Réductions des endomorphismes: applications

Plan

Remarque: il faut commencer par préciser les notions supposées connues: en effet il ne s'agit pas d'une leçon d'algèbre linéaire generale, a mon avis il faut admettre les notions essentielles (rapport endomorphismes-matrices, notions de valeurs propres, polynôme caractéristique, polynôme minimal, lemme des noyaux espaces caractéristiques...) afin de se concentrer sur le sujet. C'est donc a vous de bien préciser les choses.

- Introduisez la problématique du sujet: trouver une base dans laquelle la matrice est la plus simple possible, dans l'idéal diagonale.

- En ce qui me concerne (c'est sûrement extrémiste et peut-être à déconseiller) je suis partisan d'entrer dans le vif du sujet en énonçant assez rapidement le résultat central qui permet de caractériser les classes de similitude à savoir les facteurs invariants. Pour cela il faut introduire la notion de $K[X]$-module induite par un endomorphisme et dire que deux endomorphismes sont semblables si et seulement si les deux structures de $K[X]$-module induites sur l'espace vectoriel sous-jacent sont isomorphes.

- En application on pourra noter les points suivants:
  - deux matrices complexes A, B sont semblables si et seulement si $\dim(A - \lambda \mathrm{Id})^k = \dim(B - \lambda \mathrm{Id})^k$ pour tout k;
  - une matrice complexe A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{Id})^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$;
  - mieux que la décomposition en somme directe des sous-espaces caractéristiques, l'espace est une somme directe de sous-espaces cycliques (indécomposables);
  - les classes de similitudes des endomorphismes nilpotents (réduction de Jordan) sont en bijection avec les diagrammes de Young;
  - les matrices trigonalisables sont exactement celles dont le polynôme caractéristique est scindé; on peut ainsi montrer Cayley-Hamilton;
  - diagonalisation simultanée: exemple représentation d'un groupe commutatif.

- Après la théorie générale, vous pouvez faire un paragraphe sur les familles classiques d'endomorphismes.
  - Partez tout d'abord des endomorphismes normaux ce qui vous donner la réduction des auto-adjoints, des hermitiennes, puis les symétriques et les anti-symétriques.
  - afin d'étudier les formes quadratique on est amené à étudier les classes de congruence: A et B sont dites congruentes s'il existe P inversible telle que $A = {}^tPBP$. On remarquera que contrairement au classe de similitude, le caractère symétrique ou anti-symétrique se conserve par congruence: évoquez la signature puis la réduction simultanée de deux formes quadratiques.
  - En remarquant que deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables, déduisez en la réduction des orthogonales à partir de celle des matrices unitaires;

- Pour les non-diagonalisables, évoquez la décomposition de Dunford, la décomposition polaire éventuellement les autres décompositions classiques: Cartan, Iwasawa... mais sans s'attarder car ce n'est pas le coeur du sujet. On pourra mentionner que la decomposition polaire implique que $O(n)$ (resp. $U(n)$) est un sous-groupe compact maximal connexe de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$).

- En ce qui concerne les applications:
  - Cayley-Hamilton,
  - calculs de puissances,

– exponentielle de matrice: (**ne pas dire que Dunford sert au calcul explicite des exponentielles de matrices**: si on vous demande de vous justifier argumentez que si on se donne D dont on sait qu'elle est diagonalisable non diagonale, on ne sait pas pour autant calculer son exponentielle alors que l'on connaît sa décomposition de Dunford (de manière général on sait calculer algorithmiquement la décomposition de Dunford et donc sans connaître ses valeurs propres). En général les calculs explicites que l'on propose découlent plutôt du lemme des noyaux: en bref si un polynôme annulateur de M est de la forme $\prod_i (X-\lambda_i)^{r_i}$, alors en notant p_i le projecteur sur $\mathrm{Ker}(A-\lambda_i \mathrm{Id})^{r_i}$ parallèlement à la somme directe des autres noyaux, on a $\exp A = \sum_i \exp(\lambda_i)(\sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{(A-\lambda_i \mathrm{Id})^k}{k!}) \circ p_i$. En utilisant Bézout on calcule les polynômes P_i tel que $p_i := P_i(A)$ ce qui donne le calcul final de $\exp A$.

  D'un point de vue **théorique**, la décomposition de Dunford sert à "comprendre" les exponentielles de matrices: on pourra invoquer l'image de l'exponentielle: $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$ et les carrés de $GL_n(\mathbb{R})$) sur $\mathbb{R}$.
– suites récurrentes linéaires,
– systèmes d'équations différentielles linéaires.
– rayon spectral
– matrices de permutation
– classification des coniques (affines, projectives, euclidiennes)
– classification des homographies du plan projetif réel
– classification des isométries vectorielles
– On pourra aussi parler du bi-commutant, i.e. montrer que le centre de l'algèbre des endomorphismes qui commutent avec u est $K[u]$.
– En ce qui concerne les propriétés topologiques, on pourra citer:
  * sur $\mathbb{C}$, une classe de similitude est connexe; si elle est bornée alors elle est réduite à un point.
  * Soit $M = S + N$ la décomposition de Dunford de M en semi-simple plus nilpotent. Montrez que S est dans l'adhérence de la classe de similitude de M.
  * f est diagonalisable si et seulement si son orbite est fermée
  * L'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan de taille maximale est l'ensemble des nilpotents, et plus généralement décrire l'ordre de Chevalley sur les orbites nilpotentes, défini par $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ si et seulement si $\mathcal{O}_1$ est dans l'adhérence de $\mathcal{O}_2$: celui-ci correspond à l'ordre habituel sur les tableaux de Young.
  * l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices avec n valeurs propres distinctes;
  * l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables.
  * sur $\mathbb{C}$, on pourra montrer la connexité des matrices diagonalisables, et de l'ensemble des matrices possédant n valeurs propres distinctes.

Développements

- invariants de similitude (bien choisir ce que l'on démontre car le tout est un peu long)
- diagonalisation des endomorphismes normaux
- réduction des isométries
- décomposition de Dunford
- méthode effective pour la décomposition de Dunford
- théorème de stabilité de Liapounov
- théorème de Kolchin: les éléments d'un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ formé de matrices unipotentes sont simultanément trigonalisables.

- deux matrices de permutations sont semblables si et seulement si les deux permutations sont conjuguées.

Questions

- Consultez les questions sur les matrices diagonalisables de la leçon *Endomorphismes diagonalisables.*
- Consultez les questions sur les matrices nilpotentes de la leçon *Endomorphismes nilpotents.*
- Consultez les questions sur les matrices nilpotentes de la leçon *Matrices semblables....*
- Montrez que sur un corps algébriquement clos, deux matrices A et B sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $k \geq 0$, on a $\mathrm{rg}(A-\lambda I)^k = \mathrm{rg}(B-\lambda I)$.
- Soit A une matrice vérifiant $(A-I)^2(A-2I)=0$. Calculez $\exp(A)$ sous la forme d'un polynôme en A.
- Montrez que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe et dense. Quel est son intérieur?
- Caractérisez les matrices qui sont des carrés: traitez le cas de $\mathbb{C}$ puis de $\mathbb{R}$.
- Montrez que toute matrice est de façon effective semblable à une matrice de Hessenberg, i.e. telle que tous les termes au dessous de sa sous-diagonale sont nuls.
- Montrez que les valeurs propres de $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ sont dans la réunion des disques fermés centrés en $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$ (ce sont les disques de Gershgorin).
- Montrez que deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables.
- Montrez que l'application $A \mapsto A\exp(A)$ est surjective.
- Montrez que si un ouvert de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier.
- Donnez les points de continuité de l'application qui à une matrice associe son polynôme minimal.
- Montrez en utilisant la décomposition polaire que $\mathcal{O}(n)$ (resp. $U(n)$) est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$).

Exercices corrigés

Exercice 1. *Montrez que si un ouvert de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *tout entier.*

Preuve : Soit F le fermé complémentaire; s'il était non vide il contiendrait une matrice $M=S+N$, sa décomposition de Dunford, et contiendrait aussi sa partie semi-simple S, laquelle est dans l'adhérence de la classe de similitude de M, d'où la contradiction.

Exercice 2. *Montrez que sur un corps algébriquement clos, deux matrices A et B sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $k \geq 0$, on a* $\mathrm{rg}(A-\lambda I)^k = \mathrm{rg}(B-\lambda I)^k$.

Preuve : A partir de la forme de Jordan, on rappelle que pour $k \geq 1$, $d_k(A) := \dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^k - \dim \mathrm{Ker}(A-\lambda)^{k-1}$ est égal au nombre de bloc Jordan pour la valeur propre λ qui sont de taille plus grande que k. D'après le théorème du rang, pour tout $k \geq 1$, on a $d_k(A)=d_k(B)$ de sorte que A et B ont les mêmes réduites de Jordan et sont donc semblables.

Exercice 3. *Montrez que les valeurs propres de $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ sont dans la réunion des disques fermés centrés en $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$ (ce sont les disques de Gershgorin).*

Preuve : Le résultat découle directement du lemme d'Hadamard appliqué à $A-\lambda\mathrm{Id}$. Rappelons que ce lemme dit que si pour tout $1\leq i\leq n$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$ alors A est inversible. En effet soit X de coordonnées $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans le noyau de A et soit i_0 tel que $|x_{i_0}|$ soit maximal parmi les $|x_i|$. De l'égalité $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j$ on en déduit la majoration $|a_{i_0,i_0}x_{i_0}| \leq |x_{i_0}\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|$ et donc $x_{i_0}=0$ soit $X=0$.

Exercice 4. *Soit A une matrice vérifiant $(A-I)^2(A-2I)=0$. Calculez $\exp(A)$ sous la forme d'un polynôme en A.*

Preuve : Le lemme des noyaux permet de décomposer l'espace $E=\mathrm{Ker}(A-I)^2 \oplus \mathrm{Ker}(A-2I)$. On considère le projecteur q (resp. p) sur $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ (resp. $\mathrm{Ker}(A-2I)$) parallèlement à $\mathrm{Ker}(A-2I)$ (resp. $\mathrm{Ker}(A-I)^2$). De l'égalité $p+q=\mathrm{Id}$, on obtient $\exp(A)=\exp(A)p+\exp(A)q$. Or $\exp(A)p=e^2\exp(A-2I)=e^2\sum_{n\geq 0}\frac{(A-2I)^n}{n!}\circ p = e^2p$ car $(A-2I)\circ p=0$. De même on a $\exp(A)q=eAq$. De l'identité de Bezout $1=(X-1)^2-X(X-2)$, on en déduit que $p=-A(A-2I)$ et $q=(A-I)^2$ et donc

$$\exp(A)=-e^2A(A-2I)+eA(A-I)^2$$

Exercice 5. *Montrez que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe et dense. Quel est son intérieur? Ce dernier est-il encore connexe?*

Preuve : *Connexité*: on a une application surjective $GL_n(\mathbb{C})\times(\mathbb{C}^\times)^n$ sur l'ensemble des matrices diagonalisables: on envoie $(P,(a_1,\cdots,a_n))$ sur $P\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)P^{-1}$. L'ensemble $GL_n(\mathbb{C})\times(\mathbb{C}^\times)^n$ étant connexe, il en est de même de l'ensemble des matrices diagonalisables.

On rappelle que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe: soient P_1,P_2 deux matrices inversibles. On considère le polynôme $\det(P_1z+(1-z)P_2)$. Le complémentaire de l'ensemble (fini) des zéros de ce polynôme est connexe; on considère alors un chemin qui relie 0 à 1 dans ce complémentaire, ce qui fournit un chemin de P_1 à P_2 dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Densité: soit A une matrice complexe que l'on trigonalise $PAP^{-1}=T$. Soit alors $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$ petits tels que les $t_{i,i}+\epsilon_i$ sont tous distincts. La matrice $T+\mathrm{diag}(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$ est alors diagonalisables car elle a n valeurs propres distinctes.

Intérieur: étant donné une matrice A diagonalisable avec une valeur propre multiple; $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ avec $a_1=a_2$, alors $A+PE_{1,2}P^{-1}$ n'est plus diagonalisable.

Réciproquement si A est diagonalisable à valeurs propres distinctes, vu que le polynôme caractéristique dépend continûment de A, et que les racines d'un polynôme dépendent continûment de ses coefficients, on en déduit que si A' est proche de A, il aura aussi n valeurs propres distinctes et sera donc diagonalisable.

Par ailleurs l'ensemble des matrices à valeurs propres distinctes est encore connexe. En effet c'est le complémentaire des zéros du polynôme en n^2 variable définit comme le discriminant du polynôme caractéristique.

Exercice 6. *Caractérisez les matrices qui sont des carrés: traitez le cas de $\mathbb{C}$ puis de $\mathbb{R}$.*

Preuve : Remarquons déjà que le problème se ramène à traiter le cas nilpotent et le cas inversible. En effet M peut s'écrire sous la forme $P\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}P^{-1}$ avec A nilpotent et B inversible. Si on a $X^2=M$ alors M et X commutent de sorte que $X=P\begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $AX_3=X_3B$ et $AX_4=X_4B$; on en déduit alors que $\chi_A(A)X_3=X_3\chi_A(B)=0$. Or χ_A et χ_B sont premiers entre eux et donc $\chi_A(B)$ est inversible et donc $X_3=0$. De la même façon on a $X_4=0$.

Le cas nilpotent est traité dans les questions sur la leçon *Endomorphismes nilpotents*. Traitons alors le cas inversible.

Cas complexe: on se ramène comme précédemment au cas $A=\lambda I+N$ avec N nilpotent. On écrit $A=\lambda(I+\frac{N}{\lambda})$ qui a pour racine carré $\sqrt{\lambda}(I+\frac{N}{\lambda})^{1/2}$ où $(I+\frac{N}{\lambda})^{1/2}$ est défini par la série qui est finie car N est nilpotente.

Cas réel: $A=X^2$ avec A et X réelle. Le cas des valeurs propres strictement positives se traite comme ci-dessus. En ce qui concerne les valeurs propres négatives elles ne peuvent provenir que des valeurs propres imaginaires pures de X; cette dernière étant réelle les blocs de Jordan associés à $\lambda\in\mathbb{C}$ sont les mêmes que ceux associés à $\bar{\lambda}$. Par ailleurs pour N nilpotente de noyau de dimension 1, on a $(\lambda\mathrm{Id}+N)^2=\lambda^2\mathrm{Id}+N'$ avec $N'=2\lambda N+N^2$ nilpotente de noyau de dimension 1 (écrire N sous la forme de Jordan) de sorte que N' est semblable à N. Ainsi $J_n(\lambda)^2$ est semblable à $J_n(\lambda^2)$ et on remarque donc que les blocs de Jordan de A relativement aux valeurs propres négatives sont, pour chaque dimension, en nombre pair.

Il ne reste alors plus qu'à traiter les matrices réelles A sans valeur propre réelle: A est alors semblable à une somme directe de matrice de la forme $J_n(\lambda)\oplus J_n(\bar{\lambda})$. On écrit alors $J_n(\lambda)=X^2$. La matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(X,\bar{X})$ est semblable à une matrice réelle: ainsi A est semblable au carré d'une matrice elle-même semblable à une matrice réelle de sorte que A est semblable au carré d'une matrice réelle; il est alors classique que l'on peut prendre la matrice de passage réelle et donc A est un carré.

Exercice 7. *Montrez que toute matrice est de façon effective semblable à une matrice de Hessenberg, i.e. telle que tous les termes au dessous de sa sous-diagonale sont nuls.*

Preuve : La méthode est celle du pivot de Gauss: on opère, à gauche, sur les lignes sans toucher à la première de façon à obtenir une première colonne dont tous les termes sont nuls sauf éventuellement les deux premiers. On applique alors la même transformation à droite: comme à gauche on n'avait pas modifié la première ligne, à droite on ne modifie pas la première colonne. On raisonne ensuite par récurrence.

Exercice 8. *Montrez que deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables.*

Preuve : On a $A = UBU^{-1}$ et ${}^tA = U{}^tBU^{-1}$. On rappelle que deux matrices réelles qui sont semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{C}$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P{}^tBP^{-1}$. Soit $P = OS$ la décomposition polaire de P et $A = OSB^{-1}B^{-1}o^{-1}$. Le résultat découle alors du fait que B et S commutent: en effet on a $PBP^{-1} = A = {}^t({}^tA) = {}^tP^{-1}B{}^tP$. Ainsi B commute avec ${}^tPP$ donc aussi avec S qui est un polynôme en ${}^tPP$.
Remarque: Comme application, on pourra en déduire la réduction des isométries, à partir de la diagonalisation des endomorphismes unitaires.

Exercice 9. *Montrez que l'application $A \mapsto A\exp(A)$ est surjective sur $\mathbb{C}$.*

Preuve :

- Le plus difficile est le cas $n = 1$: il s'avère qu'en dehors de $z \neq 0$ qui n'a qu'un seul antécédent, tous les autres complexes en ont chacun une infinité par $f(z) = z\exp z$.
- Pour une matrice nilpotente: d'après Jordan, on se ramène à un seul bloc de Jordan plein J_n. On raisonne par analyse et synthèse. On remarque alors que si $J_n = A\exp A$ alors A est nilpotent avec $\dim\operatorname{Ker} A = 1$ ce qui impose que A est semblable à J_n: $A = PJ_nP^{-1}$. En synthèse on remarque simplement que, d'après Jordan, $J_n + J_n^2 + \frac{J_n^3}{2} + \cdots + \frac{J^{n-1}}{(n-2)!}$ et J_n sont semblables.
- Il ne reste plus qu'à traiter le cas inversible où l'on se ramène à $M = \lambda I_n + J_n$ et où on écrit $\lambda = \mu\exp(\mu)$ avec $\mu \neq 0$ et même $\mu \neq -1$. On a alors $f(\mu I_n + N) = f(\mu)I_n + f'(\mu)N + N^2p(N)$ où $p(N)$ est un polynôme en N. Comme $f'(\mu) \neq 0$, on peut alors procéder comme dans le cas nilpotent.

Exercice 10. *Soit V un $\mathbf{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \operatorname{End}_{\mathbf{C}}(V)$. On munit alors V de sa structure de $\mathbf{C}[X]$-module associée à u.*

(a) On suppose que V ne possède aucun sous-module non trivial. Montrer que $n = 1$. On remplace maintenant $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$. L'énoncé est-il encore vrai?

(b) On note $P_u = P_1.P_2^2 \cdots P_l^l$ le polynôme caractéristique de u, où les P_i sont deux à deux premiers entre eux, sans facteurs carrés et unitaires. Vérifier qu'une telle écriture est possible et est unique.

(c) Avec les notations du b), on suppose de plus que V est somme directe de sous-$\mathbf{C}[X]$-modules de dimension 1 (en tant que $\mathbf{C}$-espaces vectoriels). Calculer les invariants de similitude de u.

(d) Sous l'hypothèse du c), on se donne de plus en élément $v \in \operatorname{End}_{\mathbf{C}}(V)$ tel que $v \circ u = u \circ v$. Montrer qu'il existe une base de V où u et v sont simultanément diagonalisables.

Preuve : On remarque tout d'abord que u possède une unique valeur propre car dans le cas contraire, pour λ_1 et λ_2 des valeurs propres distinctes, $W = \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 Id)$ et $W' = \operatorname{Ker}(u - \lambda_2 Id)$ auraient une intersection réduite au vecteur nul. Soit alors λ l'unique valeur propre de u (sur $\mathbb{C}$, un endomorphisme possède toujours au moins une valeur propre). On remarque alors que $\operatorname{Ker}(u - \lambda Id)$ est de dimension 1, car sinon pour x_1 et x_2 des vecteurs propres non colinéaires, $W = \mathbb{C}x_1$ et $W' = \mathbb{C}x_2$ auraient une intersection réduite vecteur nul. On en déduit donc que u admet un unique facteur invariant égal à son polynôme minimal et à son polynôme caractéristique, soit $(X - \lambda)^n$.

Exercice 11. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, u un endomorphisme de polynôme minimal P. On suppose que $P = P_1P_2$, P_1 et P_2 étant des polynômes unitaires non constants premiers entre eux. On note E_u l'espace E muni de la structure de $\mathbb{R}[X]$-module définie par l'endomorphisme u.*

(a) Montrer que pour $i = 1, 2$,

$$E_i = \{x \in E \mid P_i(u)(x)) = 0\}$$

sont des sous-modules de E_u.

(b) Montrer que $E_u = E_1 \oplus E_2$.

(c) Montrer que P_1 est le polynôme minimal de $u_{|E_1}$.

Preuve : (a) Sur $\mathbb{C}$ tout endomorphisme possède une valeur propre et donc un vecteur propre v de sorte que $\mathbb{C}v$ est un sous-espace stable non réduit au vecteur nul de sorte que par hypothèse il est égal à l'espace tout entier qui est donc de dimension 1.

Sur $\mathbb{R}$, l'énoncé est faux, il suffit de considérer dans $\mathbb{R}^2$, une matrice de rotation d'angle $0 < \theta < \pi$.

(b) On décompose P_u, qui par convention est unitaire, en produits de facteurs irréductibles $Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_r^{\alpha_r}$ et on remarque que P_i se définit comme le produit des Q_j tels que $\alpha_j = i$.

(c) En tant que $\mathbb{C}[X]$-module, V est de la forme $(\mathbb{C}[X]/(X - \lambda_1))^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{C}[X]/(X - \lambda_r))^{\alpha_r}$, où les λ_i sont les valeurs propres de u et α_i leur multiplicité dans le polynôme caractéristique. Avec les notations de (b), on a $P_i = \prod_{j/\alpha_j = i}(X - \lambda_j)$. Les facteurs invariants sont de la forme $\mu_1|\mu_2| \cdots |\mu_l$ où chacun des μ_j est de la forme $\prod_{i \in I_j}(X - \lambda_i)$ où I_j est un certain sous-ensemble de $\{1, \cdots, r\}$ tel que $I_j \subset I_{j+1}$. Ainsi les éléments de I_1 sont répétés l fois, ceux de I_2 le sont $(l - 1)$ fois et de manière générale ceux de I_j le sont $(l + 1 - j)$ fois. On en déduit donc que $l = \max_i\{\alpha_i\}$ puis que I_j est l'ensemble des i tels que $\alpha_i \geq l + 1 - j$ de sorte que les facteurs invariants sont $P_l, P_lP_{l-1}, P_lP_{l-1}P_{l-2}, \cdots, P_l \cdots P_1$.

Exercice 12. *Pour $n > 1$, on note $J_n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice nilpotente dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la première sur-diagonale $j_{i,i+1}$ pour $1 \leq i < n$ qui sont égaux à 1. On considère les matrices suivantes, écrites par blocs :*

(a) $A_1 = \mathrm{diag}(aI_3, bI_2, cI_1)$;

(b) $A_2 = \mathrm{diag}(I_3, I_2 + J_2, I_2 + J_2, I_3 + J_3, I_3 + J_3, 2I_2, 2I_3 + J_3, 3I_2, 3I_2 + J_2)$;

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$

Déterminer dans chaque cas :

(i) les invariants de similitudes ;

(ii) les polynômes minimaux et caractéristiques ;

(iii) la suite des dimensions des noyaux $\mathrm{Ker}(A_i - \alpha)^k$ *où α est une valeur propre.*

Preuve : On note $V = \mathbb{C}^n$ l'espace vectoriel en question, que l'on munit de la structure de $A = \mathbb{C}[X]$-module définie par la matrice à étudier; on notera $a_r(X)| \cdots |a_1(X)$, ses invariants de similitude. Le polynôme minimal est alors $a_1(X)$ et le polynôme caractéristique est le produit des invariants de similitude. Pour tout valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$, on notera $K_\alpha^i = \mathrm{Ker}(u - \alpha Id)^i$ où u est l'endomorphisme associé à la matrice en question dans la base canonique; on note aussi r_α l'indice i tel que $K_\alpha^{i-1} \neq K_\alpha^i = K_\alpha^j$ pour tout $j \geq i$; $K_\alpha^{r_\alpha}$ est appelé le sous-espace caractéristique associé à α. L'entier r_α est la multiplicité de α dans $a_1(X)$ tandis que sa dimension est la multiplicité de α dans le produit des a_i. On note $\delta_\alpha^i = \dim K_\alpha^i - \dim K_\alpha^{i-1}$; partant de la forme de Jordan il est aisé de voir que

δ_α^i est égal au nombre de a_k divisible par $(X-\alpha)^i$. On remarque ainsi que le nombre r d'invariants de similitude est égal au maximum des dimensions des sous-espaces propres.

(a) Le A-module V est clairement isomorphe à $(A/(X-a))^3 \times (A/(X-b))^2 \times A/(X-c)$; on calcule alors les invariants de similitude via le théorème chinois comme dans la feuille précédente ce qui donne: $(X-a)$, $(X-a)(X-b)$ et $(X-a)(X-b)(X-c)$. La matrice étant diagonalisable, les sous-espaces propres sont les sous-espaces caractéristiques, i.e. tous les δ_α^i sont nuls.

(b) De même on a

$$V \simeq (A/(X-1))^3 \times (A/(X-1)^2)^2 \times (A/(X-1)^3)^2 \times \\ (A/(X-2))^2 \times A/(X-2)^3 \times (A/(X-3))^2 \times A/(X-3)^2$$

les invariants de similitude donnés comme d'habitude par application du théorème chinois sont alors

$$(X-1)^3(X-2)^3(X-3)^2, \quad (X-1)^3(X-2)(X-3), \quad (X-1)^2(X-2)(X-3), \\ (X-1)^2, \quad (X-1), \quad (X-1), \quad (X-1).$$

Avec les notations introduites ci-dessus, on a $\delta_1^1 = 7$ (resp. $\delta_2^1 = 3$, resp. $\delta_3^1 = 3$), puis $\delta_1^2 = 4$ (resp. $\delta_2^2 = 1$, resp. $\delta_3^2 = 1$), et $\delta_1^3 = 2$ (resp. $\delta_2^3 = 1$, resp. $\delta_3^3 = 0$) tous les δ_i^k étant nuls pour $k > 3$. On obtient alors $\dim K_1^1 = 7$ (resp. $\dim K_2^1 = 3$, resp. $\dim K_3^1 = 3$), $\dim K_1^2 = 11$ (resp. $\dim K_2^2 = 4$, resp. $\dim K_3^2 = 4$) et $\dim K_1^3 = 13$ (resp. $\dim K_2^3 = 5$, resp. $\dim K_3^3 = 4$) avec $r_1 = 3$ (resp. $r_2 = 3$, resp. $r_3 = 2$).

(c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (resp. 1) est de dimension supérieure ou égale à 1 (resp. $n-2$); dans $\mathbb{C}$, la dernière valeur propre est déterminée via la trace de la matrice dont on sait qu'elle est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité (en effet toute matrice complexe est trigonalisable); ainsi on a $1.0 + (n-2).1 + x = n - 2 + a_n$ de sorte que la dernière valeur propre est a_n. Si $a_n \neq 0, 1$ alors la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres $0, 1, a_n$ est n de sorte que la matrice est diagonalisable et donc

$$V \simeq A/(X) \times A/(X-a_n) \times (A/(X-1))^{n-2}$$

et les invariants de similitude sont

$$a_1(X) = (X-1)X(X-a_n), \quad a_2(X) = X-1, \quad \cdots \quad a_{n-2}(X) = X-1.$$

Si $a_n = a_1 = 0$, on est dans la même situation, car le noyau de la matrice est alors de dimension 2 car son rang est de manière évidente $n-2$; les invariants de similitude sont alors

$$a_1(X) = X(X-1), \quad a_2(X) = X(X-1), \quad a_3(X) = \cdots = a_{n-2}(X) = X-1.$$

Dans le cas où $a_n = 0$ et a_1 non nul, on a alors $r_0 = 2$ avec $\dim K_0^1 = 1$ de sorte que

$$V \simeq A/(X^2) \times (A/(X-1))^{n-2}$$

soit

$$a_1(X) = X^2(X-1), \quad a_2(X) = \cdots = a_{n-2}(X) = (X-1).$$

Exercice 13. *Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, dont les valeurs propres sont 0 et 1 ; on note K_0^i (resp. K_1^i) le noyau de u^i (resp $(u-\mathrm{Id})^i$) et soit d_0^i (resp. d_1^i) sa dimension. On suppose que la suite (d_0^i) (resp. (d_1^i)) est égale à $(4, 7, 9, 10, 10, \cdots)$ (resp. $(3, 4, 5, 5, \cdots)$). Déterminer alors les invariants de similitudes de u.*

Preuve : D'après les rappels donnés dans l'exercice précédent, le nombre d'invariants de similitude est égal à la dimension maximale des sous-espaces propres soit donc ici 4 invariants de similitude a_1, a_2, a_3, a_4. Le polynôme minimal s'écrit sous la forme $X^{\alpha_1}(X-1)^{\beta_1}$ avec $\alpha_1 = r_0$ et $\beta_1 = r_1$ où l'on rappelle que r_0 (resp. r_1) est l'indice i tel que $K_0^{i-1} \neq K_0^i = K_0^{i+k}$ (resp. $K_1^{i-1} \neq K_1^i = K_1^{i+k}$) pour tout $k \geq 0$, soit donc ici $a_1(X) = X^4(X-1)^3$. De même on écrit les $a_i(X)$ sous la forme $a_i(X) = X^{\alpha_i}(X-1)^{\beta_i}$ pour $2 \leq i \leq 4$ avec $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ (resp. $\beta_i \geq \beta_{i+1}$) et $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 10$ (resp. $\sum_{i=1}^4 \beta_i = 5$).

On introduit comme dans l'exercice précédent $\delta_0^i = \dim K_0^i - \dim K_0^{i-1}$ (resp. $\delta_1^i = \dim K_1^i - \dim K_1^{i-1}$); on rappelle que δ_0^i (resp. δ_1^i) est le nombre d'invariants de similitude divisibles par X^i (resp. $(X-1)^i$) (pour le voir il suffit de raisonner sur la forme de Jordan). En ce qui concerne la valeur propre 0: on a $\delta_0^4 = 1$ de sorte que $\alpha_2 \leq 3$, en outre $\delta_0^3 = 2$ impose $\alpha_2 \geq 3$ soit $\alpha_2 = 3$ et $\alpha_3 \leq 2$. Enfin $\delta_0^2 = 3$ donne $\alpha_3 = 2$ et $\alpha_4 = 1$.

En ce qui concerne la valeur propre 1, on trouve de la même façon, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$ ce qui fournit finalement

$$a_1(X) = X^4(X-1)^3, \quad a_2(X) = X^3(X-1), a_3(X) = X^2(X-1), \quad a_4(X) = X(X-1).$$

Exercice 14. *Ecrire sous la forme de Jordan et donner la suite des dimensions des noyaux* $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{Id})^i$ *des endomorphismes* u *dont les invariants de similitudes sont :*

(a) $P_1(X) = X$;

(b) $P_1(X) = X(X-1)$;

(c) $P_1(X) = X$ *et* $P_2(X) = X^2$;

(d) $P_1(X) = X$ *et* $P_2(X) = X(X-1)$;

(e) $P_1(X) = X^2(X-1)$, $P_2(X) = X^2(X-1)(X-2)$, $P_3(X) = X^3(X-1)^2(X-2)$ *et* $P_4(X) = X^4(X-1)^3(X-2)^4$;

Preuve : On reprend les notations des exercices précédents. On rappelle que la dimension n de l'espace vectoriel en question est la somme des degrés des invariants de similitude.

(a) Ici $n = 1$ et l'endomorphisme en question est l'identité.

(b) On a $n = 2$ et un espace cyclique avec deux valeurs propres distinctes; u est donc diagonalisable et sa matrice dans une base de diagonalisation est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0, 1)$.

(c) $n = 3$ et 0 est la seule valeur propre avec $\delta_0^1 = 2$ et $\delta_0^2 = 1$ soit $\dim K_0^1 = 2$ et $\dim K_0^2 = 3$ et la matrice de Jordan associée est $\mathrm{diag}(0, J_2)$.

(d) $n = 3$ et $0, 1$ sont les valeurs propres de u avec $\delta_0^1 = 2$ (resp. $\delta_1^1 = 1$) et $\delta_1^i = \delta_0^i = 0$ pour $i > 1$. On obtient alors $\dim K_0^1 = 2$ et $\dim K_1^1 = 1$, l'endomorphisme est donc diagonalisable.

(e) $n = 24$, les valeurs propres étant $0, 1, 2$; la suite δ_0^i (resp. δ_1^i, resp. δ_2^i) est $(4, 4, 2, 1, 0, \cdots)$ (resp. $(4, 2, 1, 0, \cdots)$, resp. $(3, 1, 1, 1, 0, \cdots)$) de sorte que la suite des dimensions des K_0^i (resp K_1^i, resp. K_2^i) est $(4, 8, 10, 11, \cdots)$ (reps. $(4, 6, 7, \cdots)$, resp. $(3, 4, 5, 6, \cdots)$). La forme de Jordan est la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(J_2, J_2, J_3, J_4, I_1, I_1, I_2, I_3, 2I_2, 2I_4 + J_4).$$

Exercice 15. *On se propose dans ce problème de donner un algorithme pour calculer la décomposition de Dunford sans calculer les valeurs propres (ce qui algorithmiquement ne peut en général se faire que de manière approchée).*

Soit $n \geq 1$ *et* $A \in \mathcal{M}_m(K)$ *une matrice carrée à coefficients dans le corps* $K \subset \mathbb{C}$. *On note* χ_A *le polynôme caractéristique de* A. *Dans* $\mathbb{C}$, $\chi_A(X)$ *se décompose sous la forme* $\prod_i (X-\lambda_i)^{n_i}$ *avec* $\sum_i n_i = m$. *On introduit alors le polynôme* $P(X) = \prod_i (X - \lambda_i)$.

(a) Montrer que $P(X) = \lambda \frac{\chi_A(X)}{\chi_A(X) \wedge \chi_A'(X)}$, *où* $\chi_A(X) \wedge \chi'_A(X)$ *désigne le pgcd de* χ_A *avec son polynôme dérivé et* $\lambda \in K$. *En déduire alors que* $P(X)$ *est un polynôme à coefficients dans* K.

(b) Soient U *et* N *des matrices de* $\mathcal{M}_n(K)$ *respectivement inversible et nilpotente, qui commutent entre elles. Montrer que* $U - N$ *est inversible. Montrer alors que* $P'(A)$ *est une matrice inversible de* $\mathcal{M}_m(K)$ *dont l'inverse commute avec* A.

(c) On considère alors la suite suivante : $A_0 := A$ *et* $A_{n+1} = A_n - P(A_n).(P'(A_n))^{-1}$. *On veut montrer par récurrence sur* n *que la suite est bien définie, i.e. que* $P'(A_n)$ *est une matrice inversible.*

(i) Montrer que pour tout polynôme $Q \in K[X]$, *il existe* $\tilde{Q} \in K[X, Y]$ *tel que* $Q(X+Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X, Y)$.

(ii) En supposant la suite A_n *définie jusqu'au rang* n, *montrer que* $P(A_n)$ *s'écrit sous la forme* $P(A)^{2^n}.B_n$ *où* B_n *est une matrice de* $\mathcal{M}_n(K)$ *qui est un polynôme en* A.

(iii) En utilisant une formule de Taylor pour le polynôme P', *écrire* $P'(A_{n+1})$ *comme la somme d'une matrice inversible* $P'(A_n)$ *et d'une matrice nilpotente qui commutent entre elles.*

(d) Montrer que pour tout polynôme $Q \in K[X]$, il existe $\tilde{Q} \in K[X,Y]$ tel que $Q(X+Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X,Y)$. Montrer alors par récurrence sur n que $P(A_n)$ s'écrit sous la forme $P(A)^{2^n}.B_n$ où B_n est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

(e) En déduire que la suite A_n est stationnaire de limite D avec D diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $N := A - D$ nilpotente vérifiant $DN = ND$.

Preuve : (a) On remarque que la multiplicité de λ_i dans P' est égale à $n_i - 1$ de sorte que λ_i est une racine à l'ordre 1 de $\frac{\mu_A(X)}{\mu_A(X) \wedge \mu'_A(X)}$ et qu'en outre ce sont ces seules racines d'où le résultat. On notera en particulier que la connaissance des λ_i n'est pas nécessaire pour calculer P qui peut se calculer via l'algorithme d'Euclide.

(b) - L'idée est d'utiliser la relation formelle $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k) = 1-x^{k+1}$ avec $x = U^{-1}N$ et k tel que $N^{k+1} = 0$ soit $(1-U^{-1}N)(1+U^{-1}N+\cdots+(U^{-1}N)^k) = I_n$ car $(U^{-1}N)^{k+1} = U^{-k-1}N^{k+1}$ car U et N commutent entre eux; soit en multipliant à gauche par U et à droite par U^{-1}, $(U-N)(U^{-1}+U^{-2}N+\cdots+U^{-k-1}N^k) = I_n$.

- Les valeurs propres de A ne sont pas des racines de P' et $P \wedge P' = 1$. On considère alors une relation de Bezout $RP' + SP = 1$ pour P et P' qui en l'appliquant à A, donne $R(A)P'(A) = 1 - N$ avec $N = S(A)P(A)$. Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P^r(A) = 0$ pour $r \geq \max_i(n_i)$ de sorte que N est nilpotent et donc par application de ce qui précède $P'(A)$ est inversible dont l'inverse commute avec A en tant que polynôme en A.

(c) Il s'agit de la méthode de Newton appliqué aux matrices, le but étant de construire une racine de P, i.e. de trouver la partie diagonalisable de A dans sa décomposition de Dunford. Remarquons que pour $n = 0$, $P'(A_0)$ est inversible d'après la question précédente.

(i) Il suffit par exemple de le vérifier sur les monômes X^m, soit

$$(X+Y)^m = X^m + mYX^{m-1} + Y^2 \sum_{k=2}^{m} \binom{k}{m} Y^{k-2}X^{m-k}.$$

(ii) Il est clair d'après (a) que pour tout $0 \leq k \leq n$, A_k est un polynôme en A. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a $P(A_0) = P(A)$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang k. D'après (i), on écrit $P(A_{k+1}) = P(A_k + Y) = P(A_k) + YP'(A_k) + Y^2\tilde{Q}(A_k, Y)$ avec Y tel que $P(A_k) + YP'(A_k) = 0$. D'après (a) $Y = P(A_k)Q(A_k)$ et donc $P(A_{k+1})$ est de la forme $P(A)^{2^{k+1}}B_{k+1}$ pour une matrice B_{k+1} qui en tant que polynôme en A_k commute avec A.

(iii) La formule de Taylor donne $P'(A_{n+1}) - P'(A_n) = (A_{n+1} - A_n)Q(A_n)$ où $Q \in K[X]$. Or $A_{n+1} - A_n$ est de la forme $P(A_n)\tilde{Q}(A_n)$ et est donc nilpotent et commute avec A_n qui est un polynôme en A. On en déduit alors que $P'(A_{n+1})$ est inversible d'après (a).

(e) On rappelle que $P^r(A) = 0$ pour $r = \max_i\{n_i\}$ de sorte que la sous-suite $(A_k)_{k \geq n}$ est constante dès que $2^n \geq r$. La limite D est un polynôme en A tel que $P(D) = 0$ de sorte que D est diagonalisable car elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}$). Par ailleurs, pour n tel que $2^n \geq r$, on a $A - D = A_0 - A_n = \sum_{i=0}^{n-1}(A_i - A_{i+1})$ avec $A_i - A_{i+1}$ nilpotent et qui est un polynôme en A. Ainsi les $A_i - A_{i+1}$ commutent en eux de sorte que leur somme est nilpotente d'où le résultat.