Polynôme minimal

Solution de l'exercice (??)

(a) Il suffit de vérifier que si $x \in E_i$, alors $u(x) \in E_i$, soit $P_i(u)(u(x)) = u(P_i(u)(x)) = 0$, car u commute avec $P_i(u)$.

(b) P_1 et P_2 étant premiers entre eux, on écrit une relation de Bézout $UP_1+VP_2 = 1$ où U, V sont des polynômes de $\mathbf{R}[X]$. Ainsi pour tout vecteur x de V, on a $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = (UP_1)(u)(x)$ et $x_2 = (VP_2)(u)(x)$. En outre on a $P_2(u)(x_1) = (UP)(u)(x) = 0$ car $q_u(u)$ est l'endomorphisme nul. De la même façon on a $P_1(u)(x_2) = 0$ de sorte que $E_u = E_1 + E_2$. Par ailleurs si x est un élément de $E_1 \cap E_2$, on a $x_1 = x_2 = 0$ et donc $x = 0$, d'où le résultat.

(c) Le polynôme minimal q_1 de $u_{|E_1}$ divise P_1 tandis que celui q_2 de $u_{|E_2}$ divise P_2. En outre d'aprés (b), q_1q_2 est un polynôme annulateur de u et donc $q_1 = P_1$ et $q_2 = P_2$ puisque q_1q_2 est divisible par le polynôme minimal $q_u = P_1P_2$.

Invariants de similitude

Solution de l'exercice (??)

(a) Sur $\mathbf{C}$ tout endomorphisme posséde une valeur propre et donc un vecteur propre v tel que $\mathbf{C}v$ soit un sous-espace stable non réduit au vecteur nul de sorte que par hypothése il est égal à l'espace tout entier qui est donc de dimension 1.

Sur $\mathbf{R}$, lénoncé est faux, il suffit de considérer dans $\mathbf{R}^2$, une matrice de rotation d'angle $\theta < \pi$.

(b) On décompose χ_u, qui par convention est unitaire, en produits de facteurs irréductibles $Q_1^{\nu_1} \cdots Q_r^{\nu_r}$ et on remarque que R_i se définit comme le produit des Q_j tels que $\nu_j = i$.

(c) En tant que $\mathbf{C}[X]$-module, V est de la forme $(\mathbf{C}[X]/(X - \alpha_1))^{\nu_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbf{C}[X]/(X - \alpha_r))^{\nu_r}$, où les α_i sont les valeurs propres de u et ν_i leur multiplicité dans le polynôme caractéristique. Avec les notations de (b), on a $R_i = \prod_{j|alpha_j=i}(X - \alpha_j)$. Les invariants de similitude sont de la forme $P_1|P_2| \cdots |P_l$ où chacun des P_j est de la forme $\prod_{i\in I_j}(X - \alpha_i)$, I_j étant un certain sous-ensemble de $\{1, \cdots , r\}$ tel que $I_j \subset I_{j+1}$. Ainsi les éléments de I_1 sont répétés l fois, ceux de I_2 le sont $(l - 1)$ fois et de maniére générale ceux de I_j le sont $(l + 1 - j)$ fois. On en déduit donc que $l = \max_i\{\nu_i\}$ puis que I_j est l'ensemble des i tels que $\nu_i \geq l+1-j$ de sorte que les invariants de similitude sont $R_l, R_lR_{l-1},\ R_lR_{l-1}R_{l-2}, \cdots, R_l \cdots R_1$.

Solution de l'exercice (??) On remarque tout d'abord que u posséde une unique valeur propre car dans le cas contraire, pour λ_1 et λ_2 des valeurs propres distinctes, $W = \ker(u - \lambda_1 Id)$ et $W' = \ker(u - \lambda_2 Id)$ auraient une intersection réduite au vecteur nul. Soit alors λ l'unique valeur propre de u (sur $\mathbf{C}$, un endomorphisme posséde toujours au moins une valeur propre). On remarque alors que $\ker(u - \lambda Id)$ est de dimension 1, car sinon pour x_1 et x_2 des vecteurs propres non colinéaires, $W = \mathbf{C}x_1$ et $W' = \mathbf{C}x_2$ auraient une intersection réduite au vecteur nul. On en déduit donc que u admet un unique invariant de similitude égal à son polynôme minimal et à son polynôme caractéristique, soit $(X-\lambda)^n$.

Solution de l'exercice (??)
Solution de l'exercice (??)

(a) Le A-module V est clairement isomorphe à $(A/(X-a))^3 \times (A/(X-b))^2 \times A/(X-c)$; on calcule alors les invariants de similitude via le théorème chinois comme dans les exercices du chapitre deux, ce qui donne : $(X-a)$, $(X-a)(X-b)$ et $(X-a)(X-b)(X-c)$. La matrice étant diagonalisable, les sous-espaces propres sont les sous-espaces caractéristiques, et le polynôme minimal est $(X-a)(X-b)(X-c)$. (b) De même on a

$$V \simeq (A/(X-1))^3 \times (A/(X-1)^2)^2 \times (A/(X-1)^3)^2 \times \\ (A/(X-2))^2 \times A/(X-2)^3 \times (A/(X-3))^2 \times A/(X-3)^2$$

les invariants de similitude donnés comme d'habitude par application du théorème chinois sont alors

$$(X-1), \quad (X-1), \quad (X-1), \quad (X-1)^2, \quad (X-1)^2(X-2)(X-3), \quad (X-1)^3(X-2)(X-3),$$

Le polynôme minimal est le dernier invariant de similitude, soit $(X-1)^3(X-2)^3(X-3)^3$.
Les dimensions des sous-espaces caractéristiques sont 11 pour la valeur propre 1, 8 pour la valeur propre 2 et 5 pour la valeur propre 3.

(c) La matrice étant sous forme triangulaire, on voit que les valeurs propres sont 0,1 et a_n.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (resp. 1) est de dimension supérieure ou égale à 1 (resp. $n-2$). Si $a_n \neq 0, 1$ alors la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres $0, 1, a_n$ est n de sorte que la matrice est diagonalisable et donc

$$V \simeq A/(X) \times A/(X - a_n) \times (A/(X-1))^{n-2}$$

et les invariants de similitude sont

$$a_1(X) = (X-1), \quad a_2(X) = X - 1, \quad \cdots \quad a_{n-2}(X) = (X-1)X(X-a_n).$$

Si $a_n = a_1 = 0$, on est dans la même situation, car le noyau de la matrice est alors de dimension 2 parceque son rang est de manière évidente $n-2$; les invariants de similitude sont alors :

$$P_1(X) = \cdots = P_{n-4}(X) = X - 1, P_{n-3} = P_{n-2} = X(X-1).$$

Dans le cas où $a_n = 0$ et a_1 non nul, on a alors

$$V \simeq A/(X^2) \times (A/(X-1))^{n-2}$$

soit

$$), \quad P_1(X) = \cdots = P_{n-3}(X) = (X-1), \quad P_{n-2} = X^2(X-1).$$

Solution de l'exercice (??) D'après l'exercice **??**, le nombre d'invariants de similitude est égal à la dimension maximale des sous-espaces propres soit donc ici 4 invariants de similitude P_1, P_2, P_3, P_4. Le polynôme minimal s'écrit sous la forme $P_4(X) = X^4(X-1)^3$ d'après l'exercice **??** appliqué successivement aux valeurs propres 0 et 1).
La seconde question de ce même exercice fournit immédiatement :

$$P_1(X) = X(X-1), \quad P_2(X) = X^2(X-1), \quad P_3(X) = X^3(X-1), \quad P_4(X) = X^4(X-1)^3.$$

Solution de l'exercice (??)

On note n la dimension de l'espace vectoriel sur lequel agit u (n est la somme des degrés des invariants de similitude).
On reprend lesnotations de l'exercice **??** : pour $n > 1$, on note $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice nilpotente dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la première sur-diagonale $j_{i,i+1}$ pour $1 \leq i < n$ qui sont égaux à 1.

(a) Ici $n = 1$ et l'endomorphisme en question est l'identité.

(b) On a $n=2$ et deux valeurs propres distinctes ; u est donc diagonalisable et sa matrice dans une base de diagonalisation est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0,1)$.

(c) $n=3$ et 0 est la seule valeur propre et la matrice de Jordan associée est $\mathrm{diag}(0,J_2)$.

(d) $n=3$ et $0,1$ sont les valeurs propres de u. L'endomorphisme est diagonalisable puisque le polynôme minimal est à racines simples.

(e) $n=24$, les valeurs propres étant $0,1,2$; La forme de Jordan est la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(J_2,J_2,J_3,J_4,I_1,I_1,I_2,I_3,2I_2,2I_4+J_4).$$

Solution du problème (??)

(a) On remarque que la multiplicité de λ_i dans P' est égale à n_i-1 de sorte que λ_i est une racine à l'ordre 1 de $\frac{\chi_A(X)}{\chi_A(X)\wedge\chi'_A(X)}$ et qu'en outre ce sont ces seules racines d'où le résultat. On notera en particulier que la connaissance des λ_i n'est pas nécessaire pour calculer P qui peut se calculer via l'algorithme d'Euclide.

(b) - L'idée est d'utiliser la relation formelle $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k)=1-x^{k+1}$ avec $x=U^{-1}N$ et k tel que $N^{k+1}=0$ soit $(1-U^{-1}N)(1+U^{-1}N+\cdots+(U^{-1}N)^k)=I_n$ car $(U^{-1}N)^{k+1}=U^{-k-1}N^{k+1}$ car U et N commutent entre eux; soit en multipliant à gauche par U et à droite par U^{-1}, $(U-N)(U^{-1}+U^{-2}N+\cdots+U^{-k-1}N^k)=I_n$.

- Les valeurs propres de A ne sont pas des racines de P' et $P\wedge P'=1$. On considère alors une relation de Bezout $UP'+VP=1$ pour P et P' qui en l'appliquant à A, donne $U(A)P'(A)=1-N$ avec $N=V(A)P(A)$. Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P^r(A)=0$ pour $r\geq\max_i(n_i)$ de sorte que N est nilpotente et donc par application de ce qui précède $P'(A)$ est une matrice inversible dont l'inverse commute avec A (car c'est un polynôme en A).

(c) Il s'agit de la méthode de Newton appliqué aux matrices, le but étant de construire une racine de P, *i.e.* de trouver la partie diagonalisable de A dans sa décomposition de Dunford. Remarquons que pour $n=0$, $P'(A_0)$ est inversible d'après la question précédente.

(i) Il suffit par exemple de le vérifier sur les monômes X^m, soit $(X+Y)^m=X^m+mYX^{m-1}+Y^2\sum_{k=2}^m(k\lambda m)Y^{k-2}X^{m-k}$.

(ii) Il est clair d'après (a) que pour tout $0\leq k\leq n$, A_k est un polynôme en A. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n=0$, on a $P(A_0)=P(A)$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang k. D'après (i), on écrit

$P(A_{k+1}) = P(A_k + Y) = P(A_k) + YP'(A_k) + Y^2\tilde{Q}(A_k, Y)$ avec Y tel que $P(A_k) + YP'(A_k) = 0$. D'après (a) $Y = P(A_k)Q(A_k)$ et donc $P(A_{k+1})$ est de la forme $P(A)^{2^{k+1}}B_{k+1}$ pour une matrice B_{k+1} qui en tant que polynôme en A_k commute avec A.

(iii) La formule de Taylor donne $P'(A_{n+1}) - P'(A_n) = (A_{n+1} - A_n)Q(A_n)$ où $Q \in K[X]$. Or $A_{n+1} - A_n$ est de la forme $P(A_n)\tilde{Q}(A_n)$ et est donc nilpotent et commute avec A_n qui est un polynôme en A. On en déduit alors que $P'(A_{n+1})$ est inversible d'après (a).

(e) On rappelle que $P^r(A) = 0$ pour $r = \max_i\{n_i\}$ de sorte que la sous-suite $(A_k)_{k\geq n}$ est constante dès que $2^n \geq r$. La limite D est un polynôme en A tel que $P(D) = 0$ de sorte que D est diagonalisable car elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (dans $\mathbf{C}$). Par ailleurs, pour n tel que $2^n \geq r$, on a $A - D = A_0 - A_n = \sum_{i=0}^{n-1}(A_i - A_{i+1})$ avec $A_i - A_{i+1}$ nilpotente et qui est un polynôme en A. Ainsi les $A_i - A_{i+1}$ commutent en eux de sorte que leur somme est nilpotente d'où le résultat.