Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

1. Un exemple de plan

prérequis : rapport endomorphismes-matrices, valeurs et vecteurs propres, polynôme caractéristique, polynôme minimal, lemme des noyaux, espaces caractéristiques. Dans la suite, K est un corps et u désigne un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension n. On note χ_u son polynôme caractéristique et π_u son polynôme minimal.

1.1. Premières remarques. —

1.1.1. Motivation. — trouver une base dans laquelle la matrice est la plus simple possible, pour cela on est amené à trouver un sous-espace stable de sorte qu'après changement de base la matrice de l'endomorphisme est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{M}_{n_1}(K)$ et $B \in \mathbb{M}_{n_2}(K)$ avec $n_1 + n_2 = n$. En itérant le processus on obtient des matrices triangulaires supérieures par blocs.

1.1.2. Triangularisation. — u est triangularisable si et seulement si χ_u est scindé sur K. Ainsi si K est algébriquement clos tous les endomorphismes sont trigonalisables.

Si le corps n'est pas algébriquement clos, toute matrice est semblable à une matrice de Hessenberg, c'est à dire de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

.Les matrices de Hessenberg sont utilisées dans la décomposition de Choleski ou dans la recherche des valeurs propres des matrices symétriques (les mineures principaux de $M - X\mathrm{Id}$ où M est une matrice symétrique, forment une suite de Sturm ce qui permet par dichotomie, via le théorème de Sturm, de localiser les racines de χ_M.)

1.1.3. Diagonalisation. — à partir d'un sous-espace stable, il s'agit de trouver un supplémentaire stable de sorte d'obtenir une matrice diagonale par blocs :

- u est dit indécomposable si on ne peut pas décomposer l'espace en une somme directe de deux sous-espaces stables stricts ; u est indécomposable si et seulement si son polynôme caractéristique est la puissance d'un irréductible.
- u est dit semi-simple si tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable ; u est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est premier avec sa dérivée.

Remarque : sur un corps algébriquement clos, semi-simple=diagonalisable, sur $\mathbb{R}$ un endomorphisme semi-simple est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont soient de dimension 1 soit de dimension 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Proposition 1.1. — *L'adhérence des endomorphismes diagonalisables est l'ensemble $T_n(K)$ des matrices triangularisables alors que son intérieur dans $T_n(K)$ est l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes.*

1.2. Invariants de similitude. —

1.2.1. Définition. — on munit V d'une structure de $K[X]$-module en posant $X.v := u(v)$. Deux endomorphismes sont alors semblables si et seulement si les deux structures de $K[X]$-module induites sur V sont isomorphes. De la théorie générale des modules sur un anneau principal, il existe des polynômes non constants

$$P_1(X)|\cdots|P_r(X)$$

tels que $V \simeq K[X]/(P_1) \times \cdots \times K[X]/(P_r)$. On en déduit en particulier que $P_r = \pi_u$ et $P_1 \cdots P_r = \chi_u$.
Exemples : les invariants de similitude d'une matrice diagonale, d'un endomorphisme cyclique (par exemple un bloc de Jordan).

Endoscopie : pour $K \subset L$ une extension de corps deux matrices de $GL_n(K)$ sont semblables dans $GL_n(L)$ si et seulement si elles le sont dans $GL_n(K)$. Cette propriété est particulière au groupe GL_n, par exemple :

- soit $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; pour $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, $R(\theta)$ et $R(-\theta)$ sont semblables dans $SL_2(\mathbb{C})$ et $GL_2(\mathbb{R})$ mais ne sont pas semblables dans $SL_2(\mathbb{R})$;
- même phénomène pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et A^{-1}.

1.2.2. Réduction de Jordan et Frobenius. — il existe des polynômes $Q_1|\cdots|Q_s$ tels que A est semblable à la matrice diagonale par blocs constitués des matrices compagnons des Q_i pour $i = 1, \cdots, s$ (réduction de Frobenius). En particulier si Q_s est scindé, A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sont des matrices de Jordan associées aux racines λ de Q_s de taille les multiplicités de λ dans les Q_i (réduction de Jordan).
Remarque : soit pour $i = 0, \cdots, d_i(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda\mathrm{Id})^i$, le tableau de Young correspondant est tel que ses colonnes sont les $d_i - d_{i-1}$ et ses lignes sont les tailles n_j des blocs de Jordan. Dans la figure 1 l'image de e_1 est une base de $\operatorname{Ker} u^6/\operatorname{Ker} u^5$, les images de $u(e_1), e_7, e_{12}$ forment une base de $\operatorname{Ker} u^5/\operatorname{Ker} u^4$, les images de $u^4(e_1), u^3(e_7), u^3(e_{12}), e_{17}$ forment une base de $\operatorname{Ker} u^2/\operatorname{Ker} u$ et $u^5(e_1), u^4(e_7), u^4(e_{12}), u(e_{17}), e_{19}$ forment une base de $\operatorname{Ker} u$.

- deux matrices complexes A, B sont semblables si et seulement si $\dim(A-\lambda\mathrm{Id})^k = \dim(B-\lambda\mathrm{Id})^k$ pour tout k ; ainsi deux matrices de permutations sont semblables si et seulement si les deux permutations sont conjuguées.
- une matrice complexe A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(A-\lambda\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(A-\lambda\mathrm{Id})^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.2.3. Topologie des orbites. — en ce qui concerne les propriétés topologiques des classes de similitude on pourra citer :

- sur $\mathbb{C}$, une classe de similitude est connexe ; si elle est bornée alors elle est réduite à un point.
- Soit $M = S + N$ la décomposition de Dunford de M en semi-simple plus nilpotent., alors S est dans l'adhérence de la classe de similitude de M.
- f est diagonalisable si et seulement si son orbite est fermée
- L'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan de taille maximale est l'ensemble des nilpotents. Plus généralement l'ordre de Chevalley sur les orbites nilpotentes, est défini par $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ si et seulement si $\mathcal{O}_1$ est dans l'adhérence de $\mathcal{O}_2$: celui-ci correspond à l'ordre habituel sur les tableaux de Young, i.e. $(n_1 \geq n_2 \geq \cdots) \geq (m_1 \geq m_2 \geq \cdots)$ si et seulement si $n_1 \geq m_1$, $n_1 + n_2 \geq m_1 + m_2$ ...

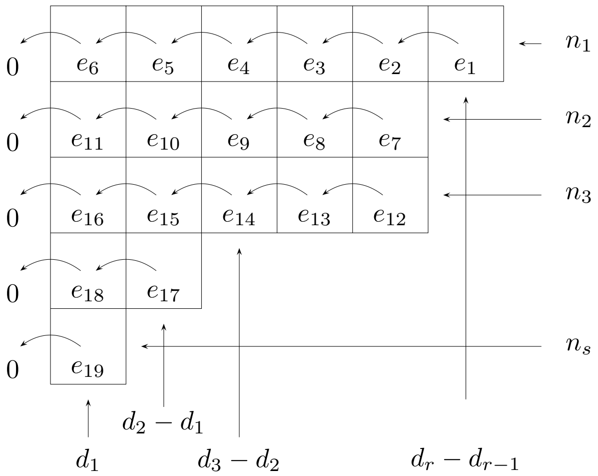

FIG. 1. Tableau de Young associé à un endomorphisme

1.3. Structure hermitienne. — On suppose l'espace vectoriel muni d'une structure hermitienne et on demande aux matrices de changement de base de conserver cette structure, i.e. les matrices de passage doivent être unitaires.

1.3.1. Endomorphismes normaux. — ils sont diagonalisables en base orthonormale application à la réduction des auto-adjoints, des hermitiennes, puis les symétriques et les anti-symétriques.
Remarque : deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables.

1.3.2. Classes d'équivalences unitaires. —

- **décomposition polaire** : soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avec $m \leq n$. On peut alors écrire A sous la forme $A = PU$ où $P \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ est positive semi-définie de même rang que A et $U \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ dont les vecteurs colonnes forment une famille orthonormale, i.e. $UU^* = I$. La matrice P est uniquement déterminée comme l'unique racine carré positive de AA^* alors que U n'est uniquement déterminée que si A est de rang m.
- **theo-valeur-singuliere** : soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ de rang k, on peut alors l'écrire sous la forme $A = VDW^*$, où $V \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ et $W \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sont unitaire et $D = [d_{i,j}] \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est telle que $d_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et $d_{1,1} \geq d_{2,2} \geq \cdots \geq d_{k,k} > d_{k+1,k+1} = \cdots = d_{\min(m,n),\min(n,m)} = 0$. Les nombres $d_{i,i}$ sont les racines carrées positives des valeurs propres de AA^* et sont donc uniquement déterminées. Les colonnes de V (resp. W) sont les vecteurs propres de AA^* (resp. A^*A).

1.3.3. Classes de similitude unitaires. — si A et B sont dans la même classe de similitude unitaire alors

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2$$

En effet cela découle de l'égalité $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 = \mathrm{tr}(A^*A)$. Plus généralement étant donnés un mot $M(s,t) = s^{m_1}t^{n_1}s^{m_2}t^{n_2}\cdots s^{m_k}t^{n_k}$ en deux variables s,t avec $m_1, n_1, \cdots, m_k, n_k \geq 0$: le degré de $M(s,t)$ est par définition égal à $m_1 + n_1 + \cdots + m_k + n_k$. Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$M(A, A^*) = A^{m_1}(A^*)^{n_1} \cdots A^{m_k}(A^*)^{n_k}$$

On remarque alors que pour tout $M(s,t)$, $\mathrm{tr}M(A, A^*)$ est constant sur la classe de similitude unitaire. On a alors le célèbre théorème de Specht.

Théorème 1.2. — *(Specht* [**6**]*) Deux matrices A, B sont unitairement semblables si et seulement si $\mathrm{tr}M(A, A^*) = \mathrm{tr}M(B, B^*)$ pour tout mot $M(s,t)$.*

L'inconvénient évident du théorème de Specht est qu'il faut vérifier une infinité de conditions. Le théorème de Pearcy suivant permet de se ramener à un nombre fini.

Théorème 1.3. — *(Pearcy* [**2**]*) Deux matrices A, B sont unitairement semblables si et seulement si $\mathrm{tr}M(A, A^*) = \mathrm{tr}M(B, B^*)$ pour tout mot $M(s,t)$ de degré au plus $2n^2$.*

Remarque : un rapide calcul montre qu'il y a au plus 4^{n^2} mots distincts de degré au plus $2n^2$. Pour $n = 2$, l'exercice 3.13 montre qu'il suffit en fait de considérer les mots s, s^2 et ts. Pour $n = 3$, on peut montrer qu'il suffit de considérer les 9 mots, $s, s^2, ts, ts^2, t^2s^2, tsts, ts^2ts, ts^2t^2s$ au lieu de tous les mots de degré au plus 18.

1.4. Réduction simultanée. —

1.4.1. Famille abélienne. — tout sous-ensemble commutatif de $\mathcal{L}(E)$ est triangularisable. En effet la commutativité est clairement une propriété stable par quotient. La propriété de réductibilité découla alors du fait que tout sous-espace propre de A est stable par toute matrice B commutant avec A.

1.4.2. Endomorphismes nilpotents. — le théorème de Burnside dit que toute sous-algèbre propre de $\mathcal{L}(E)$ est réductible ; comme la propriété d'être nilpotent est stable par quotient, on en déduit alors que toute algèbre d'endomorphismes nilpotents est triangularisable.

Proposition 1.4. — *Un ensemble $\mathcal{N}$ d'éléments nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifie une des propriétés suivantes est trigonalisable :*
- ***théorème de Jacobson*** *: pour tout $A, B \in \mathcal{N}$, il existe un scalaire c tel que $AB - cBA \in \mathcal{N}$;*
- ***théorème de Engel*** *: pour tout $A, B \in \mathcal{N}$, $[A, B] = AB - BA \in \mathcal{N}$;*
- *pour tout $A, B \in \mathcal{N}$, $AB + BA \in \mathcal{N}$;*
- ***Levitzki*** *: tout semi-groupe S d'éléments nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ est triangularisable.*

1.4.3. Quelques résultats généraux. — en utilisant les faits suivants :

– les valeurs propres d'une matrice triangulaires sont ses termes diagonaux ;
– les termes diagonaux d'un produit (resp. somme) de matrice triangulaire sont les produits $t_{i,i}^{(1)}t_{i,i}^{(2)}$ (resp. $t_{i,i}^{(1)}+t_{i,i}^{(2)}$) de leurs termes diagonaux.

on en déduit que si $\{A_1,\cdots,A_k\}$ sont simultanément diagonalisables et si p est un polynôme non commutatif (i.e. une combinaison linéaire de mots) en $\{A_1,\cdots,A_k\}$ alors

$$\sigma(p(A_1,\cdots,A_k))\subset p(\sigma(A_1),\cdots,\sigma(A_k))$$

où $p(\sigma(A_1),\cdots,\sigma(A_k))$ désigne l'ensemble des $p(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ où pour tout $i=1,\cdots,k$, $\lambda_i\in\sigma(A_i)$. Dans la suite nous allons donner la réciproque à ce résultat.

Théorème 1.5. — *(cf. [**5**] 1.3.2) Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ alors $\mathcal{A}$ est triangularisable si et seulement si tout commutateur $BC-CB$ avec $B,C\in\mathcal{A}$ est nilpotent.*

Remarque : on peut ainsi voir la triangularisabilité comme une généralisation de la commutativité ; on relâche la condition d'être nul pour un commutateur, en demandant qu'il soit nilpotent. Une autre analogie est donnée par le théorème suivant dont le lecteur pourra trouver une preuve dans [**5**] §1.6.

Théorème 1.6. — *(**McCoy** cf. [**5**] 1.3.4) La paire $\{A,B\}$ est triangularisable si et seulement si $p(A,B)(AB-BA)$ est nilpotent pour tout polynôme commutatif p en A et B.*

Corollaire 1.7. — *Une sous-algèbre unitaire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est triangularisable si et seulement si $\mathcal{A}/\mathrm{Rad}\mathcal{A}$ est commutatif, où $\mathrm{Rad}\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{A}:\sigma(AB)\subset\{0\}\ \forall B\in\mathcal{A}\}$ est le radical de A, i.e. l'intersection de tous les idéaux à droite (ou à gauche) maximaux de $\mathcal{A}$.*

Corollaire 1.8. — *Soit G un sous-groupe de $GL(E)$ tel que pour tout $A,B,C\in G$, $\sigma(ABC)=\sigma(BAC)$ alors G est triangularisable.*

Remarque : comme $\sigma(AB)=\sigma(BA)$, cf. l'exercice **??**, la propriété de l'énoncé revient à dire que le spectre est permutable, i.e. pour tout $\{A_1,\cdots,A_m\}\subset G$, et pour toute permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_m$, on a $\sigma(A_1A_2\cdots A_m)=\sigma(A_{\sigma(1)}\cdots A_{\sigma(m)})$. Le lecteur notera bien que cette propriété plus faible que celle de permutatbilité de la trace car ici on demande juste que les ensembles de valeurs propres sont égaux, sans tenir compte des multiplicités.

Théorème 1.9. — *(cf. [**5**] 4.2.11) Soit S un semi-groupe tel que pour tout $A,B\in S$, (A,B) a un spectre sous-linéaire. Alors S est triangularisable.*

Corollaire 1.10. — *([**5**] 4.3.2) Un semi-groupe S vérifiant la propriété suivante est triangularisable.*

(P) : pour tous $A,B\in S$, on peut ordonner leurs valeurs propres comptées avec multiplicité, $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ et $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ telles que pour tout monôme non commutatif f en deux variables, les valeurs propres de $f(A,B)$ sont les $f(\alpha_i,\beta_i)$ pour $i=1,\cdots,n$, comptées avec leurs multiplicités.

2. Développements

– invariants de similitude (bien choisir ce que l'on démontre car le tout est un peu long)
– diagonalisation des endomorphismes normaux [**?**]
– théorème de Perron-Frobenius [**4**]
– surjectivité de l'exponentielle [**1**]

– diagonalisation et trigonalisation simultanée
– endomorphismes semi-simples
– étude qualitative des systèmes autonomes au voisinage d'un point d'équilibre [**7**]
– réduction des isométries
– théorème de stabilité de Liapounov
– théorème de Kolchin : les éléments d'un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ formé de matrices unipotentes sont simultanément trigonalisables.
– deux matrices de permutations sont semblables si et seulement si les deux permutations sont conjuguées.

Remarque : à proprement parler la décomposition de Dunford n'est pas une réduction, je pense qu'il faut donc éviter de le proposer en développement.

3. Questions

Exercice 3.1. — *Soient A, B des matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Que peut-on dire des valeurs propres de $A+B$ en fonction de celles de A et B ? Qu'en est-il si on ne suppose plus que A et B commutent.*

Exercice 3.2. — *Montrez que si un ouvert de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier.*

Exercice 3.3. — *Montrez que sur un corps algébriquement clos, deux matrices A et B sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $k \geq 0$, on a $\mathrm{rg}(A-\lambda I)^k = \mathrm{rg}(B-\lambda I)^k$.*

Exercice 3.4. — *Montrez que les valeurs propres de $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ sont dans la réunion des disques fermés centrés en $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$ (ce sont les disques de Gershgorin).*

Exercice 3.5. — *Soit A une matrice vérifiant $(A-I)^2(A-2I)=0$. Calculez $\exp(A)$ sous la forme d'un polynôme en A.*

Exercice 3.6. — *Montrez que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe et dense. Quel est son intérieur ? Ce dernier est-il encore connexe ?*

Exercice 3.7. — *Caractérisez les matrices qui sont des carrés : traitez le cas de $\mathbb{C}$ puis de $\mathbb{R}$.*

Exercice 3.8. — *Montrez que toute matrice est de façon effective semblable à une matrice de Hessenberg, i.e. telle que tous les termes au dessous de sa sous-diagonale sont nuls.*

Exercice 3.9. — *Pour $n > 1$, on note $J_n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice nilpotente dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la première sur-diagonale $j_{i,i+1}$ pour $1 \leq i < n$ qui sont égaux à 1. On considère les matrices suivantes, écrites par blocs :*
(a) $A_1 = \mathrm{diag}(aI_3, bI_2, cI_1)$;
(b) $A_2 = \mathrm{diag}(I_3, I_2+J_2, I_2+J_2, I_3+J_3, I_3+J_3, 2I_2, 2I_3+J_3, 3I_2, 3I_2+J_2)$;

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$

Déterminer dans chaque cas :
- *(i) les invariants de similitudes ;*
- *(ii) les polynômes minimaux et caractéristiques ;*
- *(iii) la suite des dimensions des noyaux* $\mathrm{Ker}(A_i - \alpha)^k$ *où* α *est une valeur propre.*

Exercice 3.10. — *Soit* u *un endomorphisme de* $\mathbb{C}^n$*, dont les valeurs propres sont* 0 *et* 1 *; on note* K_0^i *(resp.* K_1^i*) le noyau de* u^i *(resp* $(u - \mathrm{Id})^i$*) et soit* d_0^i *(resp.* d_1^i*) sa dimension. On suppose que la suite* (d_0^i) *(resp.* (d_1^i)*) est égale à* $(4, 7, 9, 10, 10, \cdots)$ *(resp.* $(3, 4, 5, 5, \cdots)$*). Déterminer alors les invariants de similitudes de* u*.*

Exercice 3.11. — *Ecrire sous la forme de Jordan et donner la suite des dimensions des noyaux* $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})^i$ *des endomorphismes* u *dont les invariants de similitudes sont :*
- (a) $P_1(X) = X$;
- (b) $P_1(X) = X(X-1)$;
- (c) $P_1(X) = X$ *et* $P_2(X) = X^2$;
- (d) $P_1(X) = X$ *et* $P_2(X) = X(X-1)$;
- (e) $P_1(X) = X^2(X-1)$, $P_2(X) = X^2(X-1)(X-2)$, $P_3(X) = X^3(X-1)^2(X-2)$ *et* $P_4(X) = X^4(X-1)^3(X-2)^4$;

Exercice 3.12. — *(1) Soient* A *et* B *des matrices réelles de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *semblables vues comme éléments de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *i.e. il existe* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* $A = PBP^{-1}$*. Montrez que* A *et* B *sont semblables sur* $\mathbb{R}$*.*

(2) On note $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$*. Montrez que pour* $\theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$*,* $R(\theta)$ *et* $R(-\theta)$ *sont semblables dans* $SL_2(\mathbb{C})$ *et* $GL_2(\mathbb{R})$ *mais ne sont pas semblables dans* $SL_2(\mathbb{R})$*.*

(3) Montrez que le même phénomène se produit pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* A^{-1}*.*

Remarque : le phénomène ci-dessus se nomme l'endoscopie : GL_n *n'a pas d'endoscopie alors que* SL_2 *en a. Cette notion est à la base des travaux sur « la formule des traces » de l'école de Langlands.*

Exercice 3.13. — *Montrez que* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *sont unitairement équivalentes si et seulement si* $\mathrm{tr}M(A, A^*) = \mathrm{tr}M(B, B^*)$ *pour les mots* $M(s,t) = s, s^2, ts$*.*

Exercice 3.14. — *(cf.* [**3**] *p.151)*
- *(a) Montrez qu'une matrice* M *est semblable à une matrice réelle si et seulement si pour toute racine complexe* λ *de son polynôme caractéristique réel, l'ensemble des blocs de Jordan relativement à* λ *sont en bijection avec celui relativement à* $\bar{\lambda}$*.*
- *(b) En déduire qu'une matrice complexe* M *est semblable à une matrice réelle si et seulement si elle est semblable à sa conjuguée.*

Exercice 3.15. — *Montrez que sur* $\mathbb{C}$*, toute classe de similitude contient une matrice symétrique et que sur* $\mathbb{R}$*, pour qu'une classe de similitude contienne des matrices symétriques, il faut et* *il suffit qu'elle contienne une matrice diagonale. En déduire en particulier que l'ensemble des matrices symétriques d'une classe de similitude est compacte connexe.*

Exercice 3.16. — *Montrez que l'ensemble des matrices de rang r est connexe et son adhérence est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égale à r.*

Exercice 3.17. — *Quelles sont les classes de similitudes bornées ?*

Exercice 3.18. — *Montrez que si une classe de similitude de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ n'est constituée que de matrices normales, elle est alors réduite à un seul élément. Même question si on suppose que la classe de similitude ne contient qu'un nombre fini de matrices normales.*

Exercice 3.19. — *Montrez que toute orbite sous le groupe unitaire contient une matrice triangulaire, celles qui contiennent des matrices diagonales sont les orbites des matrices normales*

Exercice 3.20. — *Montrez que deux matrices sont unitairement équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs singulières*

Exercice 3.21. — *Montrez que si un ouvert de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier.*

Exercice 3.22. — *Décrivez l'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan*

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.23. — *Soit $M = S + N$ la décomposition de Dunford de M en semi-simple plus nilpotent. Montrez que S est dans l'adhérence de la classe de similitude de M.*

Exercice 3.24. — *Montrez que sur un corps algébriquement clos, deux matrices A et B sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $k \geq 0$, on a $\mathrm{rg}(A - \lambda I)^k = \mathrm{rg}(B - \lambda I)^k$.*

Exercice 3.25. — *Montrez que deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables.*

4. Solutions

3.1 Les matrices A et B sont simultanément trigonalisables de sorte qu'en notant $\lambda_1 \cdots, \lambda_n$ (resp. $\mu_1, \cdots, \mu_n$) les valeurs propres de A (resp. de B) alors il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que les valeurs propres de $A + B$ sont $\lambda_1 + \mu_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_n + \mu_{\sigma(n)}$.

En prenant par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors les valeurs propres de Aet B sont nulles et celles de $A + B$ sont $1, -1$.

Remarque : La réciproque est clairement fausse, il suffit simplement de prendre deux matrices triangulaires qui ne commutent pas. En fait si la permutation σ est telle que pour tout polynôme $P(X, Y)$ à coefficients complexes, les valeurs propres de $P(A, B)$ soit donnée par les $P(\lambda_i, \mu_{\sigma(i)})$, alors A et B sont simultanément trigonalisable, c'est le théorème de Mc Coy, cf. **??**.

3.2 Soit F le fermé complémentaire ; s'il était non vide il contiendrait une matrice $M = S+N$, sa décomposition de Dunford, et contiendrait aussi sa partie semi-simple S, laquelle est dans l'adhérence de la classe de similitude de M, d'où la contradiction.

3.3 A partir de la forme de Jordan, on rappelle que pour $k \geq 1$, $d_k(A) := \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^k - \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda)^{k-1}$ est égal au nombre de bloc Jordan pour la valeur propre λ qui sont de taille plus grande que k. D'après le théorème du rang, pour tout $k \geq 1$, on a $d_k(A) = d_k(B)$ de sorte que A et B ont les mêmes réduites de Jordan et sont donc semblables.

3.4 Le résultat découle directement du lemme d'Hadamard appliqué à $A - \lambda \mathrm{Id}$. Rappelons que ce lemme dit que si pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ alors A est inversible. En effet soit X de coordonnées $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans le noyau de A et soit i_0 tel que $|x_{i_0}|$ soit maximal parmi les $|x_i|$. De l'égalité $a_{i_0,i_0} x_{i_0} = -\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j$ on en déduit la majoration $|a_{i_0,i_0} x_{i_0}| \leq |x_{i_0} \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$ et donc $x_{i_0} = 0$ soit $X = 0$.

3.5 Le lemme des noyaux permet de décomposer l'espace $E = \operatorname{Ker}(A-I)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A-2I)$. On considère le projecteur q (resp. p) sur $\operatorname{Ker}(A-I)^2$ (resp. $\operatorname{Ker}(A-2I)$) parallèlement à $\operatorname{Ker}(A-2I)$ (resp. $\operatorname{Ker}(A-I)^2$). De l'égalité $p+q = \mathrm{Id}$, on obtient $\exp(A) = \exp(A)p + \exp(A)q$. Or $\exp(A)p = e^2 \exp(A-2I) = e^2 \sum_{n \geq 0} \frac{(A-2I)^n}{n!} \circ p = e^2 p$ car $(A-2I) \circ p = 0$. De même on a $\exp(A)q = eAq$. De l'identité de Bezout $1 = (X-1)^2 - X(X-2)$, on en déduit que $p = -A(A-2I)$ et $q = (A-I)^2$ et donc

$$\exp(A) = -e^2 A(A-2I) + eA(A-I)^2$$

3.6 *Connexité* : on a une application surjective $GL_n(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^n$ sur l'ensemble des matrices diagonalisables : on envoie $(P, (a_1, \cdots, a_n))$ sur $P \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n) P^{-1}$. L'ensemble $GL_n(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^n$ étant connexe, il en est de même de l'ensemble des matrices diagonalisables.

On rappelle que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe : soient P_1, P_2 deux matrices inversibles. On considère le polynôme $\det(P_1 z + (1-z)P_2)$. Le complémentaire de l'ensemble (fini) des zéros de ce polynôme est connexe ; on considère alors un chemin qui relie 0 à 1 dans ce complémentaire, ce qui fournit un chemin de P_1 à P_2 dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Densité : soit A une matrice complexe que l'on trigonalise $PAP^{-1} = T$. Soit alors $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ petits tels que les $t_{i,i} + \epsilon_i$ sont tous distincts. La matrice $T + \mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ est alors diagonalisables car elle a n valeurs propres distinctes.

Intérieur : étant donné une matrice A diagonalisable avec une valeur propre multiple ; $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ avec $a_1 = a_2$, alors $A + PE_{1,2}P^{-1}$ n'est plus diagonalisable.

Réciproquement si A est diagonalisable à valeurs propres distinctes, vu que le polynôme caractéristique dépend continûment de A, et que les racines d'un polynôme dépendent continûment de ses coefficients, on en déduit que si A' est proche de A, il aura aussi n valeurs propres distinctes et sera donc diagonalisable.

Par ailleurs l'ensemble des matrices à valeurs propres distinctes est encore connexe. En effet c'est le complémentaire des zéros du polynôme en n^2 variable définit comme le discriminant du polynôme caractéristique.

3.7 Remarquons déjà que le problème se ramène à traiter le cas nilpotent et le cas inversible. En effet M peut s'écrire sous la forme $P \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} P^{-1}$ avec A nilpotent et B inversible.

Si on a $X^2 = M$ alors M et X commutent de sorte que $X = P \begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $AX_3 = X_3B$ et $AX_4 = X_4B$; on en déduit alors que $\chi_A(A)X_3 = X_3\chi_A(B) = 0$. Or χ_A et χ_B sont premiers entre eux et donc $\chi_A(B)$ est inversible et donc $X_3 = 0$. De la même façon on a $X_4 = 0$.

Le cas nilpotent est traité dans les questions sur la leçon *Endomorphismes nilpotents*. Traitons alors le cas inversible.
Cas complexe : on se ramène comme précédemment au cas $A = \lambda I + N$ avec N nilpotent. On écrit $A = \lambda(I + \frac{N}{\lambda})$ qui a pour racine carré $\sqrt{\lambda}(I + \frac{N}{\lambda})^{1/2}$ où $(I + \frac{N}{\lambda})^{1/2}$ est défini par la série qui est finie car N est nilpotente.
Cas réel : $A = X^2$ avec A et X réelle. Le cas des valeurs propres strictement positives se traite comme ci-dessus. En ce qui concerne les valeurs propres négatives elles ne peuvent provenir que des valeurs propres imaginaires pures de X ; cette dernière étant réelle les blocs de Jordan associés à $\lambda \in \mathbb{C}$ sont les mêmes que ceux associés à $\bar{\lambda}$. Par ailleurs pour N nilpotente de noyau de dimension 1, on a $(\lambda \mathrm{Id} + N)^2 = \lambda^2 \mathrm{Id} + N'$ avec $N' = 2\lambda N + N^2$ nilpotente de noyau de dimension 1 (écrire N sous la forme de Jordan) de sorte que N' est semblable à N. Ainsi $J_n(\lambda)^2$ est semblable à $J_n(\lambda^2)$ et on remarque donc que les blocs de Jordan de A relativement aux valeurs propres négatives sont, pour chaque dimension, en nombre pair.

Il ne reste alors plus qu'à traiter les matrices réelles A sans valeur propre réelle : A est alors semblable à une somme directe de matrice de la forme $J_n(\lambda) \oplus J_n(\bar{\lambda})$. On écrit alors $J_n(\lambda) = X^2$. La matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(X, \bar{X})$ est semblable à une matrice réelle : ainsi A est semblable au carré d'une matrice elle-même semblable à une matrice réelle de sorte que A est semblable au carré d'une matrice réelle ; il est alors classique que l'on peut prendre la matrice de passage réelle et donc A est un carré.

3.8 La méthode est celle du pivot de Gauss : on opère, à gauche, sur les lignes sans toucher à la première de façon à obtenir une première colonne dont tous les termes sont nuls sauf éventuellement les deux premiers. On applique alors la même transformation à droite : comme à gauche on n'avait pas modifié la première ligne, à droite on ne modifie pas la première colonne. On raisonne ensuite par récurrence.

3.9 On note $V = \mathbb{C}^n$ l'espace vectoriel en question, que l'on munit de la structure de $A = \mathbb{C}[X]$-module définie par la matrice à étudier ; on notera $a_r(X)|\cdots|a_1(X)$, ses invariants de similitude. Le polynôme minimal est alors $a_1(X)$ et le polynôme caractéristique est le produit des invariants de similitude. Pour tout valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$, on notera $K_\alpha^i = \mathrm{Ker}(u - \alpha Id)^i$ où u est l'endomorphisme associé à la matrice en question dans la base canonique ; on note aussi r_α l'indice i tel que $K_\alpha^{i-1} \neq K_\alpha^i = K_\alpha^j$ pour tout $j \geq i$; $K_\alpha^{r_\alpha}$ est appelé le sous-espace caractéristique associé à α. L'entier r_α est la multiplicité de α dans $a_1(X)$ tandis que sa dimension est la multiplicité de α dans le produit des a_i. On note $\delta_\alpha^i = \dim K_\alpha^i - \dim K_\alpha^{i-1}$; partant de la forme de Jordan il est aisé de voir que δ_α^i est égal au nombre de a_k divisible par $(X - \alpha)^i$. On remarque ainsi que le nombre r d'invariants de similitude est égal au maximum des dimensions des sous-espaces propres.

(a) Le A-module V est clairement isomorphe à $(A/(X-a))^3 \times (A/(X-b))^2 \times A/(X-c)$; on calcule alors les invariants de similitude via le théorème chinois comme dans la feuille précédente ce qui donne : $(X-a)$, $(X-a)(X-b)$ et $(X-a)(X-b)(X-c)$. La matrice étant diagonalisable, les sous-espaces propres sont les sous-espaces caractéristiques, i.e. tous les δ_α^i sont nuls.

(b) De même on a

$$V \simeq (A/(X-1))^3 \times (A/(X-1)^2)^2 \times (A/(X-1)^3)^2 \times \\ (A/(X-2))^2 \times A/(X-2)^3 \times (A/(X-3))^2 \times A/(X-3)^2$$

les invariants de similitude donnés comme d'habitude par application du théorème chinois sont alors

$$(X-1)^3(X-2)^3(X-3)^2, \quad (X-1)^3(X-2)(X-3), \quad (X-1)^2(X-2)(X-3), \\ (X-1)^2, \quad (X-1), \quad (X-1), \quad (X-1).$$

Avec les notations introduites ci-dessus, on a $\delta_1^1 = 7$ (resp. $\delta_2^1 = 3$, resp. $\delta_3^1 = 3$), puis $\delta_1^2 = 4$ (resp. $\delta_2^2 = 1$, resp. $\delta_3^2 = 1$), et $\delta_1^3 = 2$ (resp. $\delta_2^3 = 1$, resp. $\delta_3^3 = 0$) tous les δ_i^k étant nuls pour $k > 3$. On obtient alors $\dim K_1^1 = 7$ (resp. $\dim K_2^1 = 3$, resp. $\dim K_3^1 = 3$), $\dim K_1^2 = 11$ (resp. $\dim K_2^2 = 4$, resp. $\dim K_3^2 = 4$) et $\dim K_1^3 = 13$ (resp. $\dim K_2^3 = 5$, resp. $\dim K_3^3 = 4$) avec $r_1 = 3$ (resp. $r_2 = 3$, resp. $r_3 = 2$).

(c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (resp. 1) est de dimension supérieure ou égale à 1 (resp. $n-2$) ; dans $\mathbb{C}$, la dernière valeur propre est déterminée via la trace de la matrice dont on sait qu'elle est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité (en effet toute matrice complexe est trigonalisable) ; ainsi on a $1.0 + (n-2).1 + x = n-2+a_n$ de sorte que la dernière valeur propre est a_n. Si $a_n \neq 0, 1$ alors la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres $0, 1, a_n$ est n de sorte que la matrice est diagonalisable et donc

$$V \simeq A/(X) \times A/(X-a_n) \times (A/(X-1))^{n-2}$$

et les invariants de similitude sont

$$a_1(X) = (X-1)X(X-a_n), \quad a_2(X) = X-1, \quad \cdots \quad a_{n-2}(X) = X-1.$$

Si $a_n = a_1 = 0$, on est dans la même situation, car le noyau de la matrice est alors de dimension 2 car son rang est de manière évidente $n-2$; les invariants de similitude sont alors

$$a_1(X) = X(X-1), \quad a_2(X) = X(X-1), \quad a_3(X) = \cdots = a_{n-2}(X) = X-1.$$

Dans le cas où $a_n = 0$ et a_1 non nul, on a alors $r_0 = 2$ avec $\dim K_0^1 = 1$ de sorte que

$$V \simeq A/(X^2) \times (A/(X-1))^{n-2}$$

soit

$$a_1(X) = X^2(X-1), \quad a_2(X) = \cdots = a_{n-2}(X) = (X-1).$$

3.10 D'après les rappels donnés dans l'exercice précédent, le nombre d'invariants de similitude est égal à la dimension maximale des sous-espaces propres soit donc ici 4 invariants de similitude a_1, a_2, a_3, a_4. Le polynôme minimal s'écrit sous la forme $X^{\alpha_1}(X-1)^{\beta_1}$ avec $\alpha_1 = r_0$ et $\beta_1 = r_1$ où l'on rappelle que r_0 (resp. r_1) est l'indice i tel que $K_0^{i-1} \neq K_0^i = K_0^{i+k}$ (resp. $K_1^{i-1} \neq K_1^i = K_1^{i+k}$) pour tout $k \geq 0$, soit donc ici $a_1(X) = X^4(X-1)^3$. De même on écrit les $a_i(X)$ sous la forme $a_i(X) = X^{\alpha_i}(X-1)^{\beta_i}$ pour $2 \leq i \leq 4$ avec $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ (resp. $\beta_i \geq \beta_{i+1}$) et $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 10$ (resp. $\sum_{i=1}^4 \beta_i = 5$).

On introduit comme dans l'exercice précédent $\delta_0^i = \dim K_0^i - \dim K_0^{i-1}$ (resp. $\delta_1^i = \dim K_1^i - \dim K_1^{i-1}$) ; on rappelle que δ_0^i (resp. δ_1^i) est le nombre d'invariants de similitude divisibles par X^i (resp. $(X-1)^i$) (pour le voir il suffit de raisonner sur la forme de Jordan). En ce qui concerne la valeur propre 0 : on a $\delta_0^4 = 1$ de sorte que $\alpha_2 \leq 3$, en outre $\delta_0^3 = 2$ impose $\alpha_2 \geq 3$ soit $\alpha_2 = 3$ et $\alpha_3 \leq 2$. Enfin $\delta_0^2 = 3$ donne $\alpha_3 = 2$ et $\alpha_4 = 1$.

En ce qui concerne la valeur propre 1, on trouve de la même façon, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$ ce qui fournit finalement

$$a_1(X) = X^4(X-1)^3, \quad a_2(X) = X^3(X-1), a_3(X) = X^2(X-1), \quad a_4(X) = X(X-1).$$

3.11 On reprend les notations des exercices précédents. On rappelle que la dimension n de l'espace vectoriel en question est la somme des degrés des invariants de similitude.

(a) Ici $n = 1$ et l'endomorphisme en question est l'identité.

(b) On a $n = 2$ et un espace cyclique avec deux valeurs propres distinctes ; u est donc diagonalisable et sa matrice dans une base de diagonalisation est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0, 1)$.

(c) $n = 3$ et 0 est la seule valeur propre avec $\delta_0^1 = 2$ et $\delta_0^2 = 1$ soit $\dim K_0^1 = 2$ et $\dim K_0^2 = 3$ et la matrice de Jordan associée est $\mathrm{diag}(0, J_2)$.

(d) $n = 3$ et $0, 1$ sont les valeurs propres de u avec $\delta_0^1 = 2$ (resp. $\delta_1^1 = 1$) et $\delta_1^i = \delta_0^i = 0$ pour $i > 1$. On obtient alors $\dim K_0^1 = 2$ et $\dim K_1^1 = 1$, l'endomorphisme est donc diagonalisable.

(e) $n = 24$, les valeurs propres étant $0, 1, 2$; la suite δ_0^i (resp. δ_1^i, resp. δ_2^i) est $(4, 4, 2, 1, 0, \cdots)$ (resp. $(4, 2, 1, 0, \cdots)$, resp. $(3, 1, 1, 1, 0, \cdots)$) de sorte que la suite des dimensions des K_0^i (resp K_1^i, resp. K_2^i) est $(4, 8, 10, 11, \cdots)$ (reps. $(4, 6, 7, \cdots)$, resp. $(3, 4, 5, 6, \cdots)$). La forme de Jordan est la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(J_2, J_2, J_3, J_4, I_1, I_1, I_2, I_3, 2I_2, 2I_4 + J_4).$$

3.12 (1) L'argument le plus simple est d'utiliser le fait que les calculs des facteurs invariants d'une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ ne dépend pas du corps K, i.e. si on fait le calcul dans $\mathbb{M}_n(K')$ avec $K \subset K'$, on obtient les mêmes polynômes. Une autre preuve moins sophistiquée et classique consiste à écrire $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $AP = PB$ soit en identifiant partie réelle et imaginaire, $AQ = QB$ et $AR = RB$. Posons pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_\lambda = Q + \lambda R$ de sorte que $AP_\lambda = P_\lambda B$. Le déterminant $\det P_\lambda$ est un polynôme $P(\lambda)$ de degré au plus n en λ et à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que $P(i) \neq 0$: $P(\lambda)$ n'est donc pas le polynôme nul et possède au plus n racines complexes, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) \neq 0$ et donc $P_\lambda \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $A = P_\lambda B P_\lambda^{-1}$.

(2) Classiquement pour toute matrice A d'une réflexion on a $AR(\theta)A^{-1} = R(-\theta)$: prendre par exemple $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même $iA \in SL_2(\mathbb{C})$ vérifie $AR(\theta)A^{-1} = R(-\theta)$. Montrons désormais que $R(\theta)$ et $R(-\theta)$ ne sont pas conjuguées dans $SL_2(\mathbb{R})$: $AR(\theta)A^{-1} = R(-\theta) = A_1R(\theta)A_1^{-1}$ de sorte que AA_1^{-1} appartient au commutant de $R(\theta)$ qu'l'on calcule comme suit. Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ telle que $A_0R(\theta)A_0^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$. Or si A' commute avec $\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$, alors $A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ de sorte $AA_1^{-1} = A_0^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} A_0$ avec $\det A = 1 = -\alpha\beta$. Or pour que A soit réelle il faut que $A_0^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} A_0$ le soit et donc ces valeurs propres α, β doivent être conjuguées ou réelles

3.13

3.14 (a) Le sens direct étant clair traitons la réciproque. Remarquons tout d'abord qu'en échangeant les colonnes et les lignes de la matrice $\begin{pmatrix} J_k(\lambda) & 0 \\ 0 & J_k(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}$ dans l'ordre suivant : $1, k+1, 2, k+2, \cdots, k, 2k$, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} D(\lambda) & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D(\lambda) & I_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & D(\lambda) & I_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

où $D(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$. Le résultat découle alors de l'égalité suivante : $SD(\lambda)S^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = C(a,b)$ où $S = \begin{pmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Cela découle de la description des classes de similitude complexe via les blocs de Jordan.

3.15 Sur $\mathbb{C}$, en utilisant la théorie de la réduction, on est ramené au cas d'un bloc de Jordan J_n. Il s'agit donc de trouver P telle que $PJ_nP^{-1} = {}^tP^{-1}{}^tJ_n{}^tP$ ou encore $({}^PP)J_n({}^tPP)^{-1} = {}^tJ_n$. Quand P varie, les matrices ${}^tPP$ décrivent toutes les matrices symétriques inversibles (en effet le rang classifie les classes de congruence des matrices symétriques complexes). On est ainsi ramené à trouver une matrice symétrique inversible qui conjugue J_n et sa transposée et on vérifie que la matrice co-unité convient, i.e. celle dont les seuls coefficients non nuls ceux de la co-diagonale qui valent 1.

Sur $\mathbb{R}$, les matrices symétriques réelles étant diagonalisables, la condition est nécessaire ; la réciproque est triviale. Ainsi la classe de similitude est fermée et son intersection avec l'ensemble des matrices symétriques est alors une orbite sous l'action de $SO(n)$ d'où le résultat.

3.16 Sur $\mathbb{C}$ on a une surjection $GL_n(\mathbb{C})^2$ sur l'ensemble des matrices de rang r : on envoie (P,Q) sur PI_rQ où I_r est la matrice diagonale dont les r premiers termes sont égaux à 1, les autres étant nuls. La conclusion découle de la connexité de $GL_n(\mathbb{C})$. Sur $\mathbb{R}$, pour $r < n$, on remarque que $PI_rQ = P'I_rQ = PI_rQ' = P'I_rQ'$, où P' (resp. Q') est obtenue à partir de P en multipliant sa dernière ligne (resp. colonne) par -1 de sorte que parmi P, P' (resp. Q, Q') une exactement appartient à $GL_n(\mathbb{R})^+$ qui est connexe. On rappelle par ailleurs que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe ; ses composantes connexes étant $GL_n(\mathbb{R})^{\pm}$.

En ce qui concerne l'adhérence, on note que $\mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r, 0, \cdots, 0)$ est équivalente à I_r puisque de même rang, de sorte que l'adhérence contient l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r. Par ailleurs ce dernier ensemble est fermé puisqu'il correspond à l'annulation de tous les mineures d'ordre $r+1$.

3.17 En conjuguant M par $I_n + \lambda E_{i,j}$ on obtient

$$(I_n + \lambda E_{i,j})M(I_n - \lambda E_{i,j}) = M + \lambda(E_{i,j}M - ME_{i,j}) + \lambda^2 E_{i,j}ME_{i,j}$$

L'orbite étant bornée, il faut en particulier que $E_{i,j}ME_{i,j} = m_{i,j}E_{i,j}$ soit nul et donc que M soit diagonale ainsi que toutes les matrices de son orbite. Or les matrices diagonales d'une même classe de similitude sont en nombre fini (sur la diagonale, on trouve les valeurs propres) de sorte que l'orbite est finie, comme elle est connexe, elle est alors réduite à un point.

Si on ne veut pas évoquer la connexité, on regarde pour T triangulaire inférieure ou supérieure, $TDT^{-1} = D$ de sorte que D commute avec toutes les triangulaires et donc avec leurs sommes et donc D est dans le centre ce qui donne D scalaire.

3.18 Deux matrices normales sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique, elle sont alors unitairement semblables de sorte que la classe de similitude est bornée, on applique alors l'exercice précédent.

De la connexité de $U(n)$ on en déduit que l'ensemble des matrices normales dans une classe de conjugaison est connexe de sorte que s'il est fini il est réduit à un unique élément qui commute avec $U(n)$ et qui est donc scalaire.

3.19 Pour une matrice complexe M, on choisit par le procédé de Gramm-schmidt, dans un drapeau complet stable une base adaptée orthonormée ce qui fournit une matrice de passage unitaire P telle que PMP^* soit triangulaire. Si celle-ci est diagonale alors $M = P^*DP$ et donc $M^* = P^*D^*P$ commute avec M car D^* et D commutent : ainsi M est normale. Réciproquement si M est normale alors elle est diagonalisable en base orthonormée.

3.20 Le sens direct découle de $PAP^* = B$, $PA^*P^* = B^*$ soit $PAA^*P^* = BB^*$. Réciproquement, la décomposition polaire donne $A = H_AU_A$, $B = H_BU_B$ avec H_A, H_B hermitiennes définies positives, et U_A, U_B unitaires. On a donc $AA^* = H_AH_A^*$ et $BB^* = H_BH_B^*$. Les matrices H_A, H_B sont diagonalisables de sorte que si AA^* et BB^* ont même valeurs propres alors les valeurs propres de H_A sont égales à celles de H_B au signe près, soit $H_A = P_ADP_A^*$ et $H_B = P_BDD'P_B^*$ avec $D' = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ où les ϵ_i sont égaux à ± 1 de sorte que D' est unitaire. On a donc $D = P_B^*U_B^*BP_BD'$ et $A = U_AP_AP_B^*U_B^*BP_BD'P_A^*$ d'où le résultat.

3.21 Soit F le fermé complémentaire ; s'il était non vide il contiendrait une matrice $M = S+N$, sa décomposition de Dunford, et contiendrait aussi sa partie semi-simple S, laquelle est dans l'adhérence de la classe de similitude de M, d'où la contradiction.

3.22 On va montrer que cette adhérence est l'ensemble des matrices nilpotentes. Rappelons que d'après la décomposition de Jordan, tout matrice nilpotente est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec sur la diagonale des blocs de Jordan de taille distinctes $J(n_1, \cdots, n_r) := \mathrm{diag}(J_{n_1}, \cdots, J_{n_r})$ avec $\sum_i n_i = n$. On remarque alors que J_n est semblable à

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & \epsilon E_{n_1,n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \epsilon E_{n_2,n_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & J_{n_{r-1}} & \epsilon E_{n_{r-1},n_r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_{n_r} \end{pmatrix}$$

où $E_{i,j}$ est la matrice de taille $i \times j$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui du coin en bas à gauche qui vaut 1, et où $\epsilon > 0$. En faisant tendre ϵ vers zéro on en déduit que $J(n_1, \cdots, n_r)$ est dans l'adhérence de l'orbite de J_n.

3.23 Cela découle simplement du fait que 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude de N.

3.24 A partir de la forme de Jordan, on rappelle que pour $k \geq 1$, $d_k(A) := \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^k - \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda)^{k-1}$ est égal au nombre de bloc Jordan pour la valeur propre λ qui sont de taille plus grande que k. D'après le théorème du rang, pour tout $k \geq 1$, on a $d_k(A) = d_k(B)$ de sorte que A et B ont les mêmes réduites de Jordan et sont donc semblables.

3.25 On a $A = UBU^{-1}$ et ${}^tA = U^tBU^{-1}$. On rappelle que deux matrices réelles qui sont semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{C}$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P^tBP^{-1}$. Soit $P = OS$ la décomposition polaire de P et $A = OSB^{-1}B^{-1}o^{-1}$. Le résultat découle alors du fait que B et S commutent : en effet on a $PBP^{-1} = A = {}^t({}^tA) = {}^tP^{-1}B^tP$. Ainsi B commute avec ${}^tPP$ donc aussi avec S qui est un polynôme en ${}^tPP$.
Remarque : Comme application, on pourra en déduire la réduction des isométries, à partir de la diagonalisation des endomorphismes unitaires.

Références

[1] Gourdon. *Les maths en têtes : algèbre.* Ellipses, 1996.

[2] C. Pearcy. A complete set of unitary invariants for operators generating finite w^*-algebras of type i. *Pacific J. Math.*, 12 :1405–1416, 1962.

[3] Horn R. and C. Johnson. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, 1985.

[4] Horn R. and C. Johnson. *Topics in matrix analysis.* Cambridge University Press, 1991.

[5] H. Radjavi and P. Rosenthal. *Simultaneous Triangularization.* Springer, 2000.

[6] W. Specht. Zur thoerie dder matrizen ii. *Jahre. der Deut. Math. Vere.*, 50 :19–23, 1940.

[7] C. Zuily and H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.