéral $x'y'z'$ avec $\frac{t'x'}{y'z'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ d'où la contradiction. $\square$

Remarque : le groupe des isométries de S muni de sa distance est le sous-groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui laisse S stable : en effet comme arccos est bijective de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$, conserver $d(.,.)$ est équivalent à conserver le produit scalaire. En remarquant qu'un couple de points antipodaux est envoyé sur un couple de points antipodaux, on observe que O est conservé et donc le groupe des isométries de S est $O(3,\mathbb{R})$.

6.4. Projections cylindriques. — On considère un cylindre tangent à l'équateur sur lequel on projette la sphère ; on déroule alors le cylindre pour obtenir une carte. Mathématiquement les projections considérées sont de la forme

$$(\theta,\phi) \in S \mapsto (\phi, f(\theta)) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}.$$

– *Projection cylindrique perspective* : l'image d'un point M de la sphère est l'intersection du cylindre tangent à l'équateur avec la droite OM, soit $f(\theta) = \tan\theta$. Elle n'est ni conforme ni équivalente et n'est jamais utilisée dans la pratique (les pôles sont envoyés à l'infini !).
– *Projection cylindrique équidistante* : la condition est $(f'(\theta))^2 = 1$ ce qui donne $f(\theta) = \theta$; on l'appelle la projection des cartes plates carrées.

- *Projection cylindrique équivalente* : la condition est $f'(\theta) = \cos\theta$ soit $f((\theta) = \sin\theta$; concrétement on projette orthogonalement la sphère sur le cylindre, cette projection s'appelle aussi la projection cylindrique de Lambert.
- *Projection cylindrique conforme* : la condition est $f'(\theta) = 1/\cos\theta$ soit $f(\theta) = \log\Big(\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})\Big)$; c'est la fameuse projection de Mercator.

6.5. Projections azymutales. — Il s'agit de projeter la sphère sur le plan tangent à son pôle (nord bien sûr) ; mathématiquement, on considère les applications $(\phi, \theta) \in S \mapsto \rho(\theta)e^{i\phi} \in \mathbb{R}^2$ point que l'on note avec ses coordonnées polaires $(\phi, \rho(\theta))$.

- *Projection gnomonique* : on considère l'intersection du plan avec la droite passant par O, soit $\rho(\theta) = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$. Elle ne peut représenter qu'un hémisphère, elle déforme beaucoup, mais l'image des grands cercles sont des droites et réciproquement (pratique pour trouver le plus court chemin).
- *Projection orthographique* : on projette la sphère orthogonalement sur le plan, soit $\rho(\theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$; en particulier les parallèles ne sont pas déformées. C'est la vision qu'à de la terre un extra-terrestre approchant du pôle.
- *Projection azimutale équidistante* : on trouve $\rho(\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$.
- *Projection azimutale équivalente* : la condition est $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta)\rho'(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ce qui donne
$$\rho(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}.$$
Celle-ci est appelée projection azimutale de Lambert et s'obtient en reportant le longueur de la corde joignant le point au pôle.
- *Projection azimutale conforme* : la première condition donne $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta)^2 = \sin^2(\frac{\pi}{2} - \theta).\rho'(\frac{\pi}{2} - \theta)^2$ et donc $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$. Il s'agit de la projection stéréographique, c'est à dire de l'intersection avec le plan de la droite passant par le pôle sud.

6.6. Projections coniques. — Il s'agit de considérer un cône tangent à la sphère et de l'y projeter ; on découpe alors le cône selon une droite passant par le sommet et on déplie. Mathématiquement ces transformations sont en coordonnées polaires de la forme $\gamma = \eta.\phi$ et $\rho = f(\theta)$; le η correspond à la distance à laquelle se trouve le sommet du cône. Si on impose pas à l'axe du cône de passer par le pôle nord, on a deux degré de liberté (l'axe du cône et le η) ce qui permet de choisir deux parallèles θ_1, θ_2 qui seront automéoïques, i.e. la déformation y sera localement nulle : cette condition s'écrit
$$\eta\rho(\theta_0) = \cos\theta_0 \text{ et } \rho'(\theta_0) = -1.$$
On peut aussi demander que la déformation locale autour d'un parallèle soit d'ordre 2.

- *Projection conique équidistante* : on trouve
$$\eta = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\theta_2 - \theta_1}, \quad \rho = \frac{\theta_2\cos\theta_1 - \theta_1\cos\theta_2}{\cos\theta_1 - \cos\theta_2} - \theta$$
et dans le cas d'ordre 2 : $\eta = \sin\theta_0$ et $\rho = \text{cotan}\theta_0 + \theta_0 - \theta$.
- *Projection conique équivalente* : on trouve
$$\eta = \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{2}, \quad \rho = \sqrt{\frac{1 + \sin\theta_1\sin\theta_2}{\eta^2} - \frac{2}{\eta}\sin\theta}$$

et dans le cas d'ordre 2 : $\eta = \sin\theta_0$ et $\rho = \sqrt{\frac{1+\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta_0} - \frac{2}{\eta}\sin\theta}$.

– *Projection conique conforme dite de Lambert* : on trouve

$$\eta = \frac{\log\cos\theta_1 - \log\cos\theta_2}{\log\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}) - \log\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_2}{2})}, \quad \rho = k\Big(\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\Big)^{\eta}$$

avec $k = \frac{\cos\theta_1}{\eta}\Big(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_1}{2})\Big)^{\eta}$. Dans le cas d'ordre 2, on trouve $\eta = \sin\theta_0$ et même formule pour ρ en prenant θ_0.

7. Géométrie inversive en dimension 2

Ce qui suit est largement inspiré de [**3**] et [**4**].

7.1. Présentation euclidienne. — On rajoute à l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$, un point à l'infini ; via la projection stéréographique l'espace est donc la sphère de Riemann S^2. Comme groupe des transformations on considère le groupe engendré par toutes les inversions de la sphère de Riemann.

Remarque : en dimension quelconque on prend le plan affine euclidien E auquel on rajoute un point à l'infini $\hat{E} = E \cup \{\infty\}$ (on passe de l'une à l'autre par la projection stéréographique) ; la topologie sur $\hat{E}$ est celle de E à laquelle on rajoute les ouverts du type $(E\backslash K) \cup \{\infty\}$ où K est un compact de E ; la projection stéréographique est un homéomorphisme.

– Pour une similitude f du plan affine euclidien, on la prolonge en posant $f(\infty) = \infty$; les applications de la forme $z \mapsto (z-a)^{-1}$ et les similitudes de $\hat{E}$ engendrent un groupe appelé le groupe conforme ou groupe des homographies ; la géométrie conforme est l'étude de l'action du groupe conforme sur $\hat{E}$.
– Si on rajoute la conjugaison, on obtient le groupe circulaire qui vu comme automorphismes de S^2, correspond aux automorphismes qui conservent les cercles tracés sur S^2. Une transformation circulaire droite ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) (resp. gauche $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$) conserve (resp. change en son opposé) les angles orientés de droites. Nous verrons plus loin que le groupe circulaire est engendré par les inversions relativement à des « cercles-droites ».

Définitions : - *la puissance d'un point P par rapport à un cercle $\mathcal{C}(O,R)$* est la quantité $s = \overline{PA}.\overline{PB}$, où A, B sont les points d'intersection d'une droite quelconque passant par P et coupant $\mathcal{C}$ aux points A, B. En introduisant le point A' diamétralement opposé à A et en utilisant que le triangle ABA' est rectangle en B, on a $s = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PA'} = PO^2 - R^2$ et ne dépend donc pas de la droite choisie.

- *L'axe radical de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$* est l'ensemble des points d'égale puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ donné par l'équation $OM^2 - O'M^2 = R^2 - R'^2$ soit $2.\overrightarrow{O'M}.\overrightarrow{O'O} = R'^2 - R^2 + O'O^2$ qui est donc la droite perpendiculaire à OO' et passant par $I \in (OO')$ tel que $\overline{O'I} = \frac{R'^2 - R^2 + O'O^2}{2\overline{O'M}}$.

Invariant de deux cercles : *soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux cercles de rayon respectifs R, R' et de centre O, O' avec $d = OO'$. La quantité $c = \frac{|R^2+R'^2-d^2|}{2RR'}$ est invariante par inversion.*

Preuve : Dans le cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ s'intersectent en un point P, dans le triangle $OO'P$, on a $OO'^2 = PO^2 + PO'^2 - 2.PO.PO'.\cos\widehat{OPO'}$ et donc l'invariant en question n'est autre que que le cosinus de l'angle $\widehat{OPO'}$ qui est aussi celui entre les tangentes en P de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ lequel est conservé par inversion.

Dans le cas général, soit P n'appartenant ni à $\mathcal{C}$ ni à $\mathcal{C}'$ le pôle de l'inversion et μ son rapport ; on note Γ et Γ' les cercles images de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centre ω, ω' et de rayon ρ, ρ'. On rappelle que Γ (resp. Γ') est l'image de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) par l'homothétie de centre S et de rapport $\frac{\mu}{s}$ (resp. $\frac{\mu}{s'}$) où s (resp. s') est la puissance de S par rapport à $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) de sorte que la puissance de S par rapport à Γ (resp. Γ') est $\sigma = \frac{\mu^2}{s}$ (resp. $\sigma' = \frac{\mu^2}{s'}$). Dans les triangles POO' et $P\omega\omega'$, on écrit

$$d^2 = PO^2 + PO'^2 - 2.PO.PO'.\cos\widehat{OPO'}, \quad \omega\omega'^2 = \delta^2 = P\omega^2 + P\omega'^2 - 2P\omega.P\omega'.\cos\widehat{\omega P\omega'}$$

avec $\alpha = \widehat{OPO'} = \widehat{\omega P\omega'}$, de sorte que

$$\frac{R^2 + R'^2 - d^2}{\rho^2 + \rho'^2 - \delta^2} = \frac{s + s' - 2.PO.PO'\cos\alpha}{\sigma + \sigma' - 2.P\omega.P\omega'.\cos\alpha} = \frac{ss'}{\mu^2} = \frac{RR'}{\rho\rho'}$$

en utilisant $\frac{\sigma+\sigma'}{s+s'} = \frac{\mu^2}{ss'} = \frac{P\omega.P\omega'}{PO.PO'}$. □

Remarque : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont non sécants (resp. sécants, resp. tangents) si et seulement si $c >$ (resp. $c < 1$, resp. $c = 1$).

Proposition : *soient $\mathcal{C}(O, R)$ et $\mathcal{C}'(O', R')$ deux cercles non sécant ; les cercles orthogonaux à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont ceux centrés sur l'axe radical et passant par les points L, L' tels que $LI^2 = L'I^2 = IO^2 - R^2 = IO'^2 - R'^2$.*

Preuve : Soit $\mathcal{C}"(\omega, \rho)$ un tel cercle de sorte que $R^2 + \rho^2 = O\omega^2$ et $R'^2 + \rho^2 = O'\omega^2$ et donc $O\omega^2 - R^2 = O'\omega^2 - R'^2 = \rho^2$ et donc ω appartient à l'axe radical. Notons L, L' l'intersection de $\mathcal{C}" \cap (OO')$: $LI^2 + I\omega^2 = L\omega^2 = \rho^2 = O\omega^2 - R^2$ et donc $LI^2 = OI^2 - R^2$ et de même $L'I^2 = O'I^2 - R'^2$ avec $LI = LI'$. □

Corollaire : *soient deux cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ non sécants ; il existe alors une inversion f telle que $f(\mathcal{C})$ et $f(\mathcal{C}')$ soient deux cercles concentriques.*

Preuve : Soit f une inversion de pôle L et de puissance μ quelconque. Les images $f(\mathcal{C})$ et $f(\mathcal{C}')$ sont des cercles qui sont orthogonaux à tous les $f(\Sigma)$ où Σ est un cercle quelconque centré sur l'axe radical de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et passant par L. Or les $f(\Sigma)$ sont des droites qui passent donc par les centres de $f(\mathcal{C})$ et $f(\mathcal{C}')$ lesquels sont donc dans l'intersection de tous les $f(\Sigma)$ et sont donc confondus. □

Porisme de Steiner : *soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non sécants tels que $\mathcal{C}'$ soit à l'intérieur de $\mathcal{C}$. On construit alors une chaîne de cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots$ telle que $\mathcal{C}_1$ est tangent à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ quelconque, puis pour $i \geq 2$, $\mathcal{C}_i$ est tangent à $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_{i-1}$. La chaîne est alors finie si et seulement si l'invariant conforme c de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est de la forme*

$$c = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'} = \frac{1 + \sin^2(\pi p/k)}{\cos^2(\pi p/k)},$$

où p est le nombre de tours. En particulier cela ne dépend pas du choix du cercle $\mathcal{C}_1$ de départ.

Preuve : S'agissant clairement d'un énoncé de géométrie conforme, on applique une inversion de sorte que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soient deux cercles concentriques : la figure étant alors clairement invariante par rotation, on remarque bien que l'alternative, la chaîne est finie ou infinie, est indépendante du choix de $\mathcal{C}_1$. La chaîne sera finie si et seulement si l'angle $\frac{\widehat{O_1OO_2}}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. Notons $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{O_1OO_2} = \widehat{O_1OT}$ où T est le point de contact entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$: $\alpha = \pi\frac{p}{k}$. On note ρ, ρ' les rayons des deux cercles concentriques de sorte que d'après ce qui précède $\frac{\rho}{\rho'} = c + \sqrt{c^2 - 1}$

avec $\sin\alpha = \frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}$ et donc $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ soit

$$c + \sqrt{c^2-1} = \frac{1+\sin\frac{\pi p}{k}}{1-\sin\frac{\pi p}{k}}$$

ce qui donne le résultat. □

7.2. L'espace des cercles. — L'image d'un grand cercle de la sphère de Riemann passant par le pôle nord a pour image, via la projection stéréographique à partir de ce point, une droite ; ainsi dans la suite un cercle signifiera un cercle ou une droite.

Soit K un corps algébriquement clos, à tout point $[a,b,c,d] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, on associe le cercle d'équation dans une base fixée, $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$.
Remarque : dans le cas réel, il faut éliminer les cercles vides, l'espace associé est encore de dimension 3.
Faisceaux de cercles : *soient L et L' deux points, l'ensemble des cercles passant par ces deux points est le faisceau de cercles de base L et L'. Dans le cas où $L = L'$, on sous-entend la donnée d'une droite D passant par L et le faisceau correspond est l'ensemble des cercles tangents à D au point L. Etant donné un faisceau de cercles, on considère son faisceau orthogonal constitué des cercles orthogonaux à tous les cercles du faisceau considéré.*
Remarque : si L' est le point à l'infini, le faisceau de cercles de base L,∞ est l'ensemble des droites passant par L (on retrouve la notion de faisceau de droites habituelle) ; son faisceau orthogonal est l'ensemble des cercles centrés en L. De même si L est le point à l'infini et D une droite quelconque, alors le faisceau associé est l'ensemble des droites parallèles à D ; son faisceau orthogonal est l'ensemble des droites orthogonales à D.
Remarque : soient D et D' deux droites orthogonales se coupant en un point O et soit $c \geq 0$ un réel. On fixe des vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{i'}$ de respectivement D et D'. Les cercles centrés sur D telles que tout point de D' a une puissance par rapport à ce cercle égale à $c > 0$ est le faisceau orthogonal au faisceau de cercles de base $(\pm\sqrt{c},0)$. Leur équation dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{i'})$ est de la forme $x^2+y^2-2ax+c=0$ avec $a \geq \sqrt{c}$. Deux cercles quelconques de ce faisceau ne s'intersectent pas et ont D' pour axe radical, les points limites étant $(\pm\sqrt{c},0)$.
Distance inversive entre deux cercles : *pour $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ deux cercles, on note $\delta(\mathcal{C},\mathcal{C}') =$ $\mathrm{arcch}c(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ où $C(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ est l'invariant de $\mathcal{C},\mathcal{C}'$.*
Remarque : dans le cas où $\mathcal{C}'$ est une droite à distance p du centre O de $\mathcal{C}$ lequel est de rayon b, si $p < b$ alors leur angle d'intersection α est tel que $\cos\alpha = \pm p/b$ et donc leur distance inversive est $\mathrm{arcch}p/b$. de manière générale après inversion de centre O et de rapport $b/2$, on se ramène au cas de deux cercles et on calcule directement $\delta = \mathrm{arcch}p/b$.
Exemples : la distance inversive δ entre les cercles :
- circonscrit et inscrit d'un triangle ABC est, d'après la relation d'Euler, telle que $\mathrm{sh}\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}$;
- d'équations $x^2+y^2-2ax+d^2=0$ (avec $a > d > 0$) et $x^2+y^2-2bx+d^2=0$ (avec $b > d > 0$) est $|\alpha-\beta|$ où $\mathrm{th}\alpha = d/a$ et $\mathrm{th}\beta = d/b$.

Remarque : si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ne s'intersectent pas, on peut se ramener après inversion au cas de deux cercles concentriques de rayon respectif R_1,R_2 auquel cas on obtient

$$\delta(\mathcal{C},\mathcal{C}') = |\ln\frac{R_1}{R_2}|.$$

Proposition *On a $\delta(\mathcal{C},\mathcal{C}') = 0$ si et seulement si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents. On dit que trois cercles $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3$ qui ne s'intersectent pas, sont dits emboîtés avec $\mathcal{C}_3$ qui sépare $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}_2$, si* *tout cercle qui intersecte $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ intersecte aussi $\mathcal{C}_3$: dans cette situation on a $\delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) \leq \delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3)+\delta(\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2)$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3$ sont trois cercles d'un faisceau de cercles.*

Preuve : Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont concentriques ou ne s'intersectent pas, la formule ci-dessus montre que $\delta(\mathcal{C},\mathcal{C}') \neq 0$; le cas où ils sont tangents découle de l'observation que $c(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ est l'angle sous lequel ils s'intersectent, ici don égal à π.

Considérons trois cercles d'un même faisceau de cercles qui ne s'intersectent pas ; s'ils sont tous tangents en O à une même droite D, on a $d(\mathcal{C}_i,\mathcal{C}_j)=0$. S'ils passent tous par deux points L, L', on a encore par addition de leurs angles d'intersection $\delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3)=\delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)+\delta(\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3)$. Dans la dernière situation, on considère une inversion telle que les images de $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3$ soient des cercles concentriques de rayons respectifs $a_1>a_2>a_3$. On a alors $\delta(\mathcal{C}_i,\mathcal{C}_j)=|\ln\frac{a_i}{a_j}|$ et le résultat découle de l'égalité triviale $\frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_1}{a_3}$.

Montrons enfin l'inégalité triangulaire dans le cas de trois cercles emboîtés avec $\mathcal{C}_3$ qui sépare $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}_2$. Considérons alors l'intersection des axes radicaux des faisceaux engendrés respectivement par $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3$: dans le cas où les trois centres ne sont pas alignés il s'agit d'un point appelé **point radical** de $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3$. Soit alors un cercle $\mathcal{C}$ centré en ce point radical et orthogonal à $\mathcal{C}_1$: $\mathcal{C}$ est alors orthogonal à tous cercles des faisceaux engendrés par $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3$, et donc en particulier est orthogonal à $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3$. Envoyons alors l'un des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}_3$ à l'infini de sorte que $\mathcal{C}_3$ devient une droite orthogonale à la droite des centres de $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ comme dans la figure 18. En notant $\lambda=\delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3)$, $\mu=\delta(\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3)$ et $\nu=\delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$, on a

$$\begin{aligned} R_1^2+R_2^2+2R_1R_2\mathrm{ch}\nu &= O_1O_2^2=(O_1I+IO_2)^2 \\ &= (R_1\mathrm{ch}\lambda+R_2\mathrm{ch}\mu)^2 \\ &= R_1^2(1+\mathrm{sh}^2\lambda)+2R_1R_2\mathrm{ch}\lambda\mathrm{ch}\mu+R_2^2(1+\mathrm{sh}^2\mu) \end{aligned}$$

et donc

$$2R_1R_2\Big(\mathrm{ch}\nu-\mathrm{ch}(\lambda+\mu)\Big)=(R_1\mathrm{sh}\lambda-R_2\mathrm{sh}\mu)^2\geq 0$$

et donc $\nu\geq\lambda+\mu$.

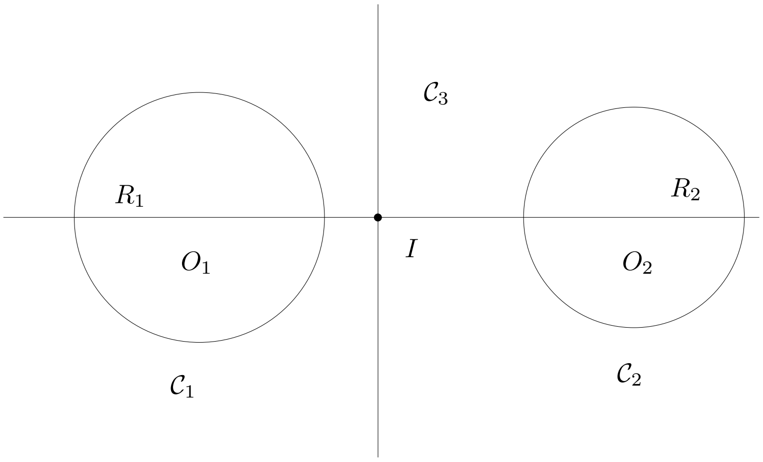


FIG. 18.

□

7.3. Présentation axiomatique. — L'idée est de présenter axiomatiquement la géométrique inversive sans faire référence à la géométrie euclidienne. L'espace est un ensemble de points muni d'une famille de sous-ensembles que l'on appelle cercles, avec les relations d'incidence suivantes :

(I1) par trois points passe exactement un cercle ;

(I2) il existe 4 points non cocycliques ;

(I3) soit P un point appartenant à un cercle $\mathcal{C}$; pour tout point $Q \notin \mathcal{C}$ il existe exactement un cercle passant par Q et ayant P comme unique point commun avec $\mathcal{C}$ (en géométrie euclidienne cela correspond à demander que le cercle en question soit tangent à $\mathcal{C}$ en P) ;

(I4) (*Théorème de Miquel* cf. l'exercice 9.8) soient S_1, S_2, S_3 et S_4 quatre cercles du plan, tels que S_1 coupe S_2 en deux points z_1, w_1, qui lui-même coupe S_3 en z_2, w_2, qui coupe S_4 en z_3, w_3 qui coupe S_1 en z_4, w_4. Si les points z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocycliques, alors qu'il en est de même des points w_1, w_2, w_3, w_4.

Remarque : d'après (I1) l'intersection de deux cercles distincts a deux, un ou zéro points communs ; on dira respectivement qu'ils s'intersectent, qu'ils sont tangents ou qu'ils ne s'intersectent pas.

Définition inversive de l'orthogonalité : deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ qui s'intersectent sont dits *orthogonaux*, s'il existe des cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ tels que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ soient tangents deux à deux en des points A, B, C et que $\mathcal{C}$ est l'unique cercle contenant A, B, C.

Preuve : Vérifions que cette définition coïncide bien avec la version euclidienne. Considérons l'inversion de centre A qui conserve $\mathcal{C}_3$ de sorte que les images de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux droites parallèles tangentes à $\mathcal{C}_3$ qui le coupe donc selon un diamètre qui est l'image de $\mathcal{C}$ qui est bien orthogonale à ces deux droites. Comme l'inversion conserve l'orthogonalité, on en déduit que $\mathcal{C}$ est orthogonale à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et donc aussi à $\mathcal{C}_3$ par symétrie du problème.

Réciproquement étant donné deux cercles orthogonaux au sens euclidien, après inversion en un point du premier cercle on se ramène à un cercle et une droite D passant par son centre ; on considère alors les deux droites orthogonales à D et tangente à ce cercle de sorte qu'en inversant de nouveau la figure, on a bien construit 4 cercles comme dans la définition ci-dessus. □

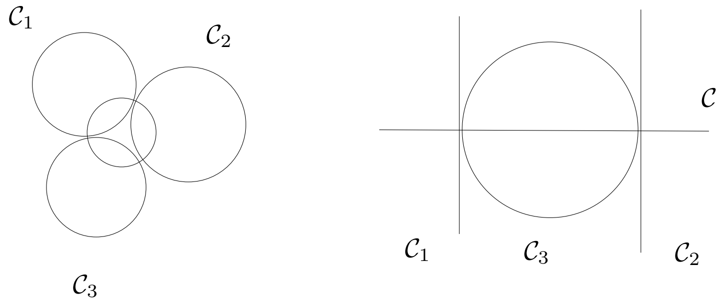


FIG. 19. Cercles orthogonaux et leur inverse

Définition inversive de l'inversion : soit $\mathcal{C}(O,R)$ et $P \notin \mathcal{C}$, l'inverse de P par l'inversion de centre O et de rapport R^2 (on dit aussi l'inverse de P par rapport au cercle $\mathcal{C}$) est la seconde intersection de deux cercles quelconques passant par P et orthogonaux à $\mathcal{C}$.
Preuve : Avec les notations de la figure 20, où un des cercles est la droite OP : la puissance de O par rapport au cercle $\mathcal{C}'$ est $OP.OP' = OT^2 = R^2$, et donc tout cercle $\mathcal{C}'$ orthogonal à $\mathcal{C}$ et passant par P passe par l'inverse P' de P par rapport à $\mathcal{C}$.

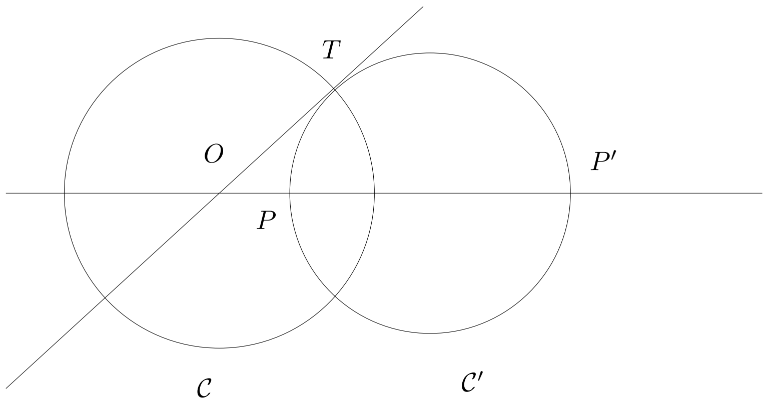


FIG. 20.

□

Remarque : en particulier on note que deux cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sont orthogonaux si $\mathcal{C}_2$ passe par deux points inverses l'un de l'autre par $\mathcal{C}_1$. Ainsi le faisceau orthogonal à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des cercles passant par P, P_1, P_2, où P est un point variable et P_1 (resp. P_2) est l'inverse de P par rapport à $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$).
Remarque : en prenant pour $\mathcal{C}$ une droite, l'inversion par rapport à $\mathcal{C}$ correspond à la symétrie orthogonale.
Remarque : si on identifie les cercles du plan affine euclidien à des plans de l'espace des cercles qui est de dimension 3, les faisceaux de cercles à des droites de cet espace et que l'on regarde la distance inversive précédente, on obtient un modèle de la géométrie projective de dimension 3 découvert par Lobatchevski.

8. Hyperbolicité d'après Gromov

Hyperbolicité de l'espace hyperbolique (Gromov) : *pour $\delta = 2$, $\mathcal{C}$ est δ-hyperbolique, i.e. pour tout triangle hyperbolique, tout point situé sur un des cotés est à distance au plus δ d'un point situé sur l'un des deux autres côtés.*

to be continued....

9. Exercices

Exercice 9.1. — *Prouver, en utilisant le théorème de Ptolémée, la relation* $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ *pour deux angles* a *et* b *tels* a *soit compris en* b *(positif) et* $\pi/2$.

Exercice 9.2. — ***Généralisation du théorème de Viviani*** *: un polygone est dit équiangulaire si tous ses angles au sommet sont égaux. Soit* $n \geq 3$, *le nombre de côtés d'un polygone équiangulaire ; montrez que :*

(i) pour $n = 3$, *le triangle est équilatéral mais que pour* $n \geq 4$ *le polygone n'est pas forcément régulier ; expliquez comment les construire.*

(ii) Montrez que la somme des distances d'un point M *à l'intérieur du polygone aux cotés de celui-ci, ne dépend pas du choix de* M.

(iii) La propriété de (ii) est-elle une caractérisation des polygones équiangulaires ?

Exercice 9.3. — *Soit* $n \geq 1$ *et* n *cercles concentriques* $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n$ *; on considère une droite* PQ *et* M *le milieu des points d'intersection de cette droite avec un quelconque de ces cercles. On considère alors deux droites* D_1 *et* D_2 *passant par* M *dont les points d'intersection avec les cercles* $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n$ *sont notés* $A_n, A_{n-1} \cdots, A_1, B_1, \cdots, B_n$ *et* $C_n, \cdots, C_1, D_1, \cdots, D_n$. *Soit alors une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *; pour tout* $i = 1, \cdots, n$ *on note* $X_i = A_i D_{\sigma(i)} \cap PQ$ *et* $Y_i = C_i B_{\sigma(i)} \cap PQ$, *cf. la figure 21.*

L'énoncé du théorème qu'il s'agit de prouver est que

$$\frac{1}{MX_1} + \cdots + \frac{1}{MX_n} = \frac{1}{MY_1} + \cdots + \frac{1}{MY_n}.$$

(i) Soit ABC *un triangle et* $M \in [BC]$ *; on note* $\alpha = \widehat{BAM}$ *et* $\beta = \widehat{MAC}$, *montrez que*

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AM} = \frac{\sin(\alpha)}{AC} + \frac{\sin(\beta)}{AB}.$$

(ii) La configuration est celle de la figure 22 : trois demi-droites issues d'un point M *sur lesquelles sont portées des points* $C_1, \cdots, C_n$ *et* $B_1, \cdots, B_n$. *Pour une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, *on note* $Y_i = C_i B_{\sigma(i)} \cap D$ *; montrez que* $\frac{1}{MY_1} + \cdots + \frac{1}{MY_n}$ *ne dépend pas de* σ.

(iii) Démontrez le théorème.

Exercice 9.4. — *Soit* ABC *un triangle avec* $AC > BC$ *et soit* $\mathcal{C}$ *sont cercle circonscrit. On note* $P \in \mathcal{C}$ *le milieu de l'arc* AB *du côté de* C. *Montrez, en notant* M *le projeté orthogonal de* P *sur* AC *que* $AM = MC + BC$.

Exercice 9.5. — ***Triangles podaires*** *: soit* ABC *un triangle et* P *un point intérieur au triangle. On considère* A_1, B_1, C_1 *les pieds des perpendiculaires menées de* P *aux cotés du triangle. Le triangle* $A_1B_1C_1$ *est dit triangle podaire de* ABC *pour* P. *Soit alors* $A_2B_2C_2$ *le triangle podaire de* $A_1B_1C_1$ *pour* P *et* $A_3B_3C_3$ *le triangle podaire de* $A_2B_2C_2$ *pour* P.

(i) Montrez que ABC *et* $A_3B_3C_3$ *sont semblables.*

(ii) Calculez le rapport de similitude.

(iii) Trouver P *tel que l'aire de* $A_3B_3C_3$ *soit minimale.*

Exercice 9.6. — ***Problème de Steiner*** *: trouvez un point* M *intérieur à un triangle* ABC *tel que* $MA + MB + MC$ *soit minimal.*

Exercice 9.7. — ***théorème d'Erdos-Mordell*** *: étant donné un point* I *situé à l'intérieur ou sur la frontière d'un triangle, la somme de ses distances aux sommets est au moins égale*

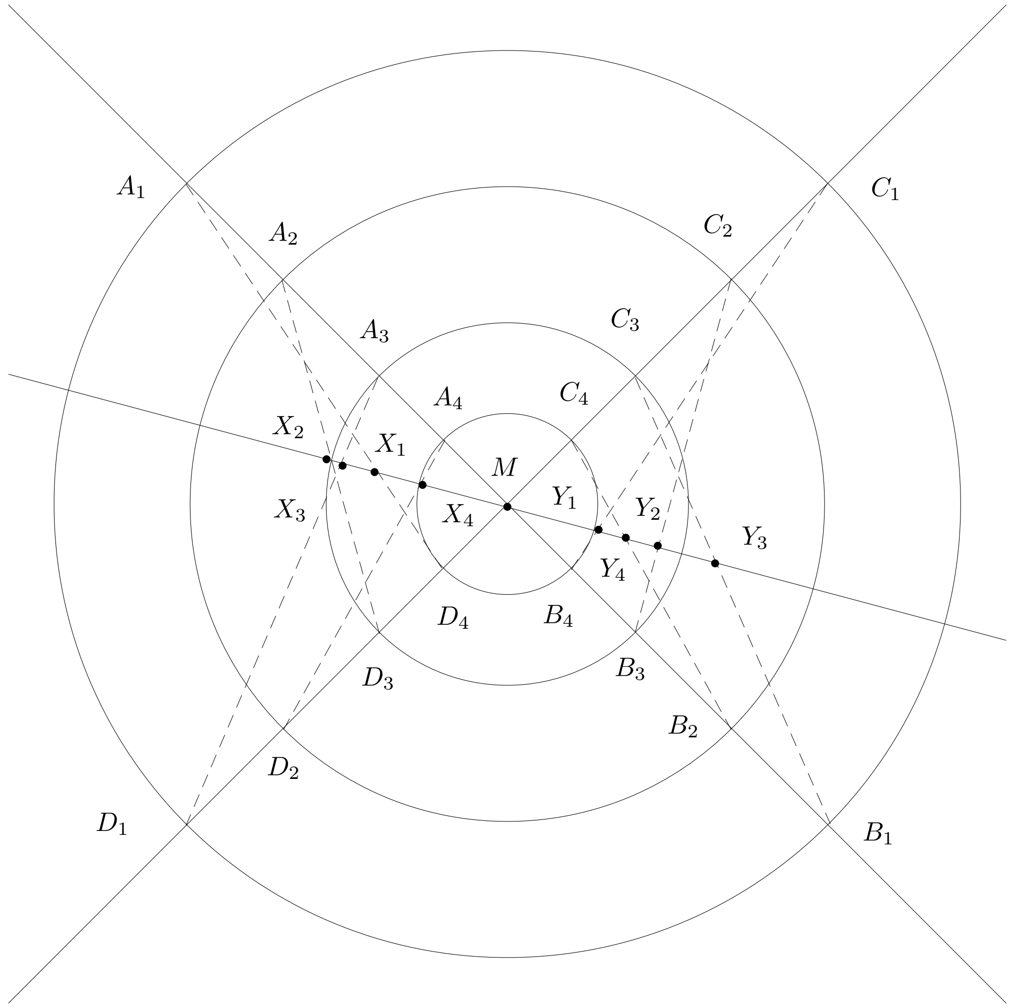


FIG. 21.

au double de la somme de ses distances aux trois cotés du triangle, l'égalité n'ayant lieu que si et seulement si le triangle est équilatéral et de centre I.

***Exercice 9.8.* — (Théorème de Miquel)** *On se place dans le plan complexe P. Etant donné 4 points de P d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4, on définit leur birapport, que l'on note $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$, comme le nombre :*

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) \ / \ \left(\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right)$$

(1) Montrer que les quatre points d'affixes z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est réel.

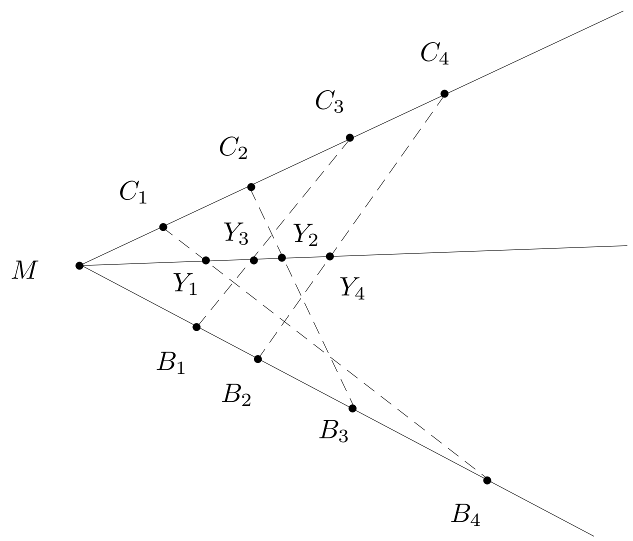


FIG. 22.

(2) On rajoute formellement un "point à l'infini" que l'on note ∞ et on étend les opérations de $\mathbb{C}$ en posant : $\infty = 1/0$, avec $\infty/\infty = 1$ et

$$\forall z \ z + \infty = \infty \quad \forall z \neq 0 \ z \times \infty = \infty$$

$$\forall z \neq \infty \ z - \infty = \infty, \ \infty/z = \infty, \ z/\infty = 0$$

Remarque : $0 \times \infty$ n'est pas défini, tout comme $\infty - \infty$.

Montrer que les points d'affixes z_1, z_2, z_3 sont alignés si et seulement si $W(z_1, z_2, z_3, \infty)$ est réel.

(3) Soient S_1, S_2, S_3 et S_4 quatre cercles du plan, tels que S_1 coupe S_2 en deux points z_1, w_1, qui lui-même coupe S_3 en z_2, w_2, qui coupe S_4 en z_3, w_3 qui coupe S_1 en z_4, w_4. On suppose que les points z_1, z_2, z_3, z_4 sont alignés ou cocycliques, montrer alors qu'il en est de même des points w_1, w_2, w_3, w_4.

Indication : utiliser que z_1, z_2, w_1, w_2 sont cocycliques.

Généraliser au cas où S_1, S_2, S_3, S_4 sont des cercles ou des droites.

(4) Soient quatre droites en position générale : D_1, D_2, D_3, D_4. On pose $z_{i,j} = D_i \cap D_j$ et $S_{i,j,k}$ le cercle circonscrit aux triangles formés par les droites D_i, D_j, D_k.

(i) Montrer que $S_{1,2,3}$ et $S_{1,2,4}$ qui se coupent en $z_{1,2}$ ne sont pas tangents ; on note $z_{1,2,3,4}$ le deuxième point d'intersection.

(ii) En considérant les quatre cercles-droites $S_{1,2,3}, D_3, D_4, S_{1,2,4}$, montrer, en appliquant la question (3), que $z_{1,2,3,4}$ appartient au cercle $S_{2,3,4}$.

(iii) En déduire que les cercles $S_{1,2,3}, S_{1,2,4}, S_{2,3,4}, S_{1,3,4}$ sont concourants en $z_{1,2,3,4}$; on l'appellera le point central des droites D_1, D_2, D_3, D_4.

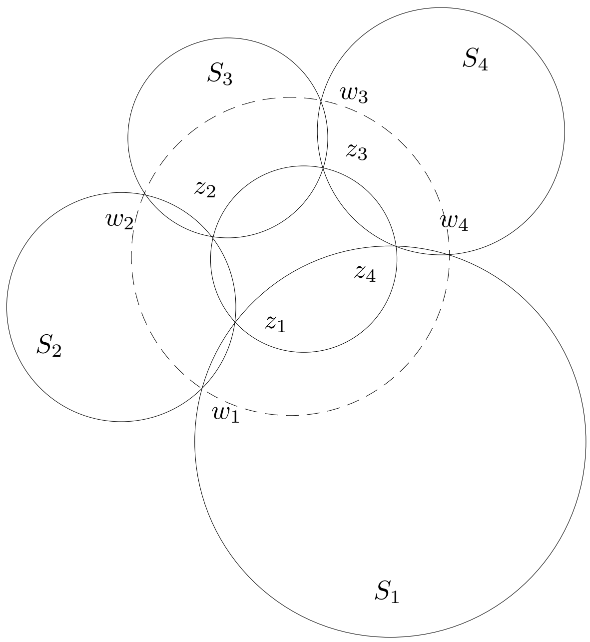


FIG. 23. Théorème de Miquel

(5) Soient cinq droites $D_1, \cdots, D_5$ en position générale. Montrer que les 5 points centraux $z_{1,2,3,4}, z_{1,2,3,5}, z_{1,2,4,5}, z_{1,3,4,5}$ et $z_{2,3,4,5}$ des cinq quadruplets de droites sont cocycliques ou alignés.
Indication : utiliser les cercles $S_{1,3,4}, S_{1,2,3}, S_{1,2,5}, S_{1,4,5}$ et la question (3).
En déduire que les intersections des cercles circonscrits aux triangles externes successifs d'une étoile à cinq branches sont cocycliques.

10. Solutions

9.1 Considérons un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un demi cercle de diamètre AD et de centre O, de sorte que $AD = 1$, Les triangles ABD et ACD étant rectangles, on a $AB = \sin b$, $AC = \sin a$, mais aussi $BD = \cos b$ et $CD = \cos a$. Dans BCD la relation des sinus ($a/\sin A = 2R$) donne $BC = \sin(a-b)$, toujours car $AD = 1$. Le théorème de Ptolémée affirme que $ACxBD = ABxCD + BCxAD$, soit encore, puisque $AD = 1$: $\sin(a-b) = BC = ACxBD - ABxCD$, d'où la relation $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

9.2 (i) La somme des angles étant égale à $(n-2)\pi$, les angles au sommet sont tous égaux à $\frac{n-2}{n}\pi$. Pour $n = 3$, on obtient des triangles aux trois sommets égaux à $\pi/3$ de sorte qu'il sont tous semblables et en particulier équilatéraux. De manière générale, pour les construire on part d'un polygone régulier et on translate les cotés ; on obtient ainsi, à similitude près, tous

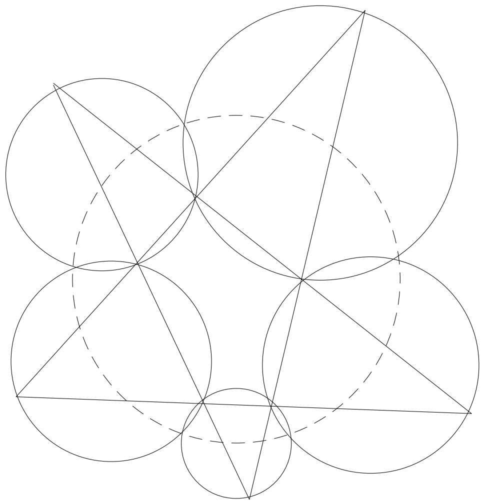


FIG. 24

les polygones équiangulaires. On remarque alors que pour $n \geq 4$, ils ne sont pas forcément réguliers.

(ii) Le résultat est clairement vrai pour un polygone régulier puisque $a\sum_i h_i$ où a désigne la longueur commune des côtés et h_i la distance de M au i-ème côté, est égale à deux fois l'aire du polygone (utilisez une triangulation du polygone). Le résultat découle alors directement de la construction des polygones équiangulaires données au point précédent.

Une autre façon de prouver le résultat est d'introduire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{n_i}$ orthogonaux au i-ème coté. Comme le polygone est équiangulaire, $M + \overrightarrow{n_i}$ forment un polygone régulier à n côtés (remarquez que dans le quadrilatère formé par M, ses deux projetés orthogonaux H_i, H_{i+1} sur deux côtés consécutifs et le sommet associé, l'angle en M est $2\pi - \pi/2 - \pi/2 - (n-2)\pi/n = 2\pi/n$). On a $S_A = \sum_i h_i = \sum_i \langle \overrightarrow{AH_i}, \overrightarrow{n_i} \rangle$ alors que pour un point A', on a $S_{A'} = \sum_i \langle \overrightarrow{A'H'_i}, \overrightarrow{n_i} \rangle = \sum_i \langle \overrightarrow{A'H_i}, \overrightarrow{n_i} \rangle$ et donc

$$S_A - S_{A'} = \sum_i \langle \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{n_i} \rangle = \langle \overrightarrow{AA'}, \sum_i \overrightarrow{n_i} \rangle = 0.$$

(iii) En reprenant la deuxième preuve de (ii), on remarque que la CNS est que $\sum_i \overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{0}$. Dans le cas où $n = 3$, dans la base orthonormée $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n'_1})$, cela équivaut à ce que $\rangle \overrightarrow{n_i}, \overrightarrow{n_1} \rangle = -1/2$ pour $i = 2, 3$ ce qui implique que le triangle est équilatéral. Pour $n = 4$, on voit que la condition est satisfaite pour tout parallélogramme.

9.3 (i) Cela découle simplement du fait que l'aire de ABC est la somme de l'aire de ABM et ACM.

(ii) On applique (i) aux triangles $MC_iB_{\sigma(i)}$: $\frac{\sin(\beta+\gamma)}{MY_i} = \frac{\sin\gamma}{MB_{\sigma(i)}} + \frac{\sin\beta}{MC_i}$ où $\gamma = \widehat{CMY}$ et $\beta = \widehat{YMB}$. En additionnant ces égalités, on obtient

$$\sin(\beta+\gamma)\Big(\frac{1}{MY_1}+\cdots+\frac{1}{MY_n}\Big) = \sin\gamma\Big(\frac{1}{MB_1}+\cdots+\frac{1}{MB_n}\Big)+\sin\beta\Big(\frac{1}{MC_1}+\cdots+\frac{1}{MC_n}\Big)$$

où le membre de droite de dépend visiblement pas de σ.

(iii) Considérons $\sigma = \mathrm{Id}$; d'après le théorème du papillon « simple », on a $MX_i = MY_i$ ce qui donne le résultat. Par ailleurs d'après (ii) les sommes de l'énoncé sont indépendantes de la permutation d'où le résultat.

9.4 On prolonge comme sur la figure 25, AC jusqu'à F tel que $CF = BC$. Le triangle BCF étant isocèle, on en déduit que $\widehat{APB} = \widehat{ACB} = 2\widehat{AFB}$ et comme P est sur la médiatrice de $[AB]$, car P est au milieu de la corde AB, on en déduit que P est le centre du cercle circonscrit à ABF (théorème de l'angle au centre) d'où le résultat en utilisant que M est le milieu de AF car APF est isocèle en P.

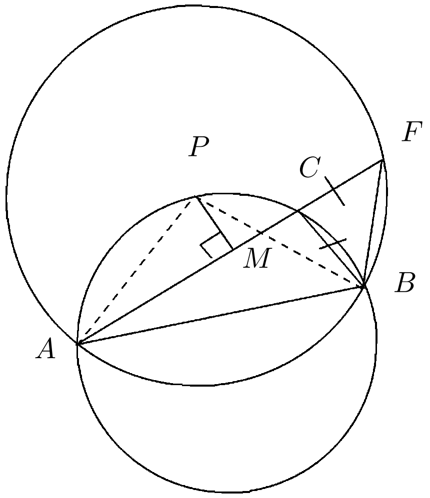


FIG. 25.

9.5 (i) Remarquons déjà que A, C_1, P, B_1 (resp. B, A_1, P, C_1, resp. C, B_1, P, A_1) sont cocycliques car les triangles rectangles AC_1P et APB_1 ont même hypoténuse. Par permutation circulaire, il s'agit donc de montrer que les angles $\hat{A}$ et $\hat{A}_3$ ont même mesure. Or on a $\alpha := (\widehat{AC_1, AP}) = (\widehat{B_1C_1, B_1P})$ car A, C_1, P, B_1 sont cocycliques, qui est égal à $(\widehat{B_1A_2, B_1P})$ car C_1, A_2, B_1 sont alignés, qui est égal à $(\widehat{C_2A_2, C_2P})$ car A_2, B_1, C_2, P sont cocycliques, qui est égal à $(\widehat{C_2B_3, C_2P})$ car A_2, B_2, P sont alignés, qui est égal à $(\widehat{A_3B_3, A_3P})$ car B_3, C_2, A_3, P sont cocycliques. De la même façon on a $(\widehat{AP, AB_1}) = (\widehat{A_3P, A_3C_3})$ et donc

$$(\widehat{AC_1, AP}) + (\widehat{AP, AB_1}) = (\widehat{A_3B_3, A_3P}) + (\widehat{A_3P, A_3C_3})$$

d'où le résultat.

(ii) Notons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (resp. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$) les angles $\widehat{PAA_1}$, $\widehat{PBB_1}$, $\widehat{PCC_1}$ (resp. $\widehat{C_1AP}$, $\widehat{A_1BP}$, $\widehat{B_1CP}$). On a alors $\sin\alpha_1 = PA_1/PA$ ... de sorte que $PA_3/PA = \sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3 =$

$\sin\beta_1.\sin\beta_2.\sin\beta_3$ qui est encore égal au rapport du produit des distances de P aux trois côtés sur le produit des distances aux trois sommets.

(iii) Il s'agit donc de maximiser $(\sin\alpha_1.\sin\beta_1)(\sin\alpha_2.\sin\beta_2)(\sin\alpha_3.\sin\beta_3)$ sachant que $\alpha_i+\beta_i$ est constant. Ainsi le maximum est obtenu pour $\alpha_i=\beta_i$ ou $\alpha_i=\pi-\beta_i$ cas exclu puisque l'on est à l'intérieur du triangle. Le résultat découle alors par compacité du fait qu'aux bords, i.e. sur les côtés du triangle, l'aire est nulle.

9.6 A partir d'une solution M_0, on considère la ligne de niveau $MB+MC=M_0B+M_0C$ qui est ellipse de foyer B et C. L'ellipse étant convexe, M_0 est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur l'ellipse. Mais la tangente en un point d'une ellipse est bissectrice extérieure de l'angle formé par les rayons vecteurs aboutissant en ce point. Il en résulte que $\widehat{AM_0C}=\widehat{AM_0C}$ qui par symétrie est encore égal $\widehat{CM_0B}$. Ainsi le point M_0 est donc le point d'où l'on voit les trois côtés du triangle sous le même angle, c'est le point de Steiner (Fermat, Toricelli ?) du triangle. On le construit en considérant les triangles équilatéraux extérieurs sur les côtés du triangle, dont on note A',B',C' les sommets. Le point cherché est alors l'intersection des droites $A'A, B'B, CC'$ (considérer les rotations d'angle $\pi/3$ de sommets A, B ou C.
Remarque : pour être certain que le point soit à l'intérieur, il faut supposer que les angles du triangle sont strictement inférieurs à $2\pi/3$.

9.7

9.8 (1) la condition classique de cocyclicité est $(\vec{z_3z_2},\vec{z_3z_1})\equiv(\vec{z_4z_2},\vec{z_4z_1}) \mod \pi$, on traduit cette égalité via les complexes ...

(2) le rapport $\left(\frac{z_1-\infty}{z_2-\infty}\right)$ est égal à 1, ce qui nous ramène à $W(z_1,z_2,z_3,\infty)=\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)$. Or les 3 points sont alignés ssi $(\vec{z_3z_1},\vec{z_3z_2})\equiv 0 \mod \pi$...

(3) par construction les birapports suivant sont réels

$$W(z_1,w_2,z_2,w_1),\ W(z_2,w_3,z_3,w_2),\ W(z_3,w_4,z_4,w_3),\ W(z_4,w_1,z_1,w_4)$$

L'expression $\frac{W(z_1,w_2,z_2,w_1).W(z_3,w_4,z_4,w_3)}{W(z_2,w_3,z_3,w_2).W(z_4,w_1,z_1,w_4)}$ est donc réelle et se simplifie en $W(z_1,z_3,z_2,z_4)W(w_1,w_3,w_2,w_4)$...

pour la généralisation, on remarque que l'on a seulement utilisé le critère de birapport...

(4) (i) en effet sinon D_3 et D_4 seraient parallèles : considérer une homothétie de centre $z_{1,2}$

(ii) - $S_{1,2,3}$ coupe D_3 en $z_{1,3}$ et $z_{2,3}$;
- D_3 coupe D_4 en ∞ et $z_{3,4}$;
- D_4 coupe $S_{1,2,4}$ en $z_{1,4}$ et $z_{2,4}$;
- $S_{1,2,4}$ coupe $S_{1,2,3}$ en $z_{1,2}$ et $z=z_{1,2,3,4}$

Comme les quatres points $z_{1,3},\infty,z_{1,4},z_{1,2}$ sont alignés (sur D_1), les quatre points $z_{2,3},z_{3,4},z_{2,4},z$ sont alignés ou cocycliques ; les trois premiers sont sur le cercle $S_{2,3,4}$ et distincts, de sorte que z est sur $S_{2,3,4}$.

(iii) de même $z_{2,3},\infty,z_{2,4},z_{1,2}$ sont alignés (sur D_2) donc $z_{1,3},z_{3,4},z_{1,4},z$ sont cocyliques sur $Z_{1,3,4}$ d'où le résultat. (on peut aussi conclure par symétrie du problème : si 3 cercles sont concourants le quatrième aussi !)

(5) - $z_{1,2,3,4}$ est l'intersection des cercles $S_{1,3,4}$ et $S_{1,2,3}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,3}$;
- $z_{1,2,3,5}$ est l'intersection des cercles $S_{1,2,3}$ et $S_{1,2,5}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,2}$;
- $z_{1,2,4,5}$ est l'intersection des cercles $S_{1,2,5}$ et $S_{1,4,5}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,5}$;
- $z_{1,3,4,5}$ est l'intersection des cercles $S_{1,4,5}$ et $S_{1,3,4}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,4}$;

Comme $(z_{1,3},z_{1,2},z_{1,5},z_{1,4})$ sont alignés (sur D_1), les autres sont alignés ou cocylciques

Comme c'est vrai pour toute combinaison de quatre points parmi les cinq...

Pour l'application il s'agit du problème posé par Yang Zemin au congrès mondial (Pekin 2000) ; deux branches successives correspondent au choix de 4 droites sur les cinq qui portent les cotés du pentagone étoilé. L'intersection des cercles circonscrits (2 sur les 4) aux deux branches est donc le point central des 4 droites en question ... (ils ne peuvent pas être alignés)
Remarque : : cas général : tout système de n droites en position générale avec n pair (resp. impair) détermine un point central (resp. un cercle central) qui est l'intersection des cercles centraux des n systèmes possibles de $n-1$ de ces droites (resp. qui passe par les points centraux des n systèmes possibles de ces droites) (preuve par récurrence...)

Références

[1] M. Berger. *Géométrie 1.* Nathan, 1990.

[2] M. Berger. *Géométrie 2.* Nathan, 1990.

[3] H. Coxeter and S. Greitzer. *Geometry revisited.* New Mathematical Library, 1967.

[4] H. S. M. Coxeter. Inversive distance. *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4) 71 :73–83, 1966.

[5] H. S. M. Coxeter. The problem of apollonius. *Amer. Math. Monthly*, (75 :5–15, 1968.

[6] I. Niven. Convex polygons that cannot tile the plane. *The American Monthly*, 85(10) :785–792, 1978.

[7] I.Kh. Sabitov. The volume of a polyhedron as a function of its metric. *Fundam. Prokl. Mat.*, 2(4) :1235–1246, 1996.

[8] J.-M. Schlenker. La conjecture des soufflets, d'après I Sabitov. *Astérisque*, 294 :77–95, 2004.

Boyer Pascal