Corrigé DM 1

Exercice 1. *Soient I et J des idéaux de A, rappelez les définitions de $I+J$ et $I.J$. Enoncez le théorème chinois et décrivez les idéaux de A/I en fonction de ceux de A.*

Preuve: On rappelle que $I+J$ est par définition le plus petit idéal contenant I et J, soit $I+J=\{i+j \ / \ i \in I,\ j \in J\}$. L'idéal IJ est l'ensemble des éléments $\sum_k i_k j_k$ avec $i_k \in I$ et $j_k \in J$, la somme sur les indices k étant finie. Le théorème chinois s'énonce comme suit: soient I et J des idéaux premiers entre eux, i.e. $I+J=A$, le morphisme naturel $A \longrightarrow A/I \times A/J$ se factorise en un isomorphisme $A/IJ \xrightarrow{\sim} A/I \times A/J$.
On considère de même le morphisme naturel $\pi : A \longrightarrow A/I$ et soit $\overline{J}$ un idéal de A/I; on pose $J=\pi^{-1}(\overline{J})$ qui est alors un idéal de A contenant I. Réciproquement si J est un idéal de A contenant I, on note $\overline{J}=\pi(J)$; $\overline{J}$ est clairement un idéal de A/I. On définit ainsi une bijection entre les idéaux de A/I et les idéaux de A contenant I.

$\square$

Exercice 2. *(a) Un idéal strict de A est dit maximal s'il l'est pour l'inclusion, i.e. le seul idéal qui le contienne est A lui-même. Montrez que $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de A si et seulement si $A/\mathcal{M}$ est un corps. En utilisant le lemme de Zorn, montrez l'existence d'idéaux maximaux.*

(b) Un idéal $\mathcal{P}$ de A est dit premier s'il vérifie la propriété suivante:

$$xy \in \mathcal{P} \text{ et } x \notin \mathcal{P} \Rightarrow y \in \mathcal{P}$$

Montrez que $\mathcal{P}$ est un idéal premier de A si et seulement si $A/\mathcal{P}$ est intègre.
Soient $\mathcal{P}$ un idéal premier de A et $I_1, \cdots, I_r$ des idéaux tels que $I_1.\cdots.I_r \subset \mathcal{P}$. Montrez que $\mathcal{P}$ contient l'un des I_k.
Soit I un idéal non premier de A, montrez qu'il existe deux idéaux I_1 et I_2 tels que $I \subset I_1$, $I \subset I_2$ et $I_1.I_2 \subset I$.
En utilisant le lemme de Zorn, montrez l'existence d'idéaux premiers minimaux pour l'inclusion.
En supposant A noethérien, montrez qu'il existe un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

(c) Un idéal $\mathcal{Q}$ sera dit primaire s'il vérifie:

$$\forall x, y \in A \ xy \in \mathcal{Q},\ x \notin \mathcal{Q} \Rightarrow \exists n \ y^n \in \mathcal{Q}.$$

Si $\mathcal{Q}$ est primaire que peut-on dire de $A/\mathcal{Q}$? Pour tout idéal I de A, on pose

$$\sqrt{I}=\{x \in A \ / \ \exists n \ x^n \in I\}.$$

Montrer que Q primaire entraine que sa racine est un idéal premier. Réciproquement: soit $I=(X)$, $n>1$ $J=(X,Y)^n$ dans $A=\mathbb{C}[X,Y]$. Montrer que $Q=I \cap J$ n'est pas primaire bien que son radical soit premier.

Preuve: (a) Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de A et soit $\overline{a} \in A/\mathcal{M}$ non nul. On fixe $a \in A$ d'image $\overline{a}$ par la projection naturelle $\pi : A \longrightarrow A/\mathcal{M}$; ainsi $a \notin \mathcal{M}$ de sorte que l'idéal engendré par a et $\mathcal{M}$ est strictement plus grand que $\mathcal{M}$ et donc par maximalité est égal à A. On en déduit donc l'existence d'éléments $\lambda \in A$ et $m \in MC$ tels que $1=\lambda a+m$, soit $\overline{1}=\overline{\lambda}\overline{a}$ et donc $\overline{a}$ est inversible d'inverse $\overline{\lambda}$.

Réciproquement soit I un idéal contenant $\mathcal{M}$ strictement et soit $x \in I \backslash \mathcal{M}$, de sorte que $\overline{x}$ est non nul dans $A/\mathcal{M}$ et donc inversible: $\overline{1} = \overline{xy}$ soit $1 - xy \in \mathcal{M}$ pour $y \in \overline{y}$, et donc $1 \in I$ soit $I = A$.
Remarque: De manière générale pour montrer qu'un idéal I de A est l'anneau A tout entier, on montre que $1 \in I$; en effet on a ainsi $a.1 \in I$ car I est un idéal et donc $A \subset I$.
Exemple: dans $\mathbb{Z}$, les idéaux maximaux sont le $p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Pour utiliser le lemme de Zorn, il suffit de montrer que la relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{I}$ des idéaux, définie par l'inclusion est inductive, i.e. que toute chaine totalement ordonée C admet un majorant, à savoir $M = \cup_{I \in C} I$. Vérifions que M est bien un idéal soient $x, y \in M$, et $I \subset J \in C$ tel que $x \in I$, $y \in J$; on a alors $x, y \in J$ et donc $x - y \in J \subset M$. On démontre de même que si $x \in M$ et $a \in A$ alors $ax \in M$. Le lemme de Zorn affirme alors l'existence d'éléments maximaux, qui sont donc des idéaux maximaux.

(b) La traduction est immédiate: la relation $\overline{xy} = \overline{0}$ est équivalente à $xy \in \mathcal{P}$ pour $x \in \overline{x}$ et $y \in \overline{y}$; ainsi si $\mathcal{P}$ est premier on a x ou y appartient à $\mathcal{P}$ soit $\overline{x} = \overline{0}$ ou $\overline{y} = \overline{0}$. Réciproquement si $xy \in \mathcal{P}$ alors si $A/\mathcal{P}$ est intègre, on a $\overline{x} = \overline{0}$ ou $\overline{y} = \overline{0}$ et donc x ou y appartient à $\mathcal{P}$.
Soit $\mathcal{P}$ premier et $I_1 \cdots I_r \subset \mathcal{P}$, et supposons que pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$, $I_k \not\subset \mathcal{P}$; on fixe ainsi pour tout k, un élément $x_k \in I_k$ et $x_k \notin \mathcal{P}$. Par hypothèse $x_1 \cdots x_r \in \mathcal{P}$ avec $x_1 \notin \mathcal{P}$ soit $x_2 \cdots x_r \in \mathcal{P}$ et par récurrence $x_r \in \mathcal{P}$ d'où la contradiction.
Soit maintenant I non premier, et soit $x, y \in A \backslash I$ avec $xy \in I$. On pose $I_1 = (I \cup \{x\})$ et $I_2 = (I \cup \{y\})$; on a $I_1 I_2 \subset I$ avec $I \subset I_1 \cap I_2$.
Exemple: dans $\mathbb{Z}$, les idéaux premiers sont les $p\mathbb{Z}$ avec p premier; ainsi dans $\mathbb{Z}$, il n'y a pas de différence entre idéaux premiers et maximaux. En général un idéal maximal est premier (car un corps est un anneau intègre), mais la réciproque est fausse comme on peut le voir avec l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ et $I = (X)$. Toutefois si $A/\mathcal{P}$ est fini alors $\mathcal{P}$ est maximal; en effet un anneau intègre fini B est un corps; il suffit de considérer pour tout $b \neq 0$ de B, le morphisme $x \mapsto bx$; cette dernière est injective car B est intègre et donc surjective car B est fini, de sorte que 1 est atteint.

On considère la relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{I}$ des idéaux premiers, donnée par la contenance, i.e. $I \leqslant J \Leftrightarrow J \subset I$; cette relation d'ordre est à nouveau inductive, un majorant d'une chaine totalement ordonée C étant donné par l'intersection $M = \cap_{I \in C} I$; en effet on vérifie comme précédemment que M est un idéal, le fait qu'il soit premier se montre aisément: soit $xy \in M$ et donc $xy \in I$ pour tout $I \in C$; comme I est premier, x ou y appartient à I; supposons que $y \notin I$, alors pour tout $J \subset I \in C$, on a $y \notin J$ et donc $x \in J$ soit $x \in M$. Le lemme de Zorn donne alors l'existence d'éléments maximaux qui sont donc des idéaux premiers minimaux pour l'inclusion.

On suppose A noethérien et on considère l'idéal (0); s'il est premier alors c'est le seul idéal premier minimal, sinon soit I_1 et I_2 comme ci-dessus. Si I_1 et I_2 sont premiers, ceux sont les seuls idéaux premiers minimaux; en effet soit $\mathcal{P}$ un idéal premier; on a $(0) = I_1 I_2 \subset \mathcal{P}$ et donc $I_i \subset \mathcal{P}$ pour $i = 1$ ou 2, d'après ce qui précède. Si I_1 n'est pas premier, soit $I_{1,1}$ et $I_{1,2}$ comme ci-dessus; on construit ainsi un arbre binaire dont la racine est l'idéal (0), tous les sommets sont des idéaux qui contiennent le produit des idéaux de ses deux fils et tel que tout chemin filial défini une chaine totalement ordonée pour l'inclusion. Si on suppose A noethérien, l'arbre est fini et les idéaux premiers minimaux sont les feuilles.

(c) La traduction dans $A/\mathbb{Q}$ est à nouveau immédiate: $\mathbb{Q}$ est primaire si et seulement si dans $A/\mathbb{Q}$ les seuls diviseurs de 0 sont les éléments nilpotents, i.e. ceux tels qu'il existe n tels qu'élevés à la puissance n, ils donnent 0.
Montrons en premier lieu que $\sqrt{I}$ est un idéal: soient donc $x, y \in \sqrt{I}$ et n, m des entiers tels que

$x^n \in I$ et $y^m \in I$. On a alors $(x+y)^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k x^k(-y)^{n+m-1-k}$; or $k < n$ si et seulement si $n+m-1-k \geqslant m$ et donc pour tout $0 \leqslant k \leqslant n+m-1$, au moins un parmi x^k et $y^{n+m-1-k}$ appartient à I et donc $x-y \in \sqrt{I}$. Si $a \in A$ alors $(ax)^n \in I$ et donc $ax \in \sqrt{I}$ et donc finalement $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
Exemple: dans $\mathbb{Z}$, la racine de l'idéal $n\mathbb{Z}$ avec $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ est l'idéal engendré par $\prod_i p_i$.

Soit $\mathbb{Q}$ un idéal primaire et $\mathcal{P} = \sqrt{\mathbb{Q}}$; soit $x, y \in A$ tels que $xy \in \mathcal{P}$ et $x \notin \mathcal{P}$. Soit donc un entier n tel que $x^n y^n \in \mathbb{Q}$; comme $x \notin \mathcal{P}$ alors $x^n \notin \mathbb{Q}$ et donc $\mathbb{Q}$ étant primaire, soit m un entier tel que $(y^n)^m \in \mathbb{Q}$ soit $y \in \mathcal{P}$, et donc $\mathcal{P}$ est un idéal premier.

On considère $A = \mathbb{C}[X,Y]$ l'anneau des polynômes en deux variables à coefficients dans $\mathbb{C}$ et soit $I = (X)$ et $J = (X,Y)^n$ avec $n > 1$. On pose $\mathbb{Q} = I \cap J$ qui est l'idéal engendré par $X^n, X^{n-1}Y, \cdots, XY^{n-1}$; on a $\sqrt{\mathbb{Q}} = (X)$ qui est premier alors que $\mathbb{Q}$ n'est pas primaire car $X^{n-1}Y \in \mathbb{Q}$ avec $X^{n-1} \notin \mathbb{Q}$ et $Y^m \notin \mathbb{Q}$ pour tout entier m.

□

Exercice 3. *On pose $Nil(A) = \{a \ / \ \exists n \ a^n = 0\}$. Montrez que $Nil(A)$ est un idéal de A inclu dans tout idéal premier $\mathcal{P}$ de A. Montrez, en utilisant le lemme de Zorn, que*

$$Nil(A) = \cap_{\mathcal{P} \ premier} \mathcal{P}.$$

Que peut-on dire de $A/Nil(A)$.
Montrer que $\sqrt{I} = \cap_{\substack{\mathcal{P} \ premier \\ I \subset \mathcal{P}}} \mathcal{P}$.

Preuve: Montrons que $Nil(A)$ est un idéal: soient donc $a, b \in Nil(A)$ et n, m des entiers tels que $a^n = b^m = 0$, comme au point (c) de l'exercice précédent, on a $(a-b)^{n+m-1} = 0$, soit $a - b \in Nil(A)$; soit $a \in Nil(A)$ et $\alpha \in A$; l'égalité $a^n = 0$ implique $(\alpha a)^n = 0$ soit $\alpha a \in Nil(A)$ de sorte que $Nil(A)$ est un idéal de A.

Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier et $a \in Nil(A)$; $a^n = 0 \in \mathcal{P}$ et donc $a \in \mathcal{P}$, soit $Nil(A) \subset \mathcal{P}$. Réciproquement soit $s \notin Nil(A)$ et soit $S = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{s^n\}$ et on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux I de A tels que $I \cap S =$; $\mathcal{I}$ est non vide car s n'étant pas nilpotent, on a $(0) \in \mathcal{I}$, et on l'ordonne par l'inclusion et toute chaine C totalement ordonné de $\mathcal{I}$ admet un majorant dans $\mathcal{I}$, à savoir $M = \cup_{I \in C} I$; on vérifie comme précédemment que M est un idéal (cf. l'exercice précédent). D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{I}$ admet un élément maximal $\mathcal{P}$; montrons que $\mathcal{P}$ est premier. On raisonne par l'absurde avec $x, y \notin \mathcal{P}$ et $xy \in \mathcal{P}$; ainsi les idéaux $(\mathcal{P}, x)$ et $(\mathcal{P}, y)$ n'appartiennent pas à $\mathcal{I}$ car $\mathcal{P}$ est maximal; soient donc k, l des entiers, $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ et $a, b \in A$ tels que $p_1 + xa = s^k$ et $p_2 + yb = s^l$. On a alors $s^{k+l} = p_1p_2 + p_1yb + p_2xa + xyab \in \mathcal{P}$, d'où la contradiction. Ainsi si $s \notin Nil(A)$ alors $s \notin \cap_{\mathcal{P} premier} \mathcal{P}$.

Le quotient $A/Nil(A)$ n'a pas d'éléments nilpotents autres que 0; en effet soit $\overline{x}$ nilpotent, $\overline{x}^n = \overline{0}$; soit $x \in \overline{x}$, $x^n \in Nil(A)$, il existe donc r tel que $(x^n)^r = 0$ soit $x \in Nil(A)$ et donc $\overline{x} = \overline{0}$.

D'après l'exercice 1, $Nil(A/I)$ en tant qu'idéal de A/I correspond à l'idéal $\sqrt{I}$ de A; or $Nil(A/I) = \cap \overline{P}$, où $\overline{P}$ décrit l'ensemble des idéaux premiers de A/I; or $\overline{P}$ correspond à un idéal $\mathcal{P}$ de A contenant I; montrons que $\mathcal{P}$ est premier; soit donc $xy \in \mathcal{P}$ et $x \notin \mathcal{P}$; on a $\overline{xy} \in \overline{\mathcal{P}}$ et $\overline{x} \notin \overline{\mathcal{P}}$ soit $\overline{y} \in \overline{\mathcal{P}}$ soit $y \in \mathcal{P}$; ainsi $\sqrt{I} = \cap_{\substack{\mathcal{P} premier \\ I \subset \mathcal{P}}} \mathcal{P}$.

□

Exercice 4. *Soient A un anneau intègre de corps des fractions $\mathbb{K}$ et soit S une partie multiplicative de A, i.e. $0 \notin S$, $1 \in S$ et $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$. On appelle localisé de A relativement à S, l'ensemble noté $S^{-1}A$ des éléments de $\mathbb{K}$ que l'on peut écrire comme une fraction $\frac{a}{s}$ avec $s \in S$.*

(i) Montrez que $S^{-1}A$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}$ qui contient A.

(ii) Montrez que si A est principal alors $S^{-1}A$ aussi.

(iii) Soit P un idéal premier de A et soit $S = A\backslash P$. Montrez que S est multiplicativement stable et que $S^{-1}A$ est un anneau local, i.e. possède un unique idéal maximal.

(iv) Soit S' l'ensemble des $x \in A$ dont un multiple appartient à S. Montrez que S' est multiplicativement stable et que $(S')^{-1}A = S^{-1}A$. En déduire que si A est factoriel alors $S^{-1}A$ aussi.

(v) Montrez que si A est principal (resp. euclidien) alors $S^{-1}A$ l'est aussi.

Preuve: (i) $S^{-1}A$ est clairement un sous-anneau de $\mathbb{K}$, constitués des fractions a/b écrites sous forme irréductibles, avec $b \in S$.

(ii) Supposons A principal et soit I_S un idéal de $S^{-1}A$; $I = I_S \cap A$ est alors un idéal de A, de la forme (a); montrons que I_S est l'idéal engendré par a dans $S^{-1}A$. En effet soit $x \in I_S$ et soit $s \in S$ tel que $sx \in A$ et donc $sx \in (a)$ soit $sx = ab$ avec $b \in A$ et finalement $x = \frac{b}{s}a$.

(iii) Soit $x, y \in S$ alors $xy \in S$ car $\mathcal{P}$ est premier. Soit $\mathcal{M}_S$ un idéal maximal de $S^{-1}A$; $\mathcal{M} = \mathcal{M}_S \cap A$ alors $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ car sinon $\mathcal{M}$ contiendrait un élément inversible dans $S^{-1}A$; ainsi $\mathcal{M}_S \subset \mathcal{P}_S$ où $\mathcal{P}_S$ est l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par $\mathcal{P}$. Finalement, $\mathcal{P}_S$ est l'unique idéal maximal de $S^{-1}A$.

(iv) Clairement comme $S \subset S'$, alors $S^{-1}A \subset (S')^{-1}A$. Réciproquement soit $a \in A$ et $s' \in S'$; soit $r \in A$ et $s = rs' \in S$, on a alors $a/s' = ar/s \in S^{-1}A$, d'où l'inclusion inverse.
Supposons A factoriel, et soit $\mathcal{P}$ un système complet d'irréductibles de A et soit $\mathcal{Q} = \{p \in \mathcal{P},\ p \notin S\}$. Avec les notations précédentes, on suppose $S = S'$ et soit $q \in \mathcal{Q}$, montrons que q est irréductible dans $S^{-1}A$. Soient $(a, b) \in A^2$ et $(r, s) \in S^2$ tels que $q = (a/s)(b/r)$; on a alors $qrs = ab$ et donc q divise ab. Comme q est irréductible dans A, le lemme d'Euclide donne q divise a ou b; par exemple $a = \lambda q$ avec $\lambda \in A$; on a ainsi $\lambda b = rs \in S$ de sorte que b divise un élément de S et donc $b \in S$, soit $b/r \in (S^{-1}A)^\times$, soit q irréductible. Réciproquement soit a/s irréductible dans $S^{-1}A$; on considère $a = up_1 \cdots p_r$ avec $u \in A^\times$, $p_i \in \mathcal{P}$, une décomposition en facteurs irréductibles; supposons $p_1, \cdots, p_k \in S$ et $p_{k+1}, \cdots, p_r \in \mathcal{Q}$; ainsi $up_1 \cdots p_k/s \in (S^{-1}A)^\times$ et a/s est associé à $p_{k+1} \cdots p_r$ qui est un produit d'irréductibles, or a/s étant irréductible, on en déduit $k = r - 1$ et a/s associé à p_r. Pour montrer que $\mathcal{Q}$ est un système complet d'irréductibles de $S^{-1}A$, il faut montrer que si q et q' sont des éléments associés de $\mathcal{Q}$ alors $q = q'$; $q' = q(a/s)$ soit $q's = qa$ et donc d'après le lemme d'Euclide q divise q' ou s; or les diviseurs de s appartiennent à S et donc q divise q' et donc q et q' sont associés dans A soit $q = q' \in \mathcal{P}$.
Le fait que $S^{-1}A$ vérifie (E) est évident; $a = up_1 \cdots p_r$ dans A avec $p_1, \cdots, p_k \in S$ soit $a/s = (up_1 \cdots p_k/s)p_{k+1} \cdots p_r$ avec $up_1 \cdots p_k/s$ inversibles et $p_{k+1}, \cdots p_r \in \mathcal{Q}$n d'où (E). Pour (U), il suffit de montrer le lemme d'Euclide; q divise $(a/r)(b/s)$ et soit $(c, t) \in A \times S$ tels que $ab/rs = qc/t$ et donc $qcrs = abt$ avec q ne divisant pas t car $q \notin S$, soit q divise ab et donc par exemple q divise a et finalement q divise a/s.

(v) Supposons A principal et $S = S'$ avec les notations de (iv); soit I_S un idéal de $S^{-1}A$; $I = I_S \cap A$ est un idéal de A, donc de la forme (a). Montrons que $I_S = (a)$ dans $S^{-1}A$; comme I_S est un idéal, on a $(a) \subset I_S$, réciproquement soit $i = b/s \in I_S$ avec $is = b = \lambda a$ et donc $i \in (a)$.

Supposons A euclidien de stathme ν; on définit alors $\nu_S(x) = \inf\{\nu(\lambda x),\ \lambda \in S \ /\ \lambda x \in A\}$. Montrons que $S^{-1}A$ est euclidien pour ν_S. Soient $x, y \in S^{-1}A$ avec $y \neq 0$ et soit s, t tels que $a = sx, b = ty \in A$ sont tels que $\nu_S(x) = \nu(a)$ et $\nu_S(y) = \nu(b)$; on effectue une division euclidienne de a par b: $a = bq + r$ avec $\nu(r) < \nu(b)$ ou $r = 0$. On a alors $a/s = (b/t)(qt/s) + r/s$ soit $x = y(qt/s) + r/s$ avec si $r \neq 0$, $\nu_S(r/s) \leqslant \nu(r) < \nu(b) = \nu'(y)$, d'où le résultat.

$\square$

1 Etude de quelques anneaux de fonctions

Exercice 1. *Soit $A = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions holomorphes dans tout le plan complexe.*

(i) Montrez que A est intègre et donnez son corps des fractions.

(ii) Montrez que A n'est pas noethérien.

(iii) Donnez $A^\times$ et montrez que $f \in A$ est inversible si et seulement si $f = \exp(g)$ pour $g \in A$.

(iv) Montrez que les éléments irréductibles de A sont les fonctions possèdant un unique zéro simple, et en déduire que A n'est pas factoriel.

(v) Montrez que A est intégralement clos.

Preuve: (i) Soient $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $fg = 0$, i.e. $f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; dans le disque fermé unité $\overline{D}$, f (ou g) possède une infinité de zéros. Les zéros d'une fonction holomorphe non nulle étant isolés, il ne peut n'y en avoir qu'un nombre fini dans un compact de sorte que $f = 0$ sur $\overline{D}$ et donc nulle sur $\mathbb{C}$ par prolongement analytique et donc A intègre. Le corps des fractions de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

(ii) On considère pour $k \in \mathbb{N}$, l'idéal I_k des fonctions holomorphes qui s'annulent sur $\mathbb{N}\backslash\{0, \cdots, k\}$; la suite I_k est clairement croissante et montrons qu'elle n'est pas stationnaire. On considère la fonction $f_n(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z(z-1)\cdots(z-n)}$; les entiers étant des zéros simples de $\sin(\pi z)$, on en déduit que $f_n \in I_n$ et $f_n \notin I_{n-1}$ de sorte que A n'est pas noethérien.

(iii) Soit $f \in A^\times$; il existe alors $g \in A^\times$ tel $fg = 1$ et donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Réciproquement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, $g = 1/f$ est alors une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, de sorte que $A^\times$ est exactement l'ensemble des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{C}$.
Evidemment $\exp(g) \in A^\times$ car la fonction exponentielle ne s'annule jamais. Réciproquement si $f \in A^\times$, alors $f'/f \in A$ admet une primitive holomorphe g sur $\mathbb{C}$ (qui est un ouvert connexe) et $(f/\exp(g))' = \frac{f' - fg'}{\exp g} = 0$ et donc $f/\exp g$ est une fonction constante sur $\mathbb{C}$: $f = \lambda \exp g$. Or la fonction exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^\times$ est surjective soit donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = \exp \alpha$ et $f = \exp(\alpha + g)$ avec $\alpha + g$ holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(iv) Soit $f \in A$ possèdant un unique zéro simple z_0 et soit $f = gh$ avec $g \notin A^\times$; g et h ne s'annulent pas en dehors de z_0 et g possède au moins un zéro, soit $g(z_0) = 0$. En outre z_0 étant un zéro simple de f, on en déduit $h(z_0) \neq 0$ soit $h \in A^\times$ et donc f irréductible. Réciproquement soit $f \in A$ possèdant au moins deux zéros comptés avec multiplicité; soit z_1, z_2 deux d'entre eux avec éventuellement $z_1 = z_2$ si c'est un zéro multiple. On pose $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \in A$ et $f = (z - z_1) \times (z - z_2)g(z)$ avec $z - z_1 \notin A^\times$ et $(z - z_2)h(z) \notin A^\times$ et donc f non irréductible. Ainsi une fonction f possèdant une infinité de zéros, par exemple $\sin(\pi z)$, ne peut pas se décompôser en un produit fini d'éléments irréductibles de sorte que A n'est pas factoriel.

(v) Soit $h = f/g$ une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ écrite sous forme irréductible et $a_0, \cdots, a_{n-1}$ des éléments de A tels que

$$h^n + a_{n-1}h^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

soit en multipliant par g^n, on obtient $f^n = -a_{n-1}f^{n-1}g - \cdots - a_0 g^n$ et l'on voit que si g admet un zéro z_0 alors $f(z_0) = 0$ et donc $(z - z_0)$ divise f et g ce qui contredit le fait que f et g ont été choisis premiers entre eux et donc A est intégralement clos.

$\square$

Exercice 2. *Soit k un corps et $A = k[[X]]$ l'algèbre des séries formelles à coefficients dans k.*

(i) Montrez que A est intègre et déterminez $A^\times$.

(ii) Montrez que tout idéal non nul de A est de la forme $X^n A$, $n \in \mathbb{N}$. En déduire que A est principal et déterminez ses éléments irréductibles.

(iii) Montrez que A est euclidien.

Preuve: (i) Soit ν la valuation sur $k[[X]]$ définie par $\nu(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i) = \min\{i \in \mathbb{N},\ a_i \neq 0\}$ avec la convention $\nu(0) = +\infty$. Ainsi si $a = \sum_i a_i X^i$ et $b = \sum_i b_i X^i$ sont de valuations respectives α, β, alors ab est de valuation $\alpha + \beta$ car $a_\alpha b_\beta \neq 0$.
Montrons que $a = \sum_i a_i X^i$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$; supposons $a_0 \neq 0$, la recherche d'un inverse se ramène à la résolution du système triangulaire suivant: $a_0 b_0 = 1$ et pour tout $k \geqslant 1$, $\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = 0$; une solution se calculant facilement par récurrence sur k. Réciproquement si a a pour inverse $b = \sum_i b_i X^i$, on a alors $a_0 b_0 = 1$ et donc $a_0 \neq 0$.

(ii) Soit I un idéal non nul de A et soient $n = \min_{x \in I} \nu(x)$ et $a \in I$ tel que $\nu(a) = n$; $a = X^n b$ avec $\nu(b) = 0$ de sorte que b est inversible soit $X^n \in I$ et donc $(X^n) \subset I$; l'inclusion réciproque étant évidente, on en déduit $I = (X^n)$.
L'anneau A est donc principal, donc factoriel. Soit $p \in A$ un élément irréductible, l'idéal (p) est alors premier et maximal. Or tout idéal I est contenu dans (X) qui est maximal car si $b \notin (X)$ alors b est inversible; ainsi on a $(a) = (X)$ et a est associé à X de sorte qu'aux inversibles près, il n'y a qu'un seul irréductible, à savoir X.

(iii) Montrons que A est euclidien pour le stathme ν. Soient donc $(a, b) \in A \times A^\times$; $b = X^n \beta$ avec $\beta \in A^\times$. On écrit $a\beta^{-1} = X^\beta q + c$ avec $\deg c < \beta$, et donc $a = c\beta + bq$ avec $c\beta = 0$ ou $\nu(c\beta) < \nu(b) = \beta$, d'où le résultat.

$\square$

Exercice 3. *Soit E un espace compact et $A = \mathcal{C}(E)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur E, muni de la topologie de la convergence uniforme.*

(i) Déterminez $A^\times$.

(ii) Montrez que tout idéal maximal de A est fermé.

Soit ϕ l'application qui à un fermé associe l'idéal $V(F) = \{f \in A,\ f_{|F} = 0\}$.

(iii) Montrez que les idéaux maximaux de A sont les $V(\{a\})$ avec $a \in E$.

(iv) Montrez que ϕ établit une bijection entre les fermés de E et les idéaux fermés de A.

Preuve: (i) Clairement $A^\times$ est constitué des fonctions qui ne s'annulent jamais.

(ii) Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de A; l'adhérence $\overline{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ est un idéal de A et $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$. Si $\overline{\mathcal{M}} = A$ alors la fonction constante égale à 1 est limite uniforme d'éléments de $\mathcal{M}$ de sorte qu'il existe $f \in \mathcal{M}$ telle que $||1 - f||_\infty < 1/2$ et f ne s'annule pas soit $f \in A^\times$ et $\mathcal{M} = A$ ce qui n'est pas. Ainsi $\overline{\mathcal{M}} \neq \mathcal{M}$ et par maximalité de $\mathcal{M}$, on en déduit que $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$, soit $\mathcal{M}$ fermé.

(iii) Soit $a \in E$; montrons que $\mathcal{M} = V(\{a\})$ est maximal; soit $f \notin \mathcal{M}$. On écrit alors $1 = \frac{f}{f(a)} + \frac{f-f(a)1}{f(a)}$ de sorte que 1 appartient à l'idéal engendré par f et $\mathcal{M}$, soit $\mathcal{M}$ maximal. Autrement dit le morphisme d'anneau $\phi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à $f \in A$ associe $f(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ se factorise en un morphisme injectif $\overline{\phi} : A/\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est un isomorphisme car ϕ est clairement surjective, de sorte que $A/\mathcal{M}$ est un corps et donc $\mathcal{M}$ est maximal.
Réciproquement soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de A; $Z(\mathcal{M}) = \{x \in E,\ \forall f \in \mathcal{M},\ f(x) = 0\}$ est un fermé de E. Montrons que $Z(\mathcal{M})$ est non vide; si c'était le cas, pour tout $x \in E$, il existe une fonction continue $f_x \in \mathcal{M}$ telle que $f_x(x) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage ouvert U_x de x sur lequel f_x ne s'annule pas; les ouverts U_x recouvrent E et par compacité, on peut en extraire un recouvrement fini $U_{x_1}, \cdots, U_{x_r}$. Ainsi $f_{x_1}^2 + \cdots + f_{x_r}^2$ est un élément de $\mathcal{M}$ qui ne s'annule pas, soit $\mathcal{M} = A$ ce qui n'est pas. Soit donc $x \in Z(\mathcal{M})$; on a alors $\mathcal{M} \subset V(\{x\})$ et par maximalité $\mathcal{M} = V(\{x\})$, d'où le résultat.

(iv) Pour toute partie fermée F de E, $V(F)$ est clairement un idéal fermé de A. Montrons l'injectivité de ϕ; soient donc F, F' deux fermés distincts de E et $x \in F' \backslash F$; d'après le théorème de Tietze-Urysohn, il existe $f \in A$ tel que $f(x) = 1$ et $f_{|F} = 0$; on a $f \in V(F)$ et $f \notin V(F')$, d'où l'injectivité.
Pour la surjectivité, soit I un idéal fermé de A; $I = A$ est l'image de l'ensemble vide. Si $I \neq A$, alors I est contenu dans un $V(\{a\})$ et $a \in F = Z(I)$. On a clairement $I \subset V(F)$; montrons l'égalité. On raisonne par l'absurde; soit $f \in V(F)\backslash I$ et soient $\epsilon > 0$ et $U = \{x \in E,\ |f(x)| < \epsilon\}$ un ouvert de E contenant F. Pour tout $x \notin U$, il existe $f_x \in I$ telle que $f_x(x) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que $\overline{U}_x \cap F =$ et f_x ne s'annule pas sur $\overline{U}_x$. L'ouvert U et les U_x forment un recouvrement ouvert du compact E dont on extrait un recouvrement fini: U, $U_{x_1}, \cdots, U_{x_r}$. Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant r$, le théorème de Tietze-Urysohn assure l'existence d'une fonction $g_i \in A$ telle que $\forall x \in \overline{U}_{x_i}$, $g_i(x) = f(x)/f_{x_i}(x)$ et $g_{i\ |F} = 0$. Soit (φ_U, φ_i) une partition de l'unité associée au recouvrement fini précédent, i.e. $\varphi_U + \varphi_1 + \cdots + \varphi_r = 1$, $\operatorname{Supp} \varphi_i \subset U_{x_i}$ et $\operatorname{Supp} \varphi_U \subset U$, les φ_i et φ_U étant positives. On pose $f_\epsilon = \sum_{i=1}^r \varphi_i g_i f_{x_i}$. Comme $f_{x_i} \in I$, on a $f_\epsilon \in I$ et f_ϵ coincide avec f en dehors de U; en effet soit $x \notin U$, si $\varphi_i(x) \neq 0$ alors $x \in U_{x_i}$ et $g_i(x) f_{x_i}(x) = f(x)$; ainsi $f - \epsilon(x) = (\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_r(x))f(x)) = (\varphi_U(x) + \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_r(x))f(x) = f(x)$. En outre sur sur U, on a $|f(x) - f_\epsilon(x)| = |\varphi_U(x) f(x)| < \epsilon$ et donc $||f - f_\epsilon||_\infty \leqslant \epsilon$ soit $f \in \overline{I} = I$, d'où la contradiction et donc $I = V(F)$ et la surjectivité.

□

Exercice 4. *Soit D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, $\overline{D}$ le disque unité fermé. On note $\mathcal{A}(D)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{D}$ et holomorphes sur D. L'algèbre $\mathcal{A}(D)$ munie de la norme de la convergence uniforme est alors de Banach.*

- *(i) Montrez que l'ensemble des polynômes complexes est dense dans $\mathcal{A}(D)$.*
- *(ii) Soient $f_1, \cdots, f_n$ ($n \geqslant 2$) des éléments de $\mathcal{A}(D)$, n'ayant pas de zéros communs. Montrez que l'idéal I qu'ils engendrent est $\mathcal{A}(D)$ tout entier.*
- *(iii) Montrez que les idéaux maximaux de $\mathcal{A}(D)$ sont les $\{f \in \mathcal{A}(D),\ f(\alpha) = 0\}$ où $\alpha \in \overline{D}$.*

Indication: on rappelle que dans une algèbre de Banach, les idéaux maximaux sont les noyaux des formes linéaires multiplicatives non nulles.

Preuve: (i) Soient $\epsilon > 0$ et $f \in \mathcal{A}(D)$; f est continue sur le compact $\overline{D}$. Le théorème de Heine assure alors que f est uniformément continue de sorte qu'il existe $0 < \eta < 1$ tel que pour tout

$z, z' \in \overline{D}$, $|z - z'| \leqslant \eta$, $|f(z) - f(z')| \leqslant \epsilon$. Soit $f_\epsilon : z \in \overline{D} \mapsto f((1-\eta)z)$; alors $||f - f_\epsilon||_\infty \leqslant \epsilon$ et f_ϵ admet un rayon de convergence strictement supérieur à 1. Ainsi f_ϵ est limite uniforme des sommes partielles de la série entière associée, ces sommes partielles étant des polynômes, le résultat en découle.

(ii) On raisonne par l'absurde; I est alors contenu dans un idéal maximal, noyau d'une forme linéaire multiplicative h non nulle. Soit $u : z \in \overline{D} \mapsto z \in \mathbb{C}$, alors $u \in \mathcal{A}(D)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| > 1$, $u - \alpha$ est inversible et donc $h(u - \alpha) \neq 0$, car l'image d'un inversible par un morphisme non nul d'anneau est non nulle. Ainsi $h(u) = \alpha \in \overline{D}$ et donc $h(u^n) = \alpha^n = u^n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et plus généralement pour tout polynôme P, on a $h(P) = P(\alpha)$. Les polynômes étant denses dans $\mathcal{A}(D)$, on en déduit que $h(f) = f(\alpha)$ pour tout $f \in \mathcal{A}(D)$ car h et $f \mapsto f(\alpha)$ sont continues. Mais alors, il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $f_i(\alpha) \neq 0$, soit $h(f_i) \neq 0$ ce qui contredit le fait que I soit contenu dans le noyau de h et donc $\mathcal{A}(D) = I$.

(iii) Soit $\alpha \in \overline{D}$ et $f \in \mathcal{A}(U) \mapsto F(\alpha) \in \mathbb{C}$ une forme linéaire multiplicative continue de $\mathcal{A}(D)$; son noyau est donc un idéal maximal. Réciproquement soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal noyau d'une forme linéaire continue h no nulle de $\mathcal{A}(D)$. D'après ce qui précède, h est du type $f \in \mathcal{A}(U) \mapsto f(\alpha)$ et $M = \{f \in \mathcal{A}(D),\ f(\alpha) = 0\}$, d'où le résultat.

$\square$