

Calcul matriciel

II.1 Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{Z}^3$ et soit $L \subset \mathbf{Z}^3$ le sous-groupe engendré par les vecteurs

$$e'_1 := 2e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_2 := e_1 + 4e_2 - e_3, \quad e'_3 := 3e_1 - e_2 - e_3$$

Trouver une base adaptée au sous-module L de $\mathbf{Z}^3$ et décrire $\mathbf{Z}^3/L$.

II.2 Soit $x = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbf{Z}^p$.

a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) PGCD $(n_1, \dots, n_p) = 1$

(ii) Le vecteur x fait partie d'une base de $\mathbf{Z}^p$.

(iii) Il existe $A \in SL_p(\mathbf{Z})$ telle que $A^t x = {}^t(1, 0, \dots, 0)$

b) On pose $p = 4$ et $x = (10, 6, 7, 11)$. Compléter x en une base de $\mathbf{Z}^4$.

II.3 Résoudre dans $\mathbf{Z}^4$ le système :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Structure des groupes abéliens finis

II.4 Montrer qu'il y a (à isomorphisme près) trois groupes abéliens d'ordre 8.

II.5 Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes abéliens d'ordre 72.

II.6 Donner les facteurs invariants ainsi que la décomposition en modules indécomposables du $\mathbf{Z}$ -module :

$$M = \mathbf{Z}/20\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/9\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$$

II.7 Déterminer tous les groupes abéliens de cardinal $2^4 3^2 5$ sous forme de sommes de modules indécomposables ainsi que leurs facteurs invariants.

Problèmes

Problème II.1 Soient n un entier positif et $G \subset \mathbf{Z}^n$ un sous-groupe de rang n . Soit $(g_1, \dots, g_n)$ une base de G ; on note M la matrice de passage de cette base dans la base canonique de $\mathbf{Z}^n$ (*i.e.* la matrice ayant pour colonnes les g_i développés dans la base canonique).

- (i) Montrer que le groupe $\mathbf{Z}^n/G$ est fini.
- (ii) Montrer que $\text{card}(\mathbf{Z}^n/G) = |\det M|$.
- (iii) Soit H un groupe abélien engendré par trois éléments h_1, h_2, h_3 soumis aux relations

$$3h_1 + h_2 + h_3 = 0$$

$$25h_1 + 8h_2 + 10h_3 = 0$$

$$46h_1 + 20h_2 + 11h_3 = 0$$

Montrer que $\text{card}(H) = 19$ puis que $H \simeq \mathbf{Z}/19\mathbf{Z}$.

- (iv) Triangulariser la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 25 & 8 & 10 \\ 46 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

en multipliant à droite par une matrice de $SL_3(\mathbf{Z})$ que l'on précisera.

- (v) En déduire un isomorphisme $\varphi : H \simeq \mathbf{Z}/19\mathbf{Z}$ et préciser les valeurs de $\varphi(h_1), \varphi(h_2), \varphi(h_3)$.

Problème II.2 Etude de $U_n := (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$:

- (a) Montrer que le groupe $\text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ des automorphismes du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est isomorphe à U_n . Noter en particulier que $\text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est abélien.
- (b) Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Prouver que $U_n \simeq \prod_{i=1}^r U_{p_i^{\alpha_i}}$.
- (c) Soit p premier impair et $\alpha \geq 2$.

- (i) Montrez que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $l \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ premier avec p tel que $(1+p)^{p^k} = 1 + lp^{k+1}$. Quel est alors l'ordre de $1+p$ dans U_{p^α} ?
- (ii) En considérant le morphisme naturel $\psi : U_{p^\alpha} \rightarrow U_p$, montrer que U_{p^α} contient un élément x d'ordre $p-1$.
- (iv) Montrer alors en utilisant le théorème de structure des groupes abéliens finis que U_{p^α} est cyclique et donc isomorphe à

$$\mathbf{Z}/\varphi(p^\alpha)\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbf{Z}.$$

Construire explicitement un tel isomorphisme en utilisant l'élément x .

- (v) De manière indépendante, soit $g \in U_{p^\alpha}$ tel que $\psi(g)$ soit un générateur de U_p et tel que $g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Montrer alors que g est un générateur de U_{p^α} . Dans le cas où $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, montrer que $g+p$ est un générateur de U_{p^α} .
- (d) Le cas $p=2$.
- (i) Déterminer U_2 et U_4 ;
 - (ii) Soit $\alpha \geq 3$ et $k \in \mathbf{N}$. Montrer que $5^{2^k} = 1 + \lambda 2^{k+2}$ avec λ impair. En déduire l'ordre de 5 dans U_{2^α} .
 - (iii) En utilisant le théorème de structure des groupes abéliens finis et en comptant les éléments d'ordre 2, montrer que U_{2^α} est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2^{\alpha-2})$. Construire explicitement un tel isomorphisme.
- (e) Caractériser alors les entiers n tels que U_n soit cyclique.