Les exercices étoilés (*) s'adressent aux seuls étudiants inscrits à l'unité MO12

Corrigé de la feuille d'exercices 4

Exercice 1. *On considère la représentation de permutation naturelle de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$. Donnez son caractère et montrez qu'elle contient une fois la représentation triviale; donnez le sous-espace de dimension 1 correspondant. Montrez ensuite que le supplémentaire stable de 1 dans $\mathbb{C}^n$ est une représentation irréductible de dimension $n-1$ de $\mathcal{S}_n$ que l'on appelle la représentation standard de $\mathcal{S}_n$; donnez son caractère. Que peut-on dire de la restriction à $\mathcal{A}_n$ de la représentation standard ?*
Remarque: Dans le cas $n = 5$, on donnera une preuve de l'irréductibilité de la représentation standard via son caractère.

Preuve : Notons ξ le caractère de la représentation de permutation de l'énoncé. Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\xi(\sigma)$ est alors égal au nombre de points fixes de σ. En notant $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on remarque que le vecteur $e = \sum_{i=1}^n e_i$ est invariant sous l'action de $\mathcal{S}_n$ de sorte que la représentation de permutation contient au moins une fois la représentation triviale. Soit alors V un suplémentaire stable (ici en fait il est unique car la représentation triviale y a une multiplicité 1), c'est le noyau d'une forme linéaire stable soit $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(\sum_i x_i e_i) = \sum_i x_i$, dont le caractère est $\xi - 1$. Une base de V est par exemple donnée par la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ avec $f_i = e_{i+1} - e_i$ qui est de manière évidente libre (c'est une famille étagée). Montrons alors que V est irréductible. Soit donc W un sous-espace stable de W et $v = \sum_i x_i e_i \in W$ non nul. On a $(i\ i+1).v - v = (x_{i+1} - x_i) f_i \in W$. Or comme $f(v) \neq 0$, on en déduit qu'il existe i tel que $x_{i+1} \neq x_i$ et donc $f_i \in W$. Pour $\sigma = (i\ j) \circ (i+1\ j+1)$, on a $\sigma.f_i = f_j$ soit donc $V \subset W$ et donc l'irréductibilité de V.

En restreignant la représentation à $\mathcal{A}_n$, on obtient de même l'irréductibilité de V en considérant les manipulations suivantes: $(1\ 2)(3\ 4).v - v$ qui fournit $v_1 := f_1 + \alpha f_3 \in W$ pour un certain α. Puis $(1\ 3)(2\ 4).v_1$ qui fournit $v_2 := f_1 + f_3 \in W$. De la même façon on peut obtenir le vecteur $e_1 - e - 3 + e_2 - e_4$ et donc le vecteur f_2 et on conclut comme précédemment.
Remarque: Pour $n = 5$, on a

$$(\xi - 1|\xi - 1) = \frac{1}{120}(1.(5-1)^2 + \binom{2}{5}(3-1)^2 + 5.3.(1-1)^2 + \binom{3}{5}.2.(2-1)^2 + 5.6.(1-1)^2 + 24.(0-1)^2 + \binom{2}{5}.2.(0-1)^2) = 1$$

□

Exercice 2. *(i) Donnez les classes de conjugaison dans $G := \mathcal{S}_5$.*

(ii) Donnez ensuite les représentations de dimension 1 de G puis en utilisant la représentation standard V donnez les dimensions des représentations irréductibles de G.

(iii) Montrez que $Alt^2 V$ est une représentation irréductible et donnez la table de caractères de G.

(iv) Soit H le sous-groupe de $\mathcal{S}_5$ engendré par la permutation $(123)(45)$; $H \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Pour ξ une représentation irréductible non triviale de H, décrivez $\mathrm{Ind}_H^{\mathcal{S}_5} \xi$.

Preuve : (i) Les classes de conjugaisons de $\mathcal{S}_5$ sont données ci-dessous où pour chaque classe on indique un représentant ainsi que le cardinal de la classe:

Id	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3)(4 5)
1	10	15	20	30	24	20

(ii) Les représentations de dimension 1 sont les morphismes de groupes $\mathcal{S}_5 \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ qui se factorisent donc à travers le quotient $\mathcal{S}_5/D(\mathcal{S}_5) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ car $\mathcal{A}_5$ étant simple on a $D(\mathcal{S}_5) = D(\mathcal{A}_5) = \mathcal{A}_5$. On retrouve en particulier que les seuls caractères sont, outre le caractère trivial, la signature que l'on notera ϵ. En notant V la représentation standard, $V \otimes \epsilon$ est aussi une représentation irréductible de dimension 4 de $\mathcal{S}_5$. Ainsi pour $\mathcal{S}_5$, il nous manque 3 représentations donc les dimensions $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$ vérifient

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 120 - 1 - 1 - 16 - 16 = 86$$

un examen exhaustif des cas fournit alors les dimensions $n_1 = n_2 = 5$ et $n_3 = 6$.

(iii) Le caractère ξ_2 de $Alt^2 V$ est donnée par $\xi_2(\sigma) = \frac{1}{2}(\xi(\sigma)^2 - \xi(\sigma^2))$, soit

σ	Id	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3)(4 5)
$\lvert cl(\sigma)\rvert$	1	10	15	20	30	24	20
ξ_2	6	0	-2	0	0	1	0

On calcule alors $(\xi_2|\xi_2) = \frac{1}{120}(1.36 + 15.4 + 24.1) = 1$ d'où l'irréductibilité de $Alt^2 V$. Nous manquent alors deux représentations V_1 et V_2, de dimension 5 dont on vérifie aisément sur la table de caractère partielle que l'on connait, que $V_1 \simeq V_2 \otimes \epsilon$: en effet si on avait $V_i \simeq V_i \otimes \epsilon$, leurs caractères seraient nuls sur les éléments de signature -1 en contradiction avec les relations d'orthogonalité des caractères. Ainsi leurs caractères sont $(5, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6)$ et $(5, -\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_4, \alpha_5, -\alpha_6)$. On utilise alors la relation pour $\sigma \in \mathcal{S}_5$ différent de l'identité:

$$\sum_\rho \dim(\rho)\xi_\rho(\sigma) = 0$$

qui donne alors $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$ et $\alpha_5 = 0$. En exprimant l'orthogonalité avec les caractères de Id, ϵ, V, et $Alt^2 V$, on obtient les relations

$$10\alpha_1 + 30\alpha_4 + 20\alpha_6 = 0$$

$$20\alpha_1 - 20\alpha_6 = 0$$

soit $\alpha_1 = \alpha_6 = -\alpha_4$. Enfin l'égalité $(\xi_{V_i}|\xi_{V_i}) = 1$ s'écrit

$$25 + 10\alpha_1^2 + 15 + 20 + 30\alpha_4^2 + 20\alpha_6^2 = 120$$

soit $\alpha_1^2 = 1$ et donc $\alpha_1 = 1$ (resp. -1) pour V_1 (resp. V_2). On obtient finalement la table de caractères suivante:

σ	Id	$(1\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$	$(1\ 2\ 3)(4\ 5)$
$\lvert cl(\sigma)\rvert$	1	10	15	20	30	24	20
1	1	1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	1	-1	1	-1
V	4	2	0	1	0	-1	-1
$V\otimes\epsilon$	4	-2	0	1	0	-1	1
Alt^2V	6	0	-2	0	0	1	0
V_1	5	1	1	-1	-1	0	1
V_2	5	-1	1	-1	1	0	-1

(iv) Les caractères de H sont de la forme $\xi(\sigma) = w^k$ avec $w = exp(i\pi/3)$ et $0 \leqslant k \leqslant 5$, où l'on a posé $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$. Soit alors ρ la représentation induite de ξ de H à $\mathcal{S}_5$; son caractère ξ_ρ est alors donné par la relation

$$\xi_\rho(g) = \frac{1}{6} \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}_5 \\ hgh^{-1}\in H}} \xi(hgh^{-1})$$

On traite alors les différentes classes de conjugaison:

- $g = Id$: on retrouve évidemment la dimension de l'espace, soit 20;
- $g = (4\ 5)$: $hgh^{-1} = (h(1)\ h(2))$, et la seule transposition de H est $(4\ 5) = \sigma^3$. L'ensemble des $h \in G$ tels que $h(4\ 5)h^{-1} = (4\ 5)$ forme alors un sous-groupe de G isomorphe à $\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq H \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ce qui donne $\xi_\rho((4\ 5)) = -2$;
- $g = (1\ 2)(3\ 4)$: pour tout $h \in G$, $hgh^{-1} \notin H$, soit $\xi_\rho(g) = 0$;
- $g = (1\ 2\ 3)$ avec $hgh^{-1} = (h(1)h(2)\ h(3))$. Or les 3-cycles de H sont $\sigma^4 = (1\ 2\ 3)$ et $\sigma^2 = (1\ 3\ 2)$ et l'ensemble des h tels que $hgh^{-1} = g$ forme un sous-groupe de G isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}2\mathbb{Z}$ ce qui donne $\xi_\rho((1\ 2\ 3)) = w^4 + w^2 = -1$;
- comme il n'y a aucun 4-cycle (resp. 5-cycle) dans H, on obtient $\xi_\rho((1\ 2\ 3\ 4)) = 0$ (resp. $\xi((1\ 2\ 3\ 4\ 5)) = 0$);
- $g = \sigma$: les éléments d'ordre 6 de H sont σ et σ^{-1}. L'ensemble des $h \in G$ tels que $h\,\mathrm{s}h^{-1} = \sigma$ est isomorphe à H. On obtient alors $\xi_\rho(\sigma) = w + w^{-1} = 1$.

On vérifie alors que $\rho = V_1 \oplus V_2 \oplus Alt^2V \oplus (V \otimes \epsilon)$.

□

Exercice 3. *Soit $q = p^r$ pour p premier impair et on note $G := GL_2(\mathbb{F}_q)$. On considère le sous-groupe de Borel standard $B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\} \subset G$ et son sous-groupe unipotent $N = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ ainsi que son tore maximal déployé $T = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\} \simeq (\mathbb{F}_q^\times)^2$. On considère aussi $\mathbb{F}_{q^2}$ "le" sur-corps de $\mathbb{F}_q$ de degré 2 de sorte que la multiplication d'un élément $z \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ dans $\mathbb{F}_{q^2}$ induit un morphisme $\mathbb{F}_q$ linéaire. Une base de $\mathbb{F}_{q^2}$ en tant que $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel étant fixée, on définit donc ainsi une injection*

$$K := \mathbb{F}_{q^2}^\times \simeq \mathbb{Z}/(q^2-1)\mathbb{Z} \hookrightarrow G$$

Dans la suite on choisit ϵ un générateur de $\mathbb{F}_q^\times$ et soit α une racine carrée de ϵ dans $\mathbb{F}_{q^2}$: $\alpha^2 = \epsilon$.

(i) montrez que $(1, \alpha)$ est une base de $\mathbb{F}_{q^2}$ telle que l'injection précédente s'écrit

$$x + y\alpha \mapsto \begin{pmatrix} x & \epsilon y \\ y & x \end{pmatrix}$$

(ii) Montrez que les classes de conjugaison dans G sont:

représentant	*cardinal de la classe*	*nombre de classe*
$a_x = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	1	$q-1$
$b_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	q^2-1	$q-1$
$c_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \ x \neq y$	q^2+q	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$
$d_{x,y} = \begin{pmatrix} x & \alpha y \\ y & x \end{pmatrix}, \ y \neq 0$	q^2-q	$\frac{q(q-1)}{2}$

(iii) Donnez les représentations de dimension 1 de G et trouvez une représentation irréductible de dimension q naturelle (Indication: considérez la représentation de permutation associée à l'action de G sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$).

(iv) Donnez les représentations de dimension 1 de B et décrivez en les induites à G.

(v) Pour un caractère de K, décrivez en les induites à G.

(vi) En considérant des produits tensoriels bien sentis, construisez la table de caractère de G.

Preuve : (i) on a $z.1 = x + y\alpha$ et $z.\alpha = x\alpha + y\epsilon$ d'où le résultat.

(ii) Les classes de conjugaison sont classifiées par les invariants de similitude qui sont de la forme

$$\mu_1(X) \mid \mu_2(X) \mid \cdots | \mu_r(X)$$

où les μ_i sont des polynômes unitaires de $\mathbb{F}_q[X]$ dont la somme des degrés est égale à la dimension soit ici 2. Ainsi soit $r = 1$ ou $r = 2$. Si $r = 2$, on a alors forcément $\mu_1(X) = \mu_2(X) = (X - \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$ et qui correspond à la matrice λI_2. Pour $r = 1$, le polynôme est soit irréductible de la forme $(X - \lambda)(X - \lambda^q)$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2} - \mathbb{F}_q$ (on rappelle que le groupe de Galois est engendré par le frobenius, de sorte que si λ est racine, alors λ^q aussi) et qui correspond alors aux éléments de K pour $y \neq 0$. Soit le polynôme est scindée de la forme $(X - \lambda)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q$ qui correspond aux matrices b_λ, soit de la forme $(X - x)(X - y)$ avec $x \neq y$ correspondant aux matrices $c_{x,y}$. Le calcul du nombre de classes d'une forme donnée est immédiat; en ce qui concerne le cardinal des classes, il est égal au quotient du cardinal du groupe par le cardinal du stabilisateur. Le cardinal de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ est $(q^2 - 1)(q^2 - q)$. Le stabilisateur de a_x est $\{\lambda I_2 \ / \ \lambda \in \mathbb{F}_q\}$, celui de $c_{x,y}$ est le sous-groupe des matrices diagonales (les sous-espaces propres sont stables). Un calcul matriciel rapide donne que celui de b_x est $\{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & c \end{pmatrix} \ / \ a \in \mathbb{F}_q^\times, \ c \in \mathbb{F}_q\}$, quand à celui de $d_{x,y}$ il est égal à K, d'où le résultat.

(iii) On rappelle que $D(G) = SL_2(\mathbb{F}_q)$ (pour $q \geqslant 4$, utiliser la simplicité de $PSL_2(\mathbb{F}_q)$), de sorte que les représentations de dimension 1 de G se factorisent par le déterminant, ce qui fournit $q - 1$ caractères

$$\xi_k(g) = w^{ka(g)}$$

où $w = exp(2i\pi/(q-1))$ et $a(g)$ est un entier tel que $\det g = \epsilon^{a(g)}$.

On considère la représentation de permutation associée à l'action naturelle de G sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ qui est donc de dimension $q+1$ et dont le caractère est $(q+1,1,2,0)$. Celle-ci contient la représentation triviale dont le sous-espace associé est $\sum_{D\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)} e_D$ avec les notations habituelles. Soit alors V un suplémentaire stable de caractère $(q,0,1,-1)$ et de norme

$$\frac{1}{|G|}(q-1)q^2 + \frac{(q-1)(q-2)}{2}(q^2+q) + \frac{q(q-1)}{2}(q^2-q) = 1$$

Pour α un caractère de $\mathbb{F}_q^\times$, on notera U_α la représentation de dimension 1 correspondante de G ainsi que $V_\alpha := V \otimes U_\alpha$.

(iv) De la même façon, les caractères de B sont de la forme

$$\xi(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}) = \alpha_1(a)\beta_2(b)$$

où α_1 et α_2 sont des caractères de $\mathbb{F}_q^\times$. On notera $W_{\alpha,\beta}$ la représentation induite correspondante. Le caractère $\xi_{\alpha,\beta}$ de $W_{\alpha,\beta}$ est alors donné par la formule habituelle

$$\xi_{\alpha,\beta}(g) = \frac{1}{q(q-1)^2} \sum_{\substack{h\in G \\ hg^{-1}\in B}} \xi(hgh^{-1})$$

ce qui donne:

- $g = a_x$: $hgh^{-1} = h \in B$ et donc $\xi_{\alpha,\beta}(a_x) = (q+1)\alpha(x)\beta(x)$;
- $g = b_x$: or $hgh^{-1} \in B$ si et seulement si $h \in B$, soit $\xi_{\alpha,\beta}(b_x) = \alpha(x)\beta(x)$;
- $g = c_{x,y}$: or $hgh^{-1} \in B$ si et seulement si $h \in B$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} h \in B$ et on obtient $\xi_{\alpha,\beta}(c_{x,y}) = \alpha(x)\beta(y) + \alpha(y)\beta(x)$;
- tout élément de B a un vecteur propre de sorte que $\xi_{\alpha,\beta}(d_{x,y}) = 0$.

On remarque ainsi que $W_{\alpha,\beta} \simeq W_{\beta,\alpha}$, puis que $W_{\alpha,\alpha} = U_\alpha \oplus V_\alpha$. Pour $\alpha \neq \beta$, on a

$$(\xi_{\alpha,\beta}|\xi_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{|G|}((q+1)^2 + (q^2-1))(q-1)(\alpha\beta \mid \alpha\beta) + \\ (q^2+q)((q-1)^2((\alpha \mid \beta) + (\alpha \mid \alpha)(\beta \mid \beta)) - 2(q-1)(\alpha\beta \mid \alpha\beta)) = 1$$

de sorte que $W_{\alpha,\beta}$ est irréductible. On a donc obtenu pour l'instant $q-1+q-1+\frac{(q-2)(q-1)}{2}$ représentations irréductibles; il nous en manque donc $\frac{q(q-1)}{2}$.

(v) Soit $\phi : K \simeq \mathbb{F}_{q^2}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère; du fait que K soit cyclique, on en a donc q^2-1. Le caractère ξ_ϕ de l'induite W_ϕ correspondante est alors donnée comme suit:

- $g = a_x$: pour tout $h \in G$, on a $hgh^{-1} = g \in K$, soit $\xi_\phi(a_x) = q(q-1)\phi(x)$;
- $g = b_x$: les éléments de K étant tous diagonalisables sur $\mathbb{F}_{q^2}$, on a $\xi_\phi(b_x) = 0$;

- $g = c_{x,y}$: les éléments diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$ de K sont les matrices a_x, soit $\xi_\phi(c_{x,y}) = 0$;
- $g = d_{x,y}$: on rappelle que pour $z = x + y\alpha$, on a $z^q = x - y\alpha$ car $\epsilon^{(q-1)/2} = -1$. En outre pour tout $h \in G$, on a $hd_{x,y}h^{-1} = d_{x,y}$ ou $d_{x,-y}$. En outre on a vu que le stabilisateur de $d_{x,y}$ était égal à K de sorte que $\xi_\phi(d_{x,y}) = \phi(z) + \phi(z)^q$.

On remarque en particulier que $W_\phi \simeq W_{\phi^q}$. En outre on calcule aisément $(\xi_\phi \mid \xi_\phi) = q - 1$ si $\phi \not\simeq \phi^q$ et sinon il est égal à q. Ces représentations ne sont donc pas irréductibles.

(vi) Considérons les représentations $V \otimes W_{\alpha,1}$ de caractère

$$(q(q+1)\alpha(x), 0, \alpha(x) + \alpha(y), 0)$$

de norme égale à $q + 3$. On considère alors le caractère virtuel

$$\eta_\phi := \xi_{V \otimes W_{\alpha,1}} - \xi_{W_{\alpha,1}} - \xi_\phi$$

dont les valeurs sont $((q-1)\alpha(x), -\alpha(x), 0, -(\phi(z) + \phi(z)^q))$. On calcule alors $(\eta_\phi \mid \eta_\phi) = 1$ et $\eta_\phi(1) = q - 1$ de sorte qu'en fait η_ϕ est un vrai caractère d'une sous représentation irréductible de $V \otimes W_{\alpha,1}$ de dimension $q - 1$. On obtient ainsi $\frac{q(q-1)}{2}$ représentations X_ϕ irréductibles qui complètent notre liste. La table de caractère est alors la suivante:

σ	$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $x \neq y$	$\begin{pmatrix} x & \alpha y \\ y & x \end{pmatrix}$, $y \neq 0$
$\lvert cl(\sigma)\rvert$	1	$q^2 - 1$	$q^2 + q$	$q^2 - q$
U_α	$\alpha(x^2)$	$\alpha(x^2)$	$\alpha(xy)$	$\alpha(z^q)$
V_α	$q\alpha(x^2)$	0	$\alpha(xy)$	$-\alpha(z^q)$
$W_{\alpha,\beta}$	$(q+1)\alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)\beta(y) + \alpha(y)\beta(x)$	0
X_ϕ	$(q-1)\phi(x)$	$-\phi(x)$	0	$-(\phi(z) + \phi(z^q))$

$\square$