# Géométrie hyperbolique

## 1 Angles hyperboliques

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension 2 muni d'une forme quadratique $q$ de signature $(1,1)$. On fixe une base $(e_1, e_2)$ de $E$ telle que la matrice de $q$ y soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 1.** *Soit $f$ un élément de $O^+(q)$ (resp. $O^-(q)$) montrez que sa matrice dans la base $(e_1, e_2)$ est de la forme $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k & 0 \end{pmatrix}$) pour $k \in \mathbb{R}^*$. On note $O^{++}(q)$ la composante connexe de $O^+(E)$.*

**Exercice 2.** *On fait agir $O(q)$ sur les droites de $E$. Décrivez les orbites sous $O(q)$, $O^+(q)$ et $O^{++}(q)$. Définissez alors la notion d'angle hyperbolique de "deux" droites ainsi que sa mesure.*

**Exercice 3.** *Notons $I, J$ les droites isotropes de $(E, q)$. Montrez que pour deux droites $D, D'$ où $q$ est strictement positive, la mesure de l'angle hyperbolique orienté entre $D$ et $D'$ est donné par la formule de "Laguerre"*

$$\mathrm{meas}(\widehat{DD'}) = \frac{1}{2}\log([D, D', J, I])$$

*et que $\overline{DD'} := \frac{1}{2}|\log([D, D', J, I])|$ définit une distance telle que*

$$\widehat{DD'} = \mathrm{Arcch}\Big(\frac{< v, v' >}{\sqrt{q(v)}\sqrt{q(v')}}\Big)$$

*où $v$ et $v'$ sont des vecteurs directeurs de respectivement $D$ et $D'$.*

## 2 Géométrie hyperbolique

L'espace $E = \mathbb{R}^{n+1}$ est identifié au produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et les vecteurs notés $v = (z, t)$ avec $z \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. L'hyperplan affine $H$ est défini par $t = 1$ et on désigne par $q$ la forme quadratique $-\sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2$ de signature $(1, n)$, par $P$ sa forme polaire et on note $Q = q^{-1}(0)$ son cône isotrope. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des droites de $E$ telles $q$ y soit strictement positive et on définit

$$\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{B} \qquad (z, t) \mapsto \frac{z}{t}$$

où $\mathcal{B}$ est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 1.** *En utilisant le paragraphe précédent, définissez une distance hyperbolique sur $\mathcal{P}$ puis sur $\mathcal{B}$.*

Le fibré tangent à $\mathcal{P}$ s'identifie au quotient de l'ensemble des couples $(\xi, u)$ où $q(\xi) = 1$ et $u \in \xi^\perp$, l'orthogonal pour $q$, par la relation d'équivalence $(\xi, u) \sim (\xi', u')$ si $\xi' = \epsilon\xi$ et $u' = \epsilon u$ avec $\epsilon = \pm 1$. Dans $\mathcal{P}$, on appelle droite toute intersection non vide de $\mathcal{P}$ avec une droite projective de $P^n(\mathbb{R})$. Les demi-droites d'origine $D$ est un ensemble de droites engendré par les vecteurs $\mathrm{ch}t\xi + \mathrm{sh}tu$ avec $q(\xi) = 1$, $q(u) = -1$ et $u \in \xi^\perp$, lorsque $t \in \mathbb{R}^+$.

**Exercice 2.** *En utilisant $\Phi$, décrivez dans $\mathcal{B}$, les droites, les demi-droites et les angles entre deux demi-droites. Quels avantages et inconvénients possède ce modèle?*

**Exercice 3.** *Soient trois points distincts $z, z', z"$ de $\mathcal{B}$: on note $a = d(z', z")$, $b = d(z", z)$, $c = d(z, z')$ et $\alpha$ l'angle en $z$ des demi-droites d'origine $z$ qui passent par $z'$ et $z"$. Montrez que l'on a*

$$\mathrm{ch}a = \mathrm{ch}b\ \mathrm{ch}c - \mathrm{sh}b\ \mathrm{sh}c\ \cos\alpha$$

*Montrez alors que les droites de $\mathcal{B}$ sont les chemins les plus courts et décrivez les droites passant par un point $z$ ne rencontrant pas une droite donnée $D$. Quelle remarque "historique" cela vous évoque-t-il?*
*On pourra aussi montrer la loi des sinus d'un triangle*

$$\frac{\sin\alpha}{\mathrm{sh}a} = \frac{\sin\beta}{\mathrm{sh}b} = \frac{\sin\gamma}{\mathrm{sh}c}, \qquad \cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma\ \mathrm{ch}a - \cos\beta\cos\gamma$$

**Exercice 4.** *Montrez que le groupe des isométries de $\mathcal{P}$ est isomorphe au groupe $PO(q)$.*

**Exercice 5.** *Montrez que toute mesure sur $\mathcal{B}$ invariante par les isométries est de la forme $k\lambda\omega$ où $k \in \mathbb{R}^*$, $\omega$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ restreinte à $\mathcal{B}$ et $\lambda$ est la fonction $z \mapsto (1-||z||^2)^{-(n)/2}$.*

**Exercice 6.** ***Le modèle conforme*** *$\mathcal{C}$ On considère la projection stéréographique $f : S^n \backslash v \to \mathbb{R}^n$ de pôle nord $v$ et appelons $\Sigma$ l'hémisphère sud de $S^n$. Soit $\pi : (z,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$; restreinte à $\Sigma$ et à $\mathcal{B}$, $\pi$ est bijective, on notera $g$ son inverse. On pose $\Xi = f \circ g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ et $\Omega = \Xi^{-1}$. On appelle modèle conforme $\mathcal{C}$ de l'espace hyperbolique, l'ensemble $\mathcal{B}$ muni de la métrique $\delta$ définie par $\delta(x,y) = d(\Omega(x), \Omega(y))$ où $d$ est la distance hyperbolique de $\mathcal{B}$.*

- *Soit $D$ la droite de $\mathcal{B}$ portée par la droite affine $\bar{D}$ qui coupe $S^{n-1}$ en $u, v$. Montrez que $g(\bar{D})$ est un cercle de $S^n$ qui coupe $S^{n-1}$ en $u, v$ à angle droit. Donnez alors les droites et les demi-droites de $\mathcal{C}$.*
- *Montrez que le groupe des isométries de $\mathcal{C}$ est engendré par les restrictions à $\mathcal{C}$ des inversions de $\mathbb{R}^n$ qui laissent $\mathcal{C}$ stable et de pôle extérieur à $\mathcal{C}$ et par les symétries hyperplanes de centre 0.*

  *En déduire qu'en dimension 2, les bijections holomorphes (resp. anti holomorphes) sont les restrictions au disque des homographies de la formes*

  $$z \mapsto \frac{e^{i\theta}z + a}{\bar{a}e^{i\theta}z + 1} \qquad \textit{resp. } z \mapsto \frac{e^{i\theta}\bar{z} + a}{\bar{a}e^{i\theta}\bar{z} + 1}$$

- *Montrez que le modèle $\mathcal{C}$ est conforme (Indication: on notera qu'en 0 les angles euclidiens et hyperboliques de $\mathcal{N}$ coincident et utiliser que le groupe des isométries de $\mathcal{C}$ conserve les angles.*
- *Montrer que $\delta(x,y) = \left|\log(\frac{xu}{xv}/\frac{yu}{yv})\right|$ où $u, v$ désigne les points de $S^{n-1}$ où le cercle orthogonal à $S^{n-1}$ passant par $x, y$ coupe $S^{n-1}$.*
- *Montrez en utilisant la formule $\mathrm{ch}a = \mathrm{ch}b\ \mathrm{ch}c - \mathrm{sh}b\ \mathrm{sh}c\ \cos\alpha$, que les cercles de $\mathcal{C}$ de centre $a$ sont orthogonaux aux droites de $\mathcal{C}$ et déduisez en que ce sont les cercles euclidiens contenu dans $S^1$ du faisceau de cercle contenant $S^1$ et de point limite $a$. Retrouvez le même résultat en utilisant la distance $\delta$ ci-dessus.*

**Exercice 7.** *Soit $\mathcal{T}$ un triangle du disque hyperbolique $\mathcal{B}$ dont les angles sont $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Montrez, sans utiliser la formule de Gauss-Bonnet, que l'aire de $\mathcal{T}$ est égale à $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.*
*Indication: traitez d'abord le cas où les trois points sont sur le bord en utilisant que le groupe des isométries opère transitivement sur les triplets de points distincts du bord Ensuite pour un angle $\alpha$ et deux points sur le bord montrez que l'aire est une fonction $f(\alpha)$ telle que $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) - \pi$. Traitez enfin le cas général.*

**Exercice 8.** ***Le modèle $\mathcal{H}$ du demi-espace de Poincaré*** *On considère l'image de $\mathcal{C}$ par une inversion de $\mathbb{R}^n$ dont le pôle est situé sur $S^{n-1}$.*

- *Décrivez les droites et les demi-droites de $\mathcal{H}$.*
- *Pour $n = 2$ montrez que la distance hyperbolique entre $x = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ est donnée par la formule*

  $$\mathrm{ch}d(z,z') = \frac{(x-x')^2 + y^2 + y'^2}{2yy'}$$

  *et que la mesure invariante est $\frac{dxdy}{y^2}$ puis que le sous-groupe des isométries s'identifie à $PGL_2(\mathbb{R})$, où les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant positif (resp. négatif) agissent par les homographies*

  $$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \textit{resp. } z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

  *Ainsi le groupe des automorphismes "holomorphes" et géométriques sont les mêmes; on pourra comparer avec ce qui passe pour la sphère de Riemann où $SO(3,\mathbb{R}) \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, ou encore le plan complexe $\mathbb{C} \rtimes SO(2) \hookrightarrow \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\times$.*

- *Le groupe des isométries est simplement 3-transitif sur le bord $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

**Exercice 9.** *(1) Montrez que l'action par homographies de $PU(1,1)$ sur la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ préserve le disque unité.*

*(2) Montrez que $PU(1,1)$, $PSL_2(\mathbb{R})$ et $PSO(2,1)$ sont isomorphes.*

**Exercice 10.** *Pour $\delta = 2$, montrez que $\mathcal{H}$ est $\delta$-hyperbolique, i.e. pour tout triangle hyperbolique, tout point situé sur un des cotés est à distance au plus $\delta$ d'un point situé sur l'un des deux autres côtés.*
***Indication**: on raisonne dans $\mathcal{C}$. Montrez que l'aire hyperbolique d'un disque de rayon $\rho$ est $\frac{\pi}{2}(\mathrm{ch}\rho - 1)$. En déduire que le rayon du cercle inscrit dans un triangle est borné indépendamment du triangle.*

# 3 Étude de quelques sous-groupes de $SL_2(\mathbb{Z})$

**Remarque:** à isomorphisme près les seules surfaces de Riemann simplement connexes sont $Y = \mathbb{C}$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathcal{H}$. Ainsi toute surface de Riemann connexe est de la forme $\Gamma\backslash Y$ pour $\Gamma$ un sous-groupe discret sans point fixe du groupe des automorphismes holomorphes de $Y$ (i.e. du groupe fondamental $\pi_1(Y)$). La sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ n'uniformise qu'elle même, pour $Y = \mathbb{C}$, on obtient les courbes elliptiques $\mathbb{C}/\Gamma$ où $\Gamma$ est un réseau de $\mathbb{R}^2$. Ainsi toute surface de Riemann de genre supérieur ou égal à 2 est de la forme $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ où $\Gamma$ est un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 1.** *Montrez que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

***Indication**: pensez au développement en fractions continues de $a/c$.*

**Exercice 2.** *Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C},\ Im\ z > 0\}$, le demi-plan de Poincaré. A toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$, on associe la fonction homographique $f_A$ définie pour tout $z \in \mathcal{H}$ par $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$*

*(a) Montrez que l'application $f : A \mapsto f_A$ est un morphisme de groupes de $SL_2(\mathbb{Z})$ dans le groupe des permutations de $\mathcal{H}$. Déterminez $\mathrm{Ker}\, f$. On note $G$ l'image de $f$ et on l'appelle le groupe modulaire*

*(b) Pour $z \in \mathcal{H}$, on pose $I_z = \{Im\ g(z),\ g \in G\}$. Montrez que $I_z$ est une partie de $\mathbb{R}_+^\times$ admettant un plus grand élément.*

*(c) On note $G_0$ le sous-groupe de $G$ engendré par $S : z \mapsto -1/z$ et $T : z \mapsto z+1$. Pour $z \in \mathcal{H}$, montrez qu'il existe $g_0 \in G_0$ tel que si on pose $z_0 = g_0(z)$, on a pour tout $g \in G_0$, $Im\ g(z) \leq Im\ z_0$.*

*(d) Soit $D = \{z \in \mathcal{H}\ /\ |Re(z)| \leq 1/2,\ |z| \geq 1\}$, le domaine fondamental du groupe modulaire. Montrez que l'on peut choisir $z_0$ dans $D$.*

*(e) En déduire que $G_0 = G$ mais que $G$ n'est pas engendré par $S$ et $ST$.*

*(f) Montrez que dans $PSL_2(\mathbb{R})$, on a les relations $S^2 = I$ et $(ST)^3 = 1$ puis que toutes les relations sont engendrées par ces deux ci.*

*(g) Calculez le volume hyperbolique de $D$.*

**Exercice 3.** *Décrivez l'orbite de $i \in \mathcal{H}$ sous l'action de $B(\mathbb{R}) \subset SL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures. En déduire la décomposition d'Iwasawa*

$$SL_2(\mathbb{R}) = B(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})$$

**Exercice 4.** *Soit $\Gamma$ un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$, montrez que $\Gamma$ agit proprement discontinument sur $\mathcal{H}$ (i.e. pour tout compact $A$ et $B$ de $\mathcal{H}$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma A \cap B \neq \emptyset\}$ est fini). Réciproquement montrez que tout sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ qui agit proprement discontinument sur $\mathcal{H}$ est discret.*

**Exercice 5.** ***Un groupe Fuchsien*** *est par définition un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$. Montrez que si $\Gamma$ est un groupe Fuchsien, alors pour tout $z \in \mathcal{H}$ on a:*

- *$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z = z\}$ est fini;*
- *il existe un voisinage $U$ de $z$ tel que si $\gamma \in \Gamma$ est tel que $U \cap \gamma U \neq \emptyset$ alors $\gamma z = z$;*
- *si $z' \notin \Gamma z$, alors il existe des voisinages $U, U'$ de respectivement $z, z'$ tels que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma U \cap V = \emptyset$.*

**Exercice 6.** *Soit $\Gamma$ un groupe Fuchsien et soit $D$ un domaine fondamental pour $\Gamma$ (cf. le cours pour l'existence de domaines fondamentaux). Soit $\Gamma'$ est un sous-groupe de $\Gamma$ d'indice fini et soient $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ un système de représentants de $\Gamma/\Gamma'$. Montrez que*

$$D' := \bigcup \gamma_i D$$

*est un domaine fondamental pour $\Gamma'$.*

**Exercice 7.** *(1) Montrez que l'ensemble des $z = x + iy \in \mathcal{H}$ tels que*

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \ |z + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}, \ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}, \ |z - \frac{3}{2}| > \frac{1}{2}$$

*est un domaine fondamental du sous-groupe de congruence $\Gamma(2)$.*

*(2) Montrez que $\Gamma(2)$ est engendré par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.*

*(3) On considère l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. En jouant au "ping-pong" avec les parties $P_A = ]-1, 1[$ et $P_B = P_A^c$, montrez que $\Gamma(2)$ est le groupe libre engendré par $A$ et $B$.*

*(4) En considérant la famille $(A^n B A^n)_{n \in \mathbb{N}}$, construisez un groupe libre de rang $n$.*

**Exercice 8.** *Soit $p$ un nombre premier. Montrez qu'un système de représentants des classes à gauche de $SL_2(\mathbb{Z})$ modulo $\Gamma^0(p)$ (resp. $\Gamma_0(p)$) est formé par $1, T, \cdots, T^{p-1}, S$ (resp. $S, ST, \cdots, ST^{p-1}, I$).*

**Exercice 9.** *Montrez que $[\Gamma(1) : \Gamma(n)] = n^3 \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p^2})$.*

**Exercice 10.** *Soient $a, b$ des entiers relatifs et soit $B = B_{a,b}$ la $\mathbb{Q}$-algèbre de base $\{1, i, j, k\}$ où la multiplication est donnée par*

$$i^2 = a, \ j^2 = b, \ ij = k = -ji$$

- *Montrez que $B \otimes \mathbb{Q}(\sqrt{a}) \simeq \mathbb{M}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ et en déduire que $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ est soit isomorphe à $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ soit à l'algèbre de quaternion usuelle $\mathbb{H}$.* ***Dans la suite on supposera que** $B := B_{a,b}$ **est telle que** $B \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.*
- *Pour $\alpha = c + di + ej + fk \in B$ on définit $\mathrm{Nm}(\alpha) = c^2 - d^2 - e^2 - f^2 \in \mathbb{Q}$. Montrez que l'ensemble des $\alpha \in B \otimes \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Nm}(\alpha) = 1$ est isomorphe à $SL_2(\mathbb{R})$.*
- *Un **ordre** dans $B$ est un sous-anneau $\mathcal{O}$ libre de rang 4. On définit*

  $$\Gamma_{a,b} = \{\alpha \in \mathcal{O} \mid \mathrm{Nm}(\alpha) = 1\}$$

  *ainsi que les sous-groupes de congruence qui lui sont associés. Montrez que $\Gamma_{a,b}$ est isomorphe à un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$.*
- *Trouvez $a, b, \mathcal{O}$ tels que $\Gamma_{a,} = SL_2(\mathbb{Z})$.*
- *On peut montrer que $B$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ si et seulement si $\Gamma_{a,b} \backslash \mathcal{H}$ est compact (cf. la littérature sur le sujet).*

**Remarque**: un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Q})$ est dit **arithmétique** s'il est commensurable avec $SL_2(\mathbb{Z})$. Si on note $N(m)$ (resp. $N'(m)$) le nombre de sous-groupe (resp. de congruence) de $SL_2(\mathbb{Z})$ d'indice $< m$ alors $N'(m)/N(m) \to 0$ quand $m \to +\infty$. Par ailleurs il y a beaucoup de sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas arithmétique: parmi ceux-ci ceux de "première espèce" correspondent à $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ de volume fini.

Parmi les groupes de matrices $SL_2$ possède beaucoup de sous-groupes discrets. Pour les autres groupes, Margulis a montré, sous certaines hypothèses qui excluent $SL_2(\mathbb{R})$, que les sous-groupes discrets $\Gamma$ de $G(\mathbb{R})$ tels que $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})$ est de volume fini, sont arithmétiques et que pour beaucoup de ces groupes $G$, tous les sous-groupes arithmétiques sont de congruence.

**Exercice 11.** *Soit* $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *une forme quadratique définie, i.e.* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. *On dira que* $q$ *est* ***réduite*** *si et seulement si*

$$-a < b \leq a < c \text{ ou } 0 \leq b \leq a = c$$

*Deux formes quadratique* $q, q'$ *seront dites équivalentes s'il existe* $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ *telle que* $Q' = {}^tAQA$.

- *Montrez que toute forme quadratique binaire définie est équivalente à une forme réduite.*
- *Montrez que deux formes réduites sont équivalentes si et seulement si elles sont égales.*
- $q$ *sera dite entière si* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Montrez qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalence de forme quadratique binaire définie entière de discriminant donné.*

Le problème d'empilement régulier de sphères est de déterminer quelle est la proportion maximale de l'espace que peut occuper une famille de boules, mutuellement disjointes et de même rayon, centrées en les points d'un réseau.

**Exercice 12.** *Étant donné un réseau de base* $(a_1, \cdots, a_n)$*; on l'envoie sur* $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ *muni de sa base canonique, par l'application linéaire* $a_i \mapsto e_i$. *On transforme du même coup le produit scalaire de l'espace euclidien en un forme quadratique de matrice* $A = ((a_i|a_j))_{1 \leq i,j \leq n}$. *Réciproquement, toute forme quadratique définie positive* $A$ *provient d'un réseau, défini à une transformation orthogonale près: on l'obtient en "redressant" l'ellipsoïde de la forme quadratique en une sphère. On a donc définit une correspondance bijective entre réseaux et classes de formes quadratiques définies positives.*

*Pour une forme quadratique sur* $\mathbb{R}^n$ *de matrice* $A$ *dans la base canonique, on définit*

$$m(A) = \min_{X \in \mathbb{Z}^n - \{0\}} ({}^tXAX)$$

*la distance entre* $O$ *et le point le plus proche du réseau. On pose aussi*

$$\mu(A) = \frac{m(A)}{(\det A)^{\frac{1}{n}}}$$

- *Montrez que* $\mu(A)$ *est invariant si on transforme* $A$ *par homothétie ou transformation unimodulaire.*
- *Montrez que la densité maximale d'empilement de sphères sur le réseau est* $\delta(A) = \frac{B_n}{2^n}\mu(A)$, *où* $B_n$ *est le volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$.
- *Pour* $n = 2$, *montrez que* $\delta(A)$ *est minimal pour* $A$ *correspondant au point* $\rho = \exp(2i\pi/6)$ *de sorte que le réseau correspondant a pour base* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, *la forme quadratique correspondante étant* $4(x^2 + xy + y^2)$.
- *Montrez que l'équation* $4181x^2 - 5168xy + 1597y^2 = 1$ *possède une solution entière.*

**Remarques**: Hermite a montré que sur l'ensemble des formes quadratiques à $n$ variables, $\mu(A)$ est borné et il atteint son maximum noté $\gamma_n$ (qui n'est calculé que pour $n \leq 8$: Minkowski donne $\gamma_n < n$). Rogers (1958), a donné un majorant de la densité: $\sigma_n$ est le rapport du volume occupé par les sphères centrées en les sommets du simplexe $\Delta_n$ régulier d'arête 1, de rayon 1/2, à celui de $\Delta_n$ (à nouveau le calcul de $\sigma_n$ est inextricable pour $n > 4$, le cas $n = 4$ étant déjà difficile). Pour $n = 2$, on vérifie immédiatement que ce maximum est atteint (réseau hexagonal, cf. ci-dessus). Pour $n = 3$ Kepler (1610) conjecture que la densité maximale est $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, c'est à dire celle du réseau cubique à faces centrées: conjecture finalement prouvée en 1998 par Thomas Hales.