Polynôme minimal

III.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension n, u un endomorphisme de polynôme minimal q_u. On suppose que $q_u = P_1 P_2$, P_1 et P_2 étant des polynômes unitaires non constants premiers entre eux. On note E_u l'espace E muni de la structure de $\mathbf{R}[X]$-module définie par l'endomorphisme u.

(a) Montrer que pour $i = 1, 2$,

$$E_i = \{x \in E \mid P_i(u)(x)) = 0\}$$

sont des sous-modules de E_u.

(b) Montrer que $E_u = E_1 \oplus E_2$.

(c) Montrer que pour $i = 1, 2$, P_i est le polynôme minimal de $u_{|E_i}$.

Invariants de Similitude

III.2 Soit V un $\mathbf{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$. On munit alors V de sa structure de $\mathbf{C}[X]$-module associée à u.

(a) On suppose que V ne possède aucun sous-module non trivial. Montrer que $n = 1$. On remplace maintenant $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$. L'énoncé est-il encore vrai?

(b) On note $\chi_u = R_1.R_2^2 \cdots R_l^l$ le polynôme caractéristique de u, où les R_i sont deux à deux premiers entre eux, sans facteurs carrés et unitaires. Vérifier qu'une telle écriture est possible et est unique.

(c) Avec les notations du (b), on suppose de plus que V est somme directe de sous-$\mathbf{C}[X]$-modules de dimension 1 (en tant que $\mathbf{C}$-espaces vectoriels). Calculer les invariants de similitude de u.

III.3 Soit V un $\mathbf{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$. On suppose que pour toute paire W, W' de sous-espace vectoriels de V stables par u, on a soit $W \subset W'$ soit $W' \subset W$.
Déterminer les invariants de similitude de u, son polynôme minimal en fonction de son polynôme caractéristique.

III.4 Soit u un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$. Montrer que le nombre d'invariants de similitude de u est égal au maximum des dimensions de ses sous-espaces propres.

III.5 Soit u un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ ayant une seule valeur propre α. On pose $d^i = \dim\ker(u - \alpha Id)^i$; on note r_α l'entier à partir duquel la suite (d^i) stationne ($i.e.$ $d^{r_\alpha - 1} < d^{r_\alpha} = d^{r_{alpha}+1} = \cdots$).

(i) Montrer que le polynôme minimal de u est $q_u = (X - \alpha)^{r_\alpha}$.

(ii) montrer que pour tout $i \geq 1$, l'entier $d^i - d^{i-1}$ est le nombre d'invariants de similitudes de la forme $(X - \alpha)^k$ avec $k \geq i$.

III.6 Pour $n > 1$, on note $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice nilpotente dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la première sur-diagonale $j_{i,i+1}$ pour $1 \leq i < n$ qui sont égaux à 1. On considère les matrices suivantes, écrites par blocs :

(a) $A_1 = \mathrm{diag}(aI_3, bI_2, cI_1)$;

(b) $A_2 = \mathrm{diag}(I_3, I_2+J_2, I_2+J_2, I_3+J_3, I_3+J_3, 2I_2, 2I_3+J_3, 3I_2, 3I_2+J_2)$;

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$

Déterminer dans chaque cas :

(i) les invariants de similitudes :

(ii) les polynômes minimaux et caractéristiques ;

(iii) Les dimensions des sous-espaces caractéristiques.

III.7 Soit u un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$, dont les valeurs propres sont 0 et 1 ; on note K_0^i (resp. K_1^i) le noyau de u^i (resp $(u - \mathrm{Id})^i$) et soit d_0^i (resp. d_1^i) sa dimension. On suppose que la suite (d_0^i) (resp. (d_1^i)) est égale à

$(4, 7, 9, 10, 10, \cdots)$ (resp. $(3, 4, 5, 5, \cdots)$). Déterminer alors les invariants de similitudes de u.

III.8 Ecrire sous la forme de Jordan les endomorphismes u dont les invariants de similitudes sont :

(a) $P_1(X) = X$;

(b) $P_1(X) = X(X - 1)$;

(c) $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$;

(d) $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X(X - 1)$;

(e) $P_1(X) = X^2(X - 1)$, $P_2(X) = X^2(X - 1)(X - 2)$, $P_3(X) = X^3(X - 1)^2(X - 2)$ et $P_4(X) = X^4(X - 1)^3(X - 2)^4$.

Problèmes

Problème III.1 On se propose dans ce problème de donner un algorithme pour calculer la décomposition de Dunford sans calculer les valeurs propres (ce qui algorithmiquement ne peut en général se faire que de manière approchée).

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_m(K)$ une matrice carrée à coefficients dans le corps $K \subset \mathbf{C}$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Dans $\mathbf{C}$, $\chi_A(X)$ se décompose sous la forme $\prod_i (X - \lambda_i)^{n_i}$ avec $\sum_i n_i = m$. On introduit alors le polynôme $P(X) = \prod_i (X - \lambda_i)$.

(a) Montrer que $P(X) = \lambda \frac{\chi_A(X)}{\chi_A(X) \wedge \chi'_A(X)}$, où $\chi_A(X) \wedge \chi'_A(X)$ désigne le pgcd de χ_A avec son polynôme dérivé et $\lambda \in K$. En déduire alors que $P(X)$ est un polynôme à coefficients dans K.

(b) Soient U et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ respectivement inversible et nilpotente qui commutent entre elles. Montrer que $U - N$ est inversible. Montrer alors que $P'(A)$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_m(K)$ dont l'inverse commute avec A.

(c) On considère alors la suite suivante : $A_0 := A$ et $A_{n+1} = A_n - P(A_n).(P'(A_n))^{-1}$. On veut montrer par récurrence sur n que la suite est bien définie, *i.e.* que $P'(A_n)$ est une matrice inversible.

(i) Montrer que pour tout polynôme $Q \in K[X]$, il existe $\tilde{Q} \in K[X, Y]$ tel que $Q(X + Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X, Y)$.

(ii) En supposant la suite A_n définie jusqu'au rang n, montrer que $P(A_n)$ s'écrit sous la forme $P(A)^{2^n}.B_n$ où B_n est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ qui est un polynôme en A.

(iii) En utilisant une formule de Taylor pour le polynôme P', écrire $P'(A_{n+1})$ comme la somme d'une matrice inversible $P'(A_n)$ et d'une matrice nilpotente qui commutent entre elles.

(d) Montrer que pour tout polynôme $Q \in K[X]$, il existe $\tilde{Q} \in K[X,Y]$ tel que $Q(X+Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X,Y)$. Montrer alors par récurrence sur n que $P(A_n)$ s'écrit sous la forme $P(A)^{2^n}.B_n$ où B_n est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

(e) En déduire que la suite A_n est stationnaire de limite D avec D diagonalisable sur $\mathbf{C}$ et $N := A - D$ nilpotente vérifiant $DN = ND$.