CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

par

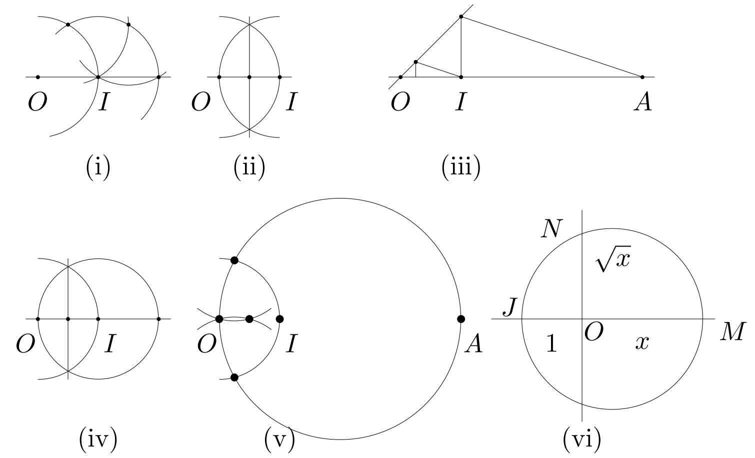
Boyer Pascal

Table des matières

1. Quelques constructions élémentaires

1.1. sur les points. — Étant donnés deux points O et I d'une droite D, on peut construire avec le compas le symétrique de O par rapport à I à l'aide de triangles équilatéraux de côtés OI, cf. la figure 1 (i). On en déduit alors la construction de tous les points A de D tels que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} \in \mathbb{Z}$. En considérant la médiatrice de OI comme dans la figure 1 (ii), on construit le milieu de OI et donc tous les points A de D tels que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} = \frac{n}{2^m}$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$. Plus généralement les deux constructions de la figure 1 (iii) et (iv) fournissent A tel que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} = \frac{1}{n}$. La première utilise le théorème de Thalès et la seconde l'inversion de centre O et de rapport IA : en particulier la construction (v) donne le milieu de deux points sans l'utilisation de la règle.

En résumé, à l'aide du compas seul, on peut construire tous les points A de la droite (OI) tels que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} \in \mathbb{Q}$. La figure (vi) de (1) montre par ailleurs comment construire $\sqrt{x}$: la puissance de O par rapport au cercle de diamètre $J = (-1, 0)$, $M = (x, 0)$ est égale à $\overline{OMOJ} = -\overline{ON}^2$ de sorte que $ON^2 = x$ d'où le résultat.

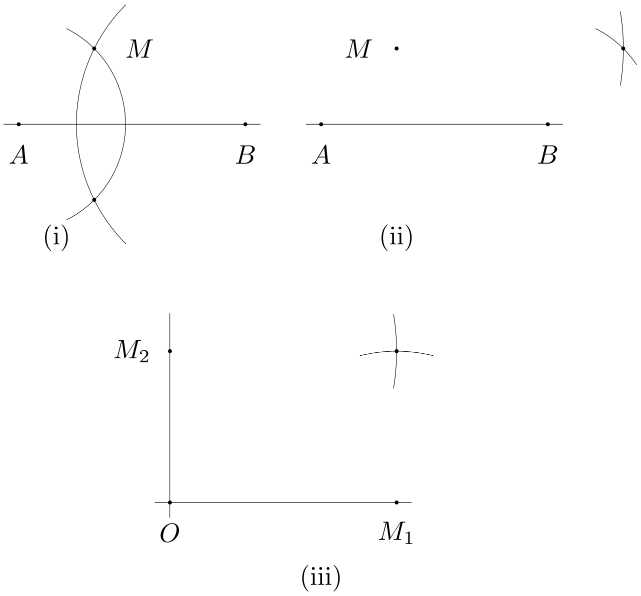


(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

Fig. 1.

1.2. sur les droites. — Étant donnés deux points A et B d'une droite D et $M \notin D$, la construction de la droite perpendiculaire (resp. parallèle) à D et passant par M est donnée à la figure 2 (i) et (ii) et s'obtient en construisant le symétrique de M par rapport à D (resp. le parallélogramme $BAMM'$), construction qui n'utilise que le compas. Avec le compas seul, la projection de M sur D se construit en prenant le milieu de $[MM']$ où M' est le symétrique de M par rapport à D. Par ailleurs étant donnés M_1 et M_2 appartenant respectivement à D et à une droite $D^\perp$ perpendiculaire à D en un point $O \in D$, on construit le point M de projeté orthogonaux sur D et $D^\perp$ égaux respectivement à M_1 et M_2, en prenant l'intersection des cercles de centre M_1 et M_2 et de rayons respectifs OM_2 et OM_1 comme sur la figure 2 (iii).



(i) (ii)

(iii)

Fig. 2.

1.3. sur les angles. — Evidemment cela ne pose aucun problème, étant donné un angle de mesure θ, de construire un angle de mesure $n\theta$ pour $n \in \mathbb{Z}$. En ce qui concerne la division des angles, celle de la bissection s'obtient par la construction classique des bissectrives, cf. la figure 3 (i). Pour la trisection des angles, elle s'obtient en utilisant par exemple une règle marquée que l'on fait glisser. Illustrons cette technique dans les deux situations similaires de la figure (3) :

- dans la première figure de 3, on trace le cercle de centre A et passant par B et grâce à notre règle marquée, on construit en faisant glisser notre règle, la droite BED telle que $DE = AB$. Les triangles BAE et AED étant isocèles, on a $\widehat{ABE} = \widehat{AEB}$ et $\widehat{DAE} = \widehat{ADE}$ avec en outre $\widehat{AEB} = \widehat{EAD} + \widehat{ADE}$ de sorte que $3\widehat{CBD} = \widehat{CBA}$.
- dans la deuxième figure de 3, on utilise que les triangles OAB et BAC sont isocèles de sorte que $\widehat{CBA} = \pi - \widehat{BAO}$ et donc $\widehat{XAC} = \pi - \widehat{OAB} - (\pi - 2\widehat{CBA}) = 3\widehat{AOB}$.

1.4. sur les cercles. — Étant donné un triangle ABC, le centre du cercle inscrit (resp. circonscrit) est l'intersection de ses bissectrices (resp. de ses médiatrices) et se construit donc

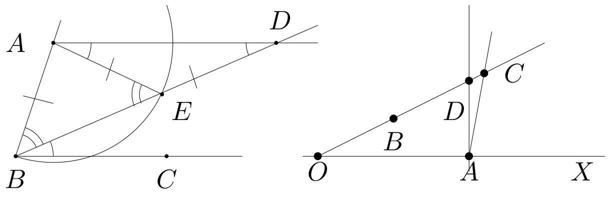


Fig. 3.

facilement. Étant donnés deux cercles $C(O,R)$ et $C(O',R')$ avec $R \neq R'$ et $OO' > R+R'$, la figure 4 propose une construction des tangentes communes à ces deux cercles : on construit tout d'abord les centres I,J des deux homothéties les échangeant et les droites cherchées sont celles passant par I et J et tangentes à l'un quelconque de ces cercles. Le point de contact de ces dernières s'obtient en prenant l'intersection de $C(O,R)$ avec le cercle de diamètre OI et OJ : en effet au point de contact on doit avoir un angle droit.

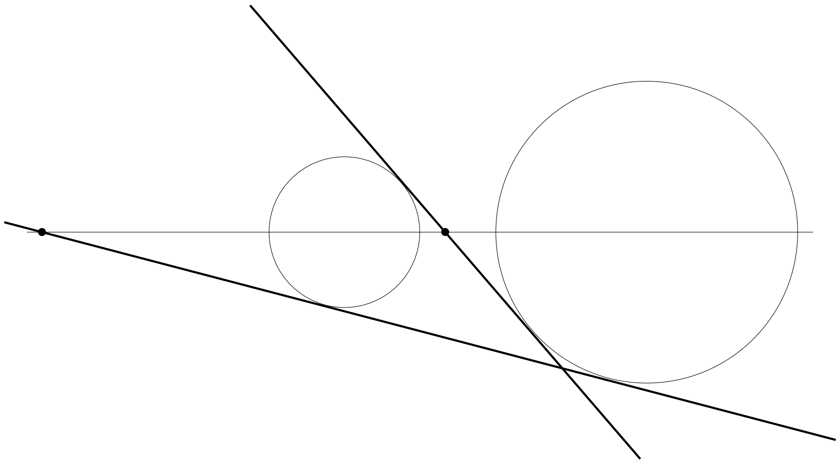


Fig. 4.

Citons aussi le fameux théorème de Napoléon qui consiste à savoir trouver le centre d'un cercle C à l'aide du seul compas ; l'idée repose comme souvent sur l'utilisation d'un inversion de pôle un point O du cercle et de rapport une distance autorisée que l'on pose égale à 1. Si on connaissait le point O' diamétralement opposé à O sur C, le centre du cercle serait alors simplement le milieu de $[OO']$ que l'on sait tracer au seul compas d'après les constructions du paragraphe précédent. La remarque judicieuse est que l'image O_1 de O' par l'inversion ci-dessus est le milieu des points d'intersection de C avec le cercle de centre O et de rayon 1. Il ne reste alors plus qu'à réinverser ce point pour obtenir le O', ou plutôt inverser O_2 tel que $\overrightarrow{OO_2} = 2\overrightarrow{OO_1}$ ce qui donnera directement le centre, cf. la figure (5).

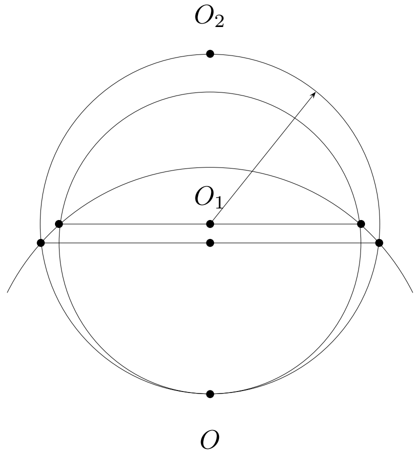


Fig. 5.

Remarque : si $R > 1$, on ne voit pas directement l'intersection lors de la deuxième inversion, on peut alors faire une homothétie pour la voir, i.e. inverser n/r puis appliquer une deuxième fois l'homothétie sur l'image obtenue. En particulier on remarque qu'il suffit de connaître trois points sur le cercle qui forment un triangle isocèle.

1.5. sur les coniques. —

- soit C une conique propre de foyer F et de directrice D. Soient $M, N \in C$ et $P = (MN) \cap D$, alors (PF) est la bissectrice de (FM, FN) :
  Preuve : Avec les notations de la figure 6, on applique la loi des sinus dans les triangles FMP et FNP de sorte que
  $$\frac{\sin\alpha}{PM} = \frac{\sin\widehat{FPM}}{FM}, \quad \frac{\sin(\pi-\alpha')}{PN} = \frac{\sin\widehat{FPM}}{FN}$$
  avec d'après le théorème de Thalès, $\frac{PM}{PN} = \frac{HM}{H'N} = \frac{FM}{FN}$ et donc $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha')$ soit $\alpha = \alpha'$. ☐
  Remarque : on peut ainsi construire la directrice connaissant le foyer et 3 points.
- En passant à la limite quand N tend vers M, le tiret précédent montre qu'étant donnée une conique propre C qui n'est pas un cercle, F un foyer et D la directrice correspondante, si $M \in C$ et P est le point d'intersection de la perpendiculaire à (MF) en F à D, alors PM est tangente à C en M.
  Remarque : on peut ainsi tracer des tangentes connaissant le foyer et la directrice (resp. les deux foyers).
- soit C une conique propre à centre de foyers F et F'. La tangente à C en M est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle en M de triangle MFF' si C est une hyperbole (resp. une ellipse) ;
  Preuve : Dans le cas d'une ellipse avec les notations de la figure 7 : $\frac{MH}{MP} = \frac{MH'}{MP'}$ et comme $\frac{MH}{MF} = \frac{MH'}{MF'}$, on obtient $\cos\alpha = \frac{MF}{MP} = \frac{MF'}{MP'} = \cos\alpha'$. ☐

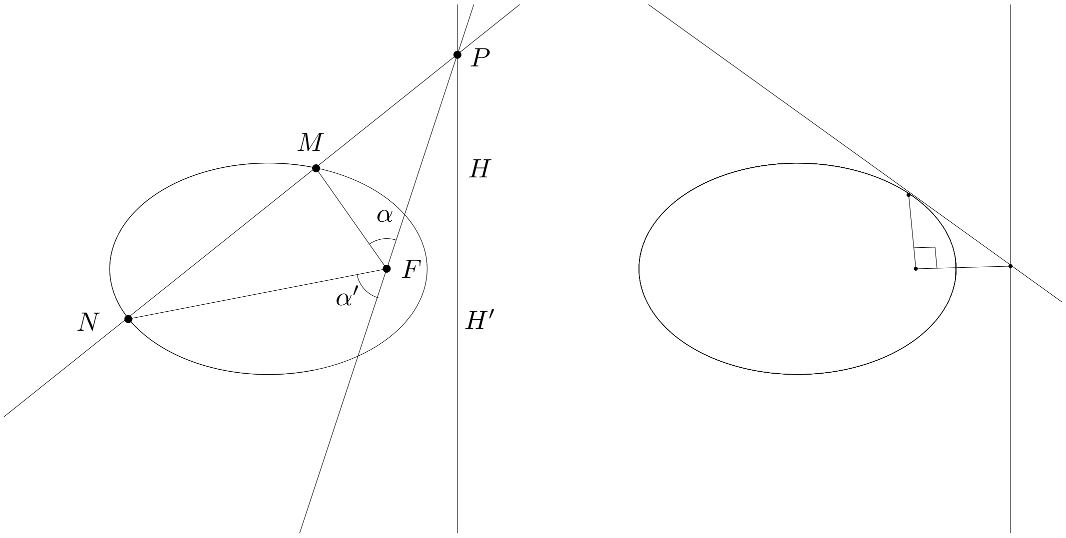


Fig. 6.

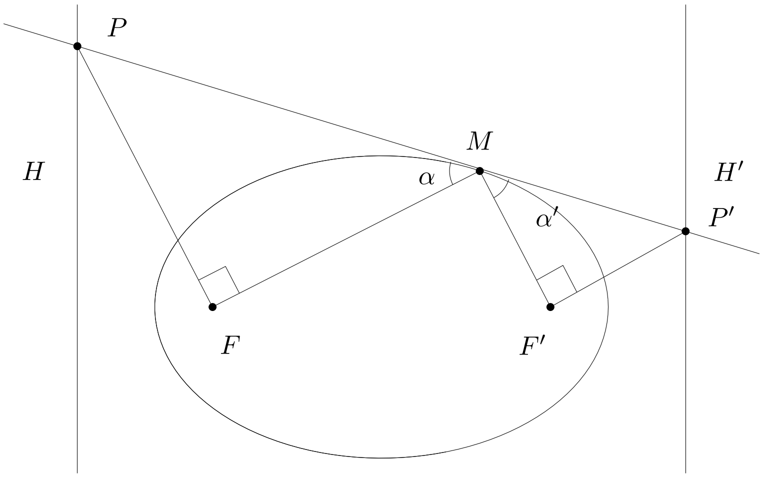


Fig. 7.

2. Quelques constructions moins élémentaires

2.1. Pentagone régulier. —

2.2. Sur les coniques passant par 5 points. — Ce qui suit est inspiré d'un papier de Michel Coste que l'on trouve sur le net, qui lui-même s'appuie sur [**1**]. L'équation d'une conique projective est de la forme $a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$ de sorte que sur un corps algébriquement clos K, l'ensemble des coniques projectives est $\mathbb{P}^5(K)$. Demander à ce qu'un conique passe par 1 point correspond à prendre un hyperplan projectif de cet espace de sorte que l'ensemble des coniques projectives passant par un point, est en général, réduit à un unique point de $\mathbb{P}^5(K)$. Soit alors 5 points $A_1, \cdots, A_5$ en position générale, la question naturelle est alors de savoir ce qu'il est possible de tracer sur cette conique $\mathcal{C}$, à la règle et au compas et plus particulièrement :

(i) l'intersection d'une droite D avec $\mathcal{C}$;

(ii) le centre et les axes ;

(iii) les foyers et directrices.

(i) Commençons par rappeler le **théorème de l'hexagramme de Pascal** : *un hexagone est inscrit dans une conique si et seulement si les intersections des côtés opposés sont alignés.*

- En prenant $A_6 = A_5$, le théorème précédent permet de tracer la droite tangente à $\mathcal{C}$ en A_5.

- Soit $M = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$ et considérons le cas où D passe par M ; on note A_{23} et A_{34} les intersection des (A_2A_3) et (A_3A_4) avec D de sorte que $(A_1A_{34}) \cap (A_5A_{23})$ appartient à la conique d'après la réciproque du théorème de Pascal.

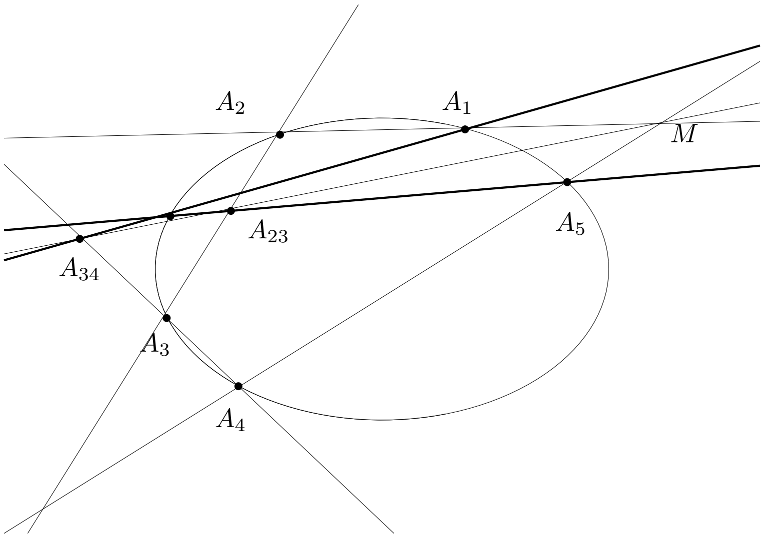


FIG. 8. Construction points par points sur une conique

- Considérons ensuite le cas où D passe par A_1 ; on trace la droite Δ passant par M et $D \cap (A_3A_4)$. Le deuxième point de $D \cap \mathcal{C}$ s'obtient alors comme l'intersection de D avec la droite passant par A_5 et $\Delta \cap (A_2A_3)$.

- Dans le cas général soit $D = (MN)$; on rappelle que la conique induit une homographie involutive sur D (on restreint la forme quadratique correspondante au plan vectoriel associé à D et on associe à une droite la droite orthogonal pour ce produit scalaire). La construction géométrique de l'image M' de $M \in D$ est donnée à la figure 9, en utilisant les deux constructions précédentes.

L'intersection de $D = (MN)$ avec $\mathcal{C}$ seront alors les points fixes de cette involution sur D ; pour la construire l'idée est de séparer les droites MM' et NN' confondues avec D, via une inversion quelconque disons de centre B qui envoie D sur un cercle Γ passant par O et de centre I. L'involution se lit alors sur Γ qui est une conique. Rappelons alors le

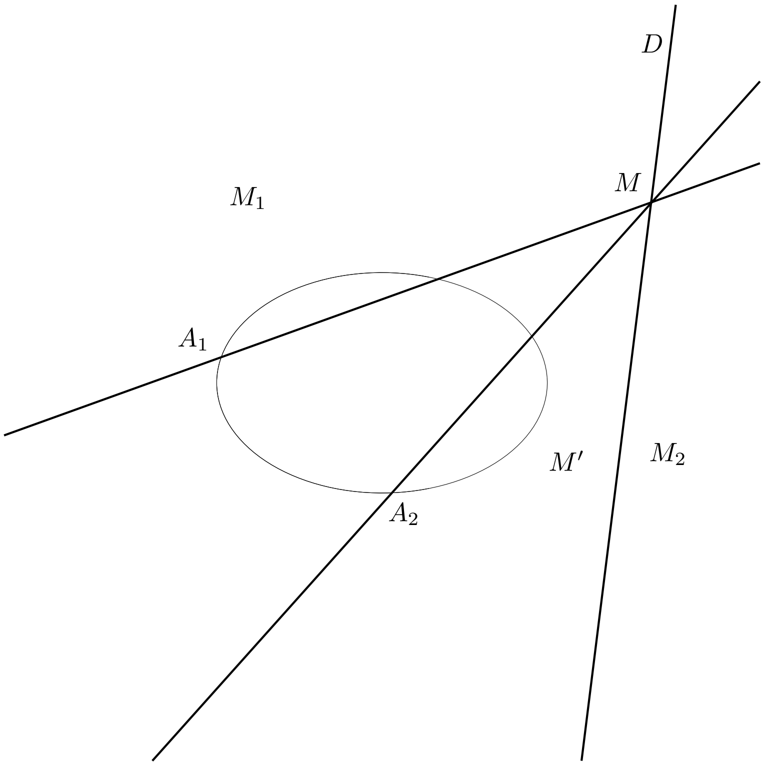


FIG. 9. Dualité sur une droite induite par une conique

Théorème de Frégier : (cf. [**1**] §16.3.10.2) *soit $\mathcal{C}$ une conique propre et $\Omega \notin \mathcal{C}$. L'application qui à $M \in \mathcal{C}$ fait correspondre le deuxième point M' d'intersection de (ΩM) avec $\mathcal{C}$, est une homographie invlutive sur $\mathcal{C}$. Toute homographie involutive sur $\mathcal{C}$ s'obtient de cette manière ; Ω s'appelle le point de Frégier de cette homographie.*

Ainsi les points B_1, B_2 de Γ invariants par l'homographie induite par $\mathcal{C}$, sont ceux tels que (ΩB_i) est tangente à Γ qui se construisent en prenant l'intersection de Γ avec le cercle de diamètre ΩI ; cf. la figure 10.

(ii) Rappelons que le centre d'une conique projective est l'image de la droite infinie par la dualité induite par la conique ; la symétrie centrale par rapport au centre conserve alors globalement la conique. Un diamètre est par définition une corde passant par le centre. Ainsi pour trouver le centre il suffit de savoir tracer des diamètres ; l'idée est que dans le cas d'un cercle la médiatrice d'une corde passe par le centre. Ainsi pour deux cordes parallèles, leur médiatrice commune passe l'intersection des côtés et des diagonales. Cette construction est conservée par affinité d'où la construction des diamètres donnée à la figure 11.

Remarque : selon la même idée, on peut aussi utiliser que si deux tangentes en A et B se coupent en M alors la droite qui passe par M et le milieu de $[A, B]$ est un diamètre. On dira que le diamètre ainsi construit est *conjugué* à la droite D.

En ce qui concerne les axes, rappelons qu'un axe d'une conique *euclidienne* est une droite telle que la réflexion orthogonale par rapport à celle-ci, conserve globalement la conique.

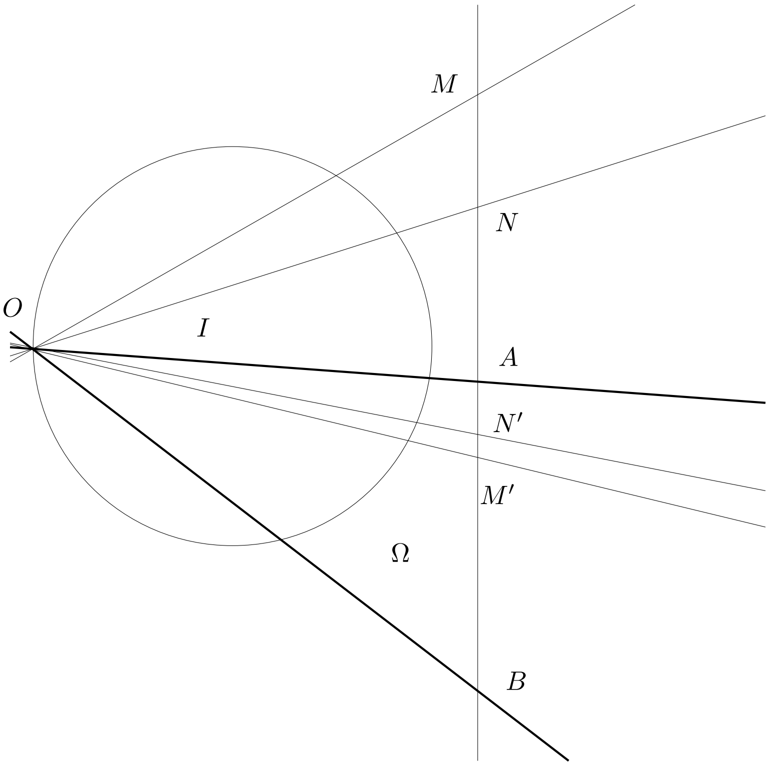


FIG. 10. Construction de l'intersection d'une droite et d'une conique

Autrement dit si M est un point de l'axe et de la conique, la tangente en M à la conique doit être orthogonale au rayon OM où O désigne le centre de la conique ; cette propriété caractérise l'intersection des axes avec la conique. Généralisant ce qui précède, on dit que *deux diamètres* $[A, A']$ *et* $[B, B']$ *sont conjugués* si les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et B sont orthogonales.
Remarque : pour construire une paire de diamètre conjugués, on se donne deux droites D_1 et D_2 orthogonale, et on construit selon le procédé ci-dessus, les diamètres $[A_1, B_1]$ et $[A_2, B_2]$ conjugués respectivement à D_1 et D_2. Par définition, ceux-ci sont des diamètres conjugués.

La conjugaison des diamètres définit une homographie involutive sur les droites passant par O, donc sur un cercle Γ de centre I et passant par O, dont il s'agit de trouver les points qui avec leur images forment un triangle rectangle en O : ce sont les points d'intersection de ΩI avec Γ, cf. la figure 12.

(iii) Connaissant les axes et leurs intersections avec la conique, il est aisé de placer les foyers et directrices : on a $OF = \sqrt{a^2 - b^2}$ avec $a = OA$ (resp. $b = OB$) où A et B sont des points de la conique sur les petit et grand axe. Ainsi les foyers sont les points d'intersection du cercle centré en B et de rayon OA. En ce qui concerne les directrices ce sont les droites orthogonales au grand axe et passant par les points M du grand axe tels que $OM = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ que l'on construit aussi aisément.

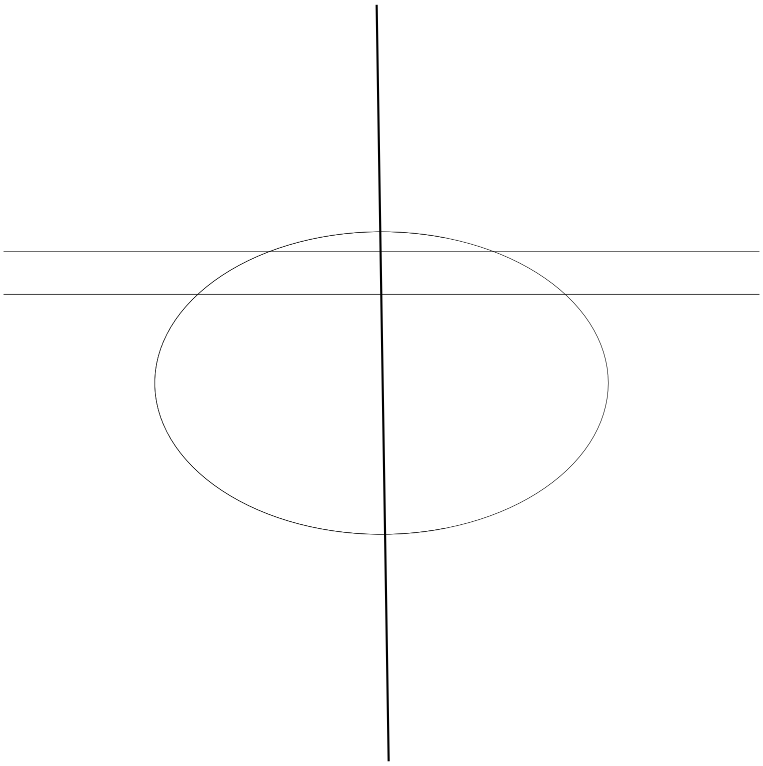


FIG. 11. Construction d'un diamètre d'une conique euclidienne

2.3. Problème d'Apollonius. — Il s'agit de tracer les cercles astreints à trois conditions d'un des types suivants :

– passer par un point,
– être tangent à une droite,
– être tangent à un autre cercle.

Nous allons dans ce qui suit présenter les principales situations, en commençant par les plus simples et sans donner toutes les solutions.

- *Cercles passant par trois points non alignés* : il n'y en a qu'un, c'est le cercle circonscrit dont le centre s'obtient comme intersection des médiatrices du triangle.

- *Cercles tangents à trois droites non concourrantes* : il y en a 4, ce sont soit le cercle inscrit, ou l'un des trois cercles exinscrits qui s'obtiennent en prenant les intersections des bissectrices, intérieures ou extérieures du triangle formé par ces trois droite.

- *Cercles tangents à une droite D et passant par deux points distincts A et B* : si A et B sont de part et d'autre de D, il n'y a pas de solutions. Si $A \in D$, le centre se construit comme l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ avec la perpendiculaire à D passant par A. Si AB est parallèle à D, le centre est le point de la médiatrice de $[AB]$ à égale distance de AB et D. Dans le cas général, si on note T le point de contact d'un des cercles cherchés avec D, alors la puissance de $I = (AB) \cap D$ par rapport à ce cercle est égale à $IA.IB = IT^2$. Pour construire T on procède comme suit : on trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ et on construit

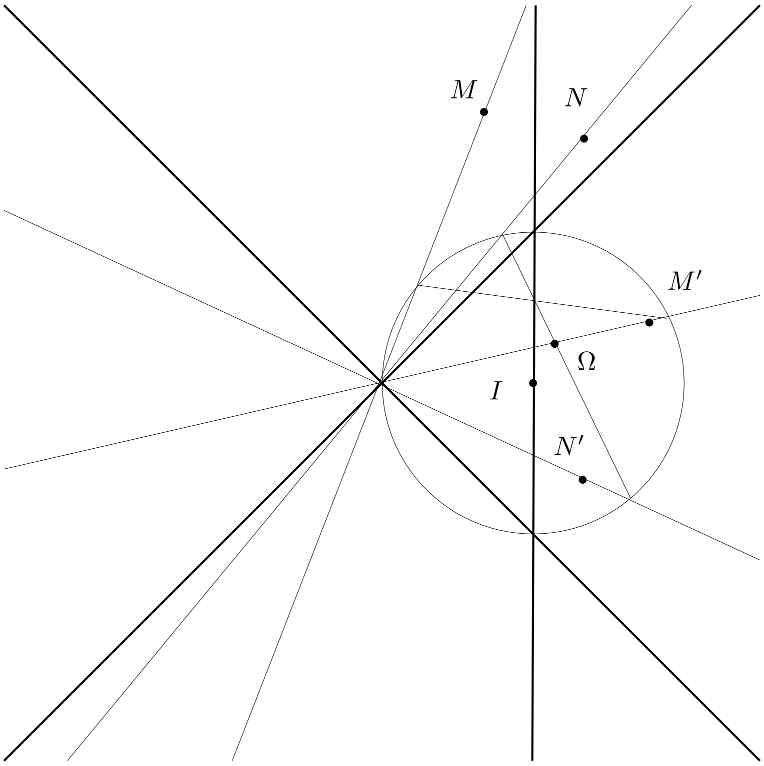


FIG. 12. Construction des axes d'une conique euclidienne

K sur ce cercle tel que IK en soit une tangente, K est l'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec le cercle de diamètre $[IJ]$ où J est le milieu de $[AB]$. Le cercle de centre I et passant par K coupe D en deux points T, T'. L'intersection des perpendiculaires à D passant par T et T' recoupent la médiatrice de $[AB]$ en des points O et O' tels que les cercles de centre O et O' passant par A sont tangents à D.

- *Cercles tangents à un cercle donné et passant par deux points fixés* : par inversion on peut se ramener à la situation précédente. Traitons tout de même directement ce cas, les notations sont celles de la figure 14. Étant donné un point C situé sur le cercle $\mathcal{C}$, le cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle ABC recoupe $\mathcal{C}$ en D ; notons $I = (AB) \cap (CD)$. En considérant les intersections de $\mathcal{C}$ avec le cercle de diamètre $[IO]$ où O est le centre de $\mathcal{C}$, on obtient les points T et T' de contact des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de I. La puissance du point I par rapport au cercle $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_1$) est $IC \times ID = IT^2$ (resp. $IC \times ID = IA \times IB$). Ainsi si $\mathcal{C}'$ désigne le cercle circonscrit au triangle ABT, la puissance du point I par rapport à ce cercle $IA \times IB = IT^2$ et la droite (IT) est une tangente commune à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. De même le cercle circonscrit au triangle ABT' est tangent en T' à (IT') et à $\mathcal{C}$.

- *Cercles tangents à deux droites et passant par un point donné* : un cercle solution passe aussi par le symétrique A' de A par rapport à la bissectrice des deux droites (supposées non parallèles) et on est ramené au cas précédent (si A est sur la bissectrice, alors le cercle doit

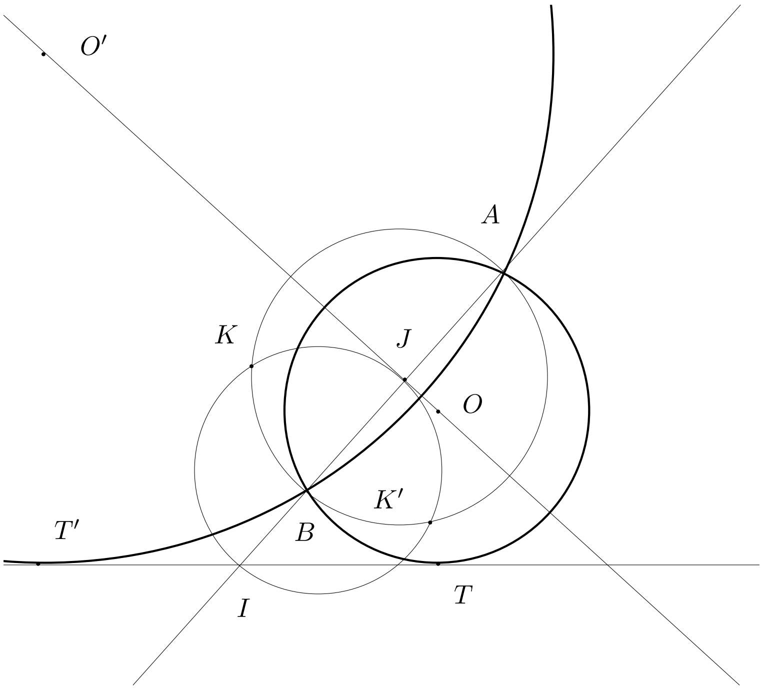


FIG. 13. Cercle tangent à D et passant par A, B.

être tangent à la perpendiculaire à cette bissectrice au point A, on est ramené à la première configuration étudiée).

- *Cercles tangents à deux cercles donnés et passant par A* : on traite le cas de deux cercles $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ tels que $O_1 \neq O_2$ et $r_1 \neq r_2$. Avec les notations de la figure 15, si $\mathcal{C}$ est un cercle tangent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en T et T' alors l'inversion de centre $S = (O_1O_2) \cap (TT')$ qui conserve $\mathcal{C}$, envoie $\mathcal{C}_1$ sur un cercle homothétique centré sur SO_1 et tangent à $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, c'est donc forcément $\mathcal{C}_2$. Ainsi S est un des centres de l'une des deux homothéties transformant $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ qui sont de rapport $\pm\frac{r_2}{r_1}$. Traitons le cas où le rapport d'homothétie est positif : on a alors $ST.ST' = ST.ST_1.\frac{r_2}{r_1} = SU.(SU_1\frac{r_2}{r_1}) = SU.SU'$ de sorte que le point A' qui est l'intersection du cercle circonscrit à A, U, U' et de la droite SA appartient au cercle cherché. On est alors ramené à trouver un cercle passant par A, A' et tangent à $\mathcal{C}_1$, problème déjà traité.

- *Cercles passant par un point, tangents en une droite et un cercle donnés* : on traite le cas où la droite D ne coupe pas le cercle $\mathcal{C}$ et où le point A est en dehors du cercle et n'appartient pas à D. Avec les notations de la figure **??**, si Γ est un cercle solution alors, suivant que $\mathcal{C}$ est tangent extérieurement ou intérieurement avec Γ, les points de contacts de Γ avec D et $\mathcal{C}$ sont alignés avec U ou U'. Traitons le premier cas de sorte que l'inversion de pôle U qui conserve Γ globalement, échange $\mathcal{C}$ et D. On en déduit alors que Γ passe par A_1 intersection de AU avec le cercle circonscrit à AIU' car $UA.UA_1 = UU'.UI$ est la puissance de U par rapport à Γ. On est ainsi ramené à trouver un cercle passant par deux points et tangent à un cercle (ou une droite) cas déjà traité.

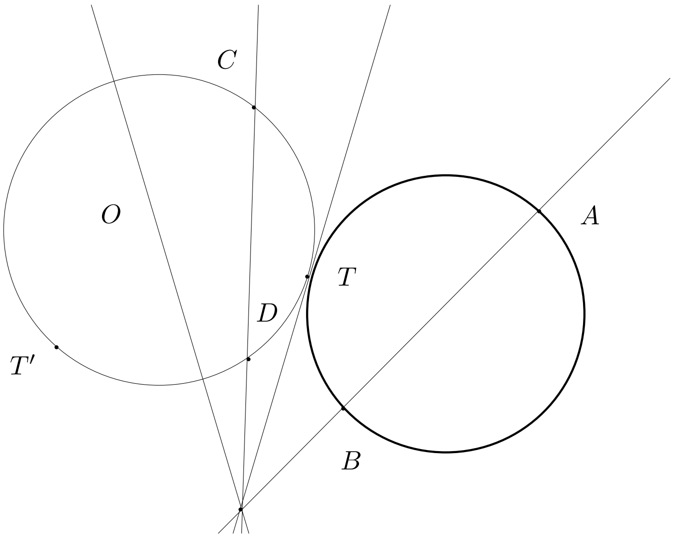


Fig. 14. Cercle tangent à $\mathcal{C}$ et passant par A, B.

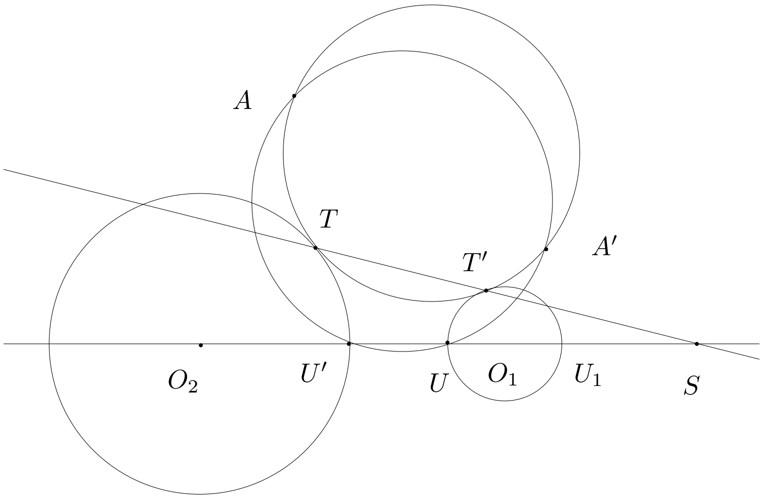


Fig. 15. Cercle tangent à $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et passant par A.

- *Cercles tangents à deux droites et à un cercle* : on traite le cas où les deux droites sont concourrantes en un point O et n'intersectent pas le cercle $\mathcal{C}(A, r)$. Le problème revient alors à trouver un cercle tangent à deux droites D'_1, D'_2 et passant par A où D'_i est parallèle à D_i à distance r. En effet ce cercle $\mathcal{C}'(B, R)$ étant construit, le cercle de centre B et de rayon $R - r$ répond à la question.

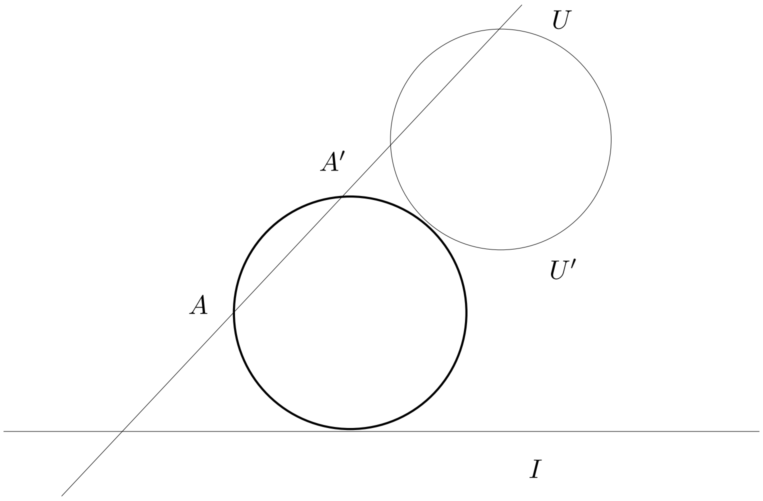


FIG. 16. Cercle tangent à D et $\mathcal{C}$ passant par A.

- *Cercles tangents à une droite et à deux cercles* : le procédé est le même que dans le cas précédent. Notons $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ avec $r_1 > r_2$ et soient D' la parallèle à D à distance r_2, $\mathcal{C}'_1(O_1, r_1 \pm r_2)$; le problème revient alors à trouver un cercle passant par O_2 et tangent à $\mathcal{C}'_1$ et D'.

- *Cercles tangents à trois cercles* : pour $r_1 > r_2 > r_3$ les rayons de ces cercles, soient $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ les cercles de même centre que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et de rayon respectif $r_1 - r_3$ et $r_2 - r_3$. Le problème revient alors à trouver les cercles passant par O_3 et tangents à $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ cas déjà traité.

2.4. Problème de Cramer-Castillon.

— Une référence claire sur le sujet est [**2**] : *étant donnés un cercle* Γ *et trois points* A, B, C*, construire à la règle et au compas un triangle* MNP *inscrit dans* Γ *et dont les côtés passent par* A, B, C*.*

Preuve : Supposons le problème résolu : traçons comme sur la figure 17, la parallèle à AB passant par N qui coupe Γ en E puis la droite EM qui coupe AB en F. On a alors $\overline{AF}.\overline{AB}$ est égal à la puissance de A par rapport à Γ : en effet $\widehat{APB} = \widehat{FEN} = \widehat{AFM}$ de sorte que les triangles PAB et FAM sont semblables (ils ont deux angles égaux) et donc $\overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AM}.\overline{AP}$ qui est égal à la puissance de A par rapport à Γ.

Considérons alors la parallèle à FC passant par N en coupant Γ en G ; la droite EG coupe FC en H. Comme précédemment en utilisant les triangles semblables EFH et CFM, on obtient que $\overline{FH}.\overline{FC}$ est égal à la puissance de F par rapport à Γ. L'angle sous lequel un point de Γ voit la corde EG est égal à l'angle entre les droite FB et FC (modulo π). Soit alors K le point de la demi-droite FB tel que FK soit égal au rayon r de Γ. Le cercle de centre K passant par F coupe FB et FC en β et γ de sorte que la corde $\beta\gamma$ a la même longueur que EG. Il en résulte que si δ est le milieu de $[\beta\gamma]$, la corde EG est tangente au cercle de centre O et de rayon $K\delta$: en résumé EG est la tangente issue de H au cercle de centre O et de rayon $K\delta$.

La construction est alors la suivante : soit une droite quelconque issue de A et recoupant Γ en deux points U, V ; on trace le cercle circonscrit à U, V, B qui recoupe AB en F tel que

$\overline{AF}.\overline{AB}$ est égal à la puissance de A par rapport à Γ. Selon le même procédé, on construit H sur FC tel que $\overline{FH}.\overline{FC}$ soit égal à la puissance de F par rapport à Γ. On construit ensuite K sur la demi-droite FB tel que $FK = r$, puis le cercle de centre K passant par F recoupant FB et FC en β et γ et on note δ le milieu de $[\beta, \gamma]$. On construit ensuite la tangente issue de H au cercle de centre O et de rayon $K\delta$ qui recoupe Γ en EG. La droite EF coupe Γ en M, puis AM recoupe Γ en P et PB recoupe Γ en N de sorte que le triangle MNP répond à la question.
Remarque : le problème se généralise à la construction d'un polygone à n côtés inscrit dans une conique dont les côtés passent par n points donnés.

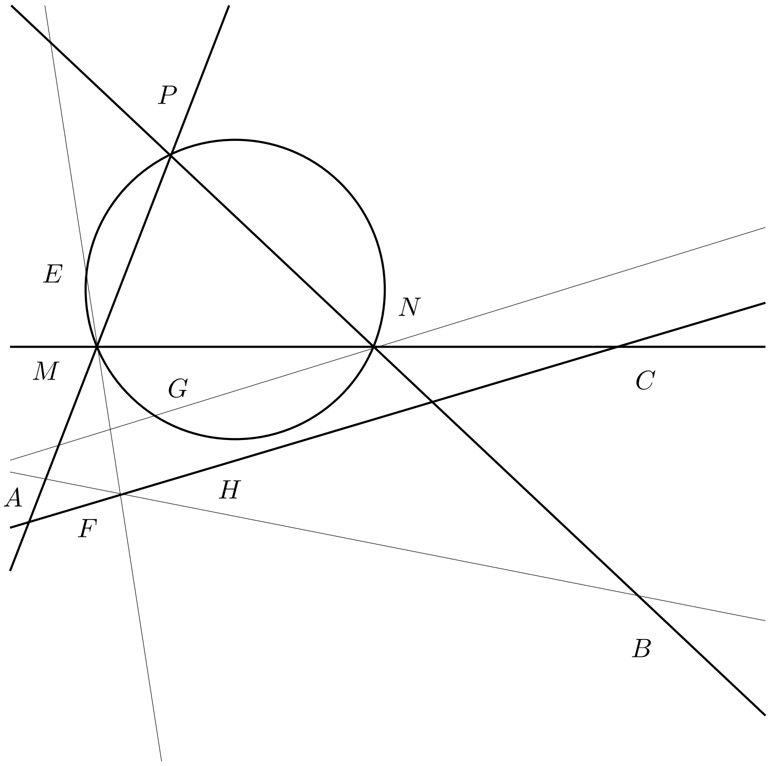


FIG. 17. Problème de Castillon

□

2.5. Problème de Malfati. —

2.6. Impossibilités classiques. — Evidemment les plus célèbres problèmes de construction, outre la trisection des angles, sont la duplication du cube et la quadrature du cercle, dont nous verrons qu'ils n'admettent pas de solution à la règle et au compas. Par contre nous verrons qu'en ce qui concerne la trisection des angles et la duplication du cube, en modifiant légèrement nos instruments, nous pourrons résoudre géométriquement ces constructions.

3. Points constructibles à la règle et au compas

Les constructions du paragraphe précédentes soulèvent la question de savoir caractériser les points du plan constructible à la règle et au compas en partant d'une configuration donnée.

3.1. Définitions. — Étant donné un sous-ensemble fini $\mathcal{B}$ de points du plan euclidien, ayant au moins deux éléments, un point est dit constructible à la règle et au compas à partir des points de base $\mathcal{B}$ s'il existe une suite *finie* $M_1, M_2, \cdots, M_n$ de points de P telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, M_i est un point d'intersection

- de deux droites,
- d'une droite et d'un cercle,
- de deux cercles ;

ces droites et cercles étant obtenus à l'aide de l'ensemble $E_i = \mathcal{B} \cup \{M_1, \cdots, M_{i-1}\}$ de la façon suivante :

- chaque droite passe par deux points distincts de E_i ;
- chaque cercle est centré en un point de E_i et a pour rayon la distance entre deux points de E_i.

Remarque : on pourrait imposer dans la dernière condition que les cercles sont ceux centrés en un point de E_i et passant par un point de E_i. Il est aisé de vérifier que cette condition restrictive ne l'est pas : utiliser la construction des parallélogrammes du paragraphe précédent.
Remarque : lorsque l'on ne mentionne par l'ensemble $\mathcal{B}$, il sera sous-entendu qu'il s'agit de $\{O, I\}$. Un nombre réel sera alors constructible s'il est l'une des coordonnées dans le repère (O, I, J) d'un point constructible. La construction des projections du paragraphe précédent montre alors qu'un point est constructible si et seulement si ses coordonnées sont des réels constructibles.

3.2. Corps des nombres constructibles. — Dans ce paragraphe nous allons donner les caractérisations classiques de l'ensemble $\mathcal{C}$ des réels constructibles à la règle et au compas, les références habituelles sont [**2**] et [**?**].

Théorème : *l'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.*

Preuve : La construction du symétrique d'un point par rapport à une droite permet de montrer que si $u \in \mathcal{C}$ alors $-u \in \mathcal{C}$. De même si $u, v \in \mathcal{C}$, on construit aisément le point d'affixe $(u + v, 0)$ de sorte que $u + v \in \mathcal{C}$. En ce qui concerne la construction de $(uv, 0)$, il suffit de reprendre la construction de A tel que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} = n$ donnée au paragraphe précédent via une homothétie par exemple. La construction de $(u^{-1}, 0)$ et $(\sqrt{u}, 0)$ découle aussi des constructions précédentes. □

Théorème de Wantzel : *$t \in \mathbb{R}$ est constructible si et seulement s'il existe une tour d'extension de corps $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ avec $t \in K_n$ et $[K_{i+1} : K_i] = 2$ pour tout $0 \leq i < n$.*

Preuve : Dans le sens direct soit $t \in \mathbb{R}$ constructible : par hypothèse de récurrence t est une intersection soit de deux droites, d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles déterminés comme dans la définition, par des points à coordonnées dans un corps K tel qu'il existe une tour d'extension comme dans l'énoncé et finissant par K.

Rappelons qu'une équation d'une droite est de la forme $ax + by + c = 0$ tandis que celle d'un cercle est de la forme $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Le point d'intersection de deux droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ avec $a, b, c, a', b', c' \in K$ est un point

$(x, y) \in K^2$. Le point d'intersection d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et d'un cercle $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ avec $a, b, c, A, B, C \in K$ est un point $(x, y) \in L^2$ où L est une extension de degré au plus deux de K. Le point d'intersection de deux cercles se ramène à celui d'une droite et d'un cercle, l'équation de la droite étant obtenue par soustraction des deux équations des cercles (c'est l'axe radial du faisceau de cercle engendré par ces deux cercles).

Réciproquement rappelons qu'une extension quadratique L/K est de la forme $K(\sqrt{\alpha})$ où $\alpha \in K^\times$ n'est pas un carré : en effet soit $1, x$ une K-base de L de sorte que, la famille $(1, x, x^2)$ étant liée, il existe $a, b \in K$ tels que $x^2 - 2ax + b = 0$ que l'on écrit sous la forme $(x - a)^2 + \delta$ avec $\delta = b - a^2$ et on pose $\alpha = x - a$. Soit alors $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ une tour d'extensions telle que $[K_i : K_{i-1}] = 2$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En raisonnant par récurrence sur n, tous les réels de K_{n-1} sont constructibles. On écrit $K_n = K_{n-1}[\sqrt{\alpha}]$: or $\sqrt{\alpha}$ est constructible d'après ce qui précède et donc comme l'ensemble des réels constructibles est un corps, tous les éléments de $K_{n-1}[\sqrt{\alpha}]$ sont constructibles. $\Box$

Théorème : *$\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}(i)$) est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathcal{C}$) stable par racine carrée.*

Preuve : Soit $K \subset \mathbb{R}$ un sous-corps stable par racine carrée et soit $t \in \mathcal{C}$ un réel constructible. Il existe alors une tour d'extensions quadratiques $\mathbb{Q} = K_0 \subset \cdots K_n$ telle que $t \in K_n$; montrons par récurrence sur n que $K_n \subset K$. Par hypothèse de récurrence $K_{n-1} \subset K$ alors que $K_n = K_{n-1}(\sqrt{\alpha})$ avec $\alpha \in K_{n-1}^\times$. Comme K est stable par racine carrée, on a $\sqrt{\alpha} \in K$ et comme K est un corps $K_n \subset K$ et donc $t \in K$ de sorte que $\mathcal{C} \subset K$.

En ce qui concerne $\mathcal{C}(i)$ montrons qu'il est stable par racine carrée, i.e. si $(u + iv)^2 \in \mathcal{C}(i)$ alors $u, v \in \mathcal{C}$. On a donc $a = u^2 - v^2, b = 2uv \in \mathcal{C}$ de sorte que u^2 et $-v^2$ sont les racines de $X^2 - aX - b^2/4$ qui sont $\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$ et qui appartiennent à $\mathcal{C}$ par stabilité par racine carrée et donc $u, v \in \mathcal{C}$. Si $K \subset \mathcal{C}$ est un sous-corps stable par racine carrée alors $K \cap \mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée qui contient donc $\mathcal{C}$. Comme $-1 \in K$, on a $i \in K$ et donc $\mathcal{C}(i) \subset K$. $\Box$

Remarque : en ce qui concerne les nombres $\mathcal{B}$-constructibles, le résultat est que $\mathcal{C}_\mathcal{B}$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée et contenant les coordonnées des points de $\mathcal{B}$.

Théorème : *$t \in \mathbb{R}$ est constructible si et seulement si son corps de décomposition est de degré une puissance de 2.*

Preuve : Remarquons déjà que si z est constructible alors tout conjugué z' de z l'est aussi. Soit en effet $\mathbb{Q} \subset K_1 \subset \cdots, \subset K_n$ est tour d'extensions quadratiques avec $z \in K_n$ et soit $L/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ contenant K_n. Il existe alors $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ tel que $\sigma(z) = z'$ et alors $\mathbb{Q} \subset \sigma(K_1) \subset \cdots \subset \sigma(K_n)$ est une tour d'extension quadratiques avec $z' \in \sigma(K_n)$ et z' est donc constructible.

Soit alors L l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par z et ses conjugués, i.e. le corps de décomposition dans $\mathbb{C}$ du polynôme minimal de z. D'après ce qui précède tout élément de L est constructible. Or d'après le théorème de l'élément primitif on a $L = \mathbb{Q}[\alpha]$ avec donc α constructible de sorte que $[L : \mathbb{Q}]$ est une puissance de 2.

Réciproquement soit $L/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne de degré 2^n. Son groupe de Galois est donc d'ordre 2^n de sorte qu'il existe une suite de sous-groupe distingué

$$(0) = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$$

avec $G_i/G_{i-1} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On en déduit alors que la tour $\mathbb{Q} = L^{G_n} \subset L^{G_{n-1}} \subset \cdots \subset L^{G_0} = L$ est une tour d'extensions quadratiques.

Remarque : pour voir l'existence de la suite de composition formée par les G_i, on raisonne par récurrence sur le cardinal de G. Le centre Z de G n'est pas trivial car G est un p-groupe pour $p=2$. Si $Z \neq G$, on construit à partir d'une suite de composition de Z et de G/Z une pour G. Si $Z=G$, on considère $2G \neq G$ ainsi que $G/2G$ qui est une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel, et on procède de même. □

Remarque : en particulier tout nombre réel constructible est algébrique de degré une puissance de 2. La réciproque est fausse. Pour cela d'après le théorème précédent, il suffit de construire un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ irréductible de degré 4 possédant au moins une racine réelle (et donc 2 ou 4 racines réelles) dont le groupe de Galois G est $\mathfrak{S}_4$. Une autre façon de le voir est de remarquer que le corps de rupture ne peut pas avoir un sous-corps d'indice 2 : en effet soit H le sous-groupe de G associé au corps de rupture ; si le corps de rupture possédait un sous-corps d'indice 2 ce serait le corps invariant par $\mathcal{A}_4$ car $\mathcal{A}_4$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$ (utiliser la caractérisation de la signature) et donc $H \subset \mathcal{A}_4$; la contradiction découle du fait que $\mathcal{A}_4$ ne contient pas de sous-groupe d'indice 2 (c'est encore plus direct si le groupe de Galois est $\mathcal{A}_4$ puisqu'alors il n'y a pas d'extension de degré 2 contenue dans le corps de décomposition en question).

Pour construire un tel polynôme il suffit par exemple de le prendre d'Eisenstein pour $p=3$, tel que sa réduction modulo 2 soit irréductible et qu'il possède une unique racine dans modulo 5. Considérons par exemple le polynôme $P(X)=X^4-3X-3$ qui est irréductible sur $\mathbb{Q}$ puisque irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$: il n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_4$ car dans $\mathbb{F}_4$, $P(X)$ est le polynôme constant égal à 1 (on peut aussi invoquer qu'il est d'Eisenstein pour $p=3$). Modulo 5, il possède une unique racine dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Ainsi son groupe de Galois vu comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$, contient un 4-cycle et un 3-cycle ; son cardinal est alors divisible par 12 c'est donc $\mathcal{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$, comme visiblement il n'est pas contenu dans $\mathcal{A}_4$ c'est $\mathfrak{S}_4$.

On peut aussi le voir directement sans utiliser la théorie de Galois. La décomposition de P en éléments irréductibles de $\mathbb{R}[T]$, s'écrit $(T-x)(T-y)(T^2+aT+b)$. Le coefficient de T^2 est nul, donc $(T-x)(T-y)=T^2-aT+b'$. L'identification donne

$$a^2=b+b' \qquad a(b-b')=3 \qquad bb'=-3$$

on tire $a^6=a^2(b^2+2bb'+b'^2)$ de la première équation et $9=a^2(b^2-2bb'+b'^2)$ de la seconde. On a donc $a^6-9=a^2(4bb')=-12a^2$, de sorte que a est une racine du polynôme X^6+12X^2-9, et donc a^2 est racine du polynôme X^3+12X^2-9 qui est irréductible sur $\mathbb{Q}$: en effet il ne possède aucune racine dans $\mathbb{Q}$ car aucun des entiers ± 1, ± 3 ou ± 9 qui divisent son coefficient constant n'en est une racine. Ainsi $a=x+y$ n'est pas constructible et donc x et y ne peuvent pas être tous deux constructibles.

3.3. Polygones réguliers.

— Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des nombres n tels que $e^{2i\pi/n}$ soit constructible. De manière élémentaire on a les propriétés suivantes :

- si $n \in \mathcal{C}$ alors $2n \in \mathcal{C}$;
- si $n \in \mathcal{C}$ et $m|n$ alors $m \in \mathcal{C}$;
- si $n, m \in \mathcal{C}$ et $n \wedge m = 1$ alors $nm \in \mathcal{C}$ (utiliser une relation de Bezout).

Ainsi pour déterminer $\mathcal{C}$ il reste à savoir quels sont les p^a qui y appartiennent.

Théorème de Gauss : *pour tout $a \in \mathbb{N}$, $2^a \in \mathcal{C}$ et pour p premier impair $p^a \in \mathcal{C}$ si et seulement si $a=1$ et p est un nombre premier de Fermat, i.e. de la forme $2^{2^b}+1$.*

Preuve : Il nous reste à montrer que si p impair appartient à $\mathcal{C}$ alors p est un nombre de Fermat et que pour tout p premier impair $p^2 \notin \mathcal{C}$. Dans le sens direct $\cos(2\pi/p^a)$ est constructible si et seulement si $[Q(\cos(2\pi/p^a)) : \mathbb{Q}]$ est une puissance de 2, or comme $[Q(e^{2i\pi/p^a}) :$

$\mathbb{Q}(\cos(2\pi/p^a))] = 2$ car $e^{2i\pi/p^a}$ est racine de $X^2 - 2\cos(2\pi/p^a)X + 1$, le critère est que $[\mathbb{Q}(e^{2i\pi/p^a}) : \mathbb{Q}]$ est un puissance de 2. Or le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de $e^{2i\pi/p^a}$ est le polynôme cyclotomique $\Phi_{p^a}(X)$ qui est de degré $\varphi(p^a) = p^{a-1}(p-1)$ qui est donc une puissance de 2 si et seulement si $a = 1$ et p est un nombre premier de Fermat.

Réciproquement le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/p})/\mathbb{Q}$ est $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2^{2^n}\mathbb{Z}$ abélien et donc résoluble. Soit alors $= \{0\} = G_m \subset G_{m-1} \subset \cdots \subset G_0 = \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ où $m = 2^n$ et pour tout $1 \leq i \leq m$, $G_i/G_{i-1} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : G_i =< 2^i >$. On pose $K_i = \mathbb{Q}(e^{2i\pi/p})^{G_i}$ ce qui donne une tour d'extensions quadratiques

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m = \mathbb{Q}(e^{2i\pi/p}).$$

Pour conclure il suffit de vérifier que $K_{m-1} = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/p))$. La conjugaison complexe τ est un élément d'ordre 2 de notre groupe de Galois, il correspond donc dans $\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ à 2^{m-1} : ainsi $2\cos(2\pi/p) = e^{2i\pi/p} + e^{-2i\pi/p} \in K_{m-1}$ et donc $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/p)) \subset K_{m-1}$ et l'égalité découle de

$$[K_m; K_{m-1}] = [K_m : \mathbb{Q}(\cos(2\pi/p))] = 2.$$

□

3.4. Retour sur les impossibilités célèbres. — En utilisant le théorème de Wantzel, on est désormais en mesure d'affirmer les impossibilités des constructions mentionnées plus haut.

Duplication du cube : *le nombre* $\sqrt[3]{2}$ *n'est pas constructible.*

Preuve : $x = \sqrt[3]{2}$ est racine du polynôme $X^3 - 2$ qui est irréductible car il n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$ (une racine rationnelle est forcément entière et 2 n'est pas un cube de $\mathbb{Z}$). On conclut en utilisant le théorème de Wantzel. □

Angles trisectables : *l'angle* θ *est trisectable si et seulement si le polynôme* $4X^3 - 3X - \cos\theta$ *est réductible dans* $\mathbb{Q}(\cos\theta)[X]$.

Preuve : Le réel $\cos(\theta/3)$ est une racine réelle du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X - \cos\theta$. Posons $\mathcal{B} = \{O, I, (\cos\theta, 0)\}$ et supposons que $\cos(\theta/3)$ est $\mathcal{B}$-constructible de sorte qu'il est de degré une puissance de 2 sur $\mathbb{Q}(\cos\theta)$ et comme $4X^3 - 3X - \cos\theta$ est annulateur, il doit être de degré 1 ou 2, le polynôme minimal étant alors un diviseur de $P(X)$ qui est donc réductible.

Réciproquement si $P(X)$ est réductible alors $\cos(\theta/3)$ est racine de l'un de ses facteurs qui est donc de degré 1 ou 2 et $\cos(\theta/3)$ est $\mathcal{B}$-constructible d'après le théorème de Wantzel. □

Quadrature du cercle : *le carré de côté* $\sqrt{\pi}$ *n'est pas constructible à la règle et au compas.*

Preuve : le résultat découlera directement du fait que π est **transcendant** ce que nous allons montrer.

(i) Soit f un polynôme à coefficients réels de degré m. Pour tout nombre complexe z, on considère l'intégrale complexe

$$I(f; z) = \int_0^1 z e^{z(1-u)} f(zu) dz$$

On intègre par partie ce qui donne

$$\begin{aligned} I(f; z) &= [-e^{z(1-u)} f(zu)]_0^1 + \textstyle\int_0^1 e^{z(1-u)} z f'(zu) du \\ &= -f(z) + e^z f(0) + I(f'; z); \end{aligned}$$

de sorte que par récurrence sur le degré de f

$$I(f; z) = e^z \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(z).$$

En intégrant sur $[0,1]$, l'inégalité

$$|ze^{z(1-u)}f(zu)| \leq |z|e^{|z|} \sum_{u\in[0,1]} |f(zu)|,$$

valable pour tout $u \in [0,1]$, on obtient la majoration

$$|I(f;z)| \leq |z|e^{|z|} \sup_{u\in[0,1]} |f(zu)|.$$

(ii) Soit f un polynôme à coefficients entiers. Pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme f_n à coefficients entiers tel que $f^{(n)} = n!f_n$. Pour un polynôme f et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction, on note $\sum_{f(\alpha)=0} g(\alpha)$ la somme $g(\alpha_1) + \cdots + g(\alpha_n)$ où les α_i sont les racines de f répétées autant de fois que leur multiplicité. Soit m le degré de f et notons A la matrice compagnon du polynôme f/a. Par construction $aA \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ de sorte que a^nA^n est aussi à coefficients entiers ainsi que sa trace. Or les valeurs propres de a^nA^n sont les $(a\alpha)^n$, α parcourant les racines de f avec multiplicités de sorte que si f est à coefficients entiers de coefficient a, alors pour tout $n \geq 0$, $a^n \sum_{f(\alpha)=0} \alpha^n$ appartient à $\mathbb{Z}$.

(iii) Soit f un polynôme à coefficients entiers tel que $f(0) \neq 0$ et de coefficient dominant a. Pour p un nombre premier, soit $g(x) = x^{p-1}f^p(x)$ et $J_p = \sum_{f(\alpha)=0} I(g;\alpha)$. On a

$$J_p = N\Big(\sum_n g^{(n)}(0)\Big) - \sum_n\Big(\sum_{f(\alpha)=0} g^{(n)}(\alpha)\Big).$$

Si $f(\alpha) = 0$, α est un zéro d'ordre p de g et donc $g^{(n)}(\alpha) = 0$ pour tout $n < p$. D'autre part si $n \geq p$, d'après ce qui précède, $g_n = g^{(n)}/p!$ est un polynôme à coefficients entiers de degré $m - n$ et

$$a^{m-n} \sum_{f(\alpha)=0} g^{(n)}(\alpha)$$

est entier, multiple de $p!$. En 0, on a $g^{(n)}(0) = 0$ pour $n < p - 1$ et pour $n \geq p$ alors que

$$g^{(p-1)}(0) = (p-1)!f(0)^p$$

Ainsi, il existe un entier M tel que

$$\frac{a^{m-p}}{(p-1)!}J_p = a^{m-p}Nf(0)^p + pM$$

Le second membre de cette égalité est entier et si p ne divise pas $aNf(0)$, il n'est pas multiple de p ; il est en particulier non nul et donc au moins égal à 1 en valeur absolue. Ainsi

$$|J_p| \geq (p-1)!a^{p-m} = (p-1)!p^{1-p\deg f}$$

Or la majoration de l'intégrale I dans (1) implique qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $|J_p| \leq c^p$ pour tout p. Quand p tend vers l'infini, la formule de Stirling rend ces deux inégalités incompatibles, de sorte qu'il existe un entier M tel que

$$\frac{a^{m-p}}{(p-1)!}J_p = a^{m-p}Nf(0)^p + pM$$

où $N = \sum_{f(\alpha)=0} e^\alpha$ n'est pas un entier non nul.

(iv) Supposons que π est algébrique et soit f un polynôme irréductible à coefficients entiers tel que $f(i\pi) = 0$ dont on note $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les racines. En développant l'égalité $\prod_{f(\alpha)=0}(1 + e^{\alpha})$, on en déduit que

$$\sum_{\epsilon \in \{0,1\}^n} exp(\sum \epsilon_j \alpha_j) = 0.$$

Soit alors $Q(X) = \prod_{\epsilon \in \{0,1\}^n}(X - \sum \epsilon_j \alpha_j)$. Les $\sum \epsilon_j \alpha_j = 0$ sont les racines du polynôme

$$P_0 = \prod_{\epsilon \in [0,1]^n} (X - \sum_j \epsilon_j \alpha_j)$$

dont les coefficients s'expriment comme des polynômes symétriques en les α_j : ce sont donc des polynômes en les fonctions symétriques élémentaires des α_j, donc en les coefficients de f. Ce sont donc des nombres rationnels et donc $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Soit un entier N tel que $NP_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et soit $q \geq 1$ la multiplicité del a racine 0 dans P_0. On pose $P := NF_0/X^q$: c'est un polynôme à coefficients entiers avec $P(0) \neq 0$. De plus on a

$$0 \sum_{\epsilon \in [0,1]^n} \exp(\sum_j \epsilon_j \alpha_j) = q + \sum_{P(\beta)=0} e^{\beta}$$

ce qui contredit (iii) et donc π n'est pas algébrique.

□

4. Règle ou compas

4.1. Le compas seul. — Le théorème de Mohr-Mascheroni affirme que toute construction à la règle et au compas peut se faire au compas seul ; pour cela il suffit de vérifier que l'ensemble $\mathcal{C}'$ des nombres constructibles au compas à partir de $\{O, I\}$ est un corps stable par racine carrée. Pour $u, v \in \mathcal{C}'$, dans le premier paragraphe nous avons déjà donné la construction de $-u, u + v$. Pour u^{-1} la construction est la même que celle du milieu en prenant dans la figure (1-v) le point $A = (2u, 0)$. En remplaçant dans cette dernière construction le cercle unité par celui de rayon v, on obtient la construction de v^2/u. En ce qui concerne la construction de $\sqrt{u}$, on reprend la figure de (1-vi) le point d'intersection du cercle avec la droite (Oy) s'obtenant en prenant l'intersection du cercle avec le cercle symétrique par rapport à (Oy). Par ailleurs en remplaçant 1 par v dans cette construction, on obtient $\sqrt{uv}$. En écrivant $uv = \frac{\sqrt{uv}^2}{1}$ et la construction de $\sqrt{uv}$ et celle de $\frac{v^2}{u}$, on obtient la construction de uv. d'où le résultat.

Remarque : une seconde voie pour prouver ce résultat est de construire au compas seul :

- l'intersection d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre C et passant par D avec une droite AB qui n'est pas un diamètre de $\mathcal{C}$: la construction est donnée à la figure 18 où l'intersection des cercles de centre A et B passant par C se recoupent en C' symétrique de C par rapport à AB. Les intersections cherchées sont alors celles de $\mathcal{C}$ avec le cercle de centre C' et de rayon $[CD]$.
- l'intersection de deux droites AB et CD : d'un point vue théorique on peut considérer les symétriques $A'B'$ de A et B par rapport à CD) puis C', D' les symétriques de C, D par rapport à A', B' puis les symétriques $A”, B”$ par rapport à C', D'. Les points $B, B', B”$ forment alors un triangle isocèle situé sur le cercle centré au point d'intersection cherché que l'on obtient alors par la construction de Napoléon citée plus haut.

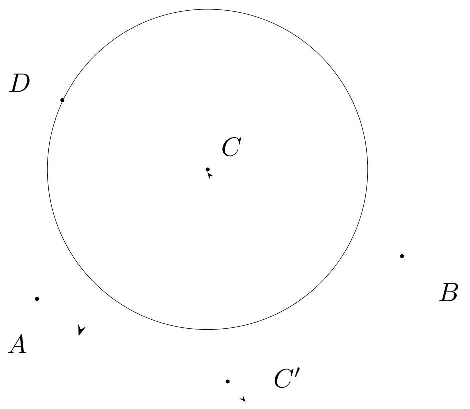


FIG. 18. Construction au compas de l'intersection d'un cercle et d'une droite

Remarque : évidemment cette construction ne fonctionne pas si $CD \perp AB$ mais dans ce cas il suffit simplement de prendre le milieu de $[AA']$.

Une construction plus pratique est donnée dans [**?**] p.27, on la reprend ici avec les notations de la figure 19, les cercles de centre B et D et de rayons respectifs $[AD]$ et $[AB]$ fournissent un point E de la parallèle menée de D à AB. Avec un rayon arbitraire r, prenons le point G commun aux cercles de centre D et C de rayon r et construisons la seconde intersection F de DE avec le cercle de centre G et de rayon r.

Le cercle de centre C et passant par F coupe AB en H et H'. On construit ensuite les cercles de centre K et K' passant respectivement par C, H et C, H' (prendre les intersections des cercles de centre C et H et de rayon r, idem pour C et H'). Si on choisit K et K' comme sur la figure, on affirme que les cercles précédents se coupent en un point X commun aux droite AB et CD : en effet comme les cordes $[CH]$, $[CH']$ et $[CF]$ sont de même longueur dans des cercles de même rayon, d'après le théorème de l'angle au centre on a $\widehat{CXH'} + \widehat{CXH} = \pi$ et donc $x \in AB$ et $\widehat{HXC} = \widehat{CDF}$ et donc $X \in CD$.

- l'intersection d'un cercle de centre C et passant par A et de son diamètre passant par B. Les notations sont celles de la figure 20 : on considère un cercle quelconque Γ passant par B qui coupe $\mathcal{C}$ en D et E. On construit alors un point O sur DE (considérer par exemple le symétrique C' de C par rapport à DE et prendre l'intersection de deux cercles de même rayon centrés en C et C'). On considère alors l'inversion de centre O et de rapport $OD.OE$ de sorte que $\mathcal{C}$ et Γ sont globalement invariants. On construit ω l'intersection de la médiatrice de OF avec la droite OO' où O' est le symétrique de O par rapport à CB. Ainsi le cercle Γ' de centre ω et passant par O est l'image de la droite cherchée CB par l'inversion précédente de sorte que les points d'intersections cherchés X, Y s'obtiennent en prenant l'intersection avec $\mathcal{C}$ des droites issues de O et passant par les points d'intersection de Γ' avec $\mathcal{C}$.

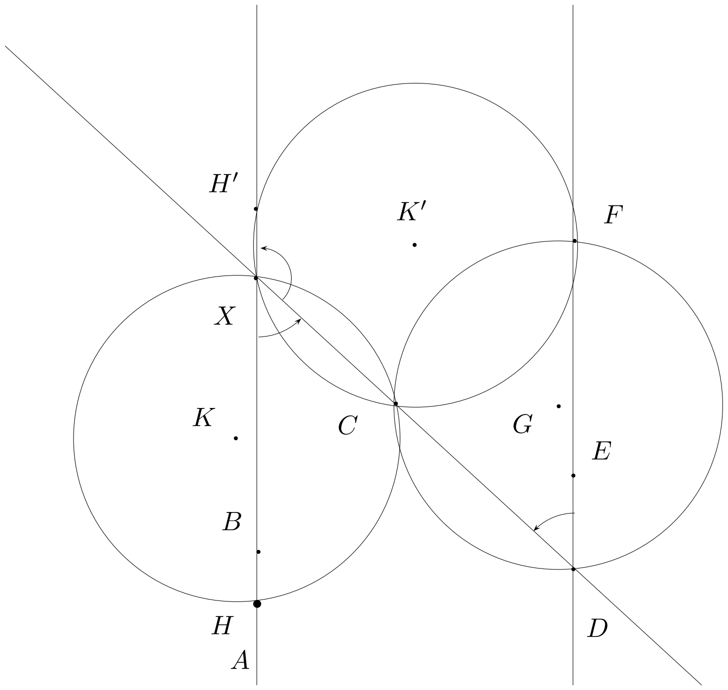


FIG. 19. Construction au compas de l'intersection de deux droites

4.2. La règle seule. — Les constructions à la règle seule nécessitent au minimum 4 points en position générale. Par ailleurs la nature des constructions est clairement de nature projective, i.e. doit être invariant par toute homographie (interprétez une homographie en passant comme d'habitude en dimension 3, en changeant le plan de coupe). Typiquement il n'est pas possible de savoir construire le milieu de tout segment (ce n'est pas une notion projective), tout comme construire une parallèle, l'isobarycentre d'un triangle...

On se fixe alors un repère projectif (O, A, B, C) du plan projectif : un point du plan projectif est donné par un système de coordonnées homogènes $[x, y, z] = [\lambda x, \lambda y, \lambda z]$, il sera dit à coefficients rationnels si pour $z \neq 0$, x/z et y/z appartiennent à $\mathbb{Q}$ et pour $z = 0$ si $y = 0$ ou pour $y \neq 0$ si $x/y \in \mathbb{Q}$.

On dit qu'un point du plan projectif est constructible à la règle s'il existe une suite finie de points du plan projectif $M_1, \cdots, M_n = M$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, M_i est le point d'intersection de deux droites distinctes, chacune de ces droites passant par deux points distincts de $\{O, A, B, C, M_1, \cdots, M_{i-1}\}$.

Théorème : *l'ensemble des points constructibles du plan projectif à la règle sont ceux dont les coordonnées projectives sont dans $\mathbb{Q}$.*

Preuve : Par récurrence, on vérifie immédiatement que toutes les coordonnées projectives des M_i sont dans $\mathbb{Q}$: on rappelle que les coordonnées homogènes de la forme $[x, y, 0]$ correspondent aux pentes y/x des droites constructibles et sont donc toutes rationnelles.

Avant de s'attaquer à la réciproque, (i) rappelle comment é Pour la justification passer en affine en envoyant la droite AB à l'infini, cf. ci-dessous.

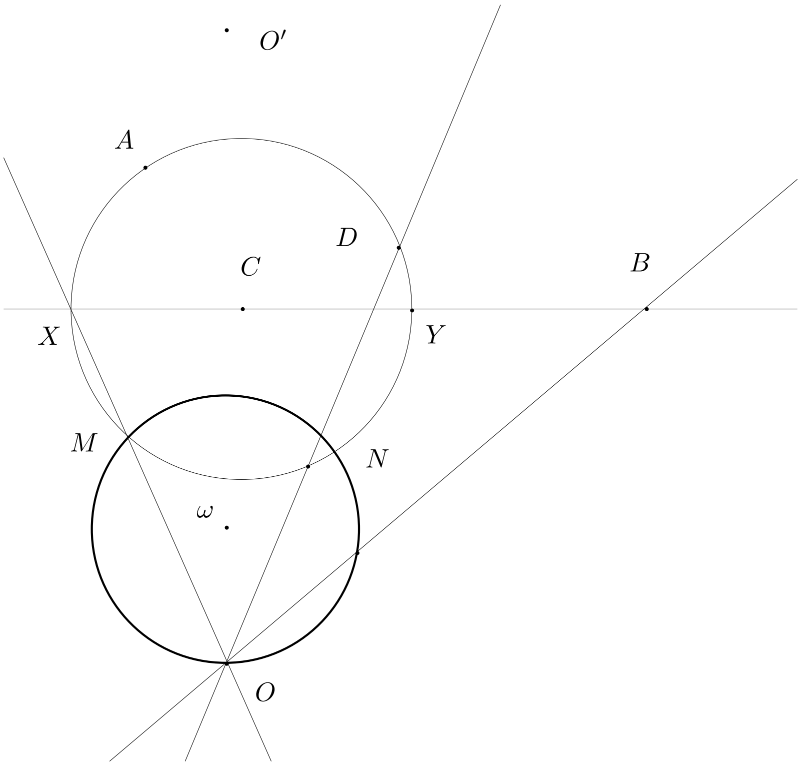


FIG. 20. Construction au compas de l'intersection d'un cercle et d'un de ses diamètres

L'idée des constructions suivantes est de considérer les constructions classiques à la règle dans le plan affine où la droite (AB) est la droite de l'infinie et de passer en projectif. Par exemple la construction, étant donné M de coordonnées homogènes $[x, y, 1]$, des points M_1, M_2, N de coordonnées respectives $[x, 0, 1]$, $[0, y, 1]$ et $[y, 0, 1]$, est donnée à la figure 21, celle de $[-u, 0, 1]$ à la figure 22, celle de $[u + v, 0, 1]$ à la figure 23 et celle de $[uv/w, 0, 1]$ à la figure 24.

En ce qui concerne les points à l'infini, i.e. les pentes des droites constructives, il suffit d'utiliser un point de coordonnées $[x, 0, 1]$ et $[0, y, 1]$ puis de construire $M = [x, y, 1]$ de sorte que la droite (OM) coupe l'infini en $[x, y, 0]$. $\square$

Remarque : si au départ on dispose de plus de 4 points de base, on en choisit 4 qui forment un repère projectif et on note $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les coordonnées avec $z = 1$ des autres points. L'ensemble des points constructifs est alors ceux dont les coordonnées projectives sont à valeurs dans $\mathbb{Q}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ dans le repère choisi.

Remarque : en ce qui concerne les points constructibles de la forme $[x, y, 1]$ qui dans leur construction n'utilise que des points à distance finie, i.e. avec $z = 1$, montrons que l'on obtient $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$. Par rapport aux constructions précédentes, on a pu utiliser la construction d'une droite passant par un point E à distance finie a un point à distance infinie, qui serait alors défini comme

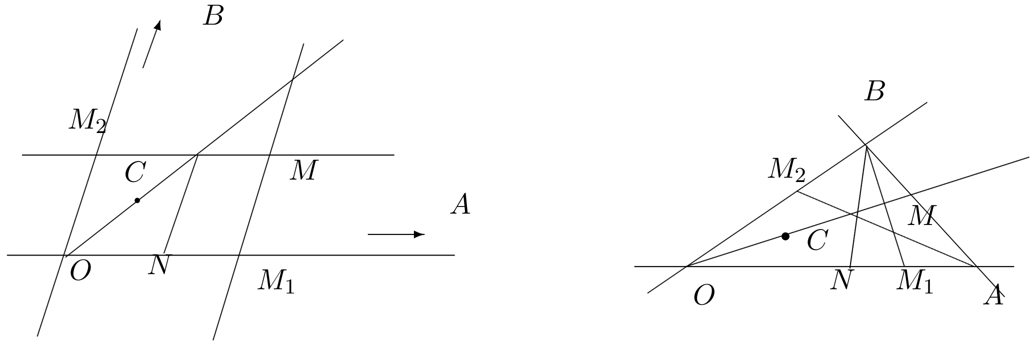


FIG. 21.

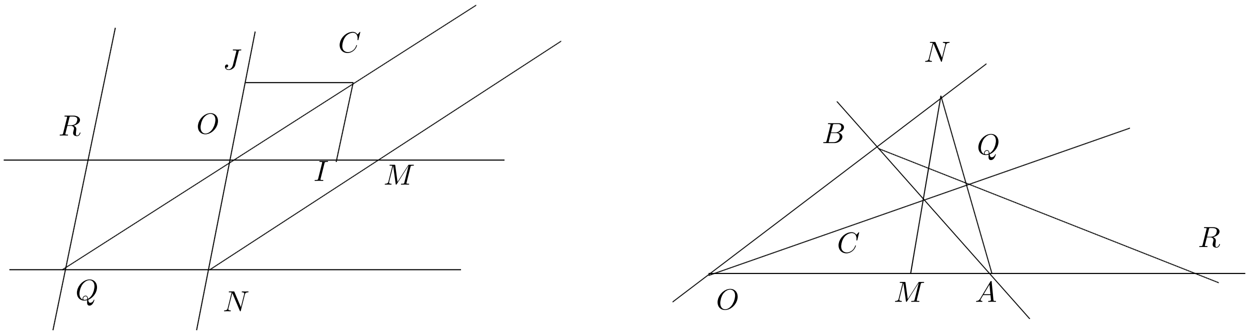


FIG. 22.

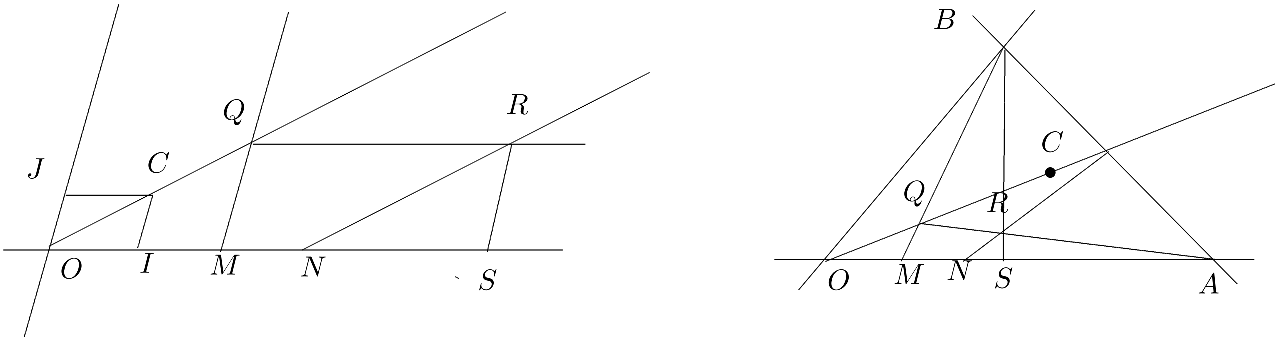


FIG. 23.

– l'intersection de deux droite parallèles. Il faut alors montrer que l'on sait construire la droite passant par E et parallèle à deux droites D_1 et D_2 qui sont parallèles. La construction est donnée à la figure 25 (i) : soit trois points A, B', C sur D_1, on construit

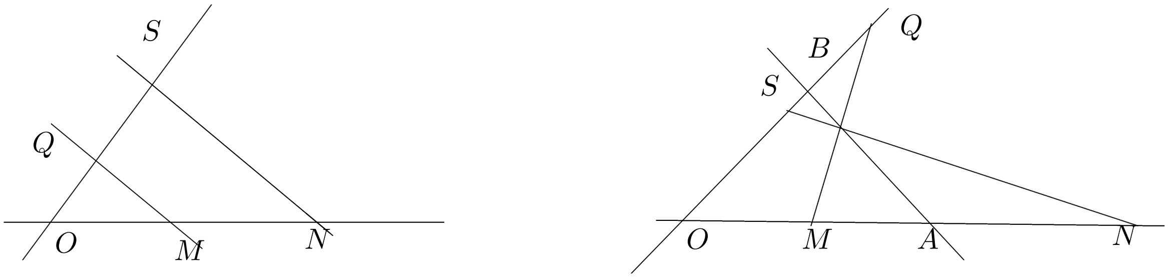
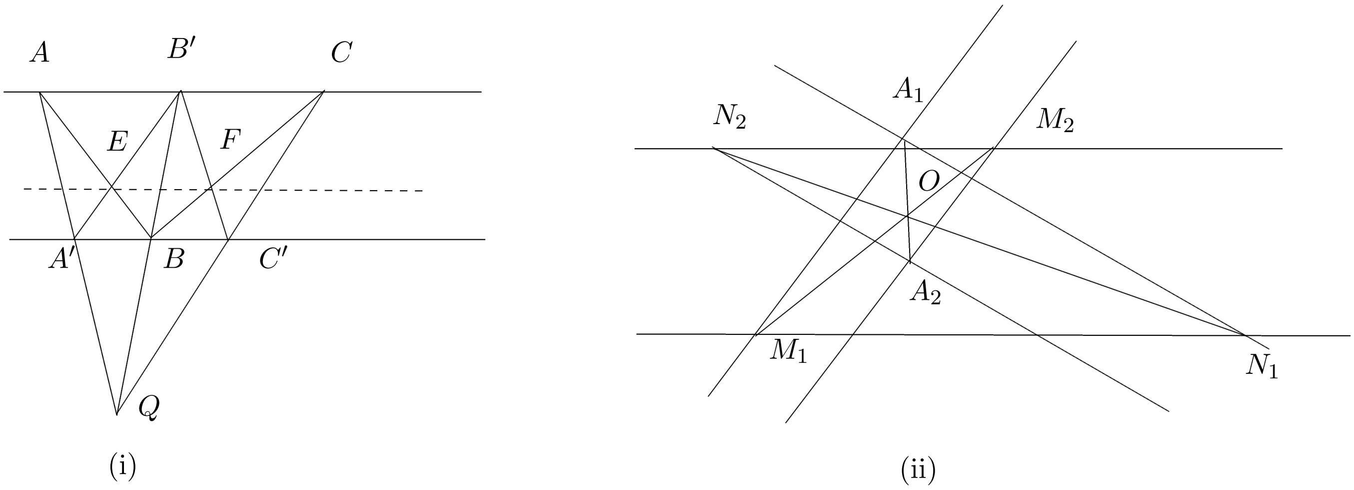


Fig. 24.

alors B, A' puis C'. D'après le théorème de Desargues, D_1, D_2 et (EF) se coupe en un point qui est forcément à l'infini et donc (EF) est parallèle à D_1 et D_2.
Remarque : si E est à égale distance de D_1 et D_2, le point Q est à l'infini et on est pas avancé. On construit alors un point intermédiaire E' qui n'est pas à égale distance de D_1 et D_2, puis la parallèle D_3 à D_1, D_2 passant par E' et comme E n'est pas à égale distance de D_1 et D_3, on construit finalement la parallèle à D_1, D_3 passant par E.

- l'intersection d'une droite avec la droite à l'infinie cette dernière étant définie par deux couples de deux droites parallèles. Autrement dit il faut savoir construire la parallèle à D passant par E sachant que l'on dispose de deux couples de droites parallèles. D'après ce qui précède il suffit de savoir construire une droite parallèle à D quelconque, on procède alors comme dans la figure 25 (ii) : en construit un point arbitraire O de la droite (A_1A_2), centre d'une homothétie qui envoie A_1 sur A_2 et donc la droite (M_1N_1) sur (M_2N_2) qui est alors parallèle à D.



(i) (ii)

Fig. 25.

4.3. Constructions à la règle courte et au compas à ouverture limitée. — Dans la pratique, on ne dispose ni d'une règle de longueur infinie ni d'un compas à ouverture aussi grande que l'on veut ; nous allons montrer que ces limitations n'en sont pas, théoriquement en tout cas.

La règle courte : supposons que l'on doive relier deux points distants de a cm alors que l'on ne dispose que d'une règle de $a/2 < b < a$ cm. Comme souvent dans ce genre de question, la solution nous est donnée par une utilisation judicieuse du théorème de Pappus. La figure 26 donne la construction : on commence par tracer les cercles de centre A et B et de rayon a et on place dans cette zone un segment $[A'B']$ (les cercles servent seulement à placer la figure). Puis on place C" $= (AB') \cap (A'B)$ ainsi qu'une droite D passant par C" (à chaque fois on essaie de rester à peu près parallèle à (AB)). On choisit $C' \in [A'B']$ et on place B" $= (AC') \cap D$ et A" $= (A'B) \cap D$. D'après le théorème de Pappus le point $C = (A'B$"$) \cap (B'A$"$)$ appartient à (AB) et les segments $[AC]$ et $[CB]$ peuvent être tracés avec notre règle. Ainsi on est capable d'émuler une règle de longueur $3a/2$ et donc par récurrence une règle de longueur $(3/2)^n a$, d'où le résultat. *La règle courte et le compas à ouverture limitée* : d'après ce qui précède, on peut donc ôter la restriction sur la règle courte ; on suppose donc disposer d'un compas ne pouvant tracer que des cercles de rayon $\leq a$. L'idée pour construire un point quelconque est de considérer une homothétie de notre figure de sorte que tous les rayons de cercle qui interviennent deviennent $\leq a$ (c'est possible puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels rayons) : cette homothétie se pratique à la seule règle, on utilise alors notre compas, puis on fait l'homothétie inverse.

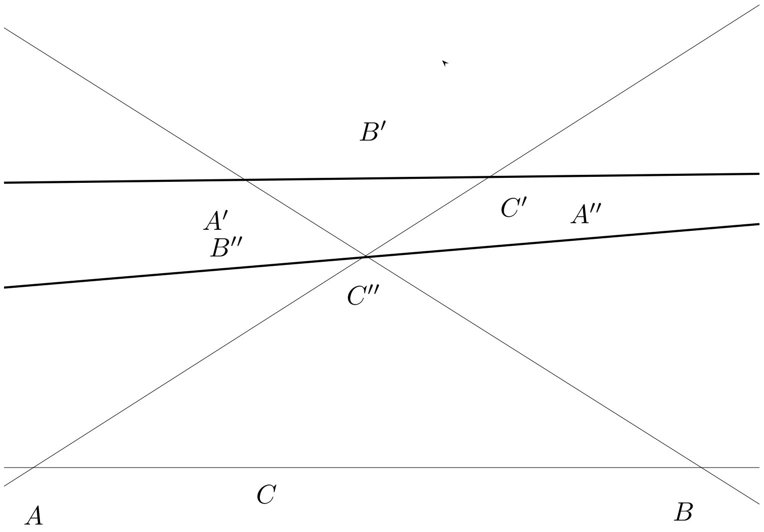


Fig. 26.

Le compas à ouverture limitée : le principe est le même que précédemment, il faut juste expliquer comment faire des homothéties avec un compas limité avec par exemple un rapport de la forme 2^{-n} ; par récurrence il suffit de savoir tracer des milieux. Remarquons déjà que la construction classique de la figure 21 (v) permet de tracer le milieu de $AB < l/2$. Supposons que par récurrence on sache construire le milieu de tout segment $[A, B]$ tel que $AB < (\frac{3}{2})^n l/2$: d'après ce qui précède la propriété est vraie pour $n = 0$, montrons alors le passage de n à $n+1$ en suivant la figure 27. On prend C proche du milieu cherché et donc tel que $\max\{AC, BC\} < \frac{2}{3}AB$. D'après l'hypothèse de récurrence on peut tracer les milieux M et N de respectivement AC et BC puis le milieu P de $[MN]$. Si on a pris C assez proche du milieu I cherché, on doit avoir $CP < l$ ce qui permet de tracer au compas le symétrique de C par rapport à P qui n'est autre que I.

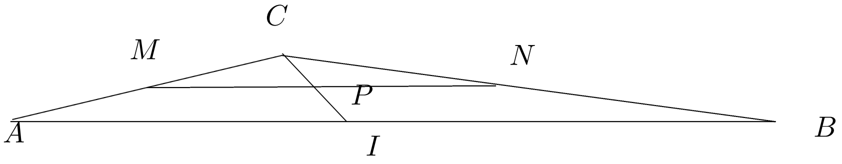


Fig. 27.

4.4. La règle accompagnée. — L'idée est d'ajouter un instrument à la règle afin d'élargir les constructions possibles.

4.1 — Nous avons vu précédemment qu'il n'était pas en général possible de tracer des parallèles à l'aide de la seule règle ; ajoutons alors à notre règle une traceuse de parallèles comme par exemple une équerre (pas forcément avec un angle droit : on fait glisser l'équerre le long de notre règle comme au primaire).

Théorème : *l'ensemble des points du plan constructibles à partir de (O, I, J) à l'aide de la règle et d'une traceuse de parallèles est l'ensemble des points dont les coordonnées affines relativement à (O, I, J) est sont rationnelles.*

Preuve : C'est une traduction affine de l'énoncé projectif concernant la règle seul : l'utilisation des points à l'infini correspond à savoir tracer des parallèles. □

Remarque : si pour traceuse de parallèles, on utilise une équerre à angle droite et que l'on s'autorise à tracer des perpendiculaires alors l'ensemble des points constructibles à partir de (O, I, K) sont ceux dont les coordonnées dans (O, I, J) appartiennent à $\mathbb{Q}(k)$ où K est de coordonnées $(k, 1)$.

4.2 — L'idée soumise par Poncelet, est de remplacer l'usage du compas par un unique cercle du plan avec son centre ; Steiner démontra le résultat en 1833. Autrement dit tout point constructible à la règle et au compas peut être construit uniquement à la règle à condition que soit tracé dans le plan un cercle avec son centre. Précisons l'énoncé : soit Γ un cercle de centre O et I un point de Γ ; *au cours de la construction on s'autorise à utiliser des points arbitraires du plan mais on ne retiendra comme constructibles que les points et droites obtenus qui ne dépendent pas de ces points arbitraires et qui sont donc intrinsèquement déterminés par O, I, Γ.* Par exemple pour la construction d'une parallèle à une droite donnée D passant par un point E du plan, on utilise un point $K \in \Gamma$ n'appartenant pas à (OI) ce qui permet de construire le rectangle $IKI'K'$ où I' et K' sont les points diamétralement opposés à I et K. On dispose alors de deux couples de droites parallèles ce qui d'après la construction de la figure 25 (ii) permet de construire des parallèles.

Théorème de Poncelet-Steiner : *le sous-ensemble* $\mathcal{C}_\Gamma$ *des points constructibles qui le sont au moyen de la règle et* O, I, Γ *coïncide avec l'ensemble des points constructibles à la règle et au compas.*

Preuve : Il suffit de montrer que $\mathcal{C}_\Gamma$ est un corps stable par racine carrée. Le fait qu'il soit un sous-corps de $\mathbb{R}$ découle des constructions précédentes qui n'utilisent que la règle et une traceuse de parallèles. En ce qui concerne la construction de $\sqrt{u}$, elle est donnée à la figure **??** : l'homothétie de centre H qui transforme I en N, envoie le triangle rectangle $I'\beta I$ en QRN de sorte que $RJ^2 = JN.JQ = u$. □

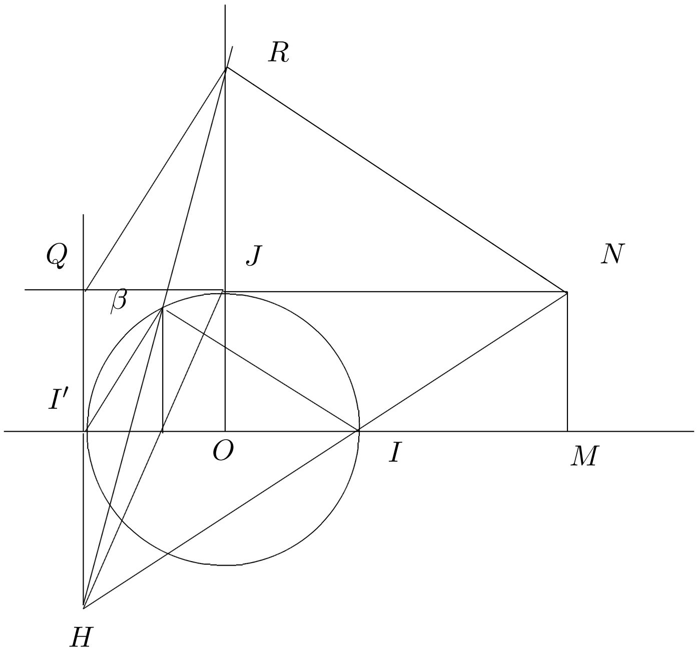


Fig. 28.

Remarque : si on ne se donne pas le centre, Hilbert a montré que l'on n'obtenait pas tous les points constructibles. Par contre on peut remplacer la donnée du centre par un autre cercle qui intersecte Γ.

4.3 — Adjoignons à la règle d'un bissecteur, cf. par exemple les pliages avec les axiomes O_1, O_2 et O_3 : O_2 correspond à prendre la bissectrice de l'angle plat.

Théorème : *l'ensemble* $\mathcal{C}_b$ *des coordonnées dans* (O, I, J) *des points constructibles à la règle et au bissecteur à partir de* $\{O, I\}$ *est le plus petit sous-corps de* $\mathbb{R}$ *qui soit pythagoricien, i.e. si* $u, v \in \mathcal{C}_b$ *alors* $\sqrt{u^2+v^2} \in \mathcal{C}_b$.

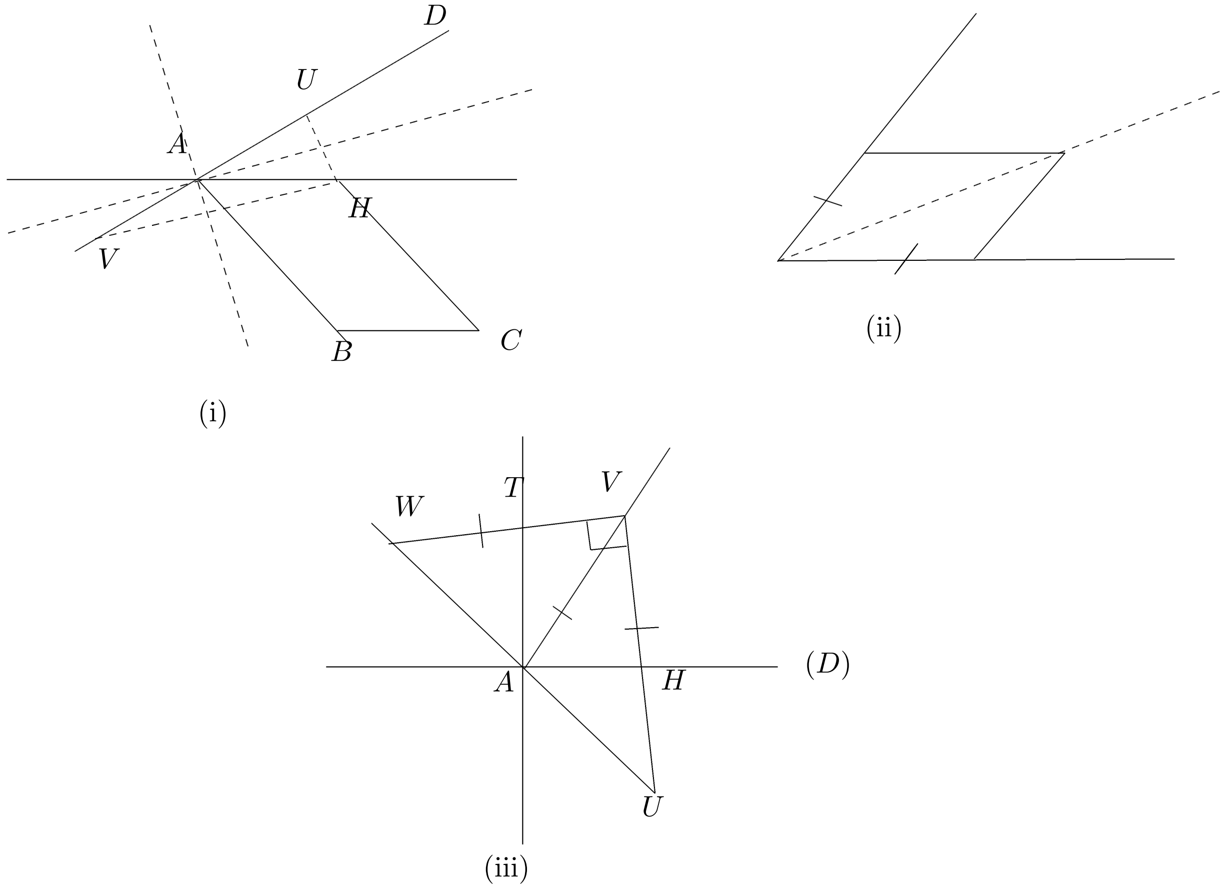
Preuve : Grâce à la bissection d'un angle plat, on peut construire un rectangle et donc deux couples de droites parallèles ce qui d'après ce qui précède permet de tracer des parallèles ce qui montre que l'ensemble $\mathcal{C}_b$ des coordonnées constructibles est un corps. Montrons qu'il est pythagoricien : les notations sont celles de la figure 30. On a

$$\overline{JM} = \operatorname{cotan}(2\alpha) = \frac{u}{v} = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$$

avec $\tan\alpha = \overline{IN}$ qui est donc racine de $X^2 + 2\frac{u}{v}X - 1$ soit

$$\tan\alpha = -\frac{u}{v} \pm \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{v}$$

et comme $\mathcal{C}_b$ est un corps, $\sqrt{u^2+v^2} \in \mathcal{C}_b$.



(i) (ii) (iii)

Fig. 29.

Il ne reste alors plus qu'à vérifier que $\mathcal{C}_b$ est le plus petit sous-corps pythagoricien : soit L un corps pythagoricien, montrons alors que toute droite constructible a une équation à coefficient dans L ce qui se démontre par récurrence en supposant que D s'obtienne à partir de droites à coefficients dans L : or si $\overrightarrow{u_1} = (a_1, b_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (a_2, b_2)$ sont des vecteurs directeurs à coefficients dans L de deux droites distinctes D_1 et D_2, $\frac{\overrightarrow{u_1}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} + \frac{\overrightarrow{u_2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ est un vecteur directeur à coefficients dans L d'une des bissectrices de $\widehat{D_1, D_2}$, d'où le résultat. $\square$

Proposition : *si $\alpha \in \mathcal{C}_b$ de polynôme minimal $\mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, alors toutes les racines de $P(X)$ sont dans $\mathcal{C}_b$.*

Preuve : Soit $\beta \in \mathbb{C}$ une racine de μ_α ; notons σ un isomorphisme de $\mathbb{Q}(\alpha) \simeq \mathbb{Q}(\beta)$ tel que $\sigma(\alpha) = \beta$ et soit $\bar{\sigma}$ son prolongement à $\mathcal{C}_b$. Or $\bar{\sigma}^{-1}(\mathcal{C}_b)$ est clairement un sous-corps de $\mathcal{C}_b$ qui est pythagoricien : en effet pour $u, v \in \bar{\sigma}^{-1}(\mathcal{C}_b)$, pour $w = \sqrt{u^2+v^2}$, on a

$$\bar{\sigma}(w^2) = \bar{\sigma}(w)^2 = \bar{\sigma}(u)^2 + \bar{\sigma}(v)^2$$

et comme $\bar{\sigma}(u)$ et $\bar{\sigma}(v)$ sont dans $\mathcal{C}_b$, on a $\bar{\sigma}(w) = \pm\sqrt{\bar{\sigma}(u)^2 + \bar{\sigma}(v)^2} \in \mathcal{C}_b$ soit $w \in \bar{\sigma}^{-1}(\mathcal{C}_b)$ et donc par minimalité de $\mathcal{C}_b$, on a bien $\bar{\sigma}^{-1}(\mathcal{C}_b) = \mathcal{C}_b$ et donc $\beta \in \mathcal{C}_b$. □

Remarque : en particulier on remarque que l'inclusion $\mathcal{C}_b \subset \mathcal{C}$ est stricte : prendre par exemple $\alpha = \sqrt[4]{2}$.

Remarque : la règle et le bissecteur sont équivalents à la donnée de la règle et d'un transporteur de distance. Dans le sens direct, supposons donné une droite D et un point $A \in D$ ainsi qu'un point H du plan : on construit les bissectrices de (AH) et D de sorte que les parallèles passant par H à ces bissectrices recoupent D en deux points U et V tels que $\overline{AU} = -\overline{AV} = AH$ (si $H \in D$, on prend une droite auxiliaire distincte sur laquelle on applique la construction précédente ; la parallèle à UH passant par V coupe D au point cherché). Dans le cas où la distance est donnée par BC, on construit le parallélogramme $AHBC$ ce qui nous permet de nous ramener au cas précédent, cf. la figure 30 (i).

Réciproquement en reportant les distances, on construit un couple de deux droites parallèles ce qui nous permet d'avoir une traceuse de parallèles. La construction des bissectrices est alors donnée à la figure 30 (ii) dans le cas d'un angle non plat et en (iii) pour un angle plat. Dans cette dernière situation, par transport des parallèles, on construit deux droites orthogonales passant par A, puis grâce au transporteur de distance, on construit U, V, W tels que $AU = AV = AW$ puis à partir de $H = (D) \cap (UV)$, soit T tel que $VT = UH$, on a alors $(AT) \perp (D)$.

5. De nouveaux instruments pour de nouvelles constructions

5.1. Comment construire une règle. — Evidemment il suffit de disposer d'un segment de droite aussi petit soit-il puisque l'on a vu qu'il est ensuite possible de construire des règles plus grandes. Nous allons présenter suivant [**?**] p.110, l'instrument de Peaucellier qui sert à construire des inversions.

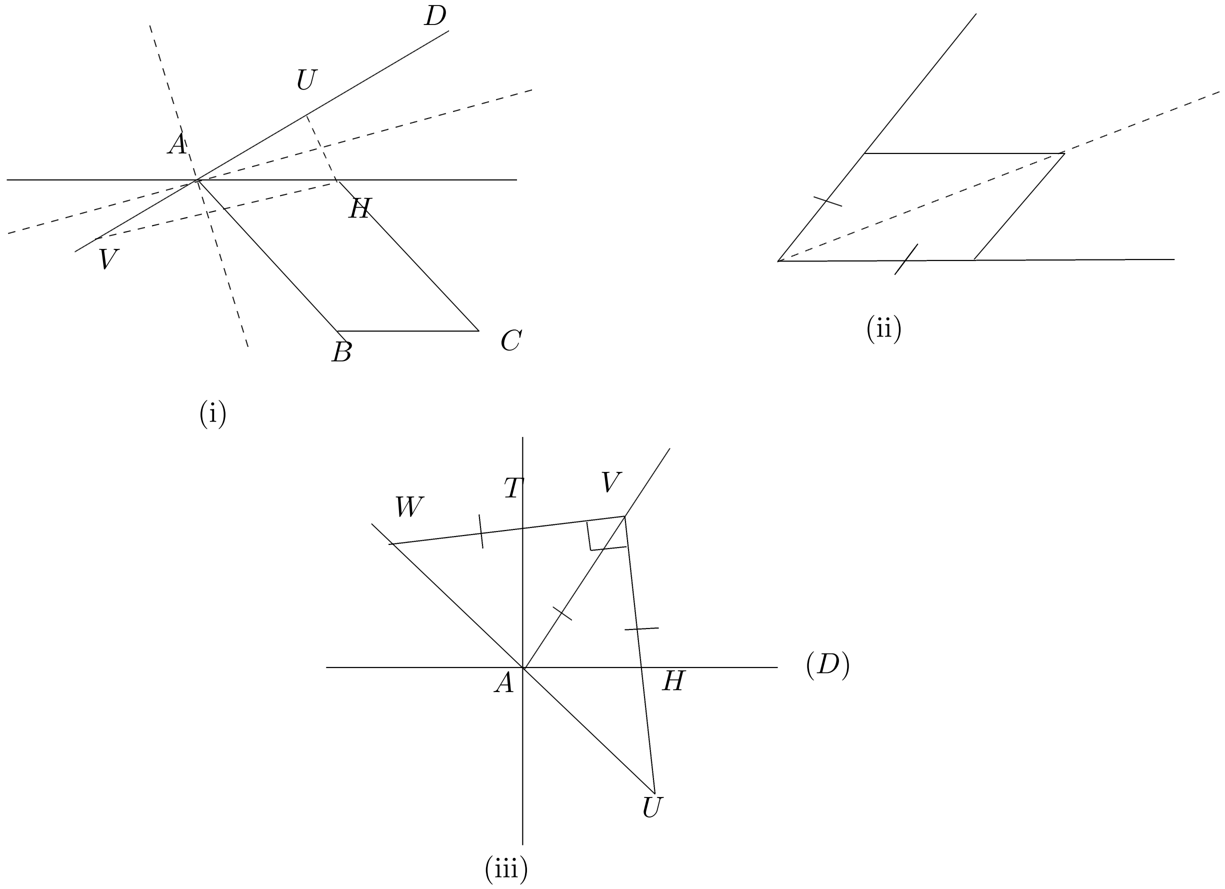
On considère la configuration de points de la figure 31 où O et S sont des points fixes tels que $OS = PS$. Lorsque l'instrument se déplace, P décrit un cercle passant par O ; il suffit donc de vérifier que P' est l'inverse de P par l'inversion de centre O et de rapport $a^2 - b^2$. Notons X le centre du losange $PRP'Q$, on a alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OP'} &= (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{PX}).(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{PX} = OX^2 - PX^2 \\ &= OX^2 + RX^2 - RX^2 - PX^2 = OR^2 - PR^2 = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

5.2. La règle marquée. — Nous avons déjà vu comment la règle marquée permet de trisecter les angles, cf. la figure 1. Nous présentons ci-dessous la construction de Neusis de l'heptagone régulier avec la règle marquée.

Lemme : *Dans la figure 32, on a* $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA = 1$ *avec* A, B, F, D *(resp.* A, G, C, E*) alignés. On a alors* $\alpha = \widehat{DAE} = \frac{\pi}{7}$ *et* $BE = \sqrt{2}$.

Preuve : Le triangle ABC étant isocèle en A, on a $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \alpha$ et $\widehat{CBA} = \pi - 2\alpha$ soit encore $\widehat{DBC} = 2\alpha$. En utilisant le triangle BCD isocèle en C, on obtient selon le même raisonnement $\widehat{BCD} = \pi - 4\alpha$. Le triangle EAD étant isocèle en A, on a $\widehat{EDA} = \widehat{AED} = \frac{\pi-\alpha}{2}$



(i)

(ii)

(iii)

Fig. 30.

et donc $\widehat{EDC}=\frac{\pi-5\alpha}{2}$. Finalement CDE étant isocèle en D, on a $\widehat{DCE}=\widehat{CED}=\frac{\pi+5\alpha}{4}$ et comme

$$\widehat{ACE}=\widehat{ACB}+\widehat{BCD}+\widehat{DCE}$$

on obtient $\pi=\alpha+\pi-4\alpha+\frac{\pi+5\alpha}{4}$ et donc $\alpha=\pi/7$.

On a alors $\widehat{EDC}=\pi/7$ de sorte que les triangles GAB, CDE et DEF sont isométriques soit $BG=DF=CE$. On a aussi $\widehat{FBC}=\widehat{BCF}=2\pi/7$ et les triangles BFC et GVF sont isocèle en F et C respectivement et donc $FC=GC$. Posons $a=BG$ et $b=CF$, les triangles ABG, AFC et ADE étant semblables, on a

$$\frac{1}{a}=\frac{1+b}{b}=\frac{1+a+b}{1}$$

d'où il vient $a^2+ab+a=1$ et $b^2+ab=1$ ce qui donne par sommation $a^2+b^2+2ab+a=2$. Soit alors H le projeté orthogonal de B sur (DE) ; le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles BDH et EBH donne

$$BH^2=BE^2-EH^2=BD^2-DH^2$$

soit $BE^2-(\frac{1+a}{2})^2=(a+b)^2-(\frac{1-a}{2})^2$ et donc $BE^2=a^2+b^2+2ab+a$ et donc $BE=\sqrt{2}$. $\square$

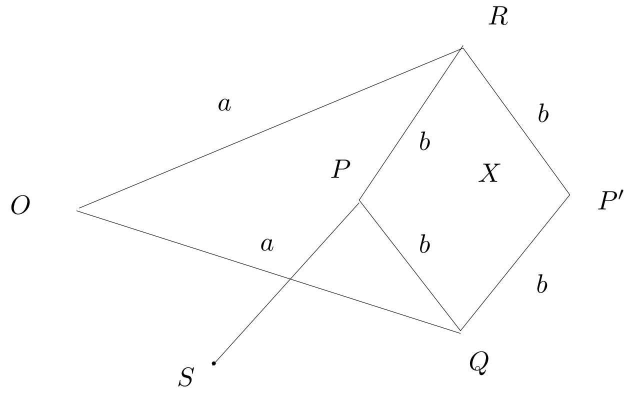


FIG. 31.

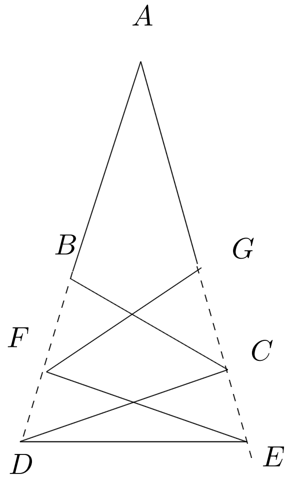


FIG. 32.

La construction de l'heptagone régulier est alors donné à la figure 33 : on trace $[DE]$ de longueur 1 qui sera un des côtés de l'heptagone, puis sa médiatrice et le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{2}$. Grâce à la règle marquée avec une distance 1, on place A et B tels que $AB = 1$, avec A sur la médiatrice et B sur le cercle, ces deux points étant alignés avec D ; d'après les lemme précédent on a $\widehat{DAE} = \pi/7$. On trace alors le centre O du cercle circonscrit à l'heptagone en prenant l'intersection des médiatrices $[DE]$ et $[DA]$, puis on construit les autres sommets de l'heptagone en reportant la distance $DE = 1$ à partir de D.

5.3. Courbes annexes. — L'idée ici est de se donner une courbe qui nous permettra de résoudre la duplication du cube et la trisection des angles. Afin de rester dans un cadre réutilisable, on se limitera aux coniques et on renvoie le lecteur à [**2**] pour des exemples plus exotiques.

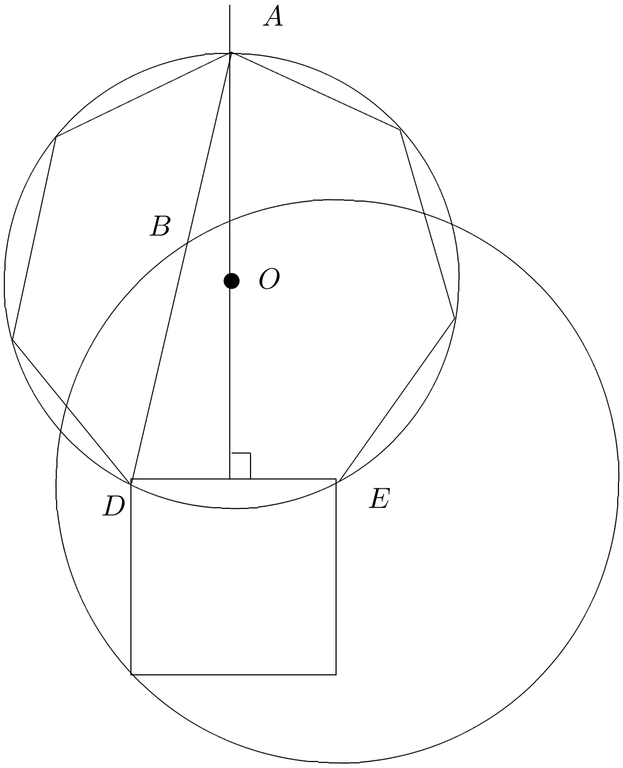


FIG. 33.

Duplication du cube : considérons suivant Menechme les paraboles d'équations $x^2 = ay$ et $y^2 = bx$ dont leur point d'intersection autre 0 est $\sqrt[3]{a^2b}$. En particulier pour $a = 1$ et $b = 2$, on résoud la duplication du cube. Les coniques étant constructibles points par points à la règle et au compas, on peut ainsi obtenir une résolution graphique de la duplication du cube. En utilisant la définition d'une parabole par foyer et directrice, on dispose d'un procédé mécanique pour tracer ces paraboles : prendre une équerre ABC rectangle en A et fixer en B une extrémité d'une ficelle de longueur AB l'autre extrémité étant fixée en le foyer F. On déplace alors l'équerre le long de la directrice D selon son côté AC, le crayon tendant la ficelle en restant au contact avec AB, décrit alors une partie de la parabole.

Trisection des angles : considérons la parabole d'équation $y = x^2$ et suivant la figure 34 cherchons à trisecter l'angle $\widehat{BOA}$. On trace le cercle de centre O et de rayon 2 et on trace le segment $[ED]$ parallèle à l'axe des abscisses et de longueur $\frac{1}{2}CA$. On trace ensuite le cercle de centre D passant par O qui recoupe la parabole en F. On note alors G l'intersection de la droite parallèle à l'axe (Oy) passant par F avec le cercle de centre O et de rayon 2. On vérifie alors que $3\widehat{BOG} = \widehat{BOA}$. Comme précédemment on dispose ainsi d'une résolution mécanique de la trisection des angles.

5.4. Compas, règle et trisecteur. — On appelle trisecteur un appareil ou un procédé permettant, à partir d'un angle de mesure θ, de construire un angle de mesure $\theta/3$: nous avons vu que les origami ou la donnée d'une courbe annexe comme une parabole, sont des trisecteurs.

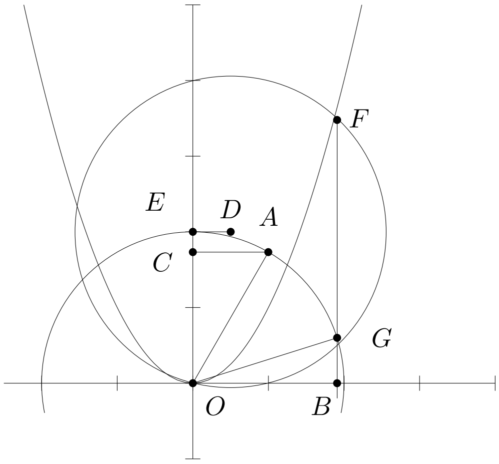


FIG. 34. Trisection des angles à l'aide d'un parabole.

Théorème : *étant donnée une équation du troisième degré à coefficients réels dont les trois racines sont réelles, il est possible à l'aide de la règle, du compas et du trisecteur de construire des points ayant pour abscisses les racines de l'équation.*

Preuve : On se donne l'équation sous la forme $x^3 + px + q = 0$ étant entendu que p, q sont donnés géométriquement, i.e. sont les abscisses de deux points du plan. Les trois racines étant réelles, on en déduit que $4p^3 + 27q^2 \leq 0$ et donc $p \leq 0$. Le cas $p = 0$ impose $q = 0$ est trivial, supposons donc $p < 0$. L'idée est alors de se ramener à une équation de la forme $\cos\theta - h = 0$ en l'inconnue θ : pour cela on pose $x = \rho\cos\theta$ et on détermine ρ pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ soit équivalente à $\cos\theta - h = 0$. On a

$$x^3 + px + q = \rho^3\cos^3\theta + p\rho\cos\theta + q, \qquad \cos(3\theta) - h = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - h$$

de sorte que pour $\rho = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$, on a

$$x^3 + px + q = 2\sqrt{\frac{-p^3}{27}}\Big(4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \frac{q}{2\sqrt{-p^3/27}}\Big) = 2\sqrt{\frac{-p^3}{27}}\Big(\cos(3\theta) + \frac{q}{2\sqrt{-p^3/27}}\Big).$$

Ainsi pour θ_0 une solution particulière de $\cos(3\theta) + \frac{q}{2\sqrt{-p^3/27}} = 0$, les réels

$$x_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\theta_0 + \frac{2k\pi}{3}), \quad k = 0, 1, 2$$

sont les trois racines réelles de $x^3 + px + q = 0$.

La construction géométrique est alors la suivante : soit Γ et C les cercles de centre O et de rayon respectifs 1 et $2\sqrt{\frac{-p}{3}}$ qui sont constructibles au compas d'après le théorème de Wantzel. Soit alors H le point de la droite des abscisses tel que $\overline{OH} = \frac{-q}{\sqrt{-p^3/27}}$ qui, comme $4p^3 + 27q^2 \leq 0$, est de valeur absolue ≤ 1. Le point $U \in \Gamma$ d'abscisse H est donc tel que $\cos(\widehat{HOU}) = \overline{OH}$; à l'aide du trisecteur on construit le point M_1 de C tel que$\widehat{HOM_1} = \frac{1}{3}\widehat{HOU}$: son abscisse est alors égale à x_1. On construit alors M_2, M_3 sur C tels que $M_1M_2M_3$ soit équilatéral. Les abscisses de M_1, M_2, M_3 sont alors les racines de $x^3+px+q=0$. $\square$

5.5. Constructions par coniques. — Soit $\mathcal{B}$ un ensemble fini de points du plan affine euclidien $\mathbb{P}$ de cardinal ≥ 2. Un point M est dit constructible par coniques à partir de $\mathcal{B}$ s'il existe une suite finie $M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = M$ de points de $\mathbb{P}$ telle que pour tout $1 \leq k \leq n$, en notant $E_k = \mathcal{B} \cup \{M_1, \cdots, M_{k-1}\}$, le point M_k s'obtient comme l'intersection de

- deux droites passant par deux points de E_k ;
- de deux cercles centrés en un point de E_k et dont le rayon est la distance entre deux points de E_k ;
- de deux coniques propres passant par 5 points de E_k.

Remarque : nous avons vu comment tracer à la règle et au compas les foyers, axes et directrices d'une conique connaissant 5 de ses points ; on dispose alors d'instruments mécaniques simples permettant de tracer de larges parties de ces coniques.

Dans la suite on note $\mathcal{C}_c$ l'ensemble des abscisses des points constructibles par coniques dans le repère (O, I, J) pour $\mathcal{B} = \{O, I\}$. D'après les constructions précédentes qui n'utilisent que la règle et le compas, $\mathcal{C}_c$ est un corps stable par racine carrée qui par ailleurs contient strictement $\mathcal{C}$ comme on l'a vu avec l'exemple de $\sqrt[3]{2}$ obtenu comme l'intersection de deux paraboles.

Théorème : *$t \in \mathcal{C}_c$ si et seulement s'il existe $n \geq 1$ et une tour d'extensions $\mathbb{Q} = L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n \subset \mathbb{R}$ avec $t \in L_n$ et pour tout $1 \leq i < n$, $[L_{i+1} : L_i] = 2, 3, 4$.*

Preuve :

$\square$

Remarque : en particulier tout réel constructible par coniques est de degré 2^a3^b : ainsi $\sqrt[5]{2}$ n'est pas constructible par coniques. On notera que la construction par coniques permet la duplication du cube ainsi que la trisection des angles.

Théorème : *$\mathcal{C}_c$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée et tel que toute racine réelle d'un polynôme du troisième degré à coefficients dans $\mathcal{C}_c$ soit dans $\mathcal{C}_c$. Le corps $\mathcal{C}_c(i)$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ stable par racine carrée et racine cubique.*

Preuve :

$\square$

Théorème : *les polygones réguliers constructibles par coniques sont ceux dont le nombre de côtés est de la forme 2^a3^b ou $2^a3^bp_1 \cdots p_k$ où les p_i sont des nombres premiers de la forme 2^a3^b+1.*

Preuve : Le schéma de la preuve est identique à celle du théorème de Gauss. Dans le sens direct remarquons que les angles $2\pi/2^a$ et $2\pi/3$ sont constructibles au compas de sorte que les $2\pi/3^b$ sont constructibles par coniques, par trisection. Par ailleurs comme $[\mathbb{Q}(e^{2i\pi/p^\alpha}) : \mathbb{Q}(\cos(2\pi/p^\alpha))] = 2$, si l'angle $2\pi/p^\alpha$ est constructible par coniques alors $[\mathbb{Q}(e^{2i\pi/p^\alpha}) : \mathbb{Q}] = p^{\alpha-1}(p-1)$ est de la forme 2^a3^b ce qui impose pour $p > 3$, $\alpha = 1$ et $p = 1 + 2^a3^b$.

Réciproquement le corps de décomposition de $\cos(2\pi/p)$ dans $\mathbb{C}$ est égal à son corps de rupture et son groupe de Galois est isomorphe au sous-groupe d'indice 2 de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Or le groupe cyclique $\mathbb{Z}/2^{a-1}3^b\mathbb{Z}$ admet une suite d'extension $(0) = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = \mathbb{Z}/2^{a-1}3^b\mathbb{Z}$ telle que pour tout $0 \leq i < n$, G_{i+1}/G_i est de la forme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et donc $\cos(2\pi/p)$ est constructible par coniques. $\square$

Construction de l'heptagone régulier : notons $\omega = e^{2i\pi/7}$ de sorte que $v = 2\cos(2\pi/7) = \omega + \omega^{-1}$ est une racine de $X^3 + X^2 - 2X - 1 = 0$. Posons $u = v + 1/3$ qui devient une racine de $X^3 - 7/3X - 7/27$. On trace selon le principe de la résolution des équations du troisième degré via la trisection des angles cf. plus haut, les cercles centrés en O et de rayon 1 et $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. On place alors H sur l'axe des réels tel que $OH = \frac{1}{3\sqrt{21}}$ puis U sur le cercle unité de projeté orthogonal H et on trisecte l'angle $\widehat{HOU}$ via l'utilisation de la parabole $y = x^2$ comme plus haut.

5.6. Pliages et Origami. — On s'autorise à tracer des droites selon la technique des pliages. Les axiomes sont les suivants illustrés à la figure 35 :

- O_1 : étant donnés deux points p_1 et p_2, on peut plier selon la droite les reliant ;
- O_2 : étant donnés deux points p_1 et p_2, on peut plier selon la médiatrice de $[p_1, p_2]$: autrement dit on autorise un pliage qui envoie p_1 sur p_2 ;
- O_3 : étant donnés deux droites l_1 et l_2, on peut plier selon leur bissectrice intérieure ; autrement dit on autorise un pliage qui envoie l_1 sur l_2 ;
- O_4 : étant donnés un point p et une droite l, on peut plier selon la droite orthogonale à l et passant par p ;
- O_5 : étant donnés deux points p_1, p_2 et une droite l, on peut plier selon une droite passant par p_2 et envoyant p_1 sur l ;
- O_6 : étant donnés deux points p_1, p_2 et deux droites l_1, l_2, on peut plier selon une droite qui envoie p_1 sur l_1 et p_2 sur l_2 ;
- O_7 : étant donnés un point et deux droites, on peut plier perpendiculairement à la deuxième droite de sorte à envoyer le point sur la première droite.

Le pliage de la figure 36 explique, selon Abe, la trisection des angles : par réflexion $\beta = \widehat{ABC} = \widehat{BAD}$ et $BD = AC$ de sorte que le triangle ABC est isocèle en A et donc $\alpha = \widehat{CAA'} = \widehat{A'AB}$ avec $\alpha + \beta = \pi/2$ et donc $\alpha = \widehat{IAB} = \frac{1}{3}\widehat{IAC}$.

S'inspirant d'une feuille rectangulaire, $\mathcal{B}$ désigne ici les 4 sommets d'un rectangle et on utilise les axiomes précédents pour construire des droites et des points : O_4 sert visiblement à placer des points sur les droites que l'on plie.

Théorème : *Les constructions par pliages utilisant O_1, O_2, O_3 et O_4 correspondent à la règle avec bissecteur ; celles utilisant O_1, O_2, O_3, O_4 et O_5 correspondent à la règle et le compas ; si on utilise en plus O_6, on obtient les constructions par coniques.*

Preuve : Les 3 premiers axiomes sont clairement équivalents à la donnée d'une règle et d'un bissecteur. Remarquons ensuite que O_5 est constructible à la règle et au compas comme suit : on trace le cercle centré en p_2 et passant par p_1 qui recoupe l en un point p_3, la droite cherchée est alors la médiatrice de $[p_1, p_3]$. Notons $\mathcal{C}'_o$ l'ensemble des abscisses constructibles par les 5 premiers axiomes des origami ; l'utilisation des 3 premiers montre d'après ce qui précède que $\mathcal{C}'_o$ est un corps qui est donc contenu dans $\mathcal{C}$. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{C}'_o$ est stable par racine carrée. La construction est donnée à la figure 37 : le point p_1 est de coordonnées $(0, 1)$ et on place p_2 en $(0, -y)$: on plie selon la droite qui envoie p_1 sur la droite $y = -1$ et on note p'_1 l'image de p_1. Le point M milieu de $[p_1, p'_1]$ est aussi sur la droite de pliage et sur l'axe des x notons x son abscisse. En notant $\alpha = \widehat{Mp_1p'_1}$, on a $\tan\alpha = x = \frac{y}{x}$ et donc $x = \sqrt{y}$ d'où le résultat.

Considérons désormais l'utilisation des 6 axiomes et notons $\mathcal{C}_o$ l'ensemble des abscisses constructibles qui est donc un corps stable par racine carrée. Pour montrer qu'il est contenu dans $\mathcal{C}_c$ il suffit de voir que la droite de pliage de l'axiome O_6 qui est la tangente commune aux paraboles de foyers p_1 et p_2 et de directrices respectives l_1 et l_2 est constructibles par coniques. Or cette tangente commune si elle existe est l'intersection des deux coniques duales du plan affine dual ; or d'après ce qui précède sur les constructions par coniques, cela revient

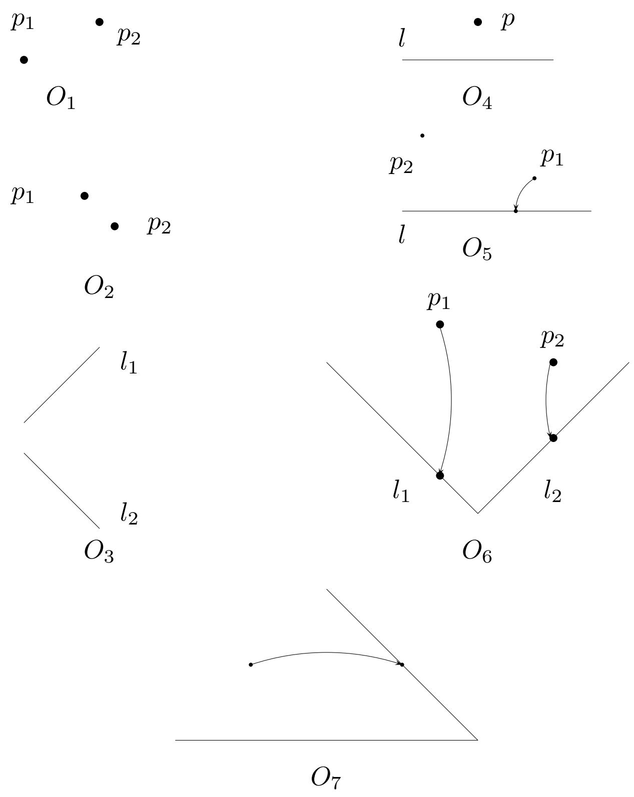


FIG. 35. Listes des axiomes des origami

à résoudre une équation de degré 3 laquelle est résoluble par coniques d'après le paragraphe précédent.

Ainsi pour montrer que $\mathcal{C}_o = \mathcal{C}_c$, il suffit de vérifier que toute racine réelle d'un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathcal{C}_o$ appartient à $\mathcal{C}_o$, polynôme que l'on peut mettre sous la forme $X^3 + aX + b$. On considère les paraboles $(y - a/2)^2 = 2bx$ et $y = x^2/2$ dont on trace une tangente commune de pente μ. Notons (x_0, y_0) et (x_1, y_1) les points d'intersection ; on a alors

$$\frac{b}{y_0 - a/2} = \mu = x_1, \quad y_1 = \mu^2/2, \quad x_0 = \frac{(y_0 - a/2)^2}{2b} = b\mu^2/2$$

de sorte que

$$\mu = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\mu^2/2 - a/2 - b/\mu}{\mu - b\mu^2/2}$$

et donc $\mu^3 + a\mu + b = 0$. □

Remarque : en ce qui concerne O_7 qui est constructible à la règle et au bissecteur, il n'est pas équivalent à un autre axiome ; on pourrait alors étudier ce que l'on obtient en l'utilisant à la place d'un ou de plusieurs autres... Robert Lang a montré qu'il n'y a pas d'autres axiomes cachés.

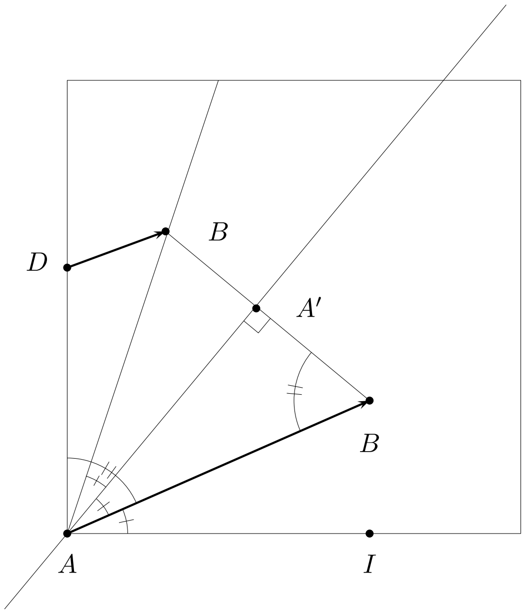


Fig. 36. Trisection des angles par pliage

Remarque : en considérant des pliages multiples (comme pour la version artistique des origami), Robert Lang a montré que l'on pouvait résoudre des équations de degré ≥ 5 : on pourra ainsi trouver sur sa page http ://www.langorigami.com, la construction du partage en 5 parts égales d'un angle (quintisection des angles).

6. Points inaccessibles

Dans ce paragraphe nous traitons quelques questions concernant des constructions dont la solution classique est mise en défaut à cause d'un ou plusieurs points inaccessibles car placés hors de la feuille. Quand la question est de nature projective, ce genre de questions peut se résoudre facilement en utilisant une configuration de Desargues ou de Pappus.

6.1. Droites se coupant hors de la feuille. — Soient deux droites D et D' se coupant en un point I inaccessible; on se demande comment, étant donné un point M n'appartenant ni à D ni à D', tracer la droite IM, cf. la figure 40.
Configurations de Desargues : avec les notations de la figure de 39, on choisit des points A, B sur d et A', B' sur d' ; on note P l'intersection de AA' et BB'. Etant donné un point Q de la droite AM, on note R l'intersection de MA' avec PQ ; les droites QB et RB' se coupent alors en un point M' tel que, d'après le théorème de Desargues, MM' passe par I. Dans la figure **??** la droite PQ est envoyé à l'infini, autrement dit AA' et BB' sont prises parallèles.
Quadrangle orthocentrique : avec les notations de la figure **??**, on trace la perpendiculaire à D et D' passant par M de sorte que H est l'orthocentre du triangle MBI de sorte que la droite cherchée est la perpendiculaire à BH passant par M.

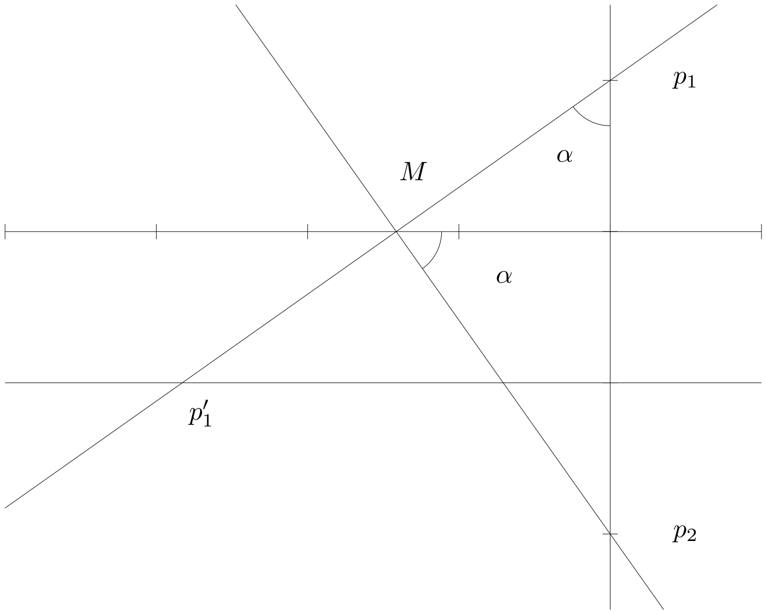


FIG. 37.

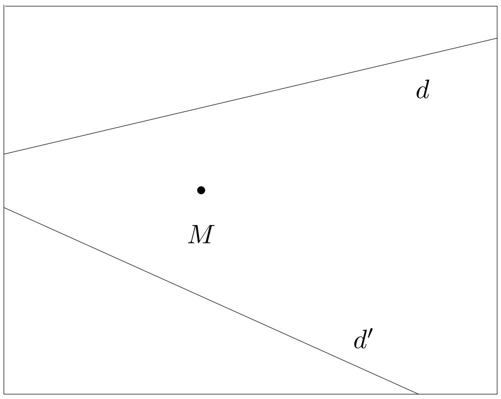


FIG. 38.

Avec un cercle auxiliaire : avec les notations de la figure 42, un cercle $\mathcal{C}$ coupe d en A, B et d' en A', B'. La droite MA (resp. MB') recoupe $\mathcal{C}$ en C (resp. C') de sorte que les droites BC' et $A'C$ se coupe en M' tel que MM' passe par I.
Par polaires réciproques : avec les notations de la figure **??**, P est un point de la polaire de M relativement à d et d' et M' est un point de la polaire de P relativement à d et d' de sorte que MM' passe par I.

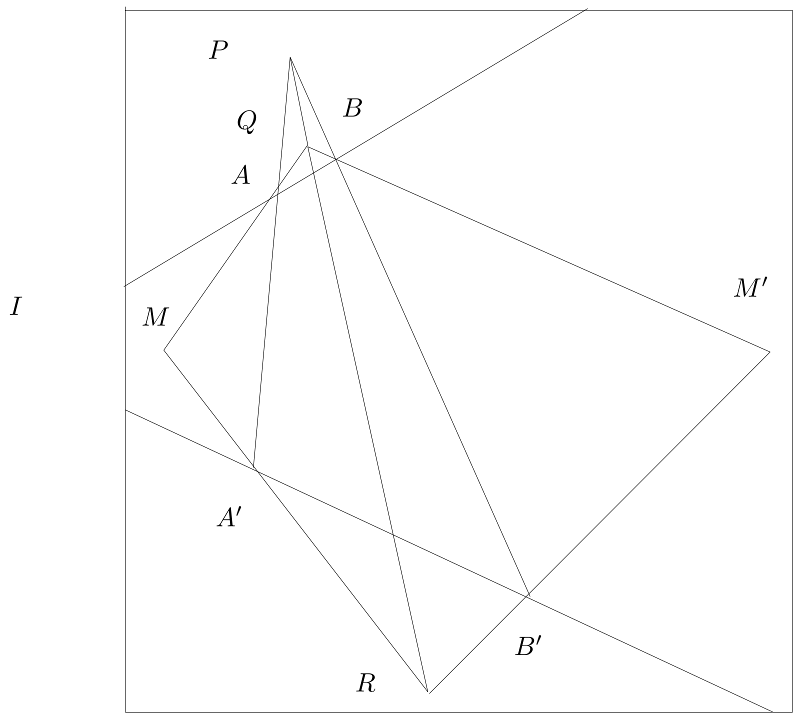


Fig. 39.

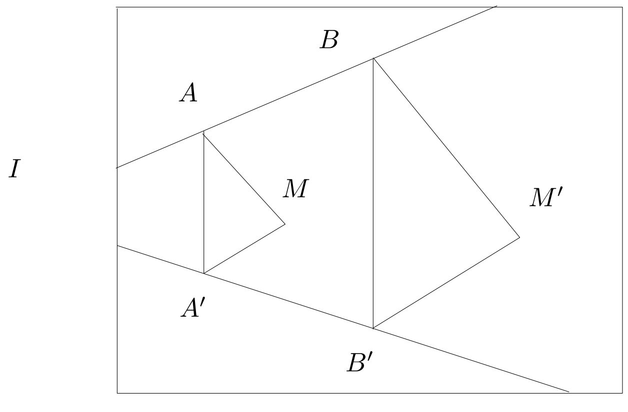


Fig. 40.

Remarque : dans le même ordre d'idée, la figure 44 montre comment construire la bissectrice de deux droites alors que leur point d'intersection I est en dehors de la feuille : étant donnés

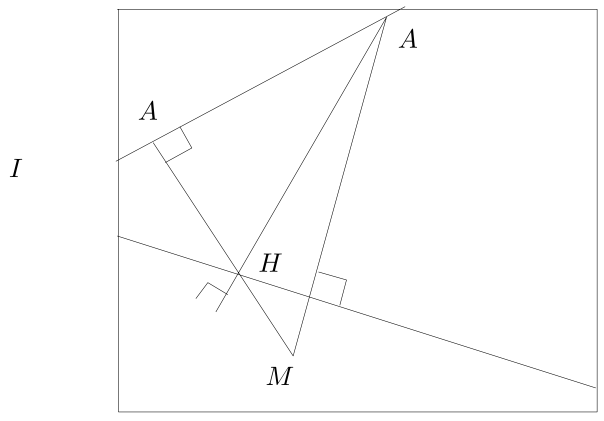


FIG. 41.

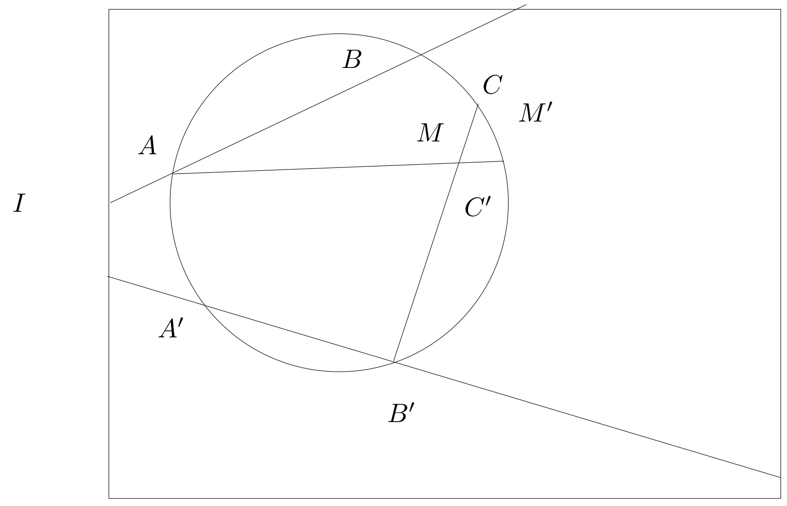


FIG. 42.

des points A, A' de d et d', les bissectrices intérieures (resp. extérieures) du triangle $AA'I$, issues de A et A' se coupent en P (resp. Q) et PQ est la droite cherchée.

6.2. Un obstacle sur la feuille. — Le problème est de prolonger une droite AB passant par deux points au delà d'un obstacle sur la feuille comme sur la figure 45. Une solution consiste à utiliser le théorème de Pappus pour construire deux points de l'autre côté de l'obstacle, cf. la figure 45.

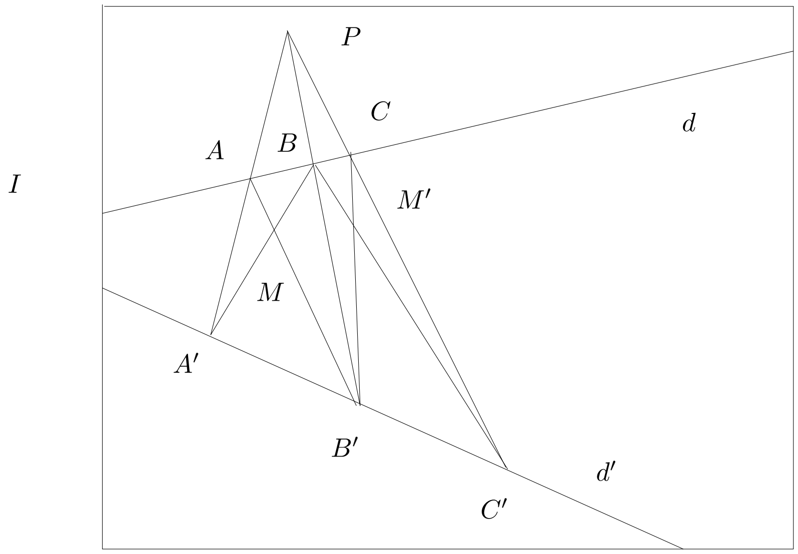


Fig. 43.

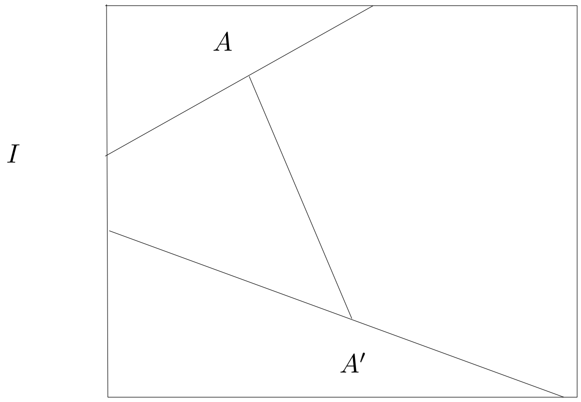


Fig. 44.

7. Questions

- Étant donnés deux points A, B et un cercle $\mathcal{C}$, construire une droite passant par A, coupant $\mathcal{C}$ en deux points C, D tels que $BC = BD$.

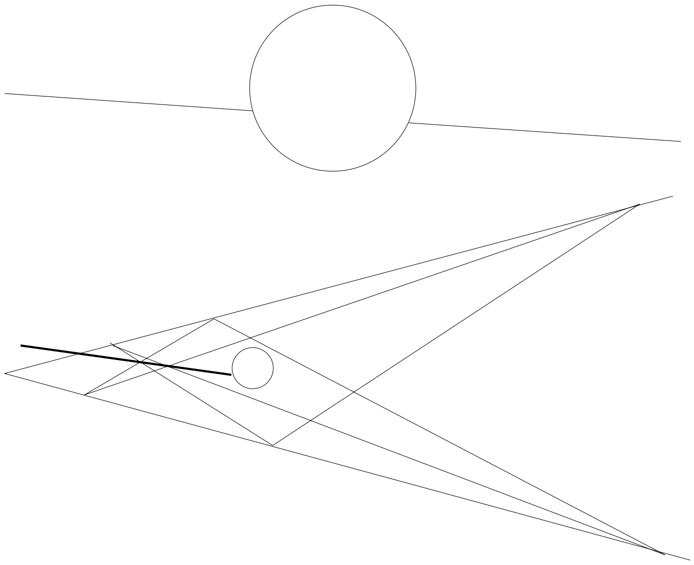


FIG. 45.

Preuve : Notons O le centre de $\mathcal{C}$; comme OCD et BCD sont isocèles en O et B, la droite en question est perpendiculaire à OB. $\square$

- Soient trois points alignés à partir des quels on trace 3 cercles tangent entre eux, le premier $\mathcal{C}_1$ englobant les deux autres $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. Construisez une chaîne de cercles, le premier Γ_1 étant tangent aux trois cercles de l'énoncé, et pour tout $i \geq 2$, Γ_i est tangent à $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et Γ_{i-1}. Montrez ensuite que si h_n désigne la hauteur du centre de Γ_n et r_n son rayon, on a $h_n = 2nr_n$.

  Preuve : Considérez une inversion de centre $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$; cf. la figure 46. La configuration est alors une chaine de cercle contenus entre deux droites parallèles, de même rayon. La propriété est alors vérifiée sur l'image, on utilise alors que l'image d'un cercle ne passant par par le centre de l'inversion est un cercle homothétique par une homothétie de centre le centre O de l'inversion et de rapport $r^2/\mathcal{P}(O,\mathcal{C})$ où r est le rapport de l'inversion et $\mathcal{P}(O,\mathcal{C})$ est la puissance de O par rapport à $\mathcal{C}$. $\square$
- Partagez, à la règle et au compas, le cercle unité en n parts d'égale aire.

  Preuve : Partagez un diamètre en n, on note $A_0, A_1, \cdots, A_n$ les points dans l'ordre et pour tout $1 \leq i \leq n-1$, tracez le demi-cercle joignant A_0 et A_i par le haut, puis le demi-cercle joignant A_i à A_n par le bas. $\square$
- Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles dont les disques ne s'intersectent pas et de rayon distincts. Montrez que les 4 tangentes E_1, E_2, I_1, I_2 communes dont les points d'intersection $A_{i,j} = E_i \cap I_j$ avec les points de contacts $Ti,k = \mathcal{C}_k \cap E_i$ et $T'_{j,k} = \mathcal{C}_k \cap I_j$ forment 4 triangles isocèles semblables $A_{i,i}T_{i,1}T'_{i,1}$, $A_{i,j}T_{i,2}T'_{k,2}$.

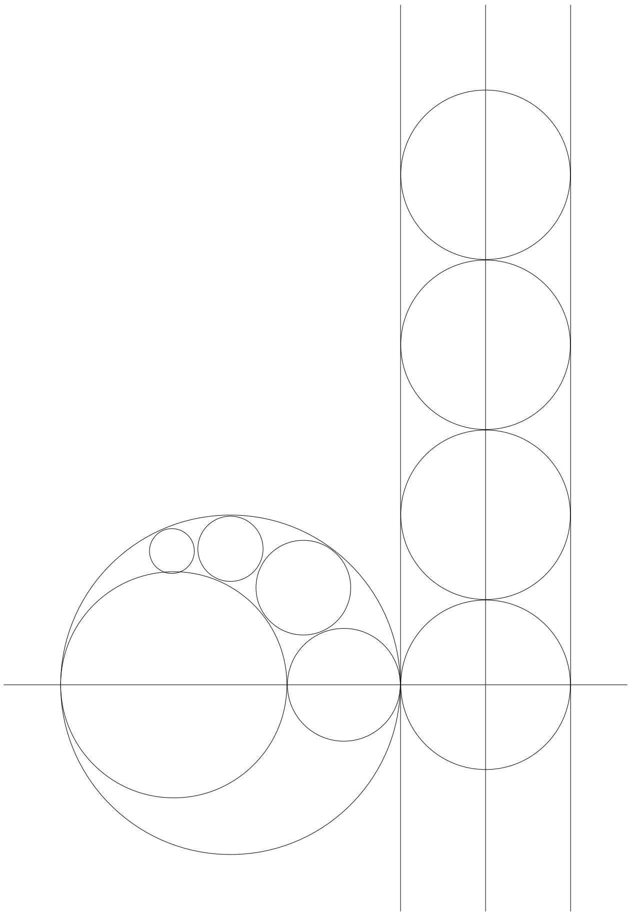


FIG. 46.

Preuve : En remarquant que $O_1A_{1,1}T_{1,1}$ et $O_1A_{1,1}T'_{1,1}$ sont des triangles rectangles avec deux côtés de même longueur on en déduit que $A_{1,1}T_{1,1} = A_{1,1}T'_{1,1}$ et les triangles en question sont isocèles. Selon le même principe on a les égalités : $T_{1,1}T_{1,2} = T_{1,1}A_{1,1} = A_{1,1}T'_{1,1} + A_{1,1}T'_{1,2} = 2A_{1,1}T'_{1,1} + T'_{1,1}T'_{1,2}$ et de même $T_{2,1}T_{2,2} = 2A_{2,2}T'_{1,2} + T'_{1,1}T'_{1,2}$ d'où le résultat car $T_{1,1}T_{1,2} = T_{2,1}T_{2,2}$ et en faisant tourner les lettres. ☐

- Construisez un quartier de lune carrable à la règle et au compas.

  Preuve : D'après le théorème de Pythagore, l'aire des deux croissants de lune de la figure 47 est l'aire du triangle hachuré. Ainsi si on prend ces deux croissants égaux comme dans le deuxième dessin de 47, le carré hachuré a la même aire qu'un des croissants. ☐
- Montrez qu'un quadrilatère $ABCD$ est incrisptible, i.e. possède un cercle inscrit, si et seulement si $AB + CD = BC + AD$ et donnez une construction de ce cercle.

  Preuve : Les notations sont celles de la figure 48 : dans le sens direct en utilisant les triangles rectangles semblables de la figure on obtient les égalités $AA' = AD'$, $BA' = BB'$, $DC' = DD'$ et $CC' = CB'$ ce qui en les additionnant donne $AB+CD = BC+AD$. Réciproquement on suppose $AD > DC$ et donc $AB > BC$ et soient alors $E \in [AD]$ et

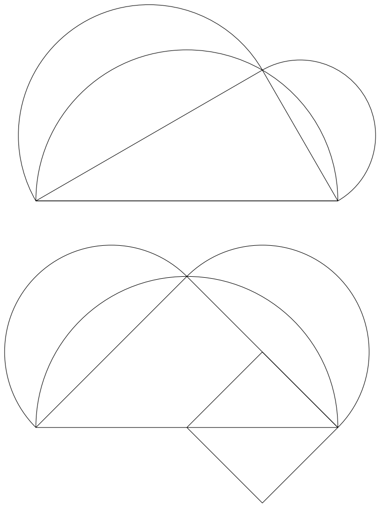


Fig. 47. Quadrature d'un croissant de lune.

$F \in [AB]$ tels que $DE = CD$ et $BF = BC$ de sorte que $AF = AE$. Ainsi les triangles CBF, EDC et FAE sont isocèles et donc les bissectrices issues de A, B, D sont les médiatrices du triangle AEF et sont donc concourrantes en un point O à égale distances des 4 côtés du quadrangle, d'où le résultat. □

Références

[1] M. Berger. *Géométrie 2*. Nathan, 1990.

[2] J.-C. Carrega. *Théorie des corps la règle et le compas*. Hermann, 1981.

Boyer Pascal

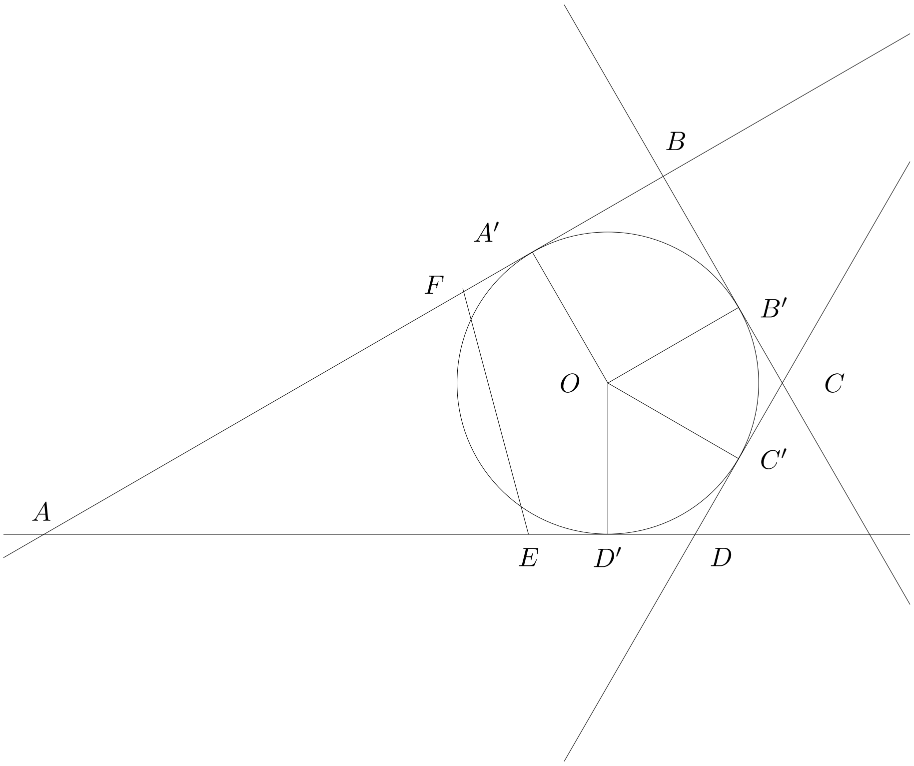


Fig. 48.