Polynômes

V.1 Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z}[X]$; montrer que si $p/q \in \mathbf{Q}$ est une racine de $P(X)$ alors q (resp. p) divise a_n (resp. a_0). Factoriser $3X^2 + 4X^2 + 2X - 4$ sur $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$.

V.2 Calculer le pgcd de $X^5 - 3X^3 + X^2 - 10X + 2$ et de $X^5 + 5X^2 - 4X + 10$.

V.3 Soit $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ et x une racine de $P(X)$ de multiplicité strictement supérieure à $(\deg P)/2$; montrer que $x \in \mathbf{Q}$.

V.4 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P'(X)$ divise $P(X)$; montrer que le quotient est de la forme $a(X - \alpha)$ pour a, α réels.
En dérivant k fois ($k < \deg P$) l'égalité $P(X) = P'(X)a(X - \alpha)$, montrer que $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et en déduire que $P(X) = \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n$, où n est le degré de $P(X)$.

V.5 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0 \ \forall\, x \in \mathbf{R}$. Montrer que $P = R^2 + S^2$ dans $\mathbf{R}[X]$.

V.6 Soient $a \in \mathbf{R}$ et P un polynôme de degré n à coefficients réels tels que $P(a) > 0$ et pour $1 \leq k \leq n$, $P^{(k)}(a) \geq 0$; montrer que P n'a pas de racines dans $[a, +\infty[$.

V.7 Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{n!}$ n'a pas de racines multiples.

V.8 Soit $P(X) = X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 20X^3 + 12X^2 - 4$; calculer le pgcd de P et P' puis factoriser P sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.

V.9 Montrer que $X^n \sin\theta - X\sin(n\theta) + \sin(n-1)\theta$ est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ et donner le quotient.

V.10 Soient $a \neq b \in \mathbf{C}$, calculer le reste de la division euclidienne de $P(X) \in \mathbf{C}[X]$ par $(X - a)(X - b)$.

Racines des Polynômes à coefficients complexes

V.11 Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbf{C}[X]$, $a_d \neq 0$. Montrer que si α est une racine de P, on a

$$|\alpha| \leq \sup_{0 \leq i \leq d-1} \left(d \frac{|a_i|}{|a_d|} \right)^{1/(d-i)}$$

V.12 Soit $P = a_0 + a_1 Z + \cdots + a_n Z^n \in \mathbf{C}[Z]$.

(a) Montrer que les zéros (complexes) de P' sont dans l'enveloppe convexe des zéros de P.

(b) Soit $K \subset \mathbf{C}$ un convexe. Montrer que l'ensemble des $w \in \mathbf{C}$ tels que les solutions de $P(Z) = w$ soient contenues dans K est un convexe de $\mathbf{C}$. (Indication : considérer $Q = (P(Z) - w_1)^{n_1}(P(Z) - w_2)^{n_2}$ où les w_i sont des nombres complexes).

Racines des polynômes à coefficients réels

V.13 Soit $P(X$ un polynôme à coefficients réels. Démontrer le lemme de Descartes par récurrence sur le nombre de racines réelles > 0 (avec multiplicités), en écrivant

$$P(X) = (X - \alpha)Q(X)$$

avec $\alpha > 0$, et en comparant les variations des coefficients de P et de ceux de Q.

V.14 ("Théorème de Budan-Fourier"). Soit $P(X)$ un polynôme de degré d à coefficients réels. On note $V(x)$ le nombre de changements de signes dans la suite

$$(P(x), P'(x), P''(x), \dots, P^{(d)}(x)).$$

Soit $[a, b]$ un intervalle tel que $P(a)P(b) \neq 0$. On rappelle que $Z_{[a,b]}(P)$ désigne le nombre de racines (comptées avec multiplicités) dans l'intercvalle $[a, b]$.
Montrer que $Z_{[a,b]}(P)$ est $\leq V(a) - V(b)$ et que $Z_{[a,b]}(P) \equiv V(a) - V(b)$ mod 2. En déduire le lemme de Descartes.

V.15 Soit

$$F(X) = \sum_{i=0}^{n} P_i(X) e^{\alpha_i X}$$

où $P_i(X) \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme de degré d_i. Montrer que le nombre $z(F)$ de zéros de F dans $\mathbf{R}$ est fini et que $z(F) \leq \sum d_i + n$. (Même méthode que pour le lemme de Descartes).

Résultant, Discriminant

V.16 On considère la courbe paramétrée $x(t) = t^2 + t + 1$, $y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$. En donner une équation algébrique.

V.17 Montrez que le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, constitué des matrices à n valeurs propres distinctes, est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

V.18 Calculer le discriminant du polynôme $P(X) = X^3 + pX + q$

(i) En appliquant la définition.

(ii) En calculant la suite de Sturm $S(P, P')$.

V.19 Calculer le résultant $R_Y(P, Q)$ des polynômes $P_X(Y) = X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $Q_X(Y) = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$ considérés comme des éléments de $\mathbf{R}[X][Y]$, i.e. comme des polynômes en Y à coefficients dans $\mathbf{R}[X]$. Trouver alors les points d'intersections des ellipses d'équations $P = 0$ et $Q = 0$.

V.20 Soient $C_X(Y) = X^2 + Y^2 + bY + c$ et $P_X(Y) = X^2 + Y + g$ où b, c, g sont des réels.

(i) Calculer le résultant $R_Y(C, P)$.

(ii) Donner une condition sur b, c, g pour que les points d'intersection de l'ellipse C avec la parabole P aient la même abscisse (réelle ou complexe).

(iii) Donner des conditions sur b, c, g pour que tous les points d'intersection de P et C soient réels. Retrouvez cette condition en utilisant la règle de Sturm.

Fonctions symétriques des racines

V.21

(a) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres strictement positifs. Montrer que

$$(a_1 \ldots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

(b) Déterminer tous les polynômes à coefficients $+1, -1$, ou 0 ayant toutes leurs racines réelles.

(Appliquer (a) aux carrés des racines d'un polynôme P à coefficients $+1, -1$ ou 0 ayant toutes ses racines réelles).

V.22 Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les racines complexes de $X^4 - 2X^3 + aX^2 + bX - 1$; trouver a, b pour que l'on ait $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ et $\alpha\beta = -\gamma\delta$. Donner alors les racines.

V.23 Soient a, b, c des nombres complexes ; montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les points A, B, C du plan réel, d'affixes respectives a, b, c, forment un triangle isocèle rectangle en A est $c^2 + b^2 - 2a(b + c) + 2a^2 = 0$. En déduire qu'une CNS pour que les solutions a, b, c de l'équation $x^3 + px + q$ forment un triangle rectangle isocèle est $27q^2 - 50p^3 = 0$.

V.24 Calculer les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_i(x, y, z)$ $(1 \leq i \leq 3)$ des solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 2 \end{cases}$$

(Utiliser les relations de Newton).

Problèmes

Problème V.1

1. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts et $b_0, \ldots, b_n$ des nombres complexes. Montrer qu'il existe un unique polynôme P, à coefficients complexes de degré au plus n tel que pour tout $0 \leq i \leq n$, $P(a_i) = b_i$ (polynôme d'interpolation de Lagrange).

2. Soient $P, Q \in \mathbf{C}[X]$ on suppose $\deg(Q) \leq \deg(P)$.

   (a) Si $P(x) = 0 \iff Q(x) = 0$, peut-on affirmer que $P = Q$?

   (b) On suppose maintenant que $P(x) = 0$ si et seulement si $Q(x) = 0$ et $P(x) = 1$ si et seulement si $Q(x) = 1$. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines de P et $\beta_1, \ldots, \beta_s$ les racines de $P - 1$. Montrer que $r + s \geq \deg(P) + 1$

(c) En déduire que $P = Q$.

Remarque. On conjecture que si m et n sont deux entiers ayant les mêmes diviseurs premiers, que si de plus $m+1, n+1$ ont les mêmes diviseurs premiers ainsi que $m+2, n+2$, alors $m = n$ (conjecture d'Erdös-Woods).

Problème V.2 Soit Q un polynôme unitaire de degré d à coefficients réels. On rappelle que le discriminant D de Q est égal à $\prod_{i \neq j}(\alpha_i - \alpha_j)$, les α_i étant les racines (réelles ou complexes) de Q.

1. On définit le signe s de D comme $+1$ si $D > 0$ et -1 si $D < 0$; (on suppose $D \neq 0$). Montrer que
$$s = (-1)^{\frac{d^2 - r}{2}}$$
où r est le nombre de racines réelles de Q (on regoupera dans l'expression de D chaque terme non réel avec son conjugué).

2. En déduire que
$$r \equiv d^2 + s + 3 \quad (4).$$

3. On pose $d = 3$ et $Q = x^3 + px + q$, $p, q \in \mathbf{R}$. En déduire le nombre de racines réelles de Q suivant le signe de D.

4. Calculer le discriminant D du polynôme Q en fonction de p et q (en évaluant le résultant $R(Q, Q')$).

5. Calculer la suite de Sturm de Q (on supposera $p \neq 0$ et $q \neq 0$). Retrouver les résultats de la question 3. ci-dessus.