Fonction zêta de Riemann et fonctions L

La fonction zêta de Riemann est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par la série $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Cette fonction et ses généralisations (fonctions zêta de Dedekind, de Hasse-Weil, et plus généralement les fonctions L de Dirichlet, des formes modulaires, représentations automorphes...) jouent un rôle central en arithmétique. En particulier leurs valeurs aux entiers contiennent une multitude de renseignements concernant l'arithmétique des objets auquelles elles sont en fait attachées.

Exercice 1. ***Prolongement analytique et valeurs aux entiers négatifs et aux entiers positifs pairs*** *Soit* $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$ *la fonction* Γ *d'Euler.*

(1) Montrer que Γ *est holomorphe pour* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *et satisfait l'équation fonctionnelle* $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. *En déduire que l'on peut la prolonger méromorphiquement sur* $\mathbb{C}$ *tout entier.*

(2) Montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 1$ *alors*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

(3) Soit f *une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *à décroissance rapide à l'infini. Montrer que la fonction*

$$L(f, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt$$

définie pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, *admet un prolongement holomorphe à* $\mathbb{C}$ *tout entier et que pour* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $L(f, -n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

(4) Déduire de (3) que

(i) ζ *a un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *tout entier, holomorphe en dehors d'un pôle simple en* $s = 1$ *de résidu* 1.

(ii) pour $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \in \mathbb{Q}$, *où* B_n *est le n-ième nombre de Bernouilli, i.e.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \cdots, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

(5) En vous servant de l'égalité classique

$$\pi \coth \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \Big)$$

montrer que pour $k \geq 1$ *entier, on a*

$$\pi^{-2k} \zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}(-1)^k}{(2k)!} B_{2k} \in \mathbb{Q}$$

Exercice 2. ***Equation fonctionnelle*** *On pose* $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s)\zeta(s)$. *On veut montrer que* $\xi(s)$ *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *tout entier en dehors de pôles simples de résidus respectifs* -1 *et* 1 *en* $s = 0$ *et* $s = 1$, *et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

(1) Pour $t > 0$, *montrer que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi xy} dx = e^{-\pi t^{-1} y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t (x + i t^{-1} y)^2} dx = t^{-1/2} e^{-\pi t^{-1} y^2}$$

Indication: *effectuer le changement de variables* $u = \sqrt{t}(x + it^{-1}y)$ *puis utiliser le théorème des résidus pour revenir sur a droite réelle et la formule* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} du = 1$ *pour conclure.*

(2) Pour $t > 0$, on pose $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2}$. En utilisant la formule de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-2i\pi n x} dx$$

pour $\phi(x) = e^{-\pi t x^2}$, montrer que l'on a l'équation fonctionnelle

$$\theta(t) = t^{-1/2}\theta(t^{-1})$$

(3) Montrer que

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (\theta(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

puis que

$$\xi(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (\theta(t) - 1)(t^{s/2} + t^{(1-s)/2}) \frac{dt}{t}$$

(4) Conclure en utilisant la question (3) de l'exercice précédent.

Quelques résultats connus sur ζ: la philosophie générale est que "les fonctions L savent tout", reste à savoir les faire parler.

- Kummer: si $p \geq 3$ premier ne divise pas $\zeta(-1), \zeta(-3), \cdots, \zeta(2-p)$ alors p ne divise pas le nombre de classes d'idéaux du corps $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/p})$;
- Mazur et Wiles: ont donné une formule faisant intervenir le groupe des classes d'idéaux des $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/p^n})$, pour calculer la puissance de p qui divise exactement le numérateur de $\zeta(-2k-1)$;
- Rivoal: il existe une infinité de $\zeta(2k+1)$ qui sont irrationnels;
- **Hypothèse de Riemann**: hormis les zéros triviaux en les $-2n$, tous les autres sont sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = 1/2$: ce que l'on sait:
  - les zéros non triviaux sont dans la bande critique $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ et même dans une certaine zone...
  - il y a une infinité de zéros sur la droite critique;
  - au moins $1/3$ des zéros sont sur la droite critique.

Elle a des applications très importantes sur la répartition des nombres premiers:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x}\log x)$$

où $\mathrm{Li}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$: le théorème des nombres premiers donne $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$.

Généralisations

- **La fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres**: soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie d'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$. On rappelle que pour un idéal $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{O}_K$, on note $N(\mathfrak{A})$ le cardinal de $\mathcal{O}_K/\mathfrak{A}$. La fonction zêta de Dedekind ζ_K est alors
$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{A}\subset\mathcal{O}_K} N(\mathfrak{A})^{-s} = \prod_{\mathfrak{P}\subset\mathcal{O}_K} (1 - N(\mathfrak{P})^{-s})^{-1}$$
où la somme porte sur les idéaux non nuls de $\mathcal{O}_K$ et le produit sur les idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$: si $K = \mathbb{Q}$, on retombe sur la fonction ζ de Riemann. On a les résultats suivants:
  - ζ_K admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$;

– le résidu en $s = 1$ de ζ_K est donné par la formule analytique du nombre de classes:

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_K R_K}{\omega_K \sqrt{\Delta_K}}$$

où Δ_K est le discriminant de K, r_1 et $2r_2$ sont respectivement le nombre de racines réelles et complexes du polynôme minimal d'un élément primitif, ω_K est le cardinal du sous-groupe de torsion du groupe des unités, h_K est le cardinal du groupe des classes d'idéaux et R_K est le régulateur;

– ζ_K vérifie l'équation fonctionnelle $\xi_K(s) = \xi_K(1-s)$ avec

$$\xi_K(s) = \Big(\frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}}\Big)^{r_1}.\Big(\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\Big).\Delta_F^{s/2}.\zeta_K(s)$$

– si $k \leq 0$, on a $\zeta_K(k) \in \mathbb{Q}$; si K est totalement réel alors $\pi^{-2k[K:\mathbb{Q}]}\zeta_K(2k) \in \sqrt{\Delta_K}\mathbb{Q}$ pour $k \geq 1$ entier.

- **La fonction zêta de Hasse-Weil**: soit $f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_d]$. On définit pour tout premier p et tout $r \geq 1$:

$$N_{p,r} = |\{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{F}_{p^r}^d \;/\; f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0\}|$$

ainsi que la fonction zêta

$$Z_p(T) = \exp\Big(\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{N_{p,r}}{r} T^r\Big)$$

On a alors les faits suivants:

– **conjectures de Weil prouvées par l'école de Grothendieck**: $Z_p(T) \in \mathbb{Q}(T)$ et si $(f_1, \cdots, f_n) \cap \mathbb{Z} = 0$, alors il existe $M \geq 0$ tel que si $p \geq M$, il existe des polynômes $P_{i,p}, Q_{i,p}$ à coefficients entiers de terme constant égal à 1 dont tous les zéros sont de valeur absolue $p^{-i/2}$ avec

$$Z_p(T) = \prod_{i=0}^{2d} \frac{P_{i,p}(T)}{Q_{i,p}(T)}$$

– pour i fixé, en multipliant le produit $\prod_{p\geq M} \frac{P_{i,p}(p^{-s})}{Q_{i,p}(p^{-s})}$ par un produit de facteurs d'Euler pour $p < M$ et un produit de facteurs Gamma du type $\pi^{-(s+k)/2}\Gamma(\frac{s+k}{2})$, on construit une fonction $L_i(s)$ que l'on conjecture vérifier les deux points suivants:
(i) $L_i(s)$ a un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et une équation fonctionnelle du type $L_i(s) = \pm N_i^{-s} L_i(i+1-s)$ où N_i est un entier dont tous les diviseurs premiers sont $\leq M$;
(ii) **Hypothèse de Riemann généralisée**: les zéros et les pôles de $L_i(s)$ sont tous sur la droite citique $\mathrm{Re}(s) = \frac{i+1}{2}$ (et en $\frac{i}{2}$, $\frac{i}{2}+1$ pour i pair)

- **Fonctions L des formes modulaires**: si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $Sl_2(\mathbb{Z})$ et si $k \in \mathbb{Z}$, une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, où $\mathcal{H}$ est le demi-plan de Poincaré, est dite **modulaire de poids k pour** Γ, si elle est $\mathcal{C}^\infty$ et si l'on a:

(i) $f(z) = f_{|k}\gamma(z) := (cz+d)^{-k} f(\gamma z)$ pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$;

(ii) f est à croissance lente à l'infini, i.e. quelque soit $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, quels que soient $a < b \in \mathbb{R}$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait au voisinage de $y = +\infty$

$$\sum_{z\in[a+iy, b+iy]} |f_{|k}\gamma(z)| = O(y^C).$$

On note $M_k(\Gamma)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de poids k. Il existe en particulier $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $f(z+N) = f(z)$ et comme f est $\mathcal{C}^\infty$, elle est somme de sa série de Fourier

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f, y) e^{2i\pi nx/N}$$

Comme f est modulaire, la fonction $\tilde{f}(q_N) = f(N\frac{\log q_N}{2i\pi})$ avec $q_N = e^{2i\pi z/N}$ et on peut écrire f sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)q_N^n$$

avec $a_n(f,y) = a_n(f)e^{-2\pi ny/N}$ et la croissance lente des coefficients de Fourier montrer que $a_n(f) = 0$ si $n < 0$.

Soit $f = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m(f)q^m \in M_{2k}$; la fonction L de f est définie par la formule

$$L(f,s) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m(f)m^{-s} \qquad \text{et on pose } \Lambda(f,s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}L(f,s)$$

On a alors les faits suivantes:

- $L(f,s)$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 2k$ et définit une fonction holomorphe;
- $\Lambda(f,s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier et satisfait l'équation fonctionnelle

  $$\Lambda(f,s) = (-1)^k\Lambda(f,2k-s)$$

  Elle est holomorphe en dehors de pôles simples en $s = 0$ et $s = 2k$ de résidu respectifs $-c_0(f)$ et $(-1)^k c_0(f)$. Par ailleurs elle tend vers 0 à l'infinie dans toute bande de la forme $a < \mathrm{Re}(s) < b$.

Par ailleurs, on a un théorème réciproque, i.e. si $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombre complexe telle que la série de Dirichlet $L(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m m^{-s}$ vérifie les faits précédents, alors $\sum_{m=0}^{+\infty} c_m q^m \in M_{2k}$.

Remarque: La théorie des opérateurs de Hecke permet d'avoir d'exprimer $L(f,s)$ comme un produit Eulérien quand f est un vecteur propre de ces opérateurs.

- **Fonctions L automorphes de Langlands**: à une forme modulaire comme ci-dessus, on peut associer une représentation dite automorphe pour GL_2. A toute représentation automorphe de par exemple GL_n, on peut associer des fonctions L qui sont les outils essentiels pour comprendre les groupes de Galois (non abéliens).