

---

# LA COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE EST LIBRE

*par*

Pascal Boyer

---

**Résumé.** — Un des résultats principaux de ce travail est l'absence de torsion dans la  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -cohomologie de la tour de Lubin-Tate lorsque  $l > 2$ . Comme dans [7], la stratégie est globale et repose sur l'étude des diverses filtrations de stratification du faisceau pervers des cycles évanescents de certaines variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor. On montre que les gradués, pour la filtration utilisant les morphismes d'adjonction  $j_!j^* \rightarrow \text{Id}$ , se décrivent comme la  $p$ -extension intermédiaire de systèmes locaux construits dans [15]. Le point crucial consiste à décrire la différence entre les  $p$  et  $p+$  extensions de ces systèmes locaux. Pour ce faire, on utilise la théorie des dérivées pour les représentations du groupe mirabolique d'après [5] ainsi que des stratifications introduites dans [10].

**Abstract (The cohomology of Lubin-Tate spaces is free).** — One of the main results of this work is the freeness in the  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -cohomology of the Lubin-Tate tower when  $l > 2$ . As in [7], the strategy is of global nature and relies on studying the various filtration of stratification of the perverse sheaf of vanishing cycles of some Shimura varieties of Kottwitz-Harris-Taylor types. We show that these graded parts, when considering only the adjunction maps  $j_!j^* \rightarrow \text{Id}$ , are given by the  $p$ -intermediate extensions of the local systems constructed in [15]. The crucial point relies on the study of the difference between the  $p$  and  $p+$  intermediate extensions of these local systems. The main ingredients use the theory of derivative for representations of the mirabolic group in [5] and the stratifications introduced in [10].

## Introduction

Dans [7], nous avons explicité les groupes de cohomologie à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  de la tour de Lubin-Tate en étudiant le faisceau pervers  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$  des cycles évanescents d'une tour de variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor  $X_{\mathcal{I}}$ , cf. [15], en une place  $v$  de son corps

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** — 14L05, 11F80, 11F55, 11F70, 11G10, 11G18.

**Mots clefs.** — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, stratification, catégories quasi-abéliennes, théorie de torsion.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

reflex  $F$ . Le passage du global vers le local est fourni par un analogue du théorème de Serre-Tate couplé au théorème de comparaison de Berkovich. Le but de ce travail est de donner une  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -version de ces résultats en élucidant *du côté global* la structure du faisceau pervers  $\Psi_{\mathcal{I}}$  sur la fibre spéciale géométrique  $X_{\mathcal{I},\overline{s}}$  en  $v$  et en prouvant, *du côté local* cf. le théorème 1.1.4, l'absence de torsion dans la cohomologie des espaces de Lubin-Tate.

Sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , pour étudier  $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ , nous l'avons dévissé en constituants simples  $\mathcal{P}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, t)$  décrits comme extensions intermédiaires de systèmes locaux  $HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$  construits dans [15]. L'action de l'opérateur de monodromie est en particulier explicite et la filtration de  $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$  par les noyaux itérés de la monodromie donne alors une suite spectrale

$$E_1^{i,j} = \mathcal{H}^{i+j} \text{gr}_{-j}^K(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j} \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$$

calculant les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$  à partir de ceux de ses gradués.

**Fait 1** — (cf. [7] §5.8) *La suite spectrale  $E_1^{i,j}$  dégénère en  $E_1$ , i.e. pour tout  $n$ , le faisceau de cohomologie  $\mathcal{H}^n \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$  admet une filtration dont les gradués sont les  $\mathcal{H}^n \text{gr}_k^K(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$ .*

Cette observation nous fournit *une stratégie* pour montrer que les  $\mathcal{H}^n \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$  sont sans torsion puisqu'il suffit de construire une version entière, i.e. à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ , de la filtration de  $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$  par les noyaux itérés de la monodromie, puis de montrer que les  $\mathcal{H}^n \text{gr}_k^K(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$  sont sans torsion.

Une  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -filtration de  $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$  par les noyaux itérés de la monodromie est donnée dans [9] en utilisant des morphismes d'adjonction  $j_!^{=h} j^{=h,*} \rightarrow \text{Id}$  associés à la stratification de Newton  $j^{=h} : X_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{s}}^{=h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\overline{s}}$  de la fibre spéciale géométrique  $X_{\mathcal{I},\overline{s}}$  de  $X_{\mathcal{I}}$  à la place  $v$ , cf. le §1.3. Cette stratégie soulève essentiellement deux problèmes :

- le premier issu de la nature même de la construction des filtrations de stratification, qui requière de saturer, cf. la définition 1.3.11, les morphismes d'adjonction de sorte que l'on ne contrôle plus les réseaux des systèmes locaux qui apparaissent et plus sérieusement encore, les faisceaux pervers d'Harris-Taylor  $\mathcal{P}(\pi_v, t)$  qui interviennent sont seulement connus à bimorphisme près, i.e. avec la notation 1.3.8

$${}^p j_{!*}^{=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \hookrightarrow_+ \mathcal{P}(\pi_v, t) \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*}^{=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)).$$

*Remarque* : Nous verrons, cf. le corollaire 2.4.2, qu'en général ces deux extensions intermédiaires  $p$  et  $p+$ , échangées par la dualité de Grothendieck-Verdier, sont distinctes et qu'identifier  $\mathcal{P}(\pi_v, t)$  dépend fortement de comment on filtre  $\Psi_{\mathcal{I}}$ , cf. le théorème 3.3.4 : rappelons que  $\Psi_{\mathcal{I}}$  est autodual, de sorte que si une filtration fournit pour gradués les  $p$ -extensions intermédiaires, une filtration « duale » fournira les  $p+$  versions.

- Le deuxième concerne le fait que pour calculer les faisceaux de cohomologie des  $\text{gr}_k^K(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ , on doit utiliser une suite spectrale qui dégénère en  $E_2$  mais pas en  $E_1$ , i.e. certaines des flèches  $d_1^{p,q}$  sont non nulles sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  de sorte que lorsqu'on va les considérer sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ , on devrait non seulement contrôler les réseaux, ce qui semble difficile à cause de la saturation évoquée plus haut, mais aussi les déterminer à homothétie près, ce

qui semble totalement hors de portée de part la nature même de la construction des suites spectrales.

En ce qui concerne ce dernier point, il existe une explication géométrique qui repose sur le fait que les strates de Newton sont « géométriquement » induites paraboliques, cf. la proposition 1.2.6

$$X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h} = X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\leq h} \times_{P_{h,d-h}(F_v)} GL_d(F_v),$$

de sorte que lorsqu'on considère toutes les strates, on obtient naturellement, lorsqu'on calcule des faisceaux de cohomologie, des représentations induites paraboliques lesquelles en général ne sont pas irréductibles. Or les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  ne font pas apparaître d'induites paraboliques, ce qui explique que dans [7], apparaissent des suites spectrales non triviales, i.e. qui ne dégèrent qu'en  $E_2$  et non en  $E_1$ .

Or il est bien connu que la théorie des représentations de  $GL_d(F_v)$  repose, via la théorie des dérivées, sur celle beaucoup plus simple du groupe mirabolique  $M_d(F_v)$  obtenu comme le sous-groupe du parabolique standard  $P_{1,d-1}(F_v)$  dont <sup>(1)</sup> le premier coefficient en haut à gauche est égal à 1. Ainsi pour  $\pi$  et  $\pi'$  des représentations de respectivement  $GL_h(F_v)$  et  $GL_{d-h}(F_v)$ , la restriction au groupe mirabolique de l'induite parabolique  $\pi \times \pi'$  se décrit via la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \pi \times \pi'_{|M_{d-h}(F_v)} \longrightarrow (\pi \times \pi')_{|M_d(F_v)} \longrightarrow \pi_{|M_h(F_v)} \times \pi' \rightarrow 0$$

où le premier terme est l'induite parabolique relativement à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{d-h-1} \\ 0 & GL_h & U \\ 0 & 0 & GL_{d-h-1} \end{pmatrix}$ , et le dernier est l'induite à support compact relativement à  $\begin{pmatrix} M_h & U \\ 0 & GL_{d-h} \end{pmatrix}$ .

**Fait 2** — *Il existe une version géométrique de la suite exacte courte précédente, cf. [10], qui permet de calculer directement les faisceaux de cohomologie de chacun des  $\mathrm{gr}_k^K(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ , i.e. sans avoir recours à une suite spectrale, cf. aussi l'appendice B de ce texte.*

L'idée consiste à considérer pour une strate  $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\leq 1}$ ,

$$\bar{j}_{\neq c} : \overline{X}_{\mathcal{I}} - X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\geq 1} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathcal{I}} := X_{\mathcal{I}} \times_{\mathrm{Spec} \mathcal{O}_v} \mathrm{Spec} \overline{\mathcal{O}}_v,$$

et, plus généralement, pour tout  $h \geq 1$  et toute strate « pure »  $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\leq h+1}$

$$\bar{j}_{\neq c}^{\leq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\geq h} \setminus X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}.$$

Le point essentiel est que  $\bar{j}_{\neq c}^{\leq h}$  et  $\bar{j}_{\neq c}^{\leq h}$  sont affines, cf. le lemme 2.1.2 et la suite exacte courte (3.2.2).

La théorie classique des dérivées pour les représentations du groupe mirabolique, est utilisée pour montrer que des extensions scindées entre  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux pervers d'Harris-Taylor, restent encore scindées sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$  pourvu qu'on filtre  $\Psi_{\mathcal{I}}$  dans « le bon ordre ».

1. Dans [5] le sous-groupe mirabolique est défini en imposant la dernière colonne égale à  $(0, \dots, 0, 1)$ . On passe alors de cette définition à la notre via  $g \mapsto \sigma(tg^{-1})\sigma^{-1}$  où  $\sigma$  est la matrice de permutation associée au cycle  $(1 \ 2 \ \dots \ d)$ .

**Le théorème principal 1.1.4** est donc l'absence de torsion dans la  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -cohomologie des espaces de Lubin-Tate lorsque  $l > 2$ , résultat qui permet par exemple de compléter les résultats de [11] §4.3. Signalons aussi que l'hypothèse  $l > 2$  n'intervient que marginalement dans les preuves de 2.4.1 et 3.3.1 et il devrait être raisonnablement pas trop difficile de trouver un argument pour couvrir le cas  $l = 2$ .

Citons par ailleurs les résultats globaux obtenus dont l'auteur pense qu'ils devraient être utiles.

**Premier résultat global** (cf. la proposition 2.4.1) :

*Soit  $\pi_v$  une représentation irréductible supercuspidale de  $GL_g(F_v)$  pour  $1 \leq g \leq d$ , telle que sa réduction modulo  $l$  soit encore supercuspidale. Alors pour tout système local d'Harris-Taylor associé à un tel  $\pi_v$ , les deux extensions intermédiaires pour  $p$  et  $p+$  sont isomorphes.*

*Remarque :* Lorsque  $g = 1$ , i.e. quand  $\pi_v$  est un caractère, la preuve est essentiellement formelle, cf. le lemme 2.1.6, et la propriété a été utilisée par exemple dans [11]. Le cas général prouvé ici permet ainsi de remplacer les hypothèses de loc. cit. portant sur les caractères par des représentations irréductibles cuspidales dont la réduction modulo  $l$  est supercuspidale.

Dans le cas où la réduction modulo  $l$  de  $\pi_v$  est simplement cuspidale et plus nécessairement supercuspidale, le corollaire 2.4.2 décrit, pour un système local d'Harris-Taylor associé à  $\pi_v$ , la  $l$ -torsion du conoyau de la  $p$ -extension intermédiaire dans la  $p+$ -extension intermédiaire à l'aide de la réduction modulo  $l$  de la représentation de Steinberg  $St_t(\pi_v)$  donnée dans [8].

**Deuxième résultat global** (cf. proposition 2.1.8) :

*Les faisceaux de cohomologie des  $p$ -extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor sont sans torsion.*

Ce fait revient aussi à dire, cf. le corollaire 2.1.9, que les gradués de la filtration de stratification exhaustive de l'extension par zéro d'un système local d'Harris-Taylor sont des  $p$ -extensions intermédiaires de systèmes locaux d'Harris-Taylor en dimension inférieure. Avec les notations de l'appendice B.1, une troisième formulation équivalente, cf. [11] proposition 5.2.2, en utilisant les surjections

$$j_!^{=(t+k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{Speh}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{k/2} \twoheadrightarrow {}^p j_{!*}^{=(t+k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{Speh}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{k/2},$$

revient à la donnée de la résolution suivante, cf. (B.1.7)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow j_!^{=sg} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{Speh}_{s-t}(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{s-t}{2}} &\longrightarrow \dots \longrightarrow \\ j_!^{=(t+2)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{Speh}_2(\pi_v)) \otimes \Xi^1 &\longrightarrow j_!^{=(t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \\ &\longrightarrow j_!^{=tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow {}^p j_{!*}^{=tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

qui permet par exemple de calculer les groupes de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor  ${}^p j_{!*}^{=tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  et donc de voir qu'ils sont sans torsion.

**Troisième résultat global** (cf. le théorème 3.3.4) :

*La filtration de stratification exhaustive de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  définie dans [9] à l'aide des seuls morphismes*

*d'adjonction  $j_!j^* \rightarrow \text{Id}$  (resp.  $\text{Id} \rightarrow j_*j^*$ ) admet pour gradués les extensions intermédiaires pour la  $t$ -structure  $p$  (resp.  $p+$ ) des systèmes locaux d'Harris-Taylor.*

*Remarque :* Dans [12] on utilise ce résultat en se limitant aux caractères. Le cas général permet alors de relâcher les hypothèses de loc. cit.

Une formulation équivalente comme précédemment s'écrit, avec les notations introduites au §3.3, sous la forme de résolutions cf. (3.3.5)

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow j_!^{s_u(\varrho)g_u(\varrho)} HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t-1, s_u(\varrho) - t)) \otimes \Xi^{\frac{s_u-t}{2}} &\longrightarrow \dots \longrightarrow \\
 j_!^{(t+2)g_u(\varrho)} HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t-1, 2)) \otimes \Xi^1 &\longrightarrow j_!^{(t+1)g_u(\varrho)} HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t-1, 1)) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \\
 &\longrightarrow j_!^{-tg_u(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \longrightarrow \text{gr}_{!,\pi_v}^{tg_u(\varrho)}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

où  $\pi_v$  est une représentation irréductible cuspidale de  $\varrho$ -type  $u$ , avec  $1 \leq t \leq s_u(\varrho) = \lfloor \frac{d}{g_u(\varrho)} \rfloor$  et où on renvoie à A.1.4 pour la définition des représentations  $LT_{\pi_v}(t-1, r)$ . Comme précédemment, cela équivaut, à partir des résultats sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  dans [7], à dire que les faisceaux de cohomologies de  $\text{gr}_{!,\pi_v}^{tg_u(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  sont sans torsion.

En ce qui concerne l'organisation du papier, les notations sur les représentations sont données dans l'appendice A. Les résultats des lemmes et propositions de cet article concernant les  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceaux pervers libres sont, d'après [7] et [9], déjà connus sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  : ceux dont nous avons besoin, sont rappelés en appendice B avec quelques compléments autour de l'effet des morphismes  $j_{\neq c,!}^{-h}, j_{\neq c}^{-h,*}$ , ingrédient clef de cet article.

Mentionnons aussi la thèse de H. Wang qui, par voie purement locale en se ramenant aux travaux de Bonnafé et Rouquier [6] sur la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig, montre la liberté de l'étage modéré de la cohomologie de la tour de Drinfeld. En utilisant le théorème de Faltings-Fargues, son résultat correspond au cas des représentations cuspidales de niveau zéro.

Enfin je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à J.-F. Dat qui a notamment trouvé une erreur dans une première version de ce travail et qui a, par la suite, permis que la présentation des arguments devienne plus accessible.

### Table des matières

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| Introduction.....                                                              | 1  |
| 1. Rappels géométriques.....                                                   | 6  |
| 1.1. Espaces de Lubin-Tate.....                                                | 6  |
| 1.2. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires simples.....          | 7  |
| 1.3. Filtrations de stratification d'après [9].....                            | 10 |
| 1.4. Rappels sur les faisceaux pervers de Hecke.....                           | 15 |
| 2. Sur les faisceaux pervers d'Harris-Taylor.....                              | 16 |
| 2.1. Rappel sur les stratifications miraboliques.....                          | 16 |
| 2.2. Extensions entre $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceaux pervers libres..... | 19 |
| 2.3. Faisceaux de cohomologie des $p$ -faisceaux pervers d'Harris-Taylor . .   | 20 |
| 2.4. Sur les extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor     | 27 |

|                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3. Cycles évanescents.....                                                                                       | 29 |
| 3.1. Décomposition supercuspidale.....                                                                           | 29 |
| 3.2. Preuve de la proposition 2.4.1.....                                                                         | 32 |
| 3.2.1. Cas $s = 2$ et $m(\varrho) > 2$ .....                                                                     | 34 |
| 3.2.2. Cas $s = 2$ et $m(\varrho) = 2$ .....                                                                     | 37 |
| 3.2.3. Cas $s = 3$ .....                                                                                         | 38 |
| 3.2.4. Cas $s = 4$ et $m(\varrho) = 2$ .....                                                                     | 42 |
| 3.2.5. Cas général.....                                                                                          | 47 |
| 3.3. Preuve du théorème principal.....                                                                           | 56 |
| Appendice A. Rappels sur les représentations.....                                                                | 61 |
| A.1. de $GL_d(K)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ .....                                            | 61 |
| A.2. Réduction modulo $l$ d'une Steinberg généralisée d'après [8].....                                           | 64 |
| A.3. Représentations de $D_{K,d}^\times$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_l$ et leurs relèvements..... | 67 |
| Appendice B. Rappels des résultats faisceautiques sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ d'après [7].....                 | 69 |
| B.1. sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor.....                                                                | 70 |
| B.2. sur le faisceau pervers des cycles évanescents.....                                                         | 72 |
| B.3. Compléments.....                                                                                            | 73 |
| Références.....                                                                                                  | 79 |

## 1. Rappels géométriques

Dans tout ce texte, les lettres  $p \neq l$  désigneront deux nombres premiers distincts,  $d$  un entier strictement positif et  $\Lambda$  au choix une extension algébrique de  $\mathbb{Q}_l$  comme par exemple  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , l'anneau des entiers d'une telle extension, comme par exemple  $\mathbb{Z}_l^{nr}$  ou une extension algébrique de  $\mathbb{F}_l$ , comme par exemple  $\overline{\mathbb{F}}_l$ .

**1.1. Espaces de Lubin-Tate.** — On désignera par  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\mathcal{O}_K$  son anneau des entiers, d'idéal maximal  $\mathcal{P}_K$ ,  $\varpi_K$  une uniformisante et  $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$  son corps résiduel de cardinal  $q = p^f$ . L'extension maximale non ramifiée de  $K$  sera notée  $K^{nr}$  de complété  $\hat{K}^{nr}$ , d'anneau des entiers respectif  $\mathcal{O}_{K^{nr}}$  et  $\mathcal{O}_{\hat{K}^{nr}}$ . Soit  $\Sigma_{K,d}$  le  $\mathcal{O}_K$ -module de Barsotti-Tate formel sur  $\bar{\kappa}$  de hauteur  $d$ , cf. [15] §II. On considère la catégorie  $\mathcal{C}$  des  $\mathcal{O}_K$ -algèbres locales artiniennes de corps résiduel  $\bar{\kappa}$ .

**1.1.1. Définition.** — Le foncteur qui à un objet  $R$  de  $\mathcal{C}$  associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations par quasi-isogénies sur  $R$  de  $\Sigma_{K,d}$  munies d'une structure de niveau  $n$  est pro-représentable par un schéma formel  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n} = \prod_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$  où  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$  représente le sous-foncteur pour des déformations par des quasi-isogénies de hauteur  $h$ .

*Remarque* : chacun des  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$  est non-canoniquement isomorphe au schéma formel  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)}$  noté  $\mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{d,n}$  dans [7]. On notera sans chapeau les fibres génériques de Berkovich de ces espaces ; ce sont donc des  $\widehat{K}^{nr}$ -espaces analytiques au sens de [3] et on note  $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K} := \mathcal{M}_{LT,d,n} \widehat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}$ .

Le groupe des quasi-isogénies de  $\Sigma_{K,d}$  s'identifie au groupe  $D_{K,d}^\times$  des unités de l'algèbre à division centrale sur  $K$  d'invariant  $1/d$ , lequel, par définition, agit sur  $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a une action naturelle de  $GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n)$  sur les structures de niveau et donc sur  $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$  ; cette action se prolonge en une action de  $GL_d(K)$  sur la limite projective  $\varprojlim_n \mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$ . Sur cette limite projective on dispose ainsi d'une action de  $GL_d(K) \times D_{K,d}^\times$  qui se factorise par  $(GL_d(K) \times D_{K,d}^\times)/K^\times$  où  $K^\times$  est plongé diagonalement.

**1.1.2. Définition.** — Soit  $\Psi_{K,\Lambda,d,n}^i \simeq H^i(\mathcal{M}_{LT,d,n}^{(0)} \widehat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}, \Lambda)$  le  $\Lambda$ -module de type fini associé, via la théorie des cycles évanescents de Berkovich, au morphisme structural  $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)} \longrightarrow \mathrm{Spf} \widehat{\mathcal{O}}_K^{nr}$ .

On notera aussi  $\mathcal{U}_{K,\Lambda,d,n}^i := H^i(\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}, \Lambda)$  et on pose  $\mathcal{U}_{K,\Lambda,d}^i = \varinjlim_n \mathcal{U}_{K,\Lambda,d,n}^i$  de sorte que  $\mathfrak{K}_n := \mathrm{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_K) \longrightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n))$  étant pro- $p$  pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\mathcal{U}_{K,\Lambda,d,n}^i = (\mathcal{U}_{K,\Lambda,d}^i)^{\mathfrak{K}_n}$ .

**1.1.3. Notation.** — Considérant  $\mathcal{U}_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,d,n}^i$  comme une représentation de  $D_{K,d}^\times$ , d'après A.3.6, pour  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(d)$ , on note  $\mathcal{U}_{\bar{\tau},n}^i := \mathcal{U}_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,d,n,\bar{\tau}}^i$ , puis  $\mathcal{U}_{\bar{\tau},\mathbb{N}}^i = \varinjlim_n \mathcal{U}_{\bar{\tau},n}^i$ . On notera aussi  $\mathcal{U}_{\bar{\tau},\mathbb{N},free}^i$  le quotient libre de  $\mathcal{U}_{\bar{\tau},\mathbb{N}}^i$ .

La description de la  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie de ces espaces de Lubin-Tate est donnée dans [7] théorème 2.3.5. Le résultat principal que nous avons en vue est le suivant.

**1.1.4. Théorème.** — Pour tout  $h \geq 1$  et pour tout  $0 \leq i \leq h-1$ , le  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module  $\mathcal{U}_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,h}^i$  est sans torsion.

**1.2. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires simples.** — Soient  $E/\mathbb{Q}$  une extension quadratique imaginaire,  $F^+/\mathbb{Q}$  une extension totalement réelle dont on fixe un plongement réel  $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$  ; on pose  $F = F^+E$  le corps CM associé.

**1.2.1. Notation.** — Pour toute place finie  $w$  de  $F$ , on note  $F_w$  le complété de  $F$  en cette place,  $\mathcal{O}_w$  son anneau des entiers d'idéal maximal  $\mathcal{P}_w$  et de corps résiduel  $\kappa(w)$ . On notera aussi  $\overline{\mathcal{O}}_w$  l'anneau des entiers d'une clôture algébrique  $\overline{F}_w$  de  $F_w$ .

Soit  $B$  une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  telle qu'en toute place  $x$  de  $F$ ,  $B_x$  est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose  $B$  munie d'une involution de seconde espèce  $*$  telle que  $*|_F$  est la conjugaison complexe  $c$ . Pour  $\beta \in B^{*-1}$ ,

on note  $\sharp_\beta$  l'involution  $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$  et  $G/\mathbb{Q}$  le groupe de similitudes, noté  $G_\tau$  dans [15], défini pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec  $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$ . Si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  décomposée  $x = yy^c$  dans  $E$  alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où  $x = \prod_i z_i$  dans  $F^+$ .

Dans [15], les auteurs justifient l'existence d'un  $G$  comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  qui n'est pas décomposée dans  $E$  alors  $G(\mathbb{Q}_x)$  est quasi-déployé;
- les invariants de  $G(\mathbb{R})$  sont  $(1, d-1)$  pour le plongement  $\tau$  et  $(0, d)$  pour les autres.

**1.2.2. Notation.** — *On suppose que*

- $p$  est décomposée  $p = uu^c$  dans  $E$  et on note  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , les places de  $F$  au dessus de  $u$ ,
- et qu'il existe au moins une de ces places, mettons  $v_1$  que l'on notera  $v$ , telle que  $(B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v)$ .

Pour tout sous-groupe compact  $U^p$  de  $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$  et  $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ , on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times)$$

**1.2.3. Notation.** — *On note  $\mathcal{I}$  l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts  $U^p(m)$  tels qu'il existe une place  $x$  pour laquelle la projection de  $U^p$  sur  $G(\mathbb{Q}_x)$  ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [15] bas de la page 90. Pour  $m$  comme ci-dessus, on a une application  $m_1 : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}$ .*

**1.2.4. Définition.** — Pour tout  $I \in \mathcal{I}$ , on note  $X_I \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v \llcorner$  la variété de Shimura associée à  $G \gg$  construite dans [15] et  $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$  le schéma de Hecke relativement au groupe  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , au sens de [7]

*Remarque :* les morphismes de restriction du niveau  $r_{J,I} : X_J \rightarrow X_I$  sont finis et plats. et même étales quand  $m_1(J) = m_1(I)$ .

**1.2.5. Notations.** — (cf. [7] §1.3) Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note :

- $X_{I,s}$  la fibre spéciale de  $X_I$  et  $X_{I,\bar{s}} := X_{I,s} \times \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$  la fibre spéciale géométrique.
- Pour tout  $1 \leq h \leq d$ ,  $X_{I,\bar{s}}^{\geq h}$  (resp.  $X_{I,\bar{s}}^{=h}$ ) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur  $h$ , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang  $\geq h$  (resp. égal à  $h$ ).
- On notera aussi  $X_{I,\bar{s}}^{\geq 0} := X_I$ .

*Remarque* : pour tout  $1 \leq h \leq d$ , la strate de Newton de hauteur  $h$  est de pure dimension  $d - h$ ; le système projectif associé définit alors un schéma de Hecke  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$  (resp.  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}$ ) pour  $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$ , cf. [15] III.4.4, lisse dans le cas de bonne réduction, i.e. quand  $m_1 = 0$ .

**1.2.6. Proposition.** — (cf. [15] p.116) Pour tout  $1 \leq h < d$ , les strates  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}$  sont géométriquement induites sous l'action du parabolique  $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$  <sup>(2)</sup> au sens où il existe un sous-schéma fermé  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathbb{1}_h}^{\leq h}$  tel que :

$$X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h} \simeq X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathbb{1}_h}^{\leq h} \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1}).$$

Pour  $h = 0$ , on ne dispose que d'une unique strate et  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathbb{1}_0}^{\geq 0}$  désignera encore  $X_{\mathcal{I}}$ .

Soit  $\mathcal{G}(h)$  le groupe de Barsotti-Tate universel sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathbb{1}_h}^{\leq h}$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{G}(h)^c \rightarrow \mathcal{G}(h) \rightarrow \mathcal{G}(h)^{et} \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{G}(h)^c$  (resp.  $\mathcal{G}(h)^{et}$ ) est connexe (resp. étale) de dimension  $h$  (resp.  $d - h$ ). Notons  $\iota_{m_1} : (\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d \rightarrow \mathcal{G}(h)[p^{m_1}]$  la structure de niveau universelle. Notant  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  la base canonique de  $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$ , la strate de Newton  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathbb{1}_h}^{\leq h}$  est alors définie par la propriété que  $\{\iota_{m_1}(e_i) : 1 \leq i \leq h\}$  forme une base de Drinfeld de  $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$ .

**1.2.7. Notation.** — Dans la suite, et afin de ne pas alourdir les notations, on confondra un élément  $a \in GL_d(F_v)/P_{h,d-h}(F_v)$  avec le sous-espace vectoriel  $\langle a(e_1), \dots, a(e_h) \rangle$  engendré par les images par  $a$  des  $h$  premiers vecteurs  $e_1, \dots, e_h$  de la base canonique de  $F_v^d$ . On notera  $P_a := aP_{h,d-h}a^{-1}$  le parabolique stabilisant  $a \subset F_v^d$ .

**1.2.8. Notation.** — Pour  $h = 1$  et  $c \in GL_d(F_v)/P_{1,d-1}(F_v)$ ,  $M_c(F_v) \subset P_c(F_v)$  désignera le sous-groupe mirabolique associé au sens de l'introduction, i.e. constitué des éléments induisant l'identité sur le sous-espace  $c$ .

Pour tout idéal  $I \in \mathcal{I}$ , l'élément  $a \in GL_d(F_v)/P_{h,d-h}(F_v)$  fournit un facteur direct  $a_{m_1}$  de  $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$  et donc une strate  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\leq h}$ . Dans le cas où  $a \in GL_d(\mathcal{O}_v)$ , la strate  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\leq h}$  s'obtient aussi comme l'image par  $a$  de  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathbb{1}_h}^{\leq h}$ .

*Remarque* :  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\leq h}$  peut se définir directement en demandant que pour  $(f_1, \dots, f_h)$  une base de  $a_{m_1}$ ,  $\{\iota_{m_1}(f_i) : 1 \leq i \leq h\}$  forme une base de Drinfeld de  $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$ .

**1.2.9. Notation.** — Pour tout  $a \in GL_d(F_v)/P_{h,d-h}(F_v)$ , on notera  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\geq h}$  l'adhérence dans  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$  de  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\leq h}$ . On dira d'une telle strate qu'elle est pure.

*Remarque* :  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\geq h} \setminus X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\leq h}$  s'écrit comme la réunion des strates  $X_{\mathcal{I},\bar{s},b}^{\leq h'}$  pour  $h < h' \leq d$  et  $b \in GL_d(F_v)/P_{h',d-h'}(F_v)$  tel qu'avec les notations précédentes,  $a_{m_1} \subset b_{m_1}$ .

---

2. cf. l'appendice A pour les notations

*Remarque* : Le système projectif  $(X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h})_{I \in \mathcal{I}}$  définit un schéma de Hecke  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\bar{1}_h}^{=h}$  pour  $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d-h}(K)$  où  $P_{h,d-h}(K)$  agit à travers le quotient  $\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(K)$  de son Levi, via l'application  $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$ . On dira de l'action de  $GL_h(F_v)$  qu'elle est *infinitésimale*. Le groupe de Weil  $W_v$  en  $v$  agit sur  $(X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h})_{I \in \mathcal{I}}$  via son quotient  $-\text{deg} : W_v \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $\text{deg}$  est la composée du caractère non ramifié de  $W_v$ , qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes, avec la valuation  $v$  de  $K$ .

Dans la suite du texte, nous utiliserons de manière cruciale la situation suivante relativement au choix de  $a \in GL_d(F_v)/P_{h,d-h}(F_v)$  et  $c \in GL_d(F_v)/P_{h+1,d-h-1}(F_v)$  tels que  $a \subset c$ . Pour tout  $g \geq 1$ , on introduit les strates suivantes.

— Soit  $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{=h+g}$  la réunion de strates pures  $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{=h+g} := \bigcup_{\substack{b: c \subset b \\ \dim b = h+g}} X_{\mathcal{I},\bar{s},b}^{=h+g}$ , et  $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\geq h+g}$  son adhérence.

— Pour tout  $I \in \mathcal{I}$ , on a une inclusion de strates pures  $X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I,\bar{s},a}^{\geq h}$  et on utilisera le schéma  $X_{I,\bar{s},a}^{\geq h} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+1}$  ainsi que pour  $g \geq 1$  :  $X_{I,\bar{s},a}^{\geq h+g} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+g}$ .

*Remarque* : lorsque  $I$  varie dans  $\mathcal{I}$ , le système des  $X_{I,\bar{s},a}^{\geq h} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+1}$  n'est pas projectif. Prenons par exemple  $h = 1$  avec  $a = \langle e_1 \rangle$  et  $c = \langle e_1, e_2 \rangle$ . Pour  $b = \langle e_1, e_2 + \varpi_v^2 e_3 \rangle$  alors  $X_{I,\bar{s},b}^{=3}$  est contenu dans  $X_{I,\bar{s},a}^{\geq 1} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq 2}$  si et seulement si  $m_1 \geq 3$ .

**1.2.10. Notations.** — Avec la convention que  $i$  (resp.  $j$ ) correspond à une immersion fermée (resp. une inclusion ouverte), on note

$$i^h : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq 1}, \quad i_a^h : X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}, \quad j_{\bar{1}}^{\geq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s},\bar{1}_h}^{=h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s},\bar{1}_h}^{\geq h},$$

ainsi que

$$j_{a-c}^{\geq h} : X_{I,\bar{s},a}^{\geq h} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I,\bar{s},a}^{\geq h}, \quad \text{et } j_c^{\geq h+g} : X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{=h+g} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\geq h+g}.$$

Pour tout  $g \geq 1$ , on introduit aussi

$$j_{a-c}^{h+g} : X_{I,\bar{s},a}^{\geq h+g} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+g} \hookrightarrow X_{I,\bar{s},a}^{\geq h+g}.$$

*Remarque* : lorsque  $a = \bar{1}_h$ , on utilisera  $j_{\neq c}^{h+g}$  pour désigner  $j_{\bar{1}_h - c}^{h+g}$ .

Enfin afin de ne pas avoir que des faisceaux sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq 1}$ , on utilisera aussi la notation<sup>(3)</sup>

$$j^{=h} := i^h \circ j^{\geq h}, \quad j_{\neq c}^{=h} := i_{\bar{1}_h}^h \circ j_{\bar{1}_h - c}^{\geq h}, \quad j_{\neq c}^{=h+g} = i_{\bar{1}_h}^{h+g} \circ j_{\neq c}^{h+g}.$$

*Remarque* : On renvoie le lecteur au §B.3 pour des compléments sur  $j_{\neq c}^{=h+g}$ .

3. Contrairement aux préconisations précédentes, ne sont pas des inclusions ouvertes.

**1.3. Filtrations de stratification d'après [9].** — Soient  $S$  le spectre d'un corps fini et  $X$  un schéma de type fini sur  $S$ , alors la  $t$ -structure usuelle sur  $\mathcal{D}(X, \Lambda) := D_c^b(X, \Lambda)$  est

$$\begin{aligned} A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où  $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$  et  $\mathcal{H}^k(K)$  désigne le  $k$ -ième faisceau de cohomologie de  $K$ .

**1.3.1. Notation.** — On note  ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ , ou simplement  ${}^p\mathcal{C}$  quand le contexte est clair, le cœur de cette  $t$ -structure. Les foncteurs cohomologiques associés seront notés  ${}^p\mathcal{H}^i$ ; pour un foncteur  $T$ , on notera  ${}^pT := {}^p\mathcal{H}^0 \circ T$ .

*Remarque :*  ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$  est une catégorie abélienne noethérienne et  $\Lambda$ -linéaire. Pour  $\Lambda$  un corps, cette  $t$ -structure est autoduale pour la dualité de Verdier. Pour  $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ , on peut munir la catégorie abélienne  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -linéaire  ${}^p\mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  d'une théorie de torsion  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  où  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{F}$ ) est la sous-catégorie pleine des objets de  $l^\infty$ -torsion  $T$  (resp.  $l$ -libres  $F$ ), i.e. tels que  $l^N 1_T$  est nul pour  $N$  assez grand (resp.  $l \cdot 1_F$  est un monomorphisme).

**1.3.2. Définition.** — Soit d'après [17], la  $t$ -structure duale

$$\begin{aligned} {}^{p+}\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 1}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) : {}^p\mathcal{H}^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) : {}^p\mathcal{H}^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

de cœur  ${}^{p+}\mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  muni de sa théorie de torsion  $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$  « duale » de celle de  ${}^p\mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ .

*Remarque :* pour  $j : U \hookrightarrow X \leftarrow F : i$  avec  $U$  ouvert de complémentaire  $F$ , la  $t$ -structure ainsi définie sur  $X$  muni de la théorie de torsion précédente, est obtenue par recollement à partir de celles sur  $U$  et  $F$  selon la recette

$$\begin{aligned} {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \Lambda) &:= \{K \in \mathcal{D}(X, \Lambda) : j^*K \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(U, \Lambda) \text{ et } i^*K \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(F, \Lambda)\} \\ {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \Lambda) &:= \{K \in \mathcal{D}(X, \Lambda) : j^*K \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(U, \Lambda) \text{ et } i^!K \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(F, \Lambda)\}. \end{aligned}$$

où les théories de torsion sont reliées par

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{P \in {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) : {}^p i^* P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{T}_U\} \\ \mathcal{F} &:= \{P \in {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) : {}^p i^! P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{F}_U\} \end{aligned}$$

**1.3.3. Définition.** — (cf. [9] §1.3) Soit

$$\mathcal{F}(X, \Lambda) := {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) \cap {}^{p+}\mathcal{C}(X, \Lambda) = {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \Lambda) \cap {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \Lambda)$$

la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » sur  $X$  à coefficients dans  $\Lambda$ . On identifiera aussi  $\mathcal{F}(F, \Lambda)$  avec son image dans  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  via le foncteur  $i_* = i_! = i_{!*}$ .

**1.3.4. Lemme.** — (cf. [9] lemme 1.3.11) Pour  $j : U \hookrightarrow X$  un ouvert, on a

$${}^{p+}j_! \mathcal{F}(U, \Lambda) \subset \mathcal{F}(X, \Lambda) \quad \text{et} \quad {}^p j_* \mathcal{F}(U, \Lambda) \subset \mathcal{F}(X, \Lambda).$$

*Remarque* : si  $j_!$  est  $t$ -exact alors, cf. [9] proposition 1.3.14,  $j_! = {}^p j_! = {}^{p+} j_!$  et donc  $j_!(\mathcal{F}(U, \Lambda)) \subset \mathcal{F}(X, \Lambda)$ . D'après le lemme B.3.1, ce sera en particulier le cas pour les  $j^{=h}$  du paragraphe précédent.

**1.3.5. Lemme.** — Soit  $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$  tel que  $j_! j^* L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$ , alors  $i_* {}^p \mathcal{H}^{-\delta} i^* L$  est nul pour tout  $\delta \neq 0, 1$ ; pour  $\delta = 1$  c'est un objet de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ .

*Démonstration.* — Partons du triangle distingué  $j_! j^* L \rightarrow L \rightarrow i_* i^* L \rightsquigarrow$ . En utilisant la perversité de  $L$  et  $j_! j^* L$ , la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué précédent s'écrit

$$0 \rightarrow i_* {}^p \mathcal{H}^{-1} i^* L \rightarrow {}^p j_! j^* L \rightarrow L \rightarrow i_* {}^p \mathcal{H}^0 i^* L \rightarrow 0.$$

La liberté de  $i_* {}^p \mathcal{H}^{-1} i^* L$  découle alors de celle, par hypothèse, de  ${}^p j_! j^* L = j_! j^* L$ .  $\square$

Rappelons, cf. [9] §1.3, que tout morphisme  $f : L \rightarrow L'$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  possède :

- un noyau  $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f$  qui est le  $p$ -noyau de  $f$ , i.e. dans  ${}^p \mathcal{C}(X, \Lambda)$ ;
- un conoyau  $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f$  qui est le  $p+$ -conoyau de  $f$ , i.e. dans  ${}^{p+} \mathcal{C}(X, \Lambda)$ ;
- une image  $\text{Im}_{\mathcal{F}} f$  qui est la  $p+$ -image de  $f$ ;
- une coimage  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f$  qui est la  $p$ -image de  $f$ ;

tels que  $0 \rightarrow \text{Ker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L \rightarrow \text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow 0$  et  $0 \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L' \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow 0$  sont des suites strictement exactes de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ , où le qualificatif strict est rappelé dans la définition suivante.

**1.3.6. Définition.** — Un morphisme  $f : L \rightarrow L'$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  est dit *strict* et on note  $f : L \dashrightarrow L'$ , si la flèche canonique  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$  est un isomorphisme.

*Remarque* : un monomorphisme  $f : L \hookrightarrow L'$  dans  ${}^p \mathcal{C}(X, \Lambda)$  entre faisceaux pervers libres, est strict si et seulement si son conoyau dans  ${}^p \mathcal{C}(X, \Lambda)$  est libre. Cela revient aussi à demander que  $f$  est un monomorphisme de  ${}^{p+} \mathcal{C}(X, \Lambda)$ .

**1.3.7. Définition.** — Un *bimorphisme* de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  est un monomorphisme qui est aussi un épimorphisme.

*Exemple* :  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$  est un bimorphisme.

**1.3.8. Notation.** — On notera  $L \hookrightarrow L'$  un bimorphisme de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ . Si en outre le noyau dans  ${}^{p+} \mathcal{C}(X, \Lambda)$  est de dimension strictement plus petite que celle du support de  $L$ , on notera  $L \hookrightarrow_+ L'$ .

*Remarque* : tout morphisme  $f : L \rightarrow L'$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  admet, cf. [9] proposition 1.3.7, une factorisation canonique  $L \dashrightarrow \text{Coim}_{\mathcal{F}} f \hookrightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f \dashrightarrow L'$ .

**1.3.9. Définition.** — Pour  $L$  un objet de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ , on dira que

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_e = L$$

est une  $\mathcal{F}$ -filtration si pour tout  $1 \leq i \leq e - 1$ ,  $L_i \hookrightarrow L_{i+1}$  est un monomorphisme strict.

Pour  $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$ , on considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & \nearrow \text{can}_{!,L} & & \searrow \text{can}_{*,L} & \\ {}^{p^+}j_{!,j^*}L & \twoheadrightarrow & {}^{p^+}j_{!,*}j^*L & \xrightarrow{+} & {}^{p^+}j_{!,*}j^*L & \xrightarrow{+} & {}^{p^+}j_{*,j^*}L \end{array}$$

où la ligne du bas est, cf. la remarque suivant 1.3.12 de [9], la factorisation canonique de  ${}^{p^+}j_{!,j^*}L \rightarrow {}^{p^+}j_{*,j^*}L$  et les flèches  $\text{can}_{!,L}$  et  $\text{can}_{*,L}$  données par adjonction.

**1.3.10. Définition.** — On note  $\mathcal{P}_L := i_* {}^p\mathcal{H}_{\text{libre}}^{-1} i^* j_{*,j^*}L = \text{Ker}_{\mathcal{F}} \left( {}^{p^+}j_{!,j^*}L \rightarrow {}^{p^+}j_{*,j^*}L \right)$ . Avec les notations du diagramme ci-dessus, on pose

$$\text{Fil}_{U,!}^0(L) = \text{Im}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{!,L}) \quad \text{et} \quad \text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) = \text{Im}_{\mathcal{F}}\left((\text{can}_{!,L})|_{\mathcal{P}_L}\right).$$

*Remarque :* d'après le lemme 2.1.2 de [9],  $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \subset \text{Fil}_{U,!}^0(L) \subset L$  est une  $\mathcal{F}$ -filtration au sens de 1.3.9, avec  $L/\text{Fil}_{U,!}^0(L) \simeq i_* {}^{p^+}i^*L$  et  ${}^{p^+}j_{!,*}j^*L \xrightarrow{+} \text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L)$ , ce qui d'après le lemme 1.3.13 de [9] donne un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} {}^{p^+}j_{!,*}j^*L & \xrightarrow{+} & \text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \\ & \searrow + & \downarrow + \\ & & {}^{p^+}j_{!,*}j^*L \end{array}$$

**1.3.11. Définition.** — La filtration  $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \subset \text{Fil}_{U,!}^0(L) \subset L$  est dite *saturée* si  $\text{can}_{!,L}$  est strict i.e. si  $\text{Fil}_{U,!}^0(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{!,L})$ .

Soit  $X$  un schéma muni

- d'une stratification  $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \cdots \supset X^{\geq e}\}$  et
- de la donnée pour tout  $1 \leq h \leq e$  d'un ensemble fini  $\mathcal{L}(h)$  de classes d'isomorphismes de  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux localement constants irréductibles sur  $X^{=h} := X^{\geq h} - X^{\geq h+1}$  tels qu'en notant  $j^{=h} = i^h \circ j^{\geq h}$  avec  $j^{\geq h} : X^{=h} \hookrightarrow X^{\geq h}$  et  $i^h : X^{\geq h} \hookrightarrow X$ ,

$$\forall \mathcal{L} \in \mathcal{L}(h), \quad R^n j_*^{=h} \mathcal{L} \text{ est } (\mathfrak{S}, \mathcal{L}) \text{ - constructible}$$

au sens où sa restriction à tous les  $X^{=h'}$  est une extension itérée finie de faisceaux irréductibles localement constants appartenant à  $\mathcal{L}(h')$ .

**1.3.12. Notation.** — On note  $D_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  la sous-catégorie pleine de  $D^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont  $(\mathfrak{S}, \mathcal{L})$ -constructibles au sens précédent ainsi que  ${}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  la catégorie abélienne des  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux pervers  $(\mathfrak{S}, \mathcal{L})$ -constructibles.

**1.3.13. Définition.** — Un faisceau pervers  $P \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  est dit à support dans  $X^{\geq h}$ , si  $h$  est le plus petit entier  $1 \leq r \leq d$  tel que  $j^{=r,*}P$  est un système local non nul. Un faisceau pervers libre  $P \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$  sera dit à support dans  $X^{\geq h}$  si  $P \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$  l'est au sens précédent.

*Remarque :* dans la suite on appliquera ces définitions pour la stratification de Newton de la fibre spéciale d'une variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor, nous ferons alors disparaître  $\mathfrak{S}$  des notations, avec  $\mathcal{L}$  constitué des systèmes locaux d'Harris-Taylor. La propriété de stabilité de  $\mathcal{L}$  par les foncteurs  $Rj_*^{=h}$  découle des résultats de [7]. Dans cette situation on dira que  $P$  est à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}, \mathcal{A}}}^{\geq h}$  s'il est à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{\geq h}$  et si pour toute strate pure  $X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}, a}}^{\geq h}$ ,  $j_a^{=h,*}P$  est un système local non nul si et seulement si  $a \in \mathcal{A}$ .

On cherche à présent à construire des filtrations d'un  $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$  tel que  $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ , à l'aide de la stratification  $\mathfrak{S}$ .

**1.3.14. Définition.** — Soit  $L \in \mathcal{F}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  tel que  $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ . On dira d'une  $\mathcal{F}$ -filtration

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^1(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^2(L) \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{e-1}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^e(L) = L,$$

qu'elle est de type  $\mathfrak{S}_!$  si pour tout  $k$  et  $h$  tel que  $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^k(L)$  est à support dans  $X^{\geq h}$ , le morphisme d'adjonction

$${}^{p+}j_!^{=h}j^{=h,*}\text{gr}_{\mathfrak{S}}^k(L) \longrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{S}}^k(L)$$

est un épimorphisme, pas nécessairement strict, de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ .

**1.3.15. Définition.** — Pour  $1 \leq h < e$ , on note  $X^{1 \leq h} := X^{\geq 1} - X^{\geq h+1}$  et  $j^{1 \leq h} : X^{1 \leq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$ . Pour  $L \in \mathcal{F}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  soit

$$\text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^r(L) := \text{Im}_{\mathcal{F}} \left( {}^{p+}j_!^{1 \leq r}j^{1 \leq r,*}L \longrightarrow L \right).$$

**1.3.16. Proposition.** — (cf. [9] §2.2) La définition précédente munit fonctoriellement tout objet  $L$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$  d'une  $\mathcal{F}$ -filtration de type  $\mathfrak{S}_!$  dite de stratification

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^0(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^1(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^2(L) \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^{e-1}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^e(L) = L.$$

**1.3.17. Définition.** — On dira que  $L$  est  $\mathfrak{S}_!$ -saturé si pour tout  $1 \leq r \leq e - 1$  le morphisme d'adjonction  ${}^{p+}j_!^{1 \leq r}j^{1 \leq r,*}L \longrightarrow L$  est strict, i.e. si

$$\text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^r(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}} \left( {}^{p+}j_!^{1 \leq r}j^{1 \leq r,*}L \longrightarrow L \right).$$

Autrement dit si pour tout  $1 \leq r \leq e - 1$ ,  ${}^{p+}j_!^{r+1,*}L$  est un objet de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ .

*Remarque :* les filtrations de type  $\mathfrak{S}_l$  ne sont, en général, pas assez fines. Dans [9] proposition 2.3.3, en utilisant les  $\text{Fil}_{U,l}^{-1}$ , on construit de façon fonctorielle la filtration exhaustive de stratification de tout objet  $L$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ ,

$$0 = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}}(L) \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}+1}(L) \subset \cdots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \cdots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-1}-1}(L) = L, \quad (1.3.18)$$

telle que tous les gradués  $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^k$  sont libres et sont, sur  $\overline{Q}_l$ , simples, i.e. vérifient  $p_{j_*}^{j=h} j^{=h,*} \text{gr}_{\mathfrak{S}}^k \hookrightarrow_+ \text{gr}_{\mathfrak{S}}^k$ , où  $X^{\geq h}$  est le support de  $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^k$ . Décrivons rapidement la construction de loc. cit. :

- on commence par regarder le morphisme d'adjonction  $p^+_{j_!} j^{=1,*} L \rightarrow L$  dont le conoyau  $Q_1$  donnera des gradués pour des indices strictement positifs alors que l'image dans  $L$  du noyau  $P_1$  de  $p^+_{j_!} j^{=1,*} L \rightarrow p_{j_*} j^{=1,*} L$  donnera des gradués pour des indices strictement négatifs, le gradué d'indice 0 sera tel que  $p_{j_*} j^{=1,*} L \hookrightarrow_+ \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^0(L)$ .
- On passe alors à la strate suivante  $X_{\mathcal{I},s}^{-2}$  pour  $P_1$  et  $Q_1$ . Pour  $F := P_1$  (resp.  $F := Q_1$ ), on considère  $p^+_{j_!} j^{=2,*} F \rightarrow F$ . Le conoyau de ce morphisme donnera des gradués pour les indices  $-2^{e-2} < k < 0$  (resp.  $2^{e-2} < k < 2^{e-1}$ ), alors que le noyau de  $p^+_{j_!} j^{=2,*} F \rightarrow p_{j_*} j^{=2,*} F$  donnera des gradués pour les indices strictement inférieurs à  $-2^{e-2}$  (resp.  $0 < k < 2^{e-2}$ ); le gradué d'indice  $k = -2^{e-2}$  (resp.  $k = 2^{e-2}$ ) vérifiant  $p_{j_*} j^{=2,*} F \hookrightarrow_+ \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^k(L)$ .
- On traite ainsi toutes les strates jusqu'à  $h = e$ .

Dualement en utilisant  $\text{can}_{*,L}$  avec

$$\text{CoFil}_{*,r}(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}} \left( L \rightarrow p_{j_*}^{j^{1 \leq r}} j^{1 \leq r,*} L \right),$$

on définit une cofiltration

$$L = \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,d}(L) \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,d-1}(L) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,1}(L) \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,0}(L) = 0,$$

et  $0 = \text{Fil}_*^{-d}(L) \subset \text{Fil}_*^{1-d}(L) \subset \cdots \subset \text{Fil}_*^0(L) = L$  où  $\text{Fil}_*^{-r}(L) := \text{Ker}_{\mathcal{F}}(L \rightarrow \text{CoFil}_{*,r}(L))$ .

**1.4. Rappels sur les faisceaux pervers de Hecke.** — Soit  $\mathbb{X}_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$  un schéma de Hecke pour  $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$  au sens du §1.2.2 de [7], pour  $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P(F_v)$  où  $P(F_v)$  est un sous-groupe de  $G(F_v) \simeq GL_d(F_v)$ . Rappelons que

- $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$  est un système projectif de schémas relativement à des morphismes dits de restriction du niveau  $[1]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$ , finis et plats;
- pour tout  $g \in \mathbb{G}$  et tous  $J \subset I$  tels que  $g^{-1}Jg \subset I$ , on dispose d'un morphisme fini  $[g]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$  vérifiant les propriétés suivantes
  - pour  $g \in I$  et  $J \subset I$ ,  $[g]_{J,I} = [1]_{J,I}$ ;
  - pour tous  $g, g' \in \mathbb{G}$ , et tous  $K \subset J \subset I$  tels que  $g^{-1}Jg \subset I$  et  $(g')^{-1}Kg' \subset J$ , on a  $[gg']_{K,I} = [g]_{J,I} \circ [g']_{K,J} : \mathbb{X}_K \rightarrow \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$ .

La catégorie  $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$  (resp.  $\text{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ ) des *faisceaux pervers* (resp. des *faisceaux*) de Hecke sur  $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$  à coefficients dans  $\Lambda$  est définie comme la catégorie dont :

- les objets sont les systèmes  $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$  où  $\mathcal{F}_I$  est un faisceau pervers (resp. faisceau) sur  $\mathbb{X}_I$  à coefficients dans  $\Lambda$ , tels que pour tout  $g \in \mathbb{G}$  et  $J \subset I$  tel que  $g^{-1}Jg \subset I$ , on dispose d'un morphisme de faisceaux sur  $\mathbb{X}_I$ ,  $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \longrightarrow [g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$  soumis à la condition de cocycle  $u_{K,I}(g'g) = [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \circ u_{J,I}(g)$  ;
- Les flèches sont les systèmes  $(f_I : \mathcal{F}_I \longrightarrow \mathcal{F}'_I)_{I \in \mathcal{I}}$  avec des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J) \\ \downarrow f_I & & \downarrow [g]_{J,I,*}(f_J) \\ \mathcal{F}'_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J) \end{array}$$

*Remarque* : par rapport à [7] §1.3.7, on a supprimé les conditions (ii) et (iii). Les propositions 6.1 et 6.2 de loc. cit. sont encore valables, i.e.  $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$  et  $\text{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$  sont des catégories abéliennes munies de foncteurs  $j_!, i^*$  (resp.  $Rj_*, i_*$ , resp.  $j_*, Ri^!$ ) qui sont  $t$ -exact à droite (resp.  $t$ -exact, resp.  $t$ -exact à gauche) avec les propriétés d'adjonction habituelles, de sorte que l'on se retrouve à nouveau dans une situation de recollement.

Pour  $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ , comme les  $[g]_{J,I,*}$  sont  $t$ -exact, les théories de torsion à chaque étage munissent  $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$  d'un « système » de théories de torsion et donc d'un « système » de  $t$ -structure  $p+$ , i.e. à chaque étage.

**1.4.1. Notation.** — On notera  $\mathcal{F}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » de Hecke, i.e. le système de Hecke des  $\mathcal{F}(\mathbb{X}_I, \overline{\mathbb{Z}}_l)$  pour  $I \in \mathcal{I}$ .

## 2. Sur les faisceaux pervers d'Harris-Taylor

On renvoie le lecteur à l'appendice B.1 pour les rappels sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor. On considère dans cette section, un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local d'Harris-Taylor  $HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$  associé à une représentation irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$  et  $\Pi_t$  une représentation quelconque, qui ne jouera aucun rôle, de  $GL_{tg}(F_v)$  où on a aussi posé  $h = tg$ . On entend par là qu'on a fixé un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -réseau stable par l'action de  $P_{h,d-h}(F_v)$ . Le but de cette section est, en particulier, de prouver que les faisceaux de cohomologie de  ${}^p j_{\overline{1}_{tg},!}^{\geq tg} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$  sont sans torsion.

**2.1. Rappel sur les stratifications miraboliques.** — Soit  $F$  un faisceau pervers libre sur  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$  tel que  $j_{\overline{1}_h}^{\geq h,*} F$  est de la forme  $HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$ . On note  $P_F := i_*^{h+1} p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*} F$  avec

$$0 \rightarrow P_F \longrightarrow j_{\overline{1}_h}^{\geq h} j_{\overline{1}_h}^{\geq h,*} F \longrightarrow F \rightarrow 0. \quad (2.1.1)$$

On considère alors comme dans [10] une strate pure  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1} \subset X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$ , et on note pour tout  $r, \delta \geq 0$  :

$$i_{\overline{1}_h, c}^{h+r \leq +\delta} : X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+r+\delta} \subset X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h+r}.$$

Soit alors le triangle distingué

$$j_{\neq c, !}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} P_F \longrightarrow P_F \longrightarrow i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} P_F \rightsquigarrow$$

**2.1.2. Lemme.** — *Le complexe  $i_c^{h+1, *} P_F$  est un faisceau pervers libre.*

*Démonstration.* — On reprend la preuve de la proposition 6.2 de [10]. Comme  $F$  est de la forme  $i_{1_h, *}^h F'$ , il suffit de montrer que

$$i_{1_h, c}^{h+1 \leq +0, *} \left( {}^p \mathcal{H}^{-1} i_{1_h}^{h \leq +1, *} F' \right)$$

est  $p$ -pervers sans torsion. Pour ce faire, on utilise la suite spectrale

$$E_2^{r, s} = {}^p \mathcal{H}^r i_{1_h, c}^{h+1 \leq +0, *} \left( {}^p \mathcal{H}^s i_{1_h}^{h \leq +1, *} F' \right) \Rightarrow {}^p \mathcal{H}^{r+s} i_{1_h, c}^{h \leq +1, *} F'.$$

Comme  $j_{1_h}^{\geq h}$  est affine, d'après le lemme 1.3.5,  ${}^p \mathcal{H}^s i_{1_h}^{h \leq +1, *} F'$  est nul pour tout  $s < -1$ ; la surjectivité  $j_{1_h, !}^{\geq h} j_{1_h}^{\geq h, *} F' \rightarrow F'$ , implique aussi la nullité pour  $s = 0$ . Ainsi la suite spectrale précédente dégénère en  $E_2$  avec

$${}^p \mathcal{H}^r i_{1_h, c}^{h \leq +1, *} F' \simeq {}^p \mathcal{H}^{r+1} i_{1_h, c}^{h+1 \leq +0, *} \left( {}^p \mathcal{H}^{-1} i_{1_h}^{h \leq +1, *} F' \right).$$

De la même façon, comme  $j_{\overline{1}_h - c}^{\geq h} : X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h} \setminus X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$  est affine,  ${}^p \mathcal{H}^r i_{1_h, c}^{h \leq +1, *} F'$  est nul pour  $r < -1$  et sans torsion pour  $r = -1$  d'après le lemme 1.3.5, d'où le résultat.  $\square$

Ainsi le triangle distingué précédent s'écrit sous la forme d'une suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_{\neq c, !}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} P_F \longrightarrow P_F \longrightarrow i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} P_F \rightarrow 0. \quad (2.1.3)$$

Considérons dans un premier temps, le cas où  $F = {}^p j_{1_{tg}, !}^{\neq tg} HT_{1_h}(\pi_v, \Pi_t)$ . Dans [10] proposition 6.4, on montre que sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , on a

$$i_c^{h+1, *} P_F \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{c, !}^{\neq (t+1)g} j_c^{\neq (t+1)g, *} P_F \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l.$$

L'objectif principal de cette section est ainsi de démontrer que cet isomorphisme est encore valable sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$  sachant qu'à priori on sait simplement que

$${}^p j_{c, !}^{\neq (t+1)g} j_c^{\neq (t+1)g, *} P_F \hookrightarrow_+ i_c^{h+1, *} P_F \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{c, !}^{\neq (t+1)g} j_c^{\neq (t+1)g, *} P_F.$$

Des suites exactes courtes (2.1.1) et (2.1.3), on en déduit le lemme suivant qui nous ramène ainsi, en raisonnant par récurrence, à prouver les isomorphismes (2.1.5).

**2.1.4. Lemme.** — *Si les faisceaux de cohomologie de  ${}^p j_{!}^{\neq (t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_{t+1})$  sont sans torsion et si avec les notations précédentes pour  $F = {}^p j_{1_{tg}, !}^{\neq tg} HT_{1_h}(\pi_v, \Pi_t)$ , on a*

$$i_{c, *}^{tg+1} i_c^{tg+1, *} P_F \simeq {}^p j_{c, !}^{\neq (t+1)g} j_c^{\neq (t+1)g, *} P_F, \quad (2.1.5)$$

alors les faisceaux de cohomologie de  ${}^p j_{!}^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  sont sans torsion.

Pour des raisons élémentaires, cf. le corollaire 2.4.2, on ne peut pas espérer l'égalité entre les deux extensions intermédiaires d'un système local d'Harris-Taylor. L'un des résultats principaux de ce papier, cf. la proposition 2.4.1 qui sera prouvée au §3.2, est que les deux extensions intermédiaires d'un système local d'Harris-Taylor indexé par une cuspidale  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$ , coïncident si et seulement si la réduction modulo  $l$  de  $\pi_v$  est encore supercuspidale. Dans le cas où  $g = 1$  et donc lorsque  $\pi_v$  est un caractère  $\chi_v$  de  $F_v^\times$ , on dispose d'un argument simple. En effet avec les notations de §B.1,  $\mathcal{L}(\chi_v[h]_D)$  est isomorphe à  $\overline{\mathbb{Z}}_l$  où l'action du groupe fondamental  $\Pi_1(X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}}^{\overline{h}})$  de  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}}^{\overline{h}}$  se factorise par son quotient  $\Pi_1(X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}}^{\overline{h}}) \rightarrow \mathcal{D}_{v,h}^\times$ , où l'action de  $\mathcal{D}_{v,h}^\times$  est donnée par un caractère  $\chi_v$ .

**2.1.6. Lemme.** — *On a*

$${}^p j_{\overline{1}_h, !}^{\geq h} \mathcal{L}(\chi_v[h]_D)[d-h] \simeq {}^{p+} j_{\overline{1}_h, !}^{\geq h} \mathcal{L}(\chi_v[h]_D)[d-h] \simeq \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h].$$

*Démonstration.* — Rappelons que  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$  est lisse sur  $\text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$  de sorte que  $\overline{\mathbb{Z}}_l[d-h]$  y est pervers au sens des deux  $t$ -structures avec  $i_{\overline{1}_h}^{h \leq +1, *} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \in {}^p \mathcal{D}^{<0}$  et  $i_{\overline{1}_h}^{h \leq +1, !} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \in {}^{p+} \mathcal{D}^{\geq 1}$ , d'où le résultat.  $\square$

Revenons à  $P_F$  et  $j_{\neq c, !}^{\overline{h}}, j_{\neq c}^{\overline{h}, *} P_F$  que l'on peut filtrer en utilisant les constructions du §1.3. En particulier, il a un quotient  $j_{\neq c, !}^{\overline{h}}, j_{\neq c}^{\overline{h}, *} P_F \rightarrow Q_{F, \neq c}$  tel que

$$Q_{F, \neq c} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\substack{a: \overline{1}_h \subset a \\ c \notin a}} {}^p j_{a, !}^{\overline{h}+g}, j_a^{\overline{h}+g, *} P_F \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l.$$

Notons alors  $T$  le conoyau

$$\bigoplus_{\substack{a: \overline{1}_h \subset a \\ c \notin a}} {}^p j_{a, !}^{\overline{h}+g}, j_a^{\overline{h}+g, *} P_F \hookrightarrow_+ Q_{F, \neq c} \twoheadrightarrow T,$$

et remarquons que pour tout point fermé  $z$  de  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1}$ , avec  $i_z : \overline{\{z\}} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}}$ , on a  ${}^p \mathcal{H}^0 i_z^* Q_{F, \neq c} = 0$  et donc  ${}^p \mathcal{H}^0 i_z^* T = 0$ . Avec la notation suivante, on peut alors écrire  $Q_{F, \neq c}$  sous la forme

$$Q_{F, \neq c} \simeq \bigoplus_{\substack{a: \overline{1}_h \subset a \\ c \notin a}} {}^{p(c)} j_{a, !}^{\overline{h}+g}, j_a^{\overline{h}+g, *} P_F$$

que l'on notera plus simplement encore  $Q_{F, \neq c} \simeq {}^{p(c)} j_{\neq c, !}^{\overline{h}+g}, j_{\neq c}^{\overline{h}+g, *} P_F$ .

**2.1.7. Notation.** — *Pour  $\mathcal{L}$  un système local sur une strate pure  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, a}^{\overline{h}+g}$  avec  $c \notin a$ , la notation  ${}^{p(c)} j_{a, !}^{\overline{h}+g} \mathcal{L}[d-h-g]$  désignera une extension intermédiaire*

$${}^p j_{a, !}^{\overline{h}+g} \mathcal{L}[d-h-g] \hookrightarrow_+ {}^{p(c)} j_{a, !}^{\overline{h}+g} \mathcal{L}[d-h-g]$$

dont le conoyau  $T$  vérifie la propriété suivante. Pour tout point  $z$  de  $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1}$ , avec  $i_z : \overline{\{z\}} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}}$ , on a  ${}^p \mathcal{H}^0 i_z^* T = 0$ .

On introduit alors le poussé en avant

$$\begin{array}{ccccc}
 j_{\neq c, !}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} P_F & \hookrightarrow & P_F & \twoheadrightarrow & i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} P_F \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 {}^{p(c)} j_{\neq c, !}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} Q_F & \xlongequal{\quad} & Q_{F, \neq c} & \dashrightarrow & i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} P_F.
 \end{array}$$

Du lemme 2.1.4, l'isomorphisme (2.1.5) découle alors de la proposition 2.3.1 qui sera montrée plus loin. Supposons ainsi dans la fin de cette section que (2.1.5) est vérifiée.

**2.1.8. Proposition.** — Soient  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et  $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$ , alors les faisceaux de cohomologie de  ${}^p j_{!*}^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  sont sans torsion.

**2.1.9. Corollaire.** — Pour toute représentation irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$  et pour tout  $1 \leq t \leq d/g$ , les gradués de la filtration de stratification exhaustive, cf. (1.3.18), de  $j_1^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  sont les  ${}^p j_{!*}^{\neq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_i(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{t}{2}}$ .

*Remarque :* le résultat est démontré dans [7] sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , l'apport de ce nouvel énoncé est le fait que sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ , ce sont les  $p$ -extensions intermédiaires qui interviennent.

*Démonstration.* — Le cas  $i = 0$  est trivial puisque  $j_1^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \twoheadrightarrow {}^p j_{!*}^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ . Dans le cas général, on se ramène trivialement à  $j_{1tg, !}^{\neq tg} HT_{1tg, !}(\pi_v, \Pi_t)$  et à la proposition 2.3.1 qui traite le cas  $i = 1$ . Concrètement soit tout d'abord

$$0 \rightarrow P_i \rightarrow j_{1tg, !}^{\neq tg} HT_{1tg, !}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow P'_i \rightarrow 0,$$

tel que <sup>(4)</sup>  $P_i \twoheadrightarrow Q_i$  où

$$Q_i \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{1tg, !}^{\neq (t+i)g} HT_{1tg, \overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_i(\pi_v)) \Xi^{\frac{t}{2}}.$$

Comme dans le lemme 2.1.2,  $i_c^{h+1, *} P_i \hookrightarrow i_c^{h+1, *} P_1$  est un faisceau pervers libre, ce qui fournit une suite exacte analogue à (2.1.3)

$$0 \rightarrow j_{\neq c, !}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} P_i \rightarrow P_i \rightarrow i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} P_i \rightarrow 0,$$

dont le poussé en avant via  $j_{\neq c, !}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} P_i \twoheadrightarrow j_{\neq c, !}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} Q_i$  est isomorphe à  $Q_i$  avec donc

$$0 \rightarrow {}^{p(c)} j_{\neq c, !}^{\neq (h+i)g} j_{\neq c}^{\neq (h+i)g, *} Q_i \rightarrow Q_i \rightarrow i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} Q_i \rightarrow 0,$$

puisque  $i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} P_i \simeq i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} Q_i$ . Le résultat découle alors de la proposition 2.3.1.  $\square$

Dans le paragraphe 3.2 nous utiliserons une version légèrement modifiée du corollaire précédent, cf. la proposition 3.2.6.

**2.1.10. Corollaire.** — Le lemme B.3.2 est valable sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ .

Il reste alors à prouver (2.1.5), ce qui est le but des paragraphes suivants.

4. Pour  $i = 1$  on a noté précédemment  $P_1 = P_F$ .

**2.2. Extensions entre  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceaux pervers libres.** — Etant donnés deux systèmes locaux  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  sur un ouvert  $j : U \hookrightarrow X$ , il est bien connu qu'il n'y a pas, sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , d'extensions entre leurs extensions intermédiaires, i.e. toute suite exacte courte

$$0 \rightarrow {}^p j_{1*} \mathcal{L}_1 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l[\dim X] \longrightarrow P_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \longrightarrow {}^p j_{2*} \mathcal{L}_2 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l[\dim X] \rightarrow 0$$

est nécessairement scindée. Sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ , la propriété subsiste pourvu qu'on prenne les  $p$  (resp. les  $p+$ ) extensions intermédiaires pour  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  mais sinon il peut y avoir de telles suites exactes courtes non scindées. C'est ce phénomène que l'on veut étudier dans ce paragraphe. Concrètement soient  $A_1$  et  $A_2$  des faisceaux pervers libres et  $A$  une extension

$$0 \rightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \rightarrow 0,$$

que l'on suppose scindée sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ . Notons alors  $A'_2$  le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} A'_2 \subset & \dashrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_2 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l & \hookrightarrow & A \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \end{array}$$

de sorte que

$$\begin{array}{ccccc} & & A_1 & \stackrel{=}{=} & A_1 & & (2.2.1) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A'_2 & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'_1 & & \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A'_2 & \hookrightarrow & A_2 & \twoheadrightarrow & T & & \end{array}$$

En particulier  $T$  est nul si et seulement si l'extension  $A$  est scindée, i.e.  $A'_i \simeq A_i$  pour  $i = 1, 2$ .

**2.2.2. Lemme.** — Avec les notations et les hypothèses ci-avant, on suppose en outre que pour  $k = 1, 2$ , alors  $A_k \simeq i_{k,*} {}^{p+} j_{k,!} \mathcal{L}_k[d_k]$  où  $j_k : U_k \hookrightarrow \overline{U}_k$  est l'immersion ouverte dans son adhérence de dimension  $d_k$ ,  $i_k : \overline{U}_k \hookrightarrow X$  et  $\mathcal{L}_k$  un système local. Si  $T \neq 0$  alors pour tout point fermé  $i_z : z \hookrightarrow U_1$ , on a  $i_z^* T \neq 0$ .

*Démonstration.* — On reprend le diagramme précédent avec  $A_1 = i_{1,*} {}^{p+} j_{1,!} \mathcal{L}_1[d_1]$  soit

$$0 \rightarrow T[-1] \longrightarrow i_{1,*} {}^{p+} j_{1,!} \mathcal{L}_1[d_1] \longrightarrow A'_1 \rightarrow 0,$$

de sorte que, par définition de la  $t$ -structure  $p+$ ,  $T$  ne peut pas être à support dans  $\overline{U}_1 \setminus U_1$ , et nécessairement le conoyau  $i_1^* j_1^* T$  de  $\mathcal{L}_1 \hookrightarrow i_1^* j_1^* A'_1$  est non nul, d'où le résultat.  $\square$

**2.3. Faisceaux de cohomologie des  $p$ -faisceaux pervers d'Harris-Taylor.** — La problématique décrite au paragraphe précédent est en général difficile à contrôler. Dans notre situation, les arguments reposent

- d'une part sur l'utilisation des foncteurs  $j_{\neq c,!*}^{\neq h}$ , dont le lecteur pourra trouver au §B.3 les effets sur les  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  faisceaux pervers d'Harris-Taylor,
- et d'autre part sur la théorie des représentations du groupe mirabolique et de leurs dérivées d'après [5] et [18] pour son adaptation aux corps finis.

**2.3.1. Proposition.** — Soit  $Q$  un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre qui est  $P_{h,d-h}(F_v)$ -équivariant et tel que

- $Q \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{\overline{1}_h,!*}^{\neq h+g} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_h \otimes \pi_v)$  avec  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et  $\Pi_h$  une représentation quelconque de  $GL_h(F_v)$  ;
- $Q$  s'écrit comme une extension  $0 \rightarrow Q_{\neq c} \rightarrow Q \rightarrow Q_c \rightarrow 0$  où  $X_{I,\overline{s},c}^{\geq h+1}$  est une strate pure contenue dans  $X_{I,\overline{s},\overline{1}_h}^{\geq h}$ , avec  $Q_{\neq c} \simeq {}^{p(c)} j_{\neq c,!*}^{\neq h+g} j_{\neq c}^{\neq h+g,*} Q$  et  $Q_c$  libre.

Alors la suite exacte ci-dessus est scindée et  $Q \simeq {}^p j_{\overline{1}_h,!*}^{\neq h+g} j_{\overline{1}_h}^{\neq h+g,*} Q$ .

*Démonstration.* — Supposons dans un premier temps que la suite exacte est scindée et considérons une strate pure  $X_{I,\overline{s},a}^{\neq h+g}$  telle que  $c \not\subset a$ . Notons  $Q_a$  le quotient de  $Q$  tel que  ${}^p j_{a,!*}^{\neq h+g} j_a^{\neq h+g,*} Q \hookrightarrow_+ Q_a$ . La suite exacte de l'énoncé étant scindée on en déduit que  $Q_a \simeq {}^{p(c)} j_{a,!*}^{\neq h+g} j_a^{\neq h+g,*} Q$ . Par équivariance, l'isomorphisme précédent est valable pour tout  $c \not\subset a$  de sorte que  $Q_a \simeq {}^p j_{a,!*}^{\neq h+g} j_a^{\neq h+g,*} Q$ . Soit alors  $\mathcal{A}$  maximal tel qu'il existe un épimorphisme

$$Q \twoheadrightarrow \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} {}^p j_{a,!*}^{\neq h+g} j_a^{\neq h+g,*} Q =: Q_{\mathcal{A}},$$

et notons  $Q^{\mathcal{A}}$  son noyau. Supposons par l'absurde qu'il existe  $a' \notin \mathcal{A}$  avec  $j_{a'}^{\neq h+g,*} Q \neq 0$ . On a alors

$$\begin{array}{ccccc} Q^{\mathcal{A}} & \hookrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & Q_{\mathcal{A}} \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & Q_{a'} & & \end{array}$$

Comme  $Q^{\mathcal{A}} \rightarrow {}^p j_{a',!*}^{\neq h+g} j_{a'}^{\neq h+g,*} Q$  est non nulle et que son conoyau est à support dans  $X_{I,\overline{s}}^{\geq h+g+1}$ , cette application est nécessairement surjective ce qui contredirait la maximalité de  $\mathcal{A}$ .

Montrons à présent que la suite exacte de l'énoncé est scindée. On raisonne par l'absurde en supposant que le conoyau  $T$  de  ${}^p j_{\overline{1}_h,!*}^{\neq h+g} j_{\overline{1}_h}^{\neq h+g,*} Q \hookrightarrow Q$ , est non nul et donc, par hypothèse, à support dans  $X_{I,\overline{s},c}^{\geq h+g}$ . Soit  $T[l]$  sa  $l$ -torsion qui est donc un  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -faisceau pervers  $P_{h,d-h}(F_v)$ -équivariant, et on choisit  $T_0 \hookrightarrow T[l]$  de sorte que  $T_0$  soit  $P_{h,d-h}(F_v)$ -équivariant et simple.

Notons que  $T \hookrightarrow \overline{T}$  où  $\overline{T}$  est le conoyau de  ${}^p j_{\overline{1}_h, !*}^{=h+g} j_{\overline{1}_h}^{=h+g,*} Q \hookrightarrow {}^{p+} j_{\overline{1}_h, !*}^{=h+g} j_{\overline{1}_h}^{=h+g,*} Q$  que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$0 \rightarrow \overline{T}_{\neq c} \longrightarrow \overline{T} \longrightarrow \overline{T}_c \rightarrow 0 \quad (2.3.2)$$

où  $\overline{T}_{\neq c}$  (resp.  $\overline{T}_c$ ) est le conoyau de

$${}^p j_{\neq c, !*}^{=h+g} j_{\neq c}^{=h+g,*} Q \hookrightarrow {}^{p+} j_{\neq c, !*}^{=h+g} j_{\neq c}^{=h+g,*} Q,$$

(resp. de  ${}^p j_{c, !*}^{=h+g} j_c^{=h+g,*} Q \hookrightarrow {}^{p+} j_{c, !*}^{=h+g} j_c^{=h+g,*} Q$ ). Concrètement, supposons pour simplifier les notations que  $c = \overline{1}_{h+1}$ , et soit

$${}^p j_{\overline{1}_{h+g}, !*}^{=h+g} j_{\overline{1}_{h+g}}^{=h+g,*} Q \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{\overline{1}_{h+g}, !*}^{=h+g} j_{\overline{1}_{h+g}}^{=h+g,*} Q \twoheadrightarrow \overline{T}_1.$$

Alors  $\overline{T}_1[l]$ , muni de son action de  $P_{h,g,d-h-g}(F_v)$  admet une filtration avec pour gradués

$$\text{ind}_{P_{h,g,\delta_k,d-h-g-\delta_k}(F_v)}^{P_{h,g,d-h-g}(F_v)} {}^p j_{k, !*} \mathcal{L}_k[d_k]$$

où  $\mathcal{L}_k$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -système local sur  $U_k \subset X_{\mathcal{I}, \overline{s}, \overline{1}_{h+g+\delta_k}}^{=h+g+\delta_k}$  avec  $j_k : U_k \hookrightarrow \overline{U}_k \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \overline{s}}^{\geq 1}$ ,  $d_k := \dim U_k \leq d - h - g - \delta_k$ . Pour  $z_k$  un point générique de  $U_k$ , en utilisant la notation B.1.3,  $\text{ind } z_k^* \mathcal{L}_k$  en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation du sous-groupe de Levi de  $P_{h,g,\delta_k}(F_v)$ , s'écrit sous la forme  $r_l(\Pi_h) \otimes r_l(\pi_v)\{r_k\} \otimes \overline{\pi}_k$ .

En ce qui concerne  $\overline{T}[l]$ , il suffit alors d'induire de  $P_{h,g,d-h-g}(F_v)$  à  $P_{h,d-h}(F_v)$ . Considérons ainsi un point générique  $z$  d'un des  $U_k \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \overline{s}, \overline{1}_{h+g+\delta}}^{=h+g+\delta}$ , avec  $\delta = \delta_k$  et tels que  $d_k = \dim U_k$  est maximal. Regardons alors simplement l'action infinitésimale de  $P_{h,g+\delta}(F_v)$  sur la fibre en  $z$ , ou plutôt avec la notation B.1.3, sur  $\text{ind } z^*$ .

La filtration de  $\overline{T}_1[l]$  ci-avant fournit alors une filtration de  $\text{ind } z^* \overline{T}[l]$  dont les gradués en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation du sous-groupe de Levi de  $P_{h,g+\delta_k}(F_v)$ , s'écrivent sous la forme  $r_l(\Pi_h) \otimes (r_l(\pi_v)\{r_k\} \times \overline{\pi}_k)$ . La suite exacte courte (2.3.2) fournit alors sur chacun de ces gradués, une suite exacte courte  $M_{1g+\delta}(F_v)$ -équivariante

$$0 \rightarrow r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\overline{\pi}_i)_{|M_\delta(F_v)} \longrightarrow (r_l(\pi_v\{k\}) \times \overline{\pi}_i)_{|M_{g+\delta}(F_v)} \longrightarrow r_l(\pi_v\{r_k\})_{|M_g(F_v)} \times \overline{\pi}_i \rightarrow 0$$

où la première induite à gauche, dite « la grosse induite mirabolique » par la suite (resp.

celle de droite appelée « la petite induite mirabolique ») est l'induite de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & GL_g & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

(resp. de  $M_{g,\delta}(F_v)$  défini comme le sous-groupe de  $P_{1,g-1,\delta}(F_v)$  dont le coefficient en haut à gauche est égal à 1) à  $M_{g+\delta}(F_v)$ . En particulier  $T_0 \hookrightarrow \overline{T}[l]$  se factorise par un de ces gradués avec  ${}^p \mathcal{H}^0 \text{ind } z^* T_0 \hookrightarrow r_l(\Pi_h) \otimes (r_l(\pi_v\{r_k\})_{|M_g(F_v)} \times \overline{\pi}_k)$ .

Considérons alors le tiré en arrière  $Q_0$

$$\begin{array}{ccccc} p j_{1_h,!*}^{j=h+g} j_{1_h}^{j=h+g,*} Q & \hookrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & T \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ p j_{1_h,!*}^{j=h+g} j_{1_h}^{j=h+g,*} Q_0 & \hookrightarrow & \tilde{Q}_0 & \dashrightarrow & T_0 \end{array}$$

Par composition des monomorphismes stricts, on a encore

$$0 \rightarrow p^{(c)} j_{\neq c,!*}^{j=h+g} j_{\neq c}^{j=h+g,*} Q_0 \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_{0,c} \rightarrow 0 \quad (2.3.3)$$

avec  ${}^p \mathcal{H}^0 i_z^* Q_0 = {}^p \mathcal{H}^0 i_z^* Q_{0,c} = {}^p \mathcal{H}^0 i_z^* T_0$ . En outre  $z$  étant choisi dans  $X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+1}$ , on écrit  ${}^p \mathcal{H}^0 \text{ind } z^* T_0$  sous la forme  $r_l(\Pi_h) \otimes \theta$  où  $\theta$  est une représentation irréductible de  $GL_{g+\delta}(F_v)$

$$\begin{array}{ccc} \theta & & \\ \downarrow & \searrow & \\ r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\bar{\pi}_k)_{|M_\delta(F_v)} & \hookrightarrow & (r_l(\pi_v\{r_k\}) \times \bar{\pi}_k)_{|M_{g+\delta}(F_v)} \twoheadrightarrow r_l(\pi_v\{r_k\})_{|M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k. \end{array}$$

On utilise à présent la théorie des représentations du groupe  $M_{g+\delta}(F_v)$  de [5] dans le cas complexe et [18] chapitre III §1 sur  $\overline{\mathbb{F}}_l$ . En particulier d'après [18] III 1.10, pour  $\bar{\pi}_k$  irréductible,  $r_l(\pi_v\{r_k\})_{|M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k$  admet une unique dérivée d'ordre  $> 0$  non nulle de sorte que d'après [18] III.1.5, c'est une représentation irréductible de  $M_{g+\delta}(F_v)$ . Ainsi on a

$$\theta \simeq r_l(\pi_v\{r_k\})_{|M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k$$

et  $Q_{0,c} \simeq \text{ind}_{M_{g,\delta}(F_v)}^{M_{g+\delta}(F_v)} Q_{1_{h+g}}$  où  $p j_{1_{h+g},!*}^{j=h+g} j_{1_{h+g}}^{j=h+g,*} Q_0 \hookrightarrow_+ Q_{1_{h+g}}$  de conoyau  $T_{0,1_{h+g}}$  non nul. On utilise alors que l'extension (2.3.3) est scindée sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  pour écrire  $Q_0$  sous la forme

$$0 \rightarrow \tilde{Q}_{0,c} \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_{0,\neq c} \rightarrow 0,$$

avec  $p j_{c,!*}^{j=h+g} j_c^{j=h+g,*} Q_0 \hookrightarrow_+ \tilde{Q}_{0,c} \hookrightarrow_+ Q_{0,c}$ . Sachant que le conoyau  $T_0$  de  $p j_{c,!*}^{j=h+g} j_c^{j=h+g,*} Q_0 \hookrightarrow_+ Q_{0,c}$  est simple, on en déduit  $\tilde{Q}_{0,c} \simeq p j_{c,!*}^{j=h+g} j_c^{j=h+g,*} Q_0$ .

D'après (2.2.1), si l'extension (2.3.3) n'est pas scindée, on a une flèche  $P_{h,1,g+\delta-1,d-h-g-\delta}(F_v)$ -équivariante non nulle  $T_0 \rightarrow T_{\neq c}$  où  $T_{\neq c}$  est le conoyau de  $p^{(c)} j_{\neq c,!*}^{j=h+g} j_{\neq c}^{j=h+g,*} Q_0 \hookrightarrow_+ Q_{0,\neq c}$ , i.e. une injection

$$r_l(\pi_v\{r_k\})_{|M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k \hookrightarrow r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\bar{\pi})_{|M_\delta(F_v)}, \quad (2.3.4)$$

où  $\bar{\pi}$  est une représentation irréductible de  $GL_\delta(F_v)$  qu'il est inutile de préciser plus.

On reprend alors la preuve du théorème 4.11 de [5] p458, cf. [18] pour la justification que les arguments de loc. cit. sont valables sur  $\overline{\mathbb{F}}_l$ . On notera aussi que notre mirabolique n'est pas celui de loc. cit., on passe de nos conventions à celle de loc. cit. en tordant les actions par  $g \mapsto \sigma({}^t g^{-1})\sigma$  où  $\sigma$  est la matrice de permutation associé au  $n$ -cycle  $(12 \cdots n)$ , cf. [10] preuve du lemme 4.4.

On introduit, d'après [5] 3.2 p450, les foncteurs

$$\Psi^- : \text{Alg}(M_n(F_v)) \longrightarrow \text{Alg}(GL_{n-1}(F_v)), \quad \Phi^- : \text{Alg}(M_n(F_v)) \longrightarrow \text{Alg}(M_{n-1}(F_v))$$

définis par  $\Psi^- = r_{V_{n,1}}$  (resp.  $\Phi^- = r_{V_{n,\theta}}$ ) le foncteur des  $V_n$  coinvariants (resp.  $(V_n, \psi)$ -coinvariants), cf. [5] 1.8, où

$$V_n(F_v) = \{(m_{i,j} \in P_n(F_v) : m_{i,j} = \delta_{i,j} \text{ for } j < n)\}$$

désigne le radical unipotent de  $M_n(F_v)$  et où  $\psi$  est un caractère additif non trivial de  $F_v$ , qu'on prolonge sur le radical unipotent de  $M_n(F_v)$ .

**2.3.5. Proposition.** — ( cf. [5] 4.13) Pour  $\rho \in \text{Alg}(GL_r(K))$ ,  $\sigma \in \text{Alg}(GL_t(K))$  et  $\tau \in \text{Alg}(M_s(K))$ , on a les propriétés suivantes.

(a) Dans  $\text{Alg}(M_{r+t}(K))$  on a la suite exacte courte déjà rencontrée

$$0 \rightarrow \rho \times (\sigma|_{M_t(K)}) \longrightarrow (\rho \times \sigma)|_{M_{r+t}(K)} \longrightarrow (\rho|_{M_r(K)}) \times \sigma \rightarrow 0.$$

(b) Pour  $\Omega = \Psi^-$  ou  $\Phi^-$ , concernant « la petite induite mirabolique », on a  $\Omega(\tau \times \rho) \simeq \Omega(\tau) \times \rho$ .

(c) En ce qui concerne la « grosse induite mirabolique », on a  $\Psi^-(\rho \times \tau) \simeq \rho \times \Psi^-(\tau)$  et

$$0 \rightarrow \rho \times \Phi^-(\tau) \longrightarrow \Phi^-(\rho \times \tau) \longrightarrow (\rho|_{M_r(K)}) \times \Psi^-(\tau) \rightarrow 0.$$

(d) Supposons  $r > 0$ , alors pour tout sous- $M_{s+t}(K)$ -module non nul,  $\omega \subset \rho \times \tau$ , on a  $\Phi^-(\omega) \neq (0)$ .

Rappelons en outre que pour toute représentation irréductible  $\tau$  de  $M_n(F_v)$  alors exactement un parmi  $\Phi^-(\tau)$  et  $\Psi^-(\tau)$  est non nul et on calcule la dérivée  $k$ -ème de  $\tau$  par la formule  $\tau^{(k)} = \Psi^-(\Phi^-)^{k-1}(\tau)$ . Rappelons que  $\tau$  a une unique dérivée non nulle qui est irréductible; si  $k$  est l'ordre alors pour tout  $i \leq k-1$ ,  $(\Phi^-)^i(\tau)$  est aussi irréductible.

**2.3.6. Lemme.** — Pour tout  $0 \leq i \leq g-1$ , on a

$$(\Phi^-)^i(r_l(\pi_v\{r_k\})|_{M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k) = (\Phi^-)^i(r_l(\pi_v\{r_k\})|_{M_g(F_v)}) \times \bar{\pi}_k \neq (0)$$

et

$$(\Phi^-)^i(r_l(\pi_v\{r_k\})|_{M_g(F_v)}) \times \bar{\pi}_k \hookrightarrow r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\Phi^-)^i((\bar{\pi})|_{M_\delta(F_v)}).$$

*Démonstration.* — La première partie découle du point b) de la proposition précédente et du fait que  $r_l(\pi_v)$  étant cuspidal, sa restriction à  $M_g(F_v)$  est irréductible, isomorphe à la représentation mirabolique.

Pour ce qui concerne la deuxième assertion, on raisonne par récurrence sur  $i$  en partant de  $i = 0$  qui correspond à (2.3.4). Supposons donc le résultat acquis au rang  $i$  de sorte qu'en appliquant le foncteur exact  $\Phi^-$  on obtient

$$(\Phi^-)^{i+1}(r_l(\pi_v\{r_k\})|_{M_g(F_v)}) \times \bar{\pi}_k \hookrightarrow \Phi^- \left( r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\Phi^-)^i((\bar{\pi})|_{M_\delta(F_v)}) \right),$$

où le terme de gauche est irréductible. Si la composée de l'injection précédente avec la surjection du point c) de la proposition précédente

$$\Phi^- \left( r_l(\pi_v \{r_k\}) \times (\Phi^-)^i \left( (\bar{\pi})|_{M_\delta(F_v)} \right) \right) \twoheadrightarrow r_l(\pi_v \{r_k\})_{M_g(F_v)} \times \Psi^- \left( (\Phi^-)^i \left( (\bar{\pi})|_{M_\delta(F_v)} \right) \right)$$

était non nulle alors

$$(\Phi^-)^{i+1} \left( r_l(\pi_v \{r_k\})|_{M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k \right) \hookrightarrow r_l(\pi_v \{r_k\})|_{M_g(F_v)} \times \Psi^- \left( (\Phi^-)^i \left( (\bar{\pi})|_{M_\delta(F_v)} \right) \right)$$

et donc par exactitude de  $\Phi^-$  et  $\Psi^-$ , le foncteur  $\Psi^- \circ (\Phi^-)^{g-i-2}$  appliqué au membre de droite serait non nul, i.e.

$$\Psi^- \circ (\Phi^-)^{g-i-2} \left( r_l(\pi_v \{r_k\})|_{M_g(F_v)} \right) \times \Psi^- \left( (\Phi^-)^i \left( (\bar{\pi})|_{M_\delta(F_v)} \right) \right) \neq (0),$$

alors que  $\Psi^- \circ (\Phi^-)^{g-i-2} \left( r_l(\pi_v \{r_k\})|_{M_g(F_v)} \right) = (0)$ , d'où la contradiction.  $\square$

Ainsi  $(\Phi^-)^{g-1} \left( r_l(\pi_v \{r_k\})|_{M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k \right) \neq (0)$  et

$$(\Phi^-)^{g-1} \left( r_l(\pi_v \{r_k\})|_{M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k \right) \hookrightarrow r_l(\pi_v \{r_k\}) \times (\Phi^-)^{g-1} \left( (\bar{\pi}_k)|_{M_\delta(F_v)} \right),$$

D'après le point (d) de la proposition précédente on a alors  $\Phi^- \left( (\Phi^-)^{g-1} \left( r_l(\pi_v \{r_k\})|_{M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k \right) \right) = (\Phi^-)^g \left( r_l(\pi_v \{r_k\})|_{M_g(F_v)} \times \bar{\pi}_k \right) \neq 0$ , ce qui n'est pas, d'où la contradiction et donc la suite de l'énoncé est bien scindée.  $\square$

Comme noté plus haut, du lemme 2.1.4 et de la proposition précédente on en déduit l'isomorphisme (2.1.5) et donc aussi la proposition 2.1.8, à savoir que les faisceaux de cohomologie des  $p$ -extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor, sont sans torsion. Afin d'étudier les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}}$ , cf. le §3.3, nous utiliserons l'énoncé suivant qui n'est qu'une version légèrement modifiée de la proposition précédente.

**2.3.7. Proposition.** — Soit  $Q$  un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre qui est  $P_{h,d-h}(F_v)$ -équivariant et tel que

- $Q \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} {}^p j_{\overline{1}_h, !}^{h+g-1(\varrho)} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_h(\pi_v) \otimes \pi_v)$  où  $\Pi_h(\pi_v)$  est une représentation quelconque de  $GL_h(F_v)$  et où  $\text{Cusp}_{-1}(\varrho)$  est introduit dans la définition A.2.10;
- $Q$  s'écrit comme une extension  $0 \rightarrow Q_{\neq c} \rightarrow Q \rightarrow Q_c \rightarrow 0$  où  $X_{\overline{1}, \overline{s}, c}^{\geq h+1}$  est une strate pure contenue dans  $X_{\overline{1}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$ , avec  $Q_{\neq c} \simeq {}^p j_{\neq c, !}^{h+g-1(\varrho)} {}^p j_{\neq c}^{h+g-1(\varrho), *}$   $Q$  et  $Q_c$  libre.

Alors la suite exacte ci-dessus est scindée et  $Q \simeq {}^p j_{\overline{1}_h, !}^{h+g-1(\varrho)} {}^p j_{\overline{1}_h}^{h+g-1(\varrho), *}$   $Q$ .

*Démonstration.* — La preuve est exactement identique, simplement lors de la filtration de  $\overline{T}[l]$ ,  $\pi_v$  n'est alors plus fixé mais appartient à  $\text{Cusp}_{-1}(\varrho)$ . Mais comme dans la suite du raisonnement  $\pi_v$  n'intervient que via sa réduction modulo  $l$ , cette nuance est transparente.  $\square$

Une autre façon de le voir est de choisir une numérotation  $\text{Cusp}_{-1}(\varrho) = \{\pi_{v,1}, \dots, \pi_{v,r}\}$  et de filtrer  $Q_{\neq c}$  (resp.  $Q_c$ ) de sorte que  $\text{gr}^k(Q_{\neq c})$  (resp.  $\text{gr}^k(Q_c)$ ) soit de la forme

$${}^p j_{!*}^{\neq c, \neq c} j_{\neq c}^{\neq c, *} Q_{\neq c} \hookrightarrow_+ {}^{p(k)} j_{!*}^{\neq c, \neq c} j_{\neq c}^{\neq c, *} Q_{\neq c} \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*}^{\neq c, \neq c} j_{\neq c}^{\neq c, *} Q_{\neq c},$$

respectivement

$${}^p j_{!*}^{\neq c, \neq c} j_c^{\neq c, *} Q_c \hookrightarrow_+ {}^{p(k)} j_{!*}^{\neq c, \neq c} j_c^{\neq c, *} Q_c \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*}^{\neq c, \neq c} j_c^{\neq c, *} Q_c,$$

où on utilise la notation  $p(k)$  en exposant à gauche pour indiquer une position entre les deux extensions intermédiaires  $p$  et  $p+$ .

*Remarque :* Notons en particulier qu'on doit avoir<sup>(5)</sup>  $p(r) = p(c)$  mais qu'à ce stade on ne peut pas affirmer que pour tout  $k = 1, \dots, r$ , on a  $p(k) = p(c)$ . Pour  $l > 2$ , on démontrera que c'est le cas dans la section suivante.

On intervertit alors  $\text{gr}^1(Q_c)$  avec les  $\text{gr}^k(Q_{\neq c})$  pour  $k = 2, \dots, r$  en utilisant le diagramme 2.2.1. Lors d'un tel échange on obtient

$$\widetilde{\text{gr}}^1(Q_c) \hookrightarrow_+ \text{gr}^1(Q_c) \twoheadrightarrow T_c,$$

et

$$\text{gr}^k(Q_{\neq c}) \hookrightarrow_+ \widetilde{\text{gr}}^k(Q_{\neq c}) \twoheadrightarrow T_{\neq c}.$$

Comme précédemment on observe alors que  $T_c$  est une « petite induite mirabolique », cf. la proposition 2.3.5, qui n'a que des dérivées d'ordre  $g_{-1}(\varrho)$  alors que  $T_{\neq c}$  est une « grosse induite mirabolique » qui a des dérivées d'ordre  $> g_{-1}(\varrho)$ . Ainsi lors de ces échanges  $\text{gr}^1(Q_c)$  n'est pas modifié et on se retrouve dans la situation précédente avec

$$0 \rightarrow \text{gr}^1(Q_{\neq c}) \rightarrow X \rightarrow \text{gr}^1(Q_c) \rightarrow 0,$$

avec  $X$  qui est  $P_{h,d-h}(F_v)$ -équivariant de sorte que la proposition précédente fournit  $p'(1) = p(1)$ . Par récurrence on obtient de même  $p(k) = p'(k)$  et finalement  $Q_c = {}^{p(c)} j_{c,!}^{\neq c, \neq c} j_c^{\neq c, *} Q_c$ .

Nous utiliserons aussi l'énoncé suivant dont la preuve est similaire aux propositions précédentes.

**2.3.8. Proposition.** — Soit  $X_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{s}, c}^{\geq 1}$  une strate pure et  $Q_{\neq c}$  un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre et  $P_c(F_v)$ -équivariant tel que  $Q_{\neq c} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} {}^p j_{\neq c,!}^{\neq c, \neq c} HT_{\neq c}(\pi_v, \tau)$  où  $\tau$  est la représentation mirabolique de  $M_{tg}(F_v)$ , i.e. celle dont la seule dérivée non nulle est celle d'ordre  $tg$ . On considère alors une extension de faisceaux pervers libre  $M_d(F_v)$ -équivariants :

$$0 \rightarrow Q_{\neq c} \rightarrow X \rightarrow P_c \rightarrow 0$$

telle que

- l'extension est scindée après extension des scalaires à  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  ;
- avec les notations précédentes,  $Q_{\neq c} \simeq {}^{p(c)} j_{\neq c,!}^{\neq c, \neq c} j_{\neq c}^{\neq c, *} Q_{\neq c}$  ;

5. Dans le cas d'une  $p+$  extension intermédiaire, on aurait  $p(1) = p+$ .

—  $P_c$  est supporté sur une strate  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, c}^{\geq h}$  avec  $h \leq tg$ .

Alors l'extension ci-avant est scindée.

*Démonstration.* — On raisonne comme dans la preuve de la proposition précédente en partant de

$$0 \rightarrow P'_c \longrightarrow X \longrightarrow Q'_{\neq c} \rightarrow 0$$

avec  $Q_{\neq c} \hookrightarrow_+ Q'_{\neq c}$ . Le conoyau  $T'_{\neq c}$  de  ${}^p j_{\neq c, !*}^{=tg} Q_{\neq c} \hookrightarrow_+ Q'_{\neq c}$ , d'après (2.2.1), s'identifie avec le conoyau  $T_c$  de  $P'_c \hookrightarrow P_c$ . On décrit alors  $T_c[l]$  à l'aide d'une filtration comme ci-avant où les gradués sont de la forme  $i_* {}^p j_{!*} \mathcal{L}_{\mathbb{F}_l} \otimes (\bar{\pi} \times \sigma_{|M_h(F_v)})$  et on observe que  $\bar{\pi} \times \sigma_{|M_h(F_v)}$  est de dérivée inférieure ou égale à  $h \leq tg$ , alors que la dérivée de tout sous-espace de  $\bar{\pi}_{|M_\delta(F_v)} \times \tau$  est d'ordre strictement supérieur à celui de  $\tau$ , i.e.  $tg$  de sorte que  $T_c[l]$  est nécessairement trivial, i.e. la suite exacte courte de l'énoncé est scindée.  $\square$

En particulier dans le cas où  $h = tg$ , on obtient le résultat suivant.

**2.3.9. Corollaire.** — Soit  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, c}^{\geq 1}$  une strate pure et soit  $Q$  un  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre,  $GL_d(F_v)$ -équivariant tel que :

- $Q \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} {}^p j_{!*}^{=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$  ;
- $Q$  s'écrit comme une extension de faisceaux pervers libres  $P_c(F_v)$ -équivariants

$$0 \rightarrow Q_{\neq c} \longrightarrow Q \longrightarrow Q_c \rightarrow 0$$

avec  $Q_{\neq c} \simeq {}^{p(c)} j_{\neq c, !*}^{=tg} Q_{\neq c}$ .

Alors la suite exacte ci-dessus est scindée.

## 2.4. Sur les extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor. —

Au §3.2, nous montrerons le résultat suivant.

**2.4.1. Proposition.** — Supposons  $l > 2$  et soit  $\pi_{v,-1}$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  dont la réduction modulo  $l$  est supercuspidale, alors, pour tout  $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$  et pour toute représentation  $\Pi_t$  de  $GL_{tg}(F_v)$ , le bimorphisme naturel

$${}^p j_{!*}^{=tg} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t) \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*}^{=tg} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t),$$

est un isomorphisme.

Notons  $\varrho$  la réduction modulo  $l$  d'une telle  $\pi_{v,-1}$  qui est donc par hypothèse, supercuspidale. Avec les notations de A.3.9,  $\pi_{v,-1} \in \text{Cusp}_{-1}(\bar{\tau}) = \text{Cusp}_{-1}(\varrho)$  où  $\bar{\tau}$  est la réduction modulo  $l$  de  $\pi_{v,-1}[1]_D$ . Dans ce paragraphe, nous voulons en déduire le calcul de la  $p$ -torsion du conoyau du bimorphisme ci-avant lorsque  $\pi_{v,u} \in \text{Cusp}_u(\varrho)$  pour  $u \geq 0$ . Avec les notations de A.2.9, cela signifie que la réduction modulo  $l$  de  $\pi_{v,u}$  est isomorphe à  $\rho_u$ .

Soit  $\mathbb{F}(\bullet) := \bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l}^{\mathbb{L}} \overline{\mathbb{F}}_l$ , le foncteur de réduction modulo  $l$ . Rappelons que ce dernier ne commute pas aux foncteurs de troncations et que d'après les équations 2.54-2.61 de [17], on a

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^p j_{!*} &\rightarrow {}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{H}^{-1} \mathbb{F}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^0 i^* j_* [1] \rightsquigarrow \\ &{}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}^{p+} j_{!*} \rightarrow \mathcal{H}^0 \mathbb{F}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \end{aligned}$$

En revanche, dans le cas où  ${}^p j_! = {}^{p+} j_!$ , en utilisant

$${}^p j_! \rightarrow {}^{p+} j_! \rightarrow {}^p i_* \mathcal{H}_{tors}^{-1} i^* j_* [1] \rightsquigarrow$$

quand  ${}^p i_* \mathcal{H}^{-1} i^* j_*$  est libre, alors le triangle distingué

$$\mathbb{F}^p j_! \rightarrow {}^p j_! \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{H}^{-1} \mathbb{F}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^{-1} i^* j_* [2] \rightsquigarrow$$

nous donne que  $\mathbb{F}$  et  ${}^p j_!$  commutent.

**2.4.2. Corollaire.** — Avec les notations précédentes et celles de la proposition A.2.16, dans le groupe de Grothendieck des  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -faisceaux pervers équivariants sur  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}$ , on a l'égalité

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \left( {}^p j_{!*}^{\overline{=}tg_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t) \right) &= m(\varrho) l^u \sum_{r=0}^{s-tm(\varrho)l^u} {}^p j_{!*}^{\overline{=}tg_u(\varrho)+rg_{-1}(\varrho)} \\ &HT(\varrho, r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho}(r+tm(\varrho)l^u, < \underline{\delta}_u)) \otimes \Xi^{r \frac{g-1}{2}}. \end{aligned}$$

*Remarque :* dans le groupe de Grothendieck, l'induite  $r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho-1}(r+tm(\varrho-1)l^u, < \underline{\delta}_u)$  n'intervient que par sa semi-simplifiée. Pour les mêmes raisons, il est inutile de préciser les réseaux stables utilisés pour les systèmes locaux de la formule précédente.

*Démonstration.* — Les cas  $tg_u \geq d$  étant triviaux, on raisonne par récurrence en supposant le résultat acquis pour tout  $t < t'$  et on traite le cas de  $t$ . L'idée est de partir de la commutation entre  $\mathbb{F}$  et les  $j_!^{\overline{=}tg}$  :

$$\mathbb{F} \left( j_!^{\overline{=}tg_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t) \right) = \sum_{t'=t}^{s_u} \mathbb{F} \left( {}^p j_{!*}^{\overline{=}t'g_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{t'-t}(\pi_{v,u})) \right) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t)(g_u(\varrho)-1)}{2}},$$

et, en posant  $t(u) = tm(\varrho)l^u$

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \left( j_!^{\overline{=}t(u)g_{-1}(\varrho)} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t) \right) &= \\ \sum_{t'=t(u)}^s \mathbb{F} \left( {}^p j_{!*}^{\overline{=}t'g_{-1}(\varrho)} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t) \overrightarrow{\times} \text{St}_{t'-t(u)}(\pi_{-1}) \right) &\otimes \Xi^{\frac{(t'-t(u))(g_{-1}(\varrho)-1)}{2}}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Or d'après A.3.10, on a

$$\mathbb{F} j_!^{\overline{=}tg_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t) = j_!^{\overline{=}tg_u(\varrho)} \mathbb{F} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t) = m(\varrho) l^u j_!^{\overline{=}t(u)g_{-1}(\varrho)} \mathbb{F} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t)$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{t'=t+1}^{s_u} \mathbb{F} \left( {}^p j_{l*}^{\leq t' g_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{t'-t}(\pi_u)) \right) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t)(g_u(\varrho)-1)}{2}} \\ &= \sum_{t'=t(u)+1}^{s(u)} {}^p j_{l*}^{\geq t' g_{-1}(\varrho)} HT(\varrho, r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho-1}(t'-t(u), \geq \underline{\delta}_u)) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t(u))(g_{-1}(\varrho)-1)}{2}} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

En soustrayant (2.4.4) à (2.4.3), on obtient le résultat.  $\square$

**Fait important** : on notera en particulier que si  $\Pi_t$  est un sous-quotient irréductible de  $\text{St}_t(\pi_{v,u})$  alors pour tout sous-quotient irréductible  $\sigma$  de  $V_{\varrho-1}(s(u)-t(u), \geq \underline{\delta}_u)$ , *l'induite*  $\Pi_t \times \sigma$  est irréductible.

*Remarque* : la surjection

$${}^p j_{l*}^{\leq t' g_u(\varrho)} (\mathbb{F} HT(\pi_{v,u}, \Pi_{t'})) \twoheadrightarrow \mathbb{F} ({}^p j_{l*}^{\leq t' g_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_{t'}))$$

nous donne en outre que la suite des dimensions des gradués de la filtration de stratification exhaustive est strictement croissante ce qui fixe complètement cette filtration. En particulier, en notant  $T := i_*^{tg} ({}^p \mathcal{H}_{\text{tor}}^0 i^{tg,*} j_*^{\geq tg} [1])$ , alors pour tout sous-faisceau pervers  $T_0$  de la  $l$ -torsion  $T[l]$  de  $T$ , il existe un sous-quotient irréductible  $\sigma$  de  $V_{\varrho-1}(s(u)-t(u), \geq \underline{\delta}_u)$  tel que  $T_0$  admet  ${}^p j_{l*}^{\leq s(u)g_{-1}(\varrho)} HT(\varrho, r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} \sigma) \otimes \Xi^{\frac{(s(u)-t(u))(g_{-1}(\varrho)-1)}{2}}$  comme sous-objet.

*Remarque* : la  $l$ -torsion du quotient des  $p+$  faisceaux pervers d'Harris-Taylor par leur  $p$  version, est complètement décrit par la combinatoire de la réduction modulo  $l$  des représentations de  $GL_d(F_v)$  et de  $D_{v,d}^\times$ . L'étude de la torsion d'ordre supérieure découlerait selon le même schéma de démonstration, de l'étude de la réduction modulo  $l^n$  des représentations irréductibles de  $GL_d(F_v)$  et  $D_{v,d}^\times$ .

### 3. Cycles évanescents

Pour tout  $I \in \mathcal{I}$ , le faisceaux pervers des cycles évanescents  $R\Psi_{\eta_v, I}(\Lambda[d-1]) (\frac{d-1}{2})$  sur  $X_{I, \bar{s}}$  sera noté  $\Psi_{I, \Lambda}$ . Soit alors  $\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda}$  le faisceau pervers de Hecke associé sur  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}$ . Pour  $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ , on notera plus simplement  $\Psi_I$  et  $\Psi_{\mathcal{I}}$ . Avec ces décalages,  $\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda}$  est autodual pour la dualité de Grothendieck-Verdier.

*Remarque* : soit, cf. [15] III.2,  $\mathcal{L}_\xi$  le système local attaché à une représentation irréductible algébrique  $\xi$  de  $G$  sur  $\Lambda$ . Alors  $R\Psi_{\eta_v, \mathcal{I}}(\mathcal{L}_\xi) \simeq R\Psi_{\eta_v, \mathcal{I}}(\Lambda) \otimes \mathcal{L}_\xi$ , i.e. d'un point de vue faisceautique, le rôle de  $\mathcal{L}_\xi$  est transparent ce qui justifie de n'étudier que le cas  $\xi$  trivial.

D'après [7] théorème 2.2.4, cf. aussi la proposition B.2.2, les gradués de la filtration par les poids de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$  sont les  $\mathcal{P}(t, \pi_v) (\frac{1-t+2k}{2})$  où

- $\pi_v$  décrit les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  pour  $g$  variant de 1 à  $d$ ,
- $t$  varie de 1 à  $\lfloor \frac{d}{g} \rfloor$  et  $k$  de 0 à  $t-1$ .

**3.0.1. Définition.** — On dira d'un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre  $P$  tel que

$$P \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathcal{P}(t, \pi_v) \left( \frac{1-t+2k}{2} \right)$$

comme ci-avant avec  $\pi_v \in \text{Cusp}_i(\varrho)$ , qu'il est un faisceau pervers d'Harris-Taylor de  $\varrho$ -type  $i$ , ou simplement de type  $\varrho$  quand on ne souhaitera pas préciser l'indice  $i$ .

Le but de cette section est de montrer que les faisceaux de cohomologie  $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I}}$  de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  sont sans torsion. Pour ce faire, comme indiqué dans l'introduction, nous allons utiliser une filtration de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  dont la suite spectrale calculant les  $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I}}$  à partir des faisceaux de cohomologie de ses gradués, dégénère en  $E_1$ .

**3.1. Décomposition supercuspidale.** — À l'aide des variétés d'Igusa de première et seconde espèce, les auteurs de [15] p136, associent à toute  $\Lambda$ -représentation admissible  $\rho_v$  de  $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ , un  $\Lambda$ -système local  $\mathcal{L}_{\Lambda, \overline{1}_h}(\rho_v)$  sur  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\overline{h}}$  muni d'une action de  $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$ , où le deuxième facteur agit via la projection  $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v) \rightarrow \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(\mathcal{O}_v)$  comme dans la remarque précédant 1.2.9. On note alors

$$\mathcal{L}_{\Lambda}(\rho_v) := \mathcal{L}_{\Lambda, \overline{1}_h}(\rho_v) \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)} GL_d(\mathcal{O}_v)$$

sa version induite sur  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\overline{h}}$ , cf. les notations du §B.1. Pour  $\rho_v$  une représentation de  $D_{v,h}^\times$ , on notera  $\mathcal{L}_{\Lambda}(\rho_v)$  pour  $\mathcal{L}_{\Lambda}(\rho_v, |_{\mathcal{D}_{v,h}^\times})$ .

*Remarque :* l'action du facteur  $GL_h(F_v)$  du sous-groupe de Levi  $P_{h,d-h}(F_v)$  est dite « infinitésimale ». Pour toute strate pure  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\overline{h}}$  et pour  $\mathcal{L}_{\Lambda, a}(\rho_v)$  le système local associé, on a aussi une action dite infinitésimale du facteur  $GL_h(F_v)$  du sous-groupe de Levi de  $P_a(F_v) = aP_{h,d-h}(F_v)a^{-1}$ , cf. le deuxième tiret de A.1.2.

Le découpage (B.2.1) de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$  selon les classes d'équivalence inertielles des représentations irréductibles cuspidales  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$  pour  $g$  variant de 1 à  $d$ , n'est plus valable sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ . L'idée est alors d'utiliser la proposition A.3.6. Ainsi à la décomposition  $\rho_v \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(h)} \rho_{v, \bar{\tau}}$  d'une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière de  $D_{v,h}^\times$ , selon ses  $\bar{\tau}$ -composantes, on associe

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\rho_v) \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\rho_{v, \bar{\tau}}).$$

**3.1.1. Proposition.** — (cf. [15] proposition IV.2.2 et le §2.4 de [7])

On a un isomorphisme<sup>(6)</sup>  $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h,d-h}(F_v) \times W_v$ -équivariant

$$\text{ind}_{(D_{v,h}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,h}^\times} \left( \mathcal{H}^{h-d-i} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \right) |_{X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\overline{h}}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{h-1-i}),$$

où  $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^\bullet$  est défini en 1.1.3 et la correspondance entre le système indexé par  $\mathcal{I}$  et  $\mathbb{N}$  est donné par l'application  $m_1$  de 1.2.3.

6. Noter le décalage  $[d-1]$  dans la définition de  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$ .

**3.1.2. Notation.** — Pour  $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\mathbb{F}_l}(h)$ , on notera  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_l, \overline{1_h}}(\bar{\tau})$  pour  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_l, \overline{1_h}}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}, \text{free}}^{h-1})$  et  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_l}(\bar{\tau})$  pour la version induite.

*Remarque :* on retrouve ces systèmes locaux dans les gradués  $\text{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}})$  de la filtration de stratification

$$j^{=h,*} \text{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\mathbb{F}_l}(h)} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_l}(\bar{\tau}).$$

**3.1.3. Proposition.** — On a une décomposition

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{g=1}^d \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{\mathbb{F}_l}(g)} \Psi_{\varrho}$$

où les gradués  $\text{gr}_!^h(\Psi_{\varrho})$  de la filtration de stratification de  $\Psi_{\varrho}$  vérifient, cf. la notation A.3.8,

$$j^{=h,*} \text{gr}_!^h(\Psi_{\varrho}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } g \nmid h \\ \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_l}(\varrho[t]_D) & \text{pour } h = tg, \end{cases}$$

et où les constituants irréductibles de  $\Psi_{\varrho} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{Q}_l}$  sont exactement ceux de  $\Psi_{\mathcal{I}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{Q}_l}$  qui sont de type  $\varrho$  au sens de la définition 3.0.1.

*Démonstration.* — Raisonnons par récurrence sur la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}}$

$$0 = \text{Fil}_!^0(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \text{Fil}_!^1(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_!^d(\Psi_{\mathcal{I}}) = \Psi_{\mathcal{I}}$$

en supposant l'existence d'une décomposition

$$\text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) = \bigoplus_{g=1}^d \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{\mathbb{F}_l}(g)} \text{Fil}_{!,\varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}}).$$

Le cas de  $r = 0$  étant clair, supposons le résultat acquis pour  $r - 1$  et montrons le pour  $r$ . De la décomposition  $j^{=r,*} \text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{g|r=tg} \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{\mathbb{F}_l}(g)} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_l}(\varrho[t]_D)$ , on obtient

$$\text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{g|r} \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{\mathbb{F}_l}(g)} \text{gr}_{!,\varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$$

avec  $j_!^{-r} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_l}(\varrho[t]_D)[d-r] \rightarrow \text{gr}_{!,\varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$  et où tous les constituants simples de  $\text{gr}_{!,\varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{Q}_l}$  sont de type  $\varrho$ .

Considérons alors un diagramme comme (2.2.1) où  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) est un faisceau pervers d'Harris-Taylor de type  $\varrho_1$  (resp.  $\varrho_2$ ) où on suppose que  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  ne sont pas dans la même droite de Zelevinsky. L'action de  $W_v$  sur  $T[l]$  vu comme quotient de  $A_1'$  (resp. de  $A_2$ ) est alors isotypique relativement à la représentation galoisienne associée à  $\varrho_1$  (resp.  $\varrho_2$ ) par la correspondance de Langlands-Vigneras, d'où la contradiction. Ainsi  $\text{gr}_{!,\varrho_2}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$  est en somme directe avec  $\text{Fil}_{!,\varrho_1}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}})$  ce qui donne la propriété au rang  $r$  en faisant varier  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$ .  $\square$

*Remarque* : on peut donc ainsi traiter séparément chacun des  $\Psi_\varrho$ , ce qui nous amène à fixer pour la suite une telle  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale  $\varrho$ .

3.1.4 — *Notations* : dans la fin de cette section, nous allons introduire quelques notations utiles dans les paragraphes suivants. Avec les notations de A.3.4, rappelons que  $g_{-1}(\varrho) \mid g_0(\varrho) \mid \cdots \mid g_s(\varrho)$ . On note alors  $i_\varrho(h)$  le plus grand entier  $i \geq -1$  tel que  $g_i(\varrho)$  divise  $h = g_i(\varrho)t_i(\varrho, h)$ . De la formule (B.2.2), on a alors

$$j^{=h,*} \mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{i=-1}^{i_\varrho(h)} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_i(\varrho)} j^{=h,*} \mathcal{P}(t_i(\varrho, h), \pi_v) \left( \frac{1 - t_i(\varrho, h)}{2} \right). \quad (3.1.5)$$

Avec les notations de B.2.3, on note

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_!^{h,-}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^{h,+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

tel que  $\mathrm{gr}_!^{h,+}(\Psi_\varrho) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{!*}^{=h} j^{=h,*} \mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l)$  et on introduit

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{gr}_{!, \geq 0}^{h,+}(\Psi_\varrho) \\ & & \downarrow \\ j_i^{=h} j^{=h,*} \mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) & \longrightarrow & \mathrm{gr}_!^{h,+}(\Psi_\varrho) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_i^{=h} \mathrm{gr}_\varrho^{-1}(j^{=h,*} \mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho)) & \dashrightarrow & \mathrm{gr}_{!,-1}^{h,+}(\Psi_\varrho), \end{array}$$

de sorte que

$$\mathrm{gr}_{!,-1}^{h,+}(\Psi_\varrho) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} \mathrm{gr}_!^{h,+}(\Psi_{\pi_v}),$$

et donc

$$\mathrm{gr}_{!, \geq 0}^{h,+}(\Psi_\varrho) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{i \geq 0} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_i(\varrho)} \mathrm{gr}_!^{h,+}(\Psi_{\pi_v}).$$

**3.2. Preuve de la proposition 2.4.1.** — Notons  $\bar{j} : X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}} : \bar{i}$ , et considérons la  $t$ -structure  $p$  sur  $\overline{X}_{\mathcal{I}} := X_{\mathcal{I}} \times_{\mathrm{Spec} \mathcal{O}_v} \mathrm{Spec} \overline{\mathcal{O}}_v$  obtenue en recollant

$$\left( {}^p D^{\leq -1}(X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}}, \overline{\mathbb{Z}}_l), {}^p D^{\geq -1}(X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \right) \quad \text{et} \quad \left( {}^p D^{\leq 0}(X_{\mathcal{I}, \bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l), {}^p D^{\geq 0}(X_{\mathcal{I}, \bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \right).$$

Les foncteurs  $\bar{j}_!$  et  $\bar{j}_* = {}^p \bar{j}_{!*}$  sont alors  $t$ -exactes avec

$$0 \rightarrow \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow \bar{j}_! \overline{\mathbb{Z}}_l[d-1] \left( \frac{d-1}{2} \right) \longrightarrow \bar{j}_* \overline{\mathbb{Z}}_l[d-1] \left( \frac{d-1}{2} \right) \rightarrow 0$$

où  $\Psi_{\mathcal{I}} = {}^p \mathcal{H}^{-1} \bar{i}^* \bar{j}^* \overline{\mathbb{Z}}_l[d-1] \left( \frac{d-1}{2} \right)$ .

**3.2.1. Lemme.** — Pour  $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ ,  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  est un objet de  $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I}, \bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ .

*Démonstration.* — D'après [1] proposition 4.4.2,  $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  est un objet de  ${}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X_{\mathcal{I}, \overline{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ . D'après [16] variante 4.4 du théorème 4.2, on a  $D\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \simeq \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  de sorte que

$$\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X_{\mathcal{I}, \overline{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \cap {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X_{\mathcal{I}, \overline{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) = \mathcal{F}(X_{\mathcal{I}, \overline{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l).$$

□

Le morphisme  $\bar{j}_{\neq c} : \overline{X}_{\mathcal{I}} \setminus X_{\mathcal{I}, \overline{s}, c}^{\geq 1} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathcal{I}}$  étant affine, on peut reprendre la preuve du lemme 2.1.2 et conclure à la liberté de  ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(g)} {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho})$  avec

$$0 \rightarrow \bar{j}_{\neq c, !} \bar{j}_{\neq c}^* \Psi_{\varrho} \longrightarrow \Psi_{\varrho} \longrightarrow i_{c,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho}) \rightarrow 0. \quad (3.2.2)$$

De l'exactitude de  $\bar{j}_{\neq c, !} \bar{j}_{\neq c}^*$ , les filtrations de  $\Psi_{\varrho}$  introduites plus avant, fournissent des filtrations de  $\bar{j}_{\neq c, !} \bar{j}_{\neq c}^* \Psi_{\varrho}$ . Ainsi la filtration de stratification fournit les gradués  $\text{gr}_{!, \neq c}^h(\Psi_{\varrho})$  avec

$$0 \rightarrow \text{gr}_{!, \neq c}^{h,-}(\Psi_{\varrho}) \longrightarrow \text{gr}_{!, \neq c}^h(\Psi_{\varrho}) \longrightarrow \text{gr}_{!, \neq c}^{h,+}(\Psi_{\varrho}) \rightarrow 0, \quad (3.2.3)$$

où, cf la notation 2.1.7,  $\text{gr}_{!, \neq c}^{h,+}(\Psi_{\varrho}) \simeq {}^{p(c)}j_{\neq c, !}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h,*} \text{gr}_{!, \neq c}^h(\Psi_{\varrho})$ .

**3.2.4. Notation.** — Partant des  $\text{gr}_{!, \neq c}^{h,+}(\Psi_{\varrho})$ , on introduit comme précédemment les  $\text{gr}_{!, \neq c, -1}^{h,+}(\Psi_{\varrho})$  et  $\text{gr}_{!, \neq c, \geq 0}^{h,+}(\Psi_{\varrho})$ .

Comme rappelé à la proposition B.3.5, le faisceau pervers libre  $i_{c,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho})$  admet une filtration de stratification<sup>(7)</sup>

$$\text{Fil}_c^0(\Psi_{\varrho}) = 0 \subset \text{Fil}_c^1(\Psi_{\varrho}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_c^d(\Psi_{\varrho}) = i_{c,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho}),$$

dont les gradués  $\text{gr}_c^h(\Psi_{\varrho})$  vérifient, en supposant pour simplifier les notations que  $c = \overline{1}_1$ ,

$$\text{gr}_c^h(\Psi_{\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \text{ind}_{P_{1, h-1, d-h}(F_v)}^{P_{1, d-1}(F_v)} {}^p j_{\overline{1}_h, !}^{\neq h} j_{\overline{1}_h}^{\neq h,*} \text{gr}_{!, \neq c}^h(\Psi_{\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l.$$

**3.2.5. Notation.** — Comme précédemment, on introduit les notations  $\text{gr}_{c, -1}^h(\Psi_{\varrho})$  et  $\text{gr}_{c, \geq 0}^h(\Psi_{\varrho})$ .

**3.2.6. Proposition.** — La filtration de stratification de  $\text{gr}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho)}(\Psi_{\varrho})$  admet pour gradués les  ${}^p j_{!, *}^{\neq t g-1(\varrho)} Q_t$  où  $Q_t \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$ .

*Démonstration.* — Notons que  $\text{gr}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho)} \hookrightarrow \Psi_{\varrho}$ , de sorte que

$${}^p i_{c,*}^1 \mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\text{gr}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho)}) \hookrightarrow {}^p i_{c,*}^1 \mathcal{H}^0 i_c^{1,*} \Psi_{\varrho}$$

est libre de sorte que dans la suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_{\neq c, !}^{\neq g-1(\varrho)} j_{\neq c}^{\neq g-1(\varrho),*}(\text{gr}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho)}) \longrightarrow \text{gr}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho)} \longrightarrow {}^p \mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\text{gr}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho)}) \rightarrow 0,$$

7. La formulation sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  est plus agréable car on peut y séparer les contributions selon les cuspidales de  $GL_g(F_v)$  pour  $g$  variant de 1 à  $d$ .

tous les termes sont libres avec

$${}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{1,*} \left( \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho)} \right) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} {}^p j_{c,!}^{g-1(\varrho)} HT(\pi_v, \pi_v).$$

On considère alors le poussé en avant

$$\begin{array}{ccccc} j_{\neq c,!}^{g-1(\varrho)} j_{\neq c}^{g-1(\varrho),*} \left( \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho)} \right) & \hookrightarrow & \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho)} & \twoheadrightarrow & {}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{1,*} \left( \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho)} \right) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ {}^p j_{\neq c,!}^{g-1(\varrho)} j_{\neq c}^{g-1(\varrho),*} \left( \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho)} \right) & \hookrightarrow & X & \twoheadrightarrow & {}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{1,*} \left( \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho)} \right). \end{array}$$

On se retrouve alors dans la situation de la proposition 2.3.7 ce qui nous donne le cas  $t = 1$ . Pour  $t > 1$ , on reprend la preuve du corollaire 2.1.9 où les  $Q_i$  sont à présent tels que

$$Q_i \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} {}^p j_{c,!}^{tg} HT_c(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \left( \frac{t-1}{2} \right),$$

et en remplaçant l'appel à 2.3.1 à celui de 2.3.7.  $\square$

*Remarque* : Dans la proposition précédente, en utilisant 2.3.1, pour  $\pi_{v,1} \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)$ , on peut aussi considérer  $\mathrm{gr}_{!,\pi_v}^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  l'image du morphisme de  $j_!^{g-1(\varrho)} HT(\pi_{v,1}, \pi_{v,1}) \rightarrow \Psi_\varrho$  où  $HT(\pi_{v,1}, \pi_{v,1})$  est le réseau fourni par  $j^{g-1(\varrho),*} \Psi_\varrho$ . A ce stade on ne peut pas conclure que les  ${}^p j_{!*}^{tg-1(\varrho)} Q_t$  peuvent s'écrire comme une extension successive des  ${}^p j_{!*}^{tg-1(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \left( \frac{1-t}{2} \right)$  pour  $\pi_v$  décrivant  $\mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)$ . On renvoie le lecteur à la fin de la section suivante traitant du cas  $s = 2$  et  $m(\varrho) > 2$ , ou à la figure 4.

En utilisant le fait que  $\Psi_{\mathcal{I}}$  est autodual, on en déduit le corollaire suivant.

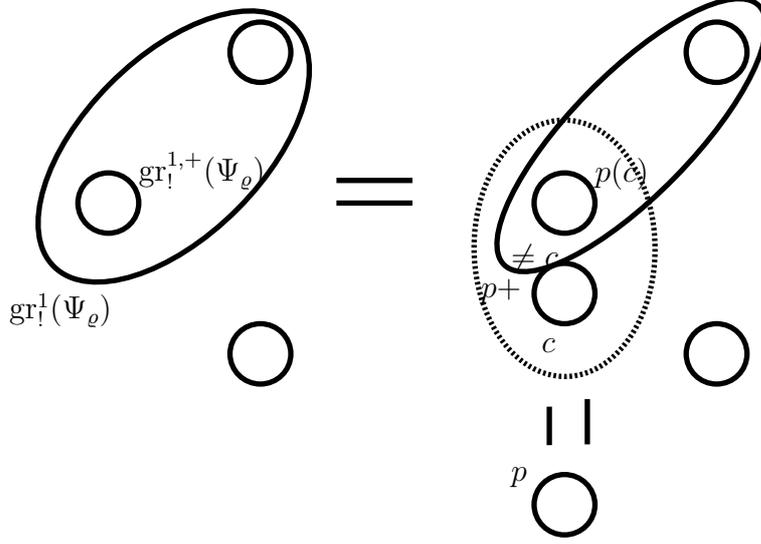
**3.2.7. Corollaire.** — *Pour tout  $\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)$ , on a une surjection<sup>(8)</sup>  $\Psi_\varrho \twoheadrightarrow \mathrm{coFil}_{*,1}(\Psi_\varrho)$ , où les gradués de la filtration de stratification de  $\mathrm{coFil}_{*,1}(\Psi_\varrho)$  sont les  ${}^{p+} j_{!*}^{tg-1(\varrho)} P_t$  où pour  $t = 1, \dots, \lfloor \frac{d}{g-1(\varrho)} \rfloor$ ,*

$$P_t \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \left( \frac{1-t}{2} \right).$$

Avant de décrire la combinatoire dans le cas général, nous allons étudier des exemples simples en basse dimension.

**3.2.1. Cas  $s = 2$  et  $m(\varrho) > 2$ .** — On suppose ici que  $d = 2g_{-1}(\varrho)$  avec  $m(\varrho) > 2$  de sorte qu'on ne doit considérer que des cuspidales de  $\varrho$ -type  $-1$ . On s'appuie sur la figure 1 où à chacun des cercles correspond à un faisceau pervers d'Harris-Taylor. Ainsi dans la partie gauche du dessin

8. cf. [9] proposition 2.2.5


 FIGURE 1. Illustration graphique du cas  $s = 2$  et  $m(\rho) > 2$ .

- le cercle le plus en haut (resp. le plus en bas) correspond à un faisceau pervers entier noté<sup>(9)</sup>  $\text{gr}_!^{g-1(\rho),-}(\Psi_\rho)$  (resp.  $\text{gr}_!^{2g-1(\rho)}(\Psi_\rho)$ ) tel que après tensorisation avec  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  on obtient, avec les notations de B.1.4,  $\bigoplus_{\pi_v \text{ Cusp}_{-1}(\rho)} P(2, \pi_v)(1/2)$  (resp.  $\bigoplus_{\pi_v \text{ Cusp}_{-1}(\rho)} P(2, \pi_v)(-1/2)$ );
- le grand ovale correspond à  $\text{gr}_!^{g-1(\rho)}(\Psi_\rho)$  qui admet comme quotient le cercle noté  $\text{gr}_!^{g-1(\rho),+}(\Psi_\rho)$  qui, après tensorisation avec  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , devient  $\bigoplus_{\pi_v \text{ Cusp}_{-1}(\rho)} P(1, \pi_v)$ .

Dans la partie droite du dessin

- l'ovale en biais représente  $j_{\neq c,!}^{=g-1(\rho)} j_{\neq c}^{=g-1(\rho),*} \text{gr}_!^{g-1(\rho)}(\Psi_\rho)$  avec pour quotient

$${}^{p(c)}\text{gr}_{!,\neq c}^{g-1(\rho),+}(\Psi_\rho) := {}^{p(c)}j_{\neq c,!}^{=g-1(\rho)} j_{\neq c,*}^{=g-1(\rho)} \text{gr}_!^{g-1(\rho),+}(\Psi_\rho).$$

- le conoyau de  $j_{\neq c,!}^{=g-1(\rho)} j_{\neq c}^{=g-1(\rho),*} \text{gr}_!^{g-1(\rho)}(\Psi_\rho) \rightarrow \Psi_\rho$  admet une filtration de longueur 2 avec pour sous-espace un faisceau pervers tel qu'après tensorisation avec  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , on obtient  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\rho)} P_c(\pi_v, 1)$ , représenté par le cercle en bas de l'ovale en pointillé,
- et comme quotient le faisceau pervers représenté par le cercle en bas à droite et qui correspond comme précédemment à  $\text{gr}_!^{2g-1(\rho)}(\Psi_\rho)$ .

De manière générale dans nos illustrations plus un cercle est dessiné haut plus il correspond à un gradué d'indice petit dans la filtration que l'on représente, i.e. les sous-espaces sont en haut quand les quotients sont en bas.

9. Sur le dessin pour ne pas alourdir les notations, on a pris  $g_{-1}(\rho) = 1$

Dans ce cas simple il n'y a alors plus à modifier la filtration associée au dessin de droite. L'ovale en pointillé correspond à un sous-quotient  $GL_d(F_v)$ -équivariant, puisque les autres sous-quotients le sont, qui s'écrit comme une extension

$$0 \rightarrow {}^{p(c)}j_{\neq c,!}^{:=g-1(\varrho)} j_{\neq c}^{:=g-1(\varrho),*} \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \mathrm{gr}_{!,c}^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

de sorte que d'après la proposition 2.3.7, on a  $\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \simeq {}^{p}j_{\neq c,!}^{:=g-1(\varrho)} j_{\neq c}^{:=g-1(\varrho),*} \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$  et

$${}^{p}j_{!*}^{:=g-1(\varrho)} j_{:=g-1(\varrho),*} \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \simeq {}^{p+}j_{!*}^{:=g-1(\varrho)} j_{:=g-1(\varrho),*} \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho).$$

*Remarque :* Dans les autres situations plus compliquées, nous devons modifier nos filtrations de façon à nous ramener à la situation matérialisée par l'ovale en pointillés puis d'invoquer la proposition 2.3.7.

Jusqu'à présent nous n'avons pas eu besoin de l'hypothèse  $l > 2$  qui va intervenir exclusivement dans la prochaine étape. Considérons à présent

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

et fixons alors une numérotation  $\{\pi_{v,1}, \dots, \pi_{v,r}\} = \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)$  ce qui fournit une filtration  $\mathrm{Fil}_\varrho(\mathrm{gr}_!^{1,\pm}(\Psi_\varrho))$  de gradués successifs  $\mathrm{gr}_\varrho^k(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),\pm}(\Psi_\varrho))$  tels que

$$\mathrm{gr}_\varrho^k(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq P(\pi_{v,k}, 1), \text{ et } \mathrm{gr}_\varrho^k(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq P(\pi_{v,k}, 2)(1/2).$$

**Fait :** comme  $\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$  est une  $p+$  extension intermédiaire alors  $\mathrm{gr}_\varrho^1(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho))$  est aussi une  $p+$  extension intermédiaire de  $HT(\pi_{v,1}, \pi_{v,1})$ .

Par ailleurs comme  $\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho)}(\Psi_{\pi_{v,1}}) \hookrightarrow \Psi_\varrho \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ , on peut, via le diagramme 2.2.1, échanger  $\mathrm{gr}_\varrho^1(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho))$  avec chacun des  $\mathrm{gr}_\varrho^k(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho))$  pour  $k = 2, \dots, r$  pour former au final, cf. la figure 4

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_\varrho^1(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)) \longrightarrow \mathrm{gr}_\varrho^1(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}_\varrho^1(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)) \rightarrow 0,$$

où

$$\widetilde{\mathrm{gr}}_\varrho^1(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)) \hookrightarrow \mathrm{gr}_\varrho^1(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)) \twoheadrightarrow T,$$

tel que  $T$  admet une filtration dont les gradués  $\mathrm{gr}^k T$  pour  $k = 2, \dots, r$  sont tels que

$$\mathrm{gr}_\varrho^k(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)) \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}_\varrho^k(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)) \twoheadrightarrow T_k.$$

Ainsi tous les  $T_k[l]$  qui sont concentrés sur la strate supersingulière, sont tels que, selon la notation B.1.3, en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation de  $GL_d(F_v)$ , tous les constituants irréductibles de  $\mathrm{ind} z^* T_k[l]$  sont à prendre parmi ceux de la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_2(\pi_v)$ .

**Fait :** d'après la remarque suivant la proposition 3.2.6,  $\widetilde{\mathrm{gr}}_\varrho^1(\mathrm{gr}_!^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho))$  doit être une  $p$ -extension intermédiaire.

Ainsi  $T[l]$  est une induite parabolique de  $P_{g-1(\varrho),g-1(\varrho)}(F_v)$  à  $GL_{2g-1(\varrho)}(F_v)$ , de sorte que la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{Speh}_2(\pi_{v,1})$  doit aussi être un sous-quotient irréductible de l'un de  $T_k[l]$ , ce qui ne se peut pas car d'après [8],  $\mathrm{Speh}_2(\varrho)$  n'est pas un sous-quotient de la

réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_2(\pi_{v,k})$  lorsque  $l > 2$ . Pour être plus précis dans [8], on montre les faits suivants :

- Lorsque le cardinal  $\epsilon(\varrho)$  de la droite de Zelevinsky est  $\geq 2$ , alors la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_2(\pi_{v,k})$  reste irréductible et comme elle possède une dérivée d'ordre  $2g_{-1}(\varrho)$  elle ne peut pas être isomorphe à la réduction modulo  $l$ , irréductible aussi, de  $\mathrm{Speh}_2(\pi_{v,k})$ .
- Lorsque  $\epsilon(\varrho) = 1$  alors  $m(\varrho) = l > 2$  par hypothèse, et la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_2(\pi_{v,k})$  est encore irréductible : les arguments précédents s'appliquent à nouveau.
- Lorsque  $l = 2$  et  $\epsilon(\varrho) = 1$ , la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_2(\pi_{v,k})$  est de longueur 2 et contient la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{Speh}_2(\pi_{v,k})$  ainsi qu'une cuspidale.

Ainsi  $T$  est nul et d'après les deux faits précédents, les  $p$  et  $p+$  extensions intermédiaires associées à  $\pi_{v,1}$  sont égales.

Dans le cas général, on devra aussi passer de l'isomorphisme entre les  $p$  et  $p+$  extensions intermédiaires associées à  $\mathrm{gr}_!^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$  au même énoncé pour chacun de  $\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)$ , ce qui correspond à la proposition 2.4.1. Par récurrence, on se ramènera au cas  $t = 2$  traité ici et qui nécessite  $l > 2$ . L'intérêt de passer par la proposition 2.4.1 est de pouvoir contrôler la différence entre les  $p$  et  $p+$  extensions intermédiaires dans le cas général, qui en utilisant le fait important suivant le corollaire 2.4.2, sera l'ingrédient crucial pour conclure, cf. le §3.3.

*3.2.2. Cas  $s = 2$  et  $m(\varrho) = 2$ .* — On reste avec  $s = 2$  mais on suppose à présent que  $m(\varrho) = 2$  de sorte qu'interviennent à présent les  $\pi_v$  de  $\varrho$ -type 0 pour les faisceaux pervers d'Harris-Taylor concentrés aux points supersinguliers. Graphiquement on représente avec un cercle vide (resp. hachuré) les faisceaux pervers d'Harris-Taylor pour les  $\pi_v$  de  $\varrho$ -type  $-1$  (resp. de  $\varrho$ -type  $\geq 0$ ), par exemple  $\mathrm{gr}_{!,-1}^{g_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$  (resp.  $\mathrm{gr}_{!,\geq 0}^{2g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ ) et avec un quadrillage pour le mélange des deux.

Comme dans les notations précédentes, on utilise

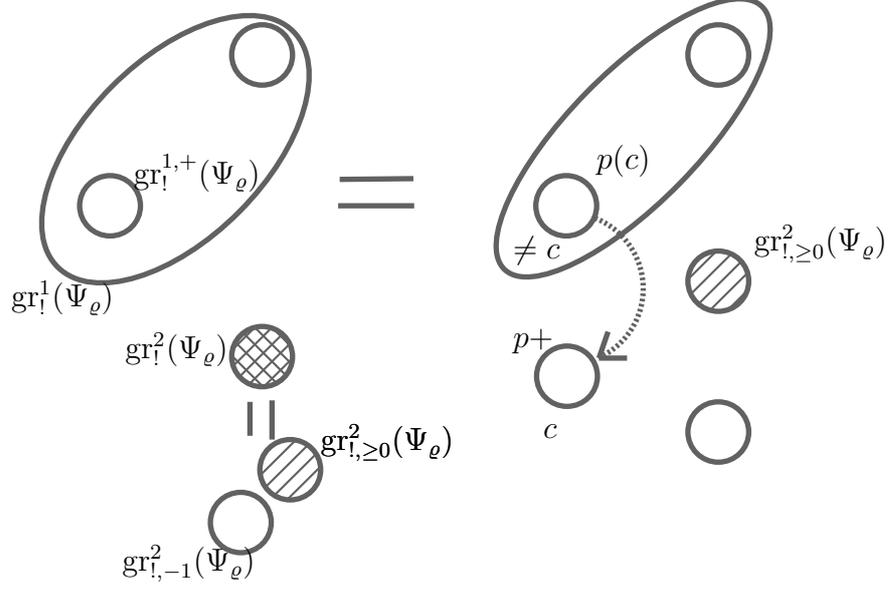
$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_{!,\geq 0}^{2g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^{2g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \mathrm{gr}_{!,-1}^{2g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

ce qui illustré en bas à gauche de la figure 2. Comme dans le cas précédent, la partie droite de la figure illustre la filtration obtenue en utilisant le morphisme d'adjonction  $j_{\neq c,!}^{g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{g_{-1}(\varrho),*} \rightarrow \mathrm{Id}$ . L'ovale représente  $j_{\neq c,!}^{g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{g_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_!^{g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  et le quotient admet une filtration avec trois cran :  $\mathrm{gr}_{!,\geq 0}^{2g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ , puis, d'après le corollaire 3.2.7, une  $p+$ -extension intermédiaire associée à  $\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} \mathrm{HT}_c(\pi_v, \pi_v)$  et enfin un faisceau pervers concentré aux points supersinguliers associé à  $\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} \mathrm{HT}_c(\pi_v, \mathrm{St}_2(\pi_v))(-1/2)$ . On découpe ensuite dans la filtration de droite du dessin, l'extension

$$0 \rightarrow {}^{p(c)} j_{\neq c,!}^{g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{g_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_{!,-1}^{g_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \longrightarrow X \longrightarrow \mathrm{gr}_{!,\geq 0}^{2g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

qui, suivant le diagramme 2.2.1, s'écrit aussi

$$0 \rightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}^{2g_{-1}(\varrho)}_{!,\geq 0}(\Psi_\varrho) \longrightarrow X \longrightarrow \widetilde{p} j_{\neq c,!}^{g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{g_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_{!,-1}^{g_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

FIGURE 2. Illustration graphique du cas  $s = 2$  et  $m(\rho) = 2$ .

avec

$$p(c)_{\substack{j=g-1(\rho) \\ j \neq c, !*}} \underset{j=g-1(\rho), *}{\text{gr}_{1,-1}^{g-1(\rho), +}(\Psi_\rho)} \hookrightarrow \tilde{p}_{\substack{j=g-1(\rho) \\ j \neq c, !*}} \underset{j=g-1(\rho), *}{\text{gr}_{1,-1}^{g-1(\rho), +}(\Psi_\rho)} \twoheadrightarrow T_1,$$

où  $T_1$ , qui est équivariant pour le mirabolique associé à  $c$ , s'obtient aussi comme un sous-quotient  $T_2 = T_1$  de

$$\widetilde{\text{gr}_{1, \geq 0}^{2g-1(\rho)}(\Psi_\rho)} \hookrightarrow \text{gr}_{1, \geq 0}^{2g-1(\rho)}(\Psi_\rho) \twoheadrightarrow T_2.$$

Cet échange est représenté par la flèche en pointillés dans la figure précédente. On raisonne par l'absurde en supposant que  $T_1 = T_2$  est non nul. On remarque alors que tous les sous-quotients irréductibles de  $T_2[l]$  pour l'action de  $P_c(F_v)$  ont des dérivées divisibles par  $g_0(\rho)$ .

En ce qui concerne  $T_1[l]$ , d'après le corollaire 3.2.7 et la proposition 2.3.7, on doit avoir

$$\tilde{p}_{\substack{j=g-1(\rho) \\ j \neq c, !*}} \underset{j=g-1(\rho), *}{\text{gr}_{1,-1}^{g-1(\rho), +}(\Psi_\rho)} \simeq p+_{\substack{j=g-1(\rho) \\ j \neq c, !*}} \underset{j=g-1(\rho), *}{\text{gr}_{1,-1}^{g-1(\rho), +}(\Psi_\rho)}.$$

Ainsi  $\text{ind } z^* T_1[l]$  s'écrit extensions successives de « grosses induites mirabolique », cf. la proposition 2.3.5,  $\varrho|_{P_c(F_v)} \times \sigma$  où  $\sigma$  est une représentation du groupe mirabolique pour  $GL_{g-1(\rho)}(F_v)$ . On note alors, cf. 2.3.5, que  $\Psi^- \circ (\Phi^-)^{g-1(\rho)-1}(\varrho|_{M_c(F_v)} \times \sigma) \simeq \sigma$ . Ainsi  $T_1[l] = T_2[l]$  admet d'un côté une dérivée d'ordre  $g-1(\rho)$  et de l'autre toutes ses dérivées sont d'ordre divisible par  $g_0(\rho)$ , d'où la contradiction, i.e. la  $p(c)$  extension intermédiaire de  $j=g-1(\rho), * \text{gr}_{1,-1}^{g-1(\rho), +}(\Psi_\rho)$  coïncide avec la  $p+$ -extension intermédiaire. Le passage à chacun des  $\pi_v$  se fait alors comme précédemment.

3.2.3. *Cas  $s = 3$ .* — Le cas  $s = 3$  est particulier relativement aux cas  $s \geq 4$  car la proposition 3.2.8 qui utilise les filtrations de stratification, demande, pour être efficace, que  $s$  soit supérieur ou égal à 4. Comme dans le cas  $s = 2$ , on fait remonter  $\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{2g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$  pour se ramener à la filtration représentée dans la figure 3.

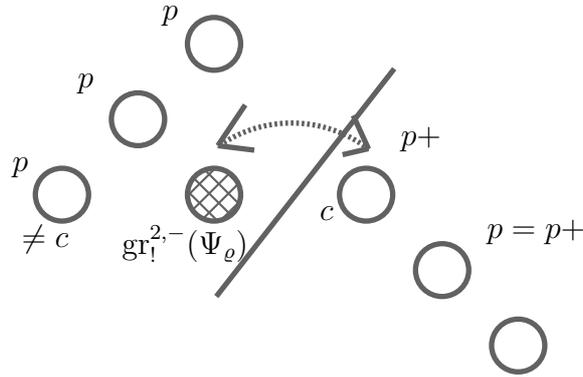


FIGURE 3. Illustration graphique du cas  $s = 3$  et  $m(\varrho) = 3$ .

Il y a alors trois situations<sup>(10)</sup> selon que  $m(\varrho) = 2, 3$  ou  $m(\varrho) \geq 4$  qui se traitent de manière similaire puisque les  $\pi_v$  de  $\varrho$ -type  $\geq 0$  ne vont pas interférer dans le raisonnement. On découpe alors le sous-quotient  $P$  rassemblant les deux extrémités de la flèche en pointillé de la figure 3

$$0 \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow \mathrm{gr}_{!,c,-1}^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0.$$

où

— dans le cas où  $m(\varrho) = 2$ ,

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_{!}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) \rightarrow X \rightarrow \mathrm{gr}_{!,\geq 0}^{2g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

avec  $\mathrm{gr}_{!}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) = \mathrm{gr}_{!,-1}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$ ,

— alors que pour  $m(\varrho) = 3$ , on a

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_{!,\geq 0}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) \rightarrow X \rightarrow \mathrm{gr}_{!,-1}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

— et pour  $m(\varrho) \geq 4$ ,  $X = \mathrm{gr}_{!,-1}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$ .

Comme dans la proposition 3.2.8 pour  $s \geq 4$ , nous allons montrer que  $P$  est scindée mais cette fois-ci en utilisant la théorie des dérivées et plus précisément le point (d) de la proposition 2.3.5. Plus précisément, en raisonnant comme précédemment on note que

<sup>10</sup>. Dans la figure 3 on a pris  $m(\varrho) = 3$ .

- d'un côté tout quotient de la  $l$ -torsion de  ${}^p\mathcal{H}^0 \text{ ind } z^{*p+} \text{ gr}_{1,c,-1}^{g-1(\varrho),+}$  ne fait intervenir que des « petites induites » miraboliques et donc des représentations du groupe mirabolique dont la dérivée est d'ordre  $g_{-1}(\varrho)$ .
- D'autre part nous allons voir que tous les quotients de torsion associés aux extensions intermédiaires de  $X$ , ont nécessairement une dérivée d'ordre strictement plus grande que  $g_{-1}(\varrho)$ .

C'est évidemment clair pour toutes les extensions intermédiaires associées à des  $\pi_v \in \text{Cusp}_i(\varrho)$  pour  $i \geq 0$  : on note bien ainsi que le rôle de  $m(\varrho)$  ne joue pas. Il ne reste alors plus qu'à le vérifier pour  $\text{gr}_{1,-1}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$ . Notons que lors de l'échange, comme  $\text{gr}_{1,-1}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$  est supporté sur le lieu supersingulier, on doit contrôler la modification du réseau des  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_3(\pi_v))$ . Notons  $\Gamma_-$  (resp.  $\Gamma_+$ ) le réseau correspondant à  $\text{gr}_{1,-1}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$  (resp. après l'échange) :  $\Gamma_- \hookrightarrow \Gamma_+ \twoheadrightarrow T$ , ce qui après tensorisation avec  $\overline{\mathbb{F}}_l$  fournit

$$0 \rightarrow T[l] \rightarrow \overline{\Gamma}_- \rightarrow \overline{\Gamma}_+ \rightarrow T[l] \rightarrow 0,$$

et il s'agit de montrer que  $T[l]$  admet une dérivée d'ordre  $> g_{-1}(\varrho)$ . Comme précédemment on peut numérotter les éléments de  $\text{Cusp}_{-1}(\varrho)$  ce qui fournit une filtration de  $T[l]$  dont les gradués  $\text{gr}^k(T[l])$  s'identifient à une sous-représentation du réseau  $\Gamma^-(\pi_{v,k}) \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$  de la réduction modulo  $l$  de  $HT(\pi_{v,k}, \text{St}_3(\pi_{v,k}))$ . D'après la proposition 2.1.8, la fibre en un point supersingulier de  $\Gamma^-(\pi_{v,k})$  est un réseau  $\text{ind } z^* \Gamma^-(\pi_{v,k})$  de  $\text{St}_3(\pi_v)$  qui s'obtient comme le quotient de l'induite parabolique  $\text{St}_2(\pi_v \{\frac{-1}{2}\}) \times (\pi_v \{1\})$ , alors que la fibre de  $\mathcal{H}^{-1} \text{ ind } z^* \text{gr}_{1,\pi_v}^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  s'identifie avec la « petite induite » mirabolique.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{H}^{-1} \text{ ind } z^* \text{gr}_{1,\pi_v}^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) & & \\
 & & \downarrow & \searrow \sim & \\
 \text{St}_2(\pi_v \{\frac{-1}{2}\}) \times (\pi_v \{1\})_M & \hookrightarrow & (\text{St}_2(\pi_v \{\frac{-1}{2}\}) \times (\pi_v \{1\}))_M & \twoheadrightarrow & \text{St}_2(\pi_v \{\frac{-1}{2}\})_M \times (\pi_v \{1\}) \\
 & \searrow \sim & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{H}^0 \text{ ind } z^* \text{gr}_{1,\pi_v}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) & & 
 \end{array}$$

où on a noté simplement  $M$  pour le mirabolique associé et on a omis les termes galoisiens. Ainsi le réseau de  $\text{St}_3(\pi_v)$  de  $\mathcal{H}^0 \text{ ind } z^* \text{gr}_{1,\pi_v}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$  vérifie la propriété suivante d'après la proposition 2.3.5 (d) : toute sous-représentation irréductible de sa réduction modulo  $l$  a une dérivée d'ordre  $2g_{-1}(\varrho)$  ou  $3g_{-1}(\varrho)$ , ce qui est donc nécessairement le cas pour  $T[l]$ .

Après l'échange on découpe alors une extension

$$0 \rightarrow {}^p(c) \text{gr}_{1,+,\neq c}^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow P \rightarrow {}^p \text{gr}_{1,+c}^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

ce qui comme précédemment nous conduit à  ${}^p\mathrm{gr}_{1,+}^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \simeq {}^{p+}\mathrm{gr}_{1,+}^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$ . On obtient finalement le résultat pour chacun des  $\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)$  en procédant comme à la fin de la section précédente.

Précisément, pour montrer que les  $p$  et  $p+$  extensions intermédiaires de  $HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$  coïncident, on raisonne, comme annoncé à la fin de la section précédente, par récurrence sur  $t$  de 3 à 1.

- Pour  $t = 3$  il n'y a rien à montrer puisque les faisceaux pervers sont ponctuels.
- Le cas  $t = 2$  se traite comme le cas  $s = 2$  traité dans la section précédente. Précisément, le conoyau  $T$  de

$${}^p j_{1*}^{:=2g-1(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_2(\pi_v)) \hookrightarrow {}^{p+} j_{1*}^{:=2g-1(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_2(\pi_v)) \twoheadrightarrow T,$$

est tel que  $\mathrm{ind} z^* T[l]$  s'écrit comme une induite parabolique  $r_l(\mathrm{St}_2(\pi_v)(\delta)) \times \bar{\pi}$  pour un certain demi-entier  $\delta$  et une représentation  $\bar{\pi}$  de  $GL_{g-1(\varrho)}(F_v)$  qu'il s'agit de préciser. Or dans les échanges on voit que les composantes irréductibles de  $\mathrm{ind} z^* T[l]$  sont à prendre parmi les sous-quotients irréductibles de la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_3(\pi_v)$ . On en déduit alors que  $\mathrm{ind} z^* T[l]$  doit contenir tous les sous-quotients irréductibles de la réduction modulo  $l$  de  $LT_{\pi_v}(1, 1)$ , cf. la notation A.1.4, qui est encore noté  $[\overleftarrow{\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma}]_{\pi_v}$  dans [8]. La contradiction découle alors la proposition 4.3.2 de [8] ou plutôt sa version duale explicitée dans la remarque suivant loc. cit., qui affirme que pour  $l > 2$ , le sous-quotient  $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma}]_{\pi_v})$  n'est pas un sous-quotient de la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_3(\pi_v)$ .

- Regardons alors le cas  $t = 1$  comme illustré sur la figure 4. Pour ce faire on regarde  $\mathrm{gr}_{1,\neq c}^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ . Il s'agit ainsi de passer de la filtration à gauche du signe égal à la filtration à droite. Comme à ce stade de la preuve on a déjà montré que les  $p$  et  $p+$  extensions intermédiaires pour les  $HT(\pi_v, \mathrm{St}_2(\pi_v))$  coïncident, et que pour  $HT(\pi_v, \pi_v)$  la différence entre les extensions intermédiaires est concentrée aux points supersinguliers, on est ramené à étudier l'échange avec les faisceaux pervers ponctuels pour lesquels il s'agit juste de comprendre si le réseau est modifié ou pas. Or comme la fibre en  $z$  des faisceaux de cohomologie en degré  $\leq 0$  de  $\mathrm{gr}_{1,\neq c}^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  et des  $\mathrm{gr}_{1,\neq c, \pi_v, k}^{g(1)(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ , sont nuls, ce réseau correspond au réseau de  $\mathrm{St}_3(\pi_v)$  fourni par  ${}^p \mathcal{H}^{-1} \mathrm{ind} z^* P(2, \pi_v)$ . Comme les  $P(2, \pi_v)$  ne sont pas modifiés des deux côtés de la figure, il en est de même pour les  $P(3, \pi_v)$ .

*3.2.4. Cas  $s = 4$  et  $m(\varrho) = 2$ .* — On considère ici  $s = 4$  avec  $m(\varrho) = 2$  ce qui nous permettra d'illustrer toutes les techniques développées dans le cas général. On reprend les conventions graphiques des figures précédentes. Ainsi ce qui se trouve à gauche de la grande barre oblique correspond à  $j_{\neq c, !}^{:=g-1(\varrho)} j_{\neq c}^{:=g-1(\varrho),*} \Psi_\varrho$  et à droite le quotient associé. Il faut voir le terme de gauche à travers les gradués  $\mathrm{gr}_{1,\neq c}^{tg-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  pour  $t = 1, 2, 3$ , cf. (3.2.3). Rappelons, cf. la proposition 3.2.6, que  $\mathrm{gr}_{1,\neq c}^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ , matérialisé par la première diagonale, a pour sous-quotients les  $p$ -extensions intermédiaires. La deuxième diagonale associée à

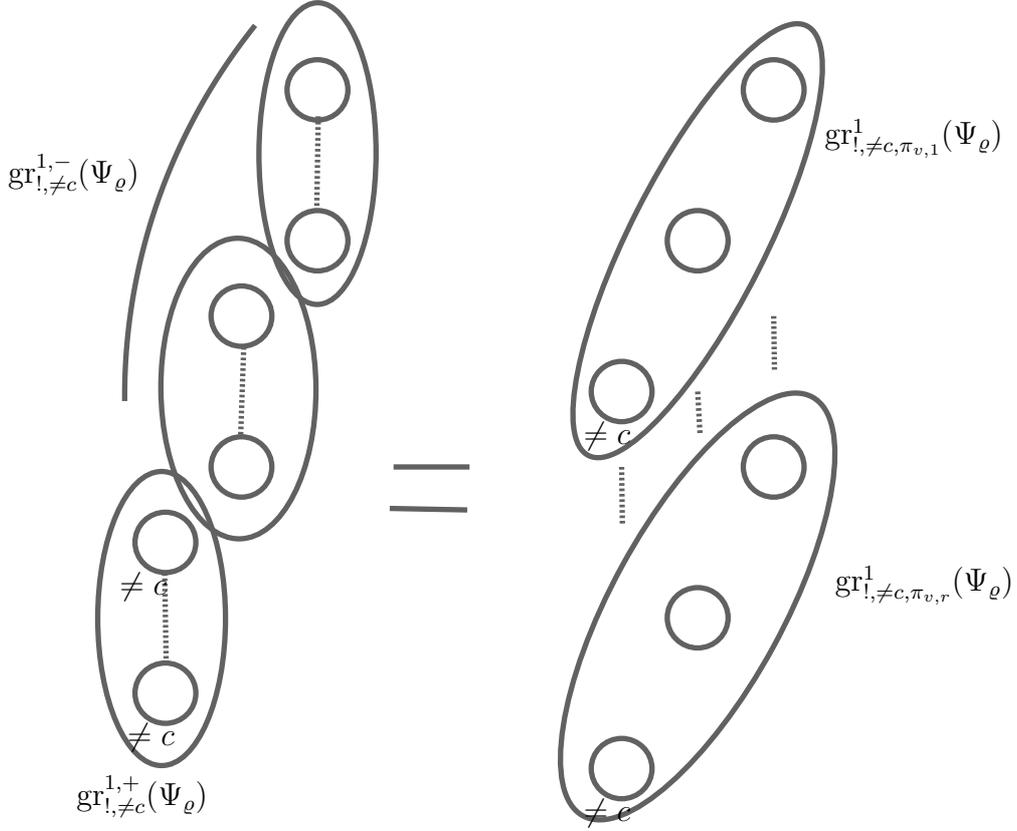


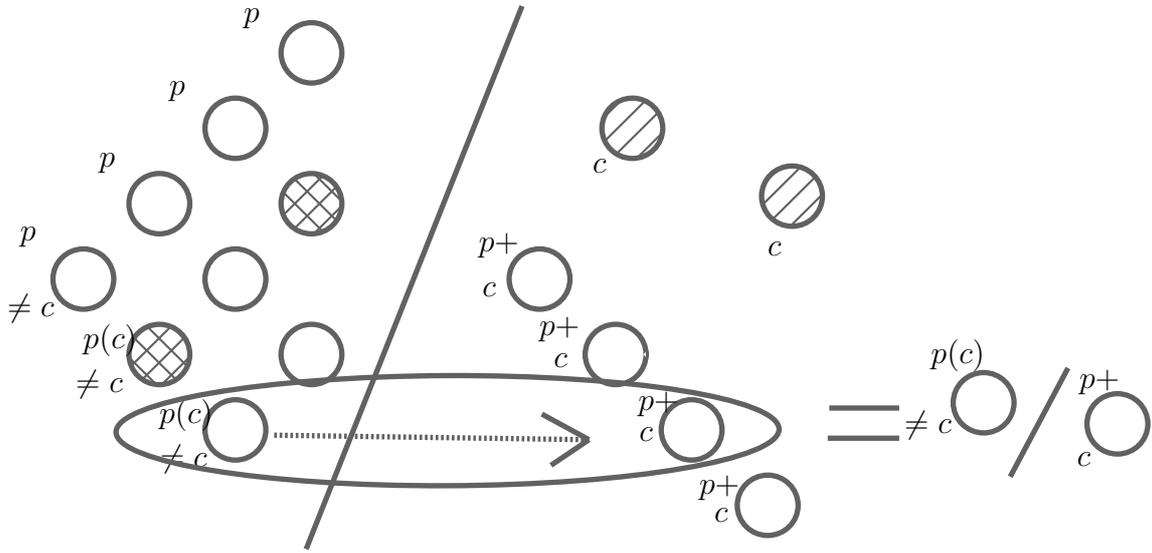
FIGURE 4. Passage des  $gr_{l, \neq c}^{1, -}(\Psi_\varrho)$  aux  $gr_{l, \neq c, \pi_v}^1(\Psi_\varrho)$ .

$gr_{l, \neq c}^{2g-1}(\Psi_\varrho)$  fait intervenir les  $\pi_v$  de  $\varrho$ -type 0 que l'on matérialise comme précédemment avec des cercles quadrillés ou hachurés selon qu'on y ajoute ou pas ceux de  $\varrho$ -type  $-1$ .

En ce qui concerne le quotient à droite de la barre oblique, l'anti-diagonale avec les  $p+$  correspond au corollaire 3.2.7 et reste alors, en sous-espace de ce quotient, les gradués associés aux  $\pi_v$  de  $\varrho$ -type 0.

*Première étape* : la flèche à l'intérieur de l'ovale matérialise la première étape qui consiste à rassembler la  $p(c)$ -extension intermédiaire, que l'on note  ${}^{p(c)}P_{\neq c}(3)$ , associée à  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT_{\neq c}(\pi_v, \text{St}_3(\pi_v))(-1)$  avec la  $p+$ -extension intermédiaire de  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT_c(\pi_v, \text{St}_3(\pi_v))(-1)$  pour former, d'après le corollaire 3.2.7, la  $p+$ -extension intermédiaire associée à  ${}^{(11)}\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_3(\pi_v))(-1)$ . On se retrouve alors dans une situation  $GL_d(F_v)$ -équivariant ce qui permet d'utiliser la proposition 2.3.7 et d'en

11. La notation est trompeuse : on n'affirme pas à ce stade que le  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -réseau est une somme directe.


 FIGURE 5. Illustration graphique du cas  $s = 4$  et  $m(\varrho) = 2$ .

déduire l'égalité entre la  $p(c)$  et la  $p+$  extension intermédiaire. On passera ensuite aux  $\pi_v$  individuels comme précédemment.

Pour ce faire, on reprend la stratégie expliquée dans le cas précédent pour chacun des quatre premiers sous-quotients de la partie droite de la figure, i.e. on construit une extension  $X$  entre l'un de ces quatre sous-quotients et  ${}^{p(c)}P_{\neq c}(3)$ . Lors de chacun de ces échanges on obtient un faisceau pervers  $P_{\neq c}(3)_i$  pour  $i = 1, \dots, 4$  avec  $P_{\neq c}(3)_4$  isomorphe à la  $p+$  extension intermédiaire  ${}^{p+}P_{\neq c}(3)$ . On note  $P_{\neq c}(3)_0 := {}^{p(c)}P_{\neq c}(3)$  ainsi que pour  $i = 1, \dots, 4$

$$P_{\neq c}(3)_{i-1} \hookrightarrow P_{\neq c}(3)_i \twoheadrightarrow T_i,$$

où chacun des  $T_i$  s'écrit aussi comme un quotient du  $i$ -ème quotient du côté à droite de la barre oblique de la figure précédente.

Pour les deux premiers, i.e.  $T_1$  et  $T_2$ , comme dans le cas précédent, on note que  $\text{ind } z^*T_i[l]$  en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation de  $P_c(F_v)$ , admet des dérivées d'ordre divisible par  $g_0(\varrho)$ . Pour  $T_3$  (resp.  $T_4$ ), on obtient une « petite induite mirabolique » dont les dérivées sont d'ordre  $g_{-1}(\varrho)$  (resp.  $2g_{-1}(\varrho)$ ).

En ce qui concerne  ${}^{p(c)}P_{\neq c}(3) \hookrightarrow {}^{p+}P_{\neq c}(3) \twoheadrightarrow T$ , où, par l'absurde, on suppose que  $T$  et non nul de sorte que  $\text{ind } z^*T[l]$  s'écrit comme une extension de « grosses induites miraboliques »  $\text{St}_3(\varrho)_{P_c(F_v)} \times \bar{\pi}_i$  pour chacun des  $\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)$  et possède donc des

dérivées d'ordre  $3g_{-1}(\varrho)$  lequel est strictement plus grand que  $2g_{-1}(\varrho)$  et non divisible par  $g_0(\varrho)$ .

*Deuxième étape* : afin de faire fonctionner la troisième étape, on fait passer le terme  $\mathrm{gr}_!^{3g_{-1}(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$  du côté droit de la figure 6. L'intérêt de cette manipulation qui, dans le cas général, ne sera faite qu'une seule fois sera explicité dans l'étape suivante, cf. la dernière remarque de cette section. Cette manipulation est démontrée dans le cas général dans la proposition 3.2.8 en jouant avec les filtrations de stratification. En clair cette proposition est une légère modification du corollaire 3.2.7 en intégrant le faisceau pervers  $\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} \mathrm{HT}(\pi_v, \mathrm{St}_4(\pi_v))(-1/2)$ .

On casse ensuite

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_{!, \geq 0, \neq c}^{2g_{-1}(\varrho),+} \longrightarrow \mathrm{gr}_{!, \neq c}^{2g_{-1}(\varrho),+} \longrightarrow \mathrm{gr}_{!, -1, \neq c}^{2g_{-1}(\varrho),+} \rightarrow 0,$$

ce qui est matérialisé en bas à gauche de la figure 6. Il s'agit alors de rassembler  $\mathrm{gr}_{!, -1, \neq c}^{2g_{-1}(\varrho),+}$  avec la  $p$ -extension intermédiaire associée à  $\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} \mathrm{HT}_c(\pi_v, \mathrm{St}_2(\pi_v))(-1/2)$  dessinée à l'extrémité de la grande flèche dans la figure.

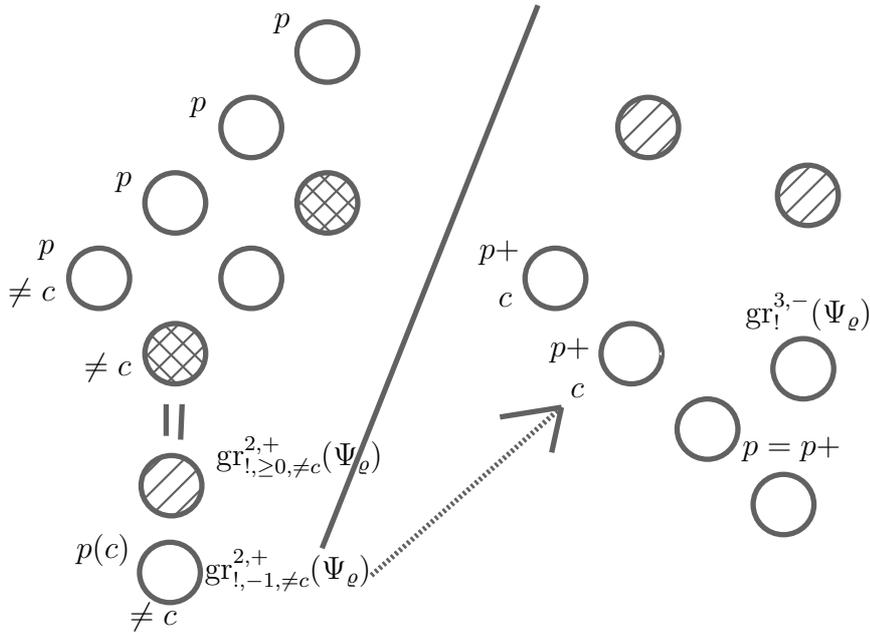


FIGURE 6. Illustration graphique du cas  $s = 4$  et  $m(\varrho) = 2$ .

Il s'agit ainsi, comme dans la première étape, d'échanger  $\mathrm{gr}_{!, -1, \neq c}^{2g_{-1}(\varrho),+}$  avec chacun des trois premiers sous-quotients de la partie droite de la figure, les deux premiers étant de  $\varrho$ -type

0 et le dernier une  $p+$ -extension intermédiaire associé à  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \pi_v)$ . Comme d'après la proposition 3.2.8 à laquelle on applique la dualité de Verdier, lors de ces échanges  $\text{gr}_{!, -1, \neq c}^{2g-1(\varrho), +}$  doit devenir une  $p+$ -extension intermédiaire que l'on note  ${}^{p+}P(2)_{\neq c}$ , on cherche dans le conoyau  $T$

$$\text{gr}_{!, -1, \neq c}^{2g-1(\varrho), +} \hookrightarrow {}^{p+}P(2)_{\neq c} \twoheadrightarrow T,$$

un sous-quotient irréductible  $P_c(F_v)$ -équivariant de  $T[l]$ , qui ne pourra pas être, avec des notations similaires à celles de l'étape précédente, un sous-quotient de  $T_i[l]$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Pour ce faire rappelons que  $\text{ind } z^*T[l]$ , en tant que représentation de  $M_c(F_v)$  a pour sous-quotients irréductibles des « grosses induites » miraboliques<sup>(12)</sup>  $\text{St}_2(\varrho)|_{M_c(F_v)} \times \bar{\pi}$  pour  $\bar{\pi}$  des représentations irréductibles inconnues de  $GL_{2g-1(\varrho)}(F_v)$ . Pour une telle représentation  $\bar{\pi}$  ayant une dérivée non nulle d'ordre  $\delta$  alors  $\text{St}_2(\varrho)|_{M_c(F_v)} \times \bar{\pi}$  admet une dérivée non nulle d'ordre  $\delta + 2g-1(\varrho)$  et  $\delta + g-1(\varrho)$ . L'une d'entre elles, que l'on notera  $\tau_0$ , est alors telle que son ordre est à la fois  $> g-1(\varrho)$  et non divisible par  $g_0(\varrho)$ . N'étant pas divisible par  $g_0(\varrho)$  une telle représentation  $\tau_0$  ne peut pas être un sous-quotient de  $\text{ind } z^*T_1[l]$  et  $\text{ind } z^*T_2[l]$ ; par ailleurs en tant que « petite induite » mirabolique  $\text{ind } z^*T_1[l]$  n'admet que des dérivées non nulles d'ordre  $g-1(\varrho)$  et ne peut donc pas contenir  $\tau_0$ .

*Troisième étape :*

On se retrouve à présent dans la situation de la figure 7 où ne reste plus à gauche de la grande barre oblique deux grands gradués à savoir

- $\text{gr}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  représenté par la première diagonale avec des cercles décorés d'un  $p$ , cf. la proposition 3.2.6, qui a pour quotient  $\text{gr}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho), +}(\Psi_\varrho)$ ;
- puis  $\text{gr}_{!, \neq c}^{2g-1(\varrho), -}(\Psi_\varrho)$ .

Dans un premier temps, on découpe l'extension

$$0 \rightarrow \text{gr}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho), +}(\Psi_\varrho) \longrightarrow X \longrightarrow \text{gr}_{!, \neq c}^{2g-1(\varrho), -}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

et on échange, cf. 2.2.1,

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{gr}}_{!, \neq c}^{2g-1(\varrho), -}(\Psi_\varrho) \longrightarrow X \longrightarrow \widetilde{\text{gr}}_{!, \neq c}^{g-1(\varrho), +}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

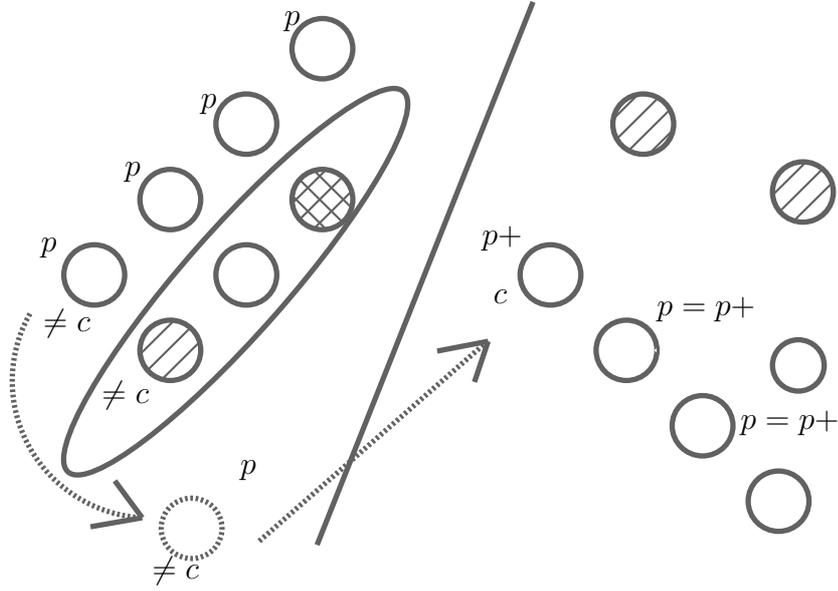
ce qui est matérialisé par la flèche en pointillé sur la partie gauche de la figure 7.

Cette « remontée » du grand ovale<sup>(13)</sup> dessiné sur la figure, ne peut pas se contrôler avec la théorie des dérivées : en quelque sorte on va dans le mauvais sens. Notons  $P$  le faisceau pervers de la partie gauche de la figure :

$$0 \rightarrow P \longrightarrow \underset{j \neq c, !}{j=2g-1(\varrho)} \underset{j \neq c}{j=2g-1(\varrho), *}\Psi_\varrho \longrightarrow \text{gr}_{!, -1, \neq c}^{2g-1(\varrho), +}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

12. Par souci de lisibilité, on a utilisé la même notation  $M_c$  pour des groupes miraboliques dans des groupes linéaires de taille a priori différente.

13. qui dans le cas général contiendra tout ce qui n'est pas descendu vers la partie droite de la figure

FIGURE 7. Illustration graphique du cas  $s = 2$  et  $m(\rho) = 2$ .

puisque  $\text{gr}_{1,-1,\neq c}^{2g-1(\rho),+}(\Psi_\rho)$  a déjà été déplacé sur la partie droite de la figure. A ce stade de la démonstration on sait que  $\text{gr}_{1,-1,\neq c}^{2g-1(\rho),+}(\Psi_\rho)$  est la  $p$ -extension intermédiaire qui est égale à la  $p+$ -extension intermédiaire de sorte que la suite exacte longue de cohomologie associée au foncteur  $\text{ind } z^*$  appliqué à la suite exacte courte précédente, nous fournit

$${}^p\mathcal{H}^0 \text{ind } z^*P = (0),$$

puisque notamment  ${}^p\mathcal{H}^{-1} \text{ind } z^* \text{gr}_{1,-1,\neq c}^{2g-1(\rho),+}(\Psi_\rho)$  est nul.

Revenons à l'extension  $X$  dont nous allons montrer qu'elle est scindée. Dans le cas contraire, le conoyau  $T$  de

$$\text{gr}_{1,c}^{g-1(\rho),+}(\Psi_\rho) \hookrightarrow \widetilde{\text{gr}}_{1,c}^{g-1(\rho),+}(\Psi_\rho) \twoheadrightarrow T,$$

serait non nul et on aurait une surjection  $(0) = {}^p\mathcal{H}^0 i_z^*P \twoheadrightarrow T$  ce qui est contradictoire.

*Remarque :* Le même argument n'aurait pas fonctionné avec  $\text{gr}_1^{3g-1(\rho),+}(\Psi_\rho)$  car le faisceau ponctuel  ${}^p\mathcal{H}^{-1} p_{j!}^{3g-1(\rho)} HT(\pi_v, \text{St}_3(\pi_v))$  est certes sans torsion mais sa partie libre est non nulle, de sorte que la surjection précédente ne conduirait pas à une contradiction. C'est pour cette raison que dans la deuxième étape ci-avant, nous avons commencé par déplacer

$\mathrm{gr}_!^{3g-1,-}(\Psi_\varrho)$  en utilisant, via la dualité de Grothendieck-Verdier, la proposition 3.2.8 ci-après.

Maintenant que  $\mathrm{gr}_{!,c}^{g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$  est passé en quotient du faisceau pervers de la partie gauche de la figure, i.e. dans la position en pointillés dans le dessin, on se retrouve dans une situation similaire à celle de la deuxième étape où on regarde un sous-quotient de  $T$  équivariant pour  $P_c(F_v)$  et de dérivée d'ordre  $g-1(\varrho)$ . Enfin le passage à chacun des  $\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)$  se fait comme dans le cas  $s = 3$ .

*3.2.5. Cas général.* — Comme expliqué dans la section précédente, nous commençons par démontrer une version légèrement améliorée de la proposition 3.2.6, et par dualité de son corollaire 3.2.7.

**3.2.8. Proposition.** — Soit  $s_\varrho = \frac{d}{g-1(\varrho)}$  que l'on suppose entier et  $\geq 4$ . Il existe un quotient  $\Psi_\varrho \rightarrow Q_\varrho$  où les gradués  $\mathrm{gr}_!^k(Q_\varrho)$  de la filtration de stratification de  $Q_\varrho$  sont

- nuls pour  $k \neq tg_{-1}(\varrho)$  avec  $1 \leq t \leq s_\varrho$ ,
- pour  $k = tg_{-1}(\varrho)$  avec  $1 \leq t \leq s_\varrho$  et  $t \neq s_\varrho - 1$ , ils sont isomorphes à  $p_+ j_{!*}^{=tg_{-1}(\varrho)} j_{=tg_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_!^{tg_{-1}(\varrho)}(Q_\varrho)$  où  $j_{=tg_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_!^{tg_{-1}(\varrho)}(Q_\varrho)$  est un réseau stable de  $\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$  pour  $t \neq s_\varrho - 1$ ,
- pour  $k = (s_\varrho - 1)g_{-1}(\varrho)$ , on a

$$0 \rightarrow p_+ j_{!*}^{=s_\varrho g_{-1}(\varrho)} \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathrm{gr}_!^{s_\varrho g_{-1}(\varrho)}(Q_\varrho) \longrightarrow p_+ j_{!*}^{=(s_\varrho-1)g_{-1}(\varrho)} \mathcal{L}_2 \rightarrow 0,$$

où  $\mathcal{L}_1$  (resp.  $\mathcal{L}_2$ ) est un réseau stable de  $\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_{s_\varrho}(\pi_v))(\frac{3-s_\varrho}{2})$  (resp. de  $\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_{s_\varrho-1}(\pi_v))(\frac{2-s_\varrho}{2})$ ).

*Remarque :* on va raisonner comme précédemment par dualité, de sorte qu'il s'agit de faire « remonter » le réseau de

$$\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} p_+ j_{!*}^{=s_\varrho g_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_{s_\varrho}(\pi_v))(\frac{s_\varrho - 3}{2})$$

vu comme sous-espace du conoyau de  $\mathrm{Fil}_!^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) \hookrightarrow \Psi_\varrho$ , le long de la flèche de la figure 8, en utilisant le diagramme 2.2.1. Contrairement à ce que l'on fera par la suite, on ne peut pas le faire directement, on va alors utiliser le foncteur exact  $j_{\neq c,!}^{\geq 1} j_{\neq c}^{\geq 1,*}$  ce qui nécessitera  $s_\varrho \geq 4$  pour qu'on puisse en tirer une information utile.

*Démonstration.* — Comme annoncé il s'agit de construire un monomorphisme strict  $P \hookrightarrow \Psi_\varrho$  avec

$$0 \rightarrow P_0 \longrightarrow P \longrightarrow P_1 \rightarrow 0$$

où, cf. la partie gauche de la figure 8,

- les gradués de la filtration de stratification exhaustive de  $P_1$  sont, pour  $t = 1, \dots, s_\varrho - 2$ , les  $p_+ j_{!*}^{=tg_{-1}(\varrho)} j_{=tg_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_!^t(P_1)$  où  $j_{=tg_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_!^t(P_1)$  est un réseau stable de  $\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))(\frac{t-1}{2})$ .

—  $P_0$  se dévise en

$$0 \rightarrow P_{0,1} \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_{0,2} \rightarrow 0$$

avec  $P_{0,1} \simeq {}^p j_{!*}^{s_\varrho g^{-1}(\varrho)} \mathcal{L}$  où  $\mathcal{L}$  est un réseau stable de  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_{s_\varrho}(\pi_v))(\frac{s_\varrho-1}{2})$  et

$$0 \rightarrow {}^p j_{!*}^{(s_\varrho-1)g^{-1}(\varrho)} \mathcal{L}'_1 \longrightarrow P_{0,2} \longrightarrow {}^p j_{!*}^{s_\varrho g^{-1}(\varrho)} \mathcal{L}'_2 \rightarrow 0,$$

où  $\mathcal{L}'_1$  (resp.  $\mathcal{L}'_2$ ) est un réseau stable de  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_{s_\varrho-1}(\pi_v))(\frac{s_\varrho-2}{2})$  (resp.  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_{s_\varrho}(\pi_v))(\frac{s_\varrho-3}{2})$ ).

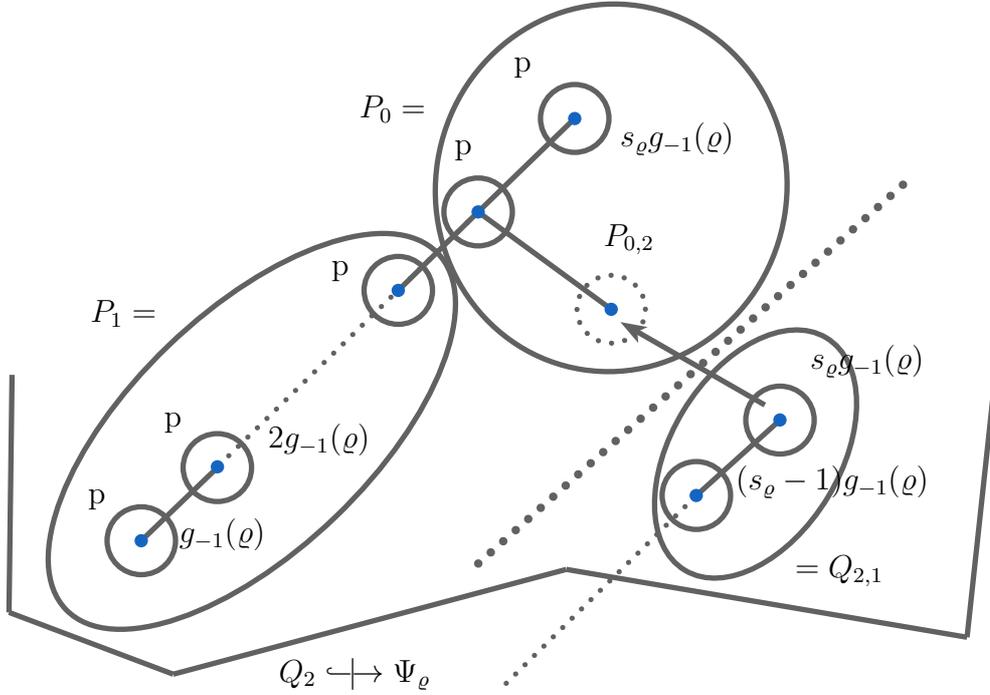


FIGURE 8. Illustration graphique de la preuve de 3.2.8

Soit tout d'abord  $\widetilde{\text{gr}}_{1,-1}^{2g^{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) \hookrightarrow \text{gr}_{1,-1}^{2g^{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  le sous-espace strict isomorphe sur  $\overline{\mathbb{Q}_l}$  à  $\text{gr}_{1,-1}^{2g^{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ , i.e. par rapport à la  $\varrho$ -filtration naïve utilisée jusqu'à présent, on commence

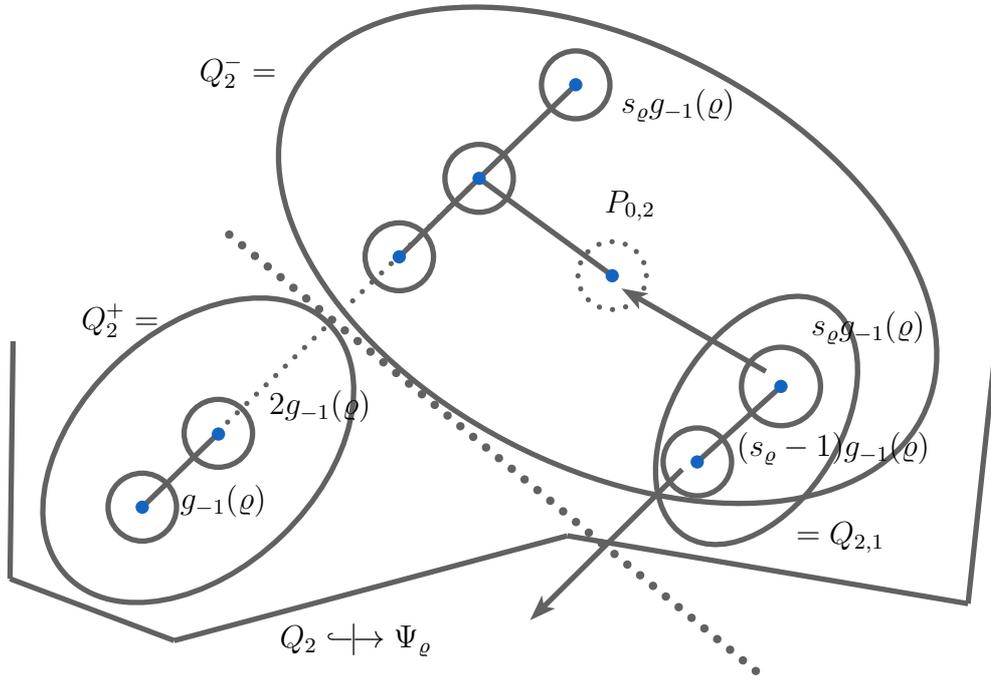


FIGURE 9. Illustration graphique de la preuve de 3.2.8

par filtrer avec  $\text{Cusp}_{-1}(\varrho)$ . Soit alors, cf. la figure 9

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Fil}_!^{g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & Q_2 & \dashrightarrow & Q_{2,1} \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Fil}_!^{g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & Q_1 & \dashrightarrow & \widetilde{\text{gr}}_{!,-1}^{2g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Fil}_!^{g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & \text{Fil}_!^{2g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) & \twoheadrightarrow & \text{gr}_{!,-1}^{2g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho),
 \end{array}$$

où  $Q_{2,1} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} Q_{2,1,\pi_v}$  avec

$$0 \rightarrow \mathcal{P}(\pi_v, s_\varrho) \left( \frac{s_\varrho - 3}{2} \right) \rightarrow Q_{2,1,\pi_v} \rightarrow \mathcal{P}(\pi_v, s_\varrho - 1) \left( \frac{s_\varrho - 4}{2} \right) \rightarrow 0.$$

On considère alors

$$0 \rightarrow \text{Fil}_*^{3g_{-1}(\varrho)-d}(Q_2) \rightarrow Q_2 \rightarrow \text{CoFil}_*^{3g_{-1}(\varrho)-d}(Q_2) \rightarrow 0,$$

puis les filtrations de stratification exhaustives de  $Q_2^- := \text{Fil}_*^{3g-1(\varrho)-d}(Q_2)$  et  $Q_2^+ := \text{CoFil}_*^{3g-1(\varrho)-d}(Q_2)$ . On obtient ainsi une filtration

$$0 = \text{Fil}^0(Q_2) \hookrightarrow \text{Fil}^1(Q_2) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \text{Fil}^{s_\varrho+2}(Q_2) = Q_2$$

dont les gradués  $\text{gr}^k(Q_2)$  après tensorisation par  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  s'écrivent comme une somme directe sur les  $\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)$

- des  $\mathcal{P}(\pi_v, s_\varrho - k + 1)(\frac{s_\varrho - k}{2})$  pour  $k = 1, 2, 3$ ;
- $\mathcal{P}(\pi_v, s_\varrho - k + 4)(\frac{s_\varrho - k + 1}{2})$  pour  $k = 4, 5$ ;
- $\mathcal{P}(\pi_v, s_\varrho - k + 3)(\frac{s_\varrho - k + 2}{2})$  pour  $k = 6, \dots, s_\varrho + 2$ .

À ce stade on ne peut pas affirmer que les structures entières correspondent à des  $p$ -extensions intermédiaires, pour ce faire nous allons appliquer le foncteur exact  $j_{\neq c, !}^{\geq 1}, j_{\neq c}^{\geq 1, *}$  au monomorphisme strict  $Q_2 \hookrightarrow \Psi_\varrho$ . En utilisant les formules données par (B.3.3) complétées par le corollaire 2.1.10, la filtration  $\text{Fil}^\bullet(Q_2)$  de  $Q_2$  fournit alors une filtration<sup>(14)</sup>

$$0 = \text{Fil}_{\neq c}^0(Q_2) \hookrightarrow \text{Fil}_{\neq c}^1(Q_2) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \text{Fil}_{\neq c}^{2s_\varrho+2}(Q_2) = j_{\neq c, !}^{\geq 1}, j_{\neq c}^{\geq 1, *} Q_2 \hookrightarrow Q_2 \hookrightarrow \Psi_\varrho$$

dont les gradués  $\text{gr}_{\neq c}^k(Q_2)$  vérifiant les propriétés suivantes<sup>(15)</sup> :

- pour  $k = 1$  c'est un réseau stable de  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} \mathcal{P}(\pi_v, s_\varrho)(\frac{s_\varrho - 1}{2})$ ;
- pour  $k = 2$ , il s'écrit sous la forme  ${}^{p(c)}j_{\neq c, !}^{(s_\varrho - 1)g - 1(\varrho)} Q_2$  où  $Q_2$  est un réseau stable de  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} HT_{\neq c}(\pi_v, \text{St}_{s_\varrho - 1}(\pi_v))(\frac{s_\varrho - 2}{2})$ . On dira plus simplement que  $\text{gr}_{\neq c}^k(Q_{2,1})$  est une  $p(c)$ -extension intermédiaire des  $\mathcal{P}_{\neq c}(\pi_v, s_\varrho - 1)(\frac{s_\varrho - 2}{2})$ ;
- pour  $k = 3$ , avec le vocabulaire du tiret précédent en remplaçant  $p(c)$  par  $p$ , c'est une  $p$ -extension intermédiaire des  $\mathcal{P}_c(\pi_v, s_\varrho - 1)(\frac{s_\varrho - 2}{2})$ ;
- pour  $k = 4$ , c'est une  $p(c)$ -extension intermédiaire des  $\mathcal{P}_{\neq c}(\pi_v, s_\varrho - 2)(\frac{s_\varrho - 3}{2})$ ;
- pour  $k = 5$  c'est un réseau stable des  $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_{-1}(\varrho)} \mathcal{P}(\pi_v, s_\varrho)(\frac{s_\varrho - 3}{2})$ ;
- pour  $k = 6$ , c'est une  $p(c)$ -extension intermédiaires des  $\mathcal{P}_{\neq c}(\pi_v, s_\varrho - 1)(\frac{s_\varrho - 4}{2})$ ;
- pour  $k = 7$  et comme on a supposé  $s_\varrho \geq 4$ , c'est une  $p$ -extension intermédiaire  $\mathcal{P}_c(\pi_v, s_\varrho - 2)(\frac{s_\varrho - 3}{2})$ ;
- pour  $k = 9 + 2i$  (resp.  $10 + 2i$ ) et  $0 \leq i \leq s_\varrho - 4$ , c'est une  $p(c)$ -extension intermédiaire (resp. une  $p$ -extension intermédiaire) des  $\mathcal{P}_{\neq c}(\pi_v, s_\varrho - 3 - i)(\frac{s_\varrho - 3 - i}{2})$  (resp. de  $\mathcal{P}_c(\pi_v, s_\varrho - 2 - i)(\frac{s_\varrho - 3 - i}{2})$ ).

*Remarque* : en rassemblant les gradués d'indice 2 et 3, on déduit de la proposition 3.2.6 que  $\text{gr}_{\neq c}^2(Q_{2,1})$  est en fait une  $p$ -extension intermédiaire.

Il s'agit à présent de réorganiser la filtration selon les deux flèches de la figure 9.

- a) On fait alors passer  $\text{gr}_{\neq c}^6(Q_{2,1})$  en quotient de  $j_{\neq c, !}^{\geq 1}, j_{\neq c}^{\geq 1, *} Q_{2,1}$  ; en utilisant le diagramme 2.2.1. Comme les réseaux des systèmes locaux ne sont pas modifiés, lors de l'échange

14. D'après (B.3.3) chaque gradué non concentré aux points supersinguliers, va donner deux facteurs.

15. On utilise en particulier que les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor sont sans torsion, cf. aussi le corollaire 2.1.10.

les gradués  $\mathrm{gr}_{\neq c}^k(Q_{2,1})$  qui deviennent  $\widetilde{\mathrm{gr}}_{\neq c}^k(Q_{2,1})$  pour  $7 \leq k \leq 2s_\varrho + 2$ , restent toujours des  $p$  et  $p(c)$  extensions intermédiaires.

- b) On échange ensuite l'ordre entre  $\mathrm{gr}_{\neq c}^4(Q_{2,1})$  et  $\mathrm{gr}_{\neq c}^5(Q_{2,1})$  ce qui fournit un nouveau  $\widetilde{\mathrm{gr}}_{\neq c}^4(Q_{2,1})$  que l'on rassemble alors avec le gradué d'indice 7 modifié lors de l'échange précédent :

$$0 \rightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}_{\neq c}^4(Q_{2,1}) \longrightarrow X \longrightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}_{\neq c}^7(Q_{2,1}) \rightarrow 0$$

où  $X$  tel que

$$X \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \overline{\mathbb{Q}_l} \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_{-1}(\varrho)} \mathcal{P}(\pi_v, s_\varrho - 2) \left( \frac{s_\varrho - 3}{2} \right),$$

est  $GL_d(F_v)$ -équivariant puisqu'il s'écrit comme un sous-quotient  $K/K'$  de  $\Psi_\varrho$  avec  $K$  et  $K'$  qui sont  $GL_d(F_v)$ -équivariant. Par équivariance et comme  $(16)$   $\widetilde{\mathrm{gr}}_{\neq c}^7(Q_{2,1})$  est une  $p$ -extension intermédiaire, on déduit du corollaire 2.3.9 qu'il en est de même pour  $\widetilde{\mathrm{gr}}_{\neq c}^4(Q_{2,1})$ .

À ce stade on a presque fini de prouver le résultat annoncé sauf qu'à priori on a simplement un dernier quotient  $\mathrm{gr}^{s_\varrho-2}(P_1)$  vérifiant

$$0 \rightarrow {}^{p(c)}j_{\neq c,!*}^{=g-1(\varrho)} j_{\neq c}^{=g-1(\varrho),*} P_1 \longrightarrow \mathrm{gr}^{s_\varrho-2}(P_1) \longrightarrow A \rightarrow 0$$

où  $A \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \overline{\mathbb{Q}_l} \simeq {}^p j_{\neq c,!*}^{=g-1(\varrho)} j_c^{=g-1(\varrho),*} P_1$ . On conclut alors que  $\mathrm{gr}^{s_\varrho-2}(P_1) \simeq {}^p j_{\neq c,!*}^{=g-1(\varrho)} j_{\neq c}^{=g-1(\varrho),*} P_1$  en utilisant le corollaire 2.3.9. □

Revenons à présent à la preuve de la proposition 2.4.1 que l'on va démontrer en raisonnant par l'absurde. Considérons donc un point géométrique de dimension maximale de sorte qu'il existe un entier  $k$  tel que  ${}^p \mathcal{H}^0 i_z^* \mathrm{gr}_c^k(\Psi_\varrho) \neq (0)$ . Soit alors  $h_z$  maximal tel que  $z$  est contenu dans  $X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{\geq h_z}$  et on note

$$i_z : \overline{\{z\}}|_{X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{1 \leq h_z}} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{1 \leq h_z} := X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{\geq 1} \setminus X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{\geq h_z+1}$$

ainsi que  $j_z : X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{1 \leq h_z} \setminus \overline{\{z\}}|_{X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{1 \leq h_z}} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{1 \leq h_z}$ .

*Remarque* : pour simplifier les notations, on supposera dans la suite que  $z$  est un point supersingulier, i.e.  $h_z = d$ . Les modifications pour retrouver le cas général se font en appliquant simplement le foncteur exact  $j_{1_{h_z}}^{1 \leq h_z, *}$  où

$$j_{1_{h_z}}^{1 \leq h} : X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}, 1_{h_z}}^{1 \leq h} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}, \overline{s}}}^{\geq 1},$$

à tous les faisceaux pervers intervenant et en utilisant l'équivariance sous  $P_{h_z, d-h_z}(F_v)$  (resp.  $P_{1, h_z-1, d-h_z}(F_v)$ ) en lieu et place de celle de  $GL_d(F_v)$  (resp.  $P_{1, d-1}(F_v)$ ).

---

16. C'est ici qu'on utilise  $s \geq 4$ .

On note encore  $s_\varrho := \lfloor \frac{d}{g-1(\varrho)} \rfloor$ . On va suivre la même stratégie que dans la preuve du cas  $s_\varrho = 4$  du paragraphe précédent où dans une tranche

$$0 \rightarrow P_k \longrightarrow \mathrm{gr}_{!,\neq c}^{kg-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \mathrm{gr}_{!,-1,\neq c}^{kg-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

avec

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_{!,\neq c}^{kg-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) \longrightarrow P_k \longrightarrow \mathrm{gr}_{!,\geq 0,\neq c}^{kg-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

- le quotient  $\mathrm{gr}_{!,-1,\neq c}^{kg-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$ , en utilisant la théorie des dérivées, descend vers les quotients pour rejoindre le facteur  ${}^{p+}\mathrm{gr}_{!,-1,c}^{kg-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$ ,
- tandis que  $P_k$  associé aux  $P_{k'}$  précédents pour  $k < k' \leq s_\varrho - 2$ , est échangé avec le  $\mathrm{gr}_{!,-1,\neq c}^{(k-1)g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$  précédent,

et ainsi de suite. Alors que pour  $s = 4$ , il n'y avait qu'une seule étape « descente/remontée », dans le cas général il y en aura  $s_\varrho - 3$ , ce qui nous conduit à introduire les hypothèses de récurrence suivante sur la forme de la filtration à l'issue d'une succession de « descentes/remontées ».

On introduit les hypothèses suivantes dont le lecteur pourra trouver une illustration graphique à la figure 10 et que nous allons montrer par récurrence sur  $h$  de  $d - h_z$  (supposé égal à  $d$  d'après la remarque précédente), à 1.

-  $\boxed{HR_\Psi(h+1)}$  :  $\Psi_\varrho$  admet une filtration

$$0 = \mathrm{Fil}^0(\Psi_\varrho, h) \subset \mathrm{Fil}^1(\Psi_\varrho, h) \subset \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h) \subset \mathrm{Fil}^3(\Psi_\varrho, h) \subset \mathrm{Fil}^4(\Psi_\varrho, h) \subset \mathrm{Fil}^5(\Psi_\varrho, h) = \Psi_\varrho$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathrm{Fil}^1(\Psi_\varrho, h) = \sum_{j \neq c, !, j \neq c}^{j=1} \mathrm{Fil}_!^{h-1}(\Psi_\varrho)$  ;
- $\mathrm{gr}^2(\Psi_\varrho, h)$  admet une filtration dont les gradués sont <sup>(17)</sup> si  $s_\varrho g-1(\varrho) \neq d$ , (resp. si  $s_\varrho g-1(\varrho) = d$ ) les  $\mathrm{gr}_{!,\neq c,\geq 0}^k(\Psi_\varrho)$  et  $\mathrm{gr}_{!,-1}^{k,-}(\Psi_\varrho)$  pour  $k$  variant de  $h$  à  $d$  (resp. on enlève le terme  $\mathrm{gr}_{!,-1}^{(s_\varrho-1)g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$  par rapport au cas non respé). On notera en particulier que la partie libre de  ${}^p\mathcal{H}^0 i_z^* \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$  est triviale et on demande qu'il en soit de même pour sa torsion ;
- $\mathrm{gr}^3(\Psi_\varrho, h) \simeq \mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^h(\Psi_\varrho)$  ;
- $\mathrm{Fil}^4(\Psi_\varrho, h)$  est  $GL_d(F_v)$  équivariant et la filtration de stratification de  $\mathrm{gr}_{\geq 0}^4(\Psi_\varrho, h)$  admet pour gradués successifs les  $\mathrm{gr}_c^k(\Psi_\varrho)$  pour  $1 \leq k \leq h$  puis les  $\mathrm{gr}_{c,\geq 0}^k(\Psi_\varrho)$  pour  $h+1 \leq k \leq h$ .
- Si  $s_\varrho$  ne divise pas  $h_z$  (supposé égal à  $d$ ) ou si  $s_\varrho \leq 2$ , la filtration de stratification de  $\mathrm{gr}^5(\Psi_\varrho, h)$  admet pour gradués successifs  $\mathrm{gr}_!^k(\mathrm{gr}^5(\Psi_\varrho, h)) = {}^p j_{!*}^{j=k} \mathrm{gr}_{!,-1}^k(\Psi_\varrho)$  pour

---

17. On rappelle que ces gradués sont nuls si  $k$  n'est pas un multiple de  $g-1(\varrho)$ .

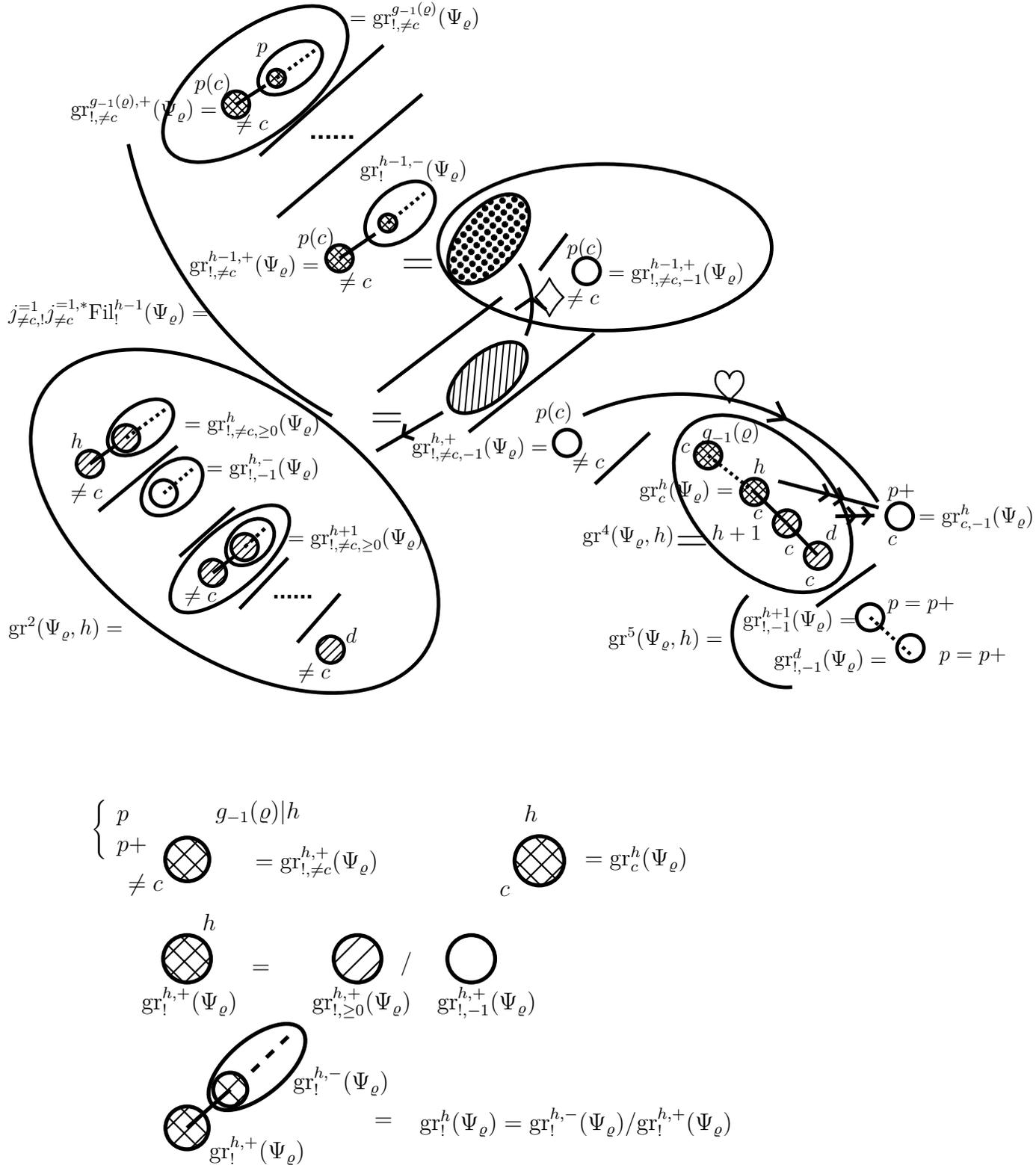


FIGURE 10. Illustration graphique de  $HR_\Psi(h+1)$

$h + 1 \leq k \leq d$ . Dans les autres cas, on demande la même condition sauf pour

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow {}^p j_{!*}^{j=d,*} \mathrm{gr}_{!,-1}^{d-g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) \\ \rightarrow \mathrm{gr}_{!}^{(s_\varrho-1)g-1(\varrho)}(\mathrm{gr}^5(\Psi_\varrho, h)) \rightarrow \\ {}^p j_{!*}^{j=d-g-1(\varrho)} j_{!*}^{j=d-g-1(\varrho),*} \mathrm{gr}_{!,-1}^{d-g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Remarque* : la modification de la filtration pour les cas où  $s_\varrho \geq 3$  divise  $h_z = d$ , provient du fait qu'on cherche à avoir la partie libre de  ${}^p \mathcal{H}_z^0 \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$  nulle, ce qui sera utile pour montrer l'inductivité. Cela implique en particulier que l'on doit alors utiliser la proposition 3.2.8 au lieu du corollaire 3.2.7. Notons enfin que cette nuance n'est pas illustrée dans la figure 10 afin de ne pas alourdir encore le dessin.

-  $\boxed{HR_p(h)}$  : pour tout  $k > h$ , on a  ${}^p j_{!*}^{j=k,*} \mathrm{gr}_{!,-1}^k(\Psi_\varrho) = {}^{p+} j_{!*}^{j=k,*} \mathrm{gr}_{!,-1}^k(\Psi_\varrho)$ .

*Remarque* : on notera que  $HR_p(1)$  implique le résultat cherché, i.e. la proposition 2.4.1.

Commençons par noter que tout système local sur  $X_{\mathcal{L},\bar{s}}^d = X_{\mathcal{L},\bar{s},c}^d$  est pervers et donc  $HR_p(d)$  est trivialement vérifié. En ce qui concerne  $HR_\Psi(d)$ , il suffit simplement de poser  $\mathrm{Fil}^1(\Psi_\varrho, d) = \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, d) = \mathrm{Fil}^3(\Psi_\varrho, d) = j_{\neq c,!}^{-1} j_{\neq c}^{-1,*} \Psi_\varrho$  et  $\mathrm{Fil}^4(\Psi_\varrho, d) = \mathrm{Fil}^5(\Psi_\varrho, d)$ .

**3.2.9. Lemme.** — *Si  $HR_\Psi(h+1)$  et  $HR_p(h+1)$  sont vérifiées, alors  $HR_p(h)$  aussi.*

*Démonstration.* — Visuellement à l'aide de la figure 10, il s'agit de montrer qu'on peut faire passer le terme  $\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{h,+}(\Psi_\varrho)$  de l'autre côté de la flèche notée  $\heartsuit$ , pour former un quotient  $\mathrm{Fil}^4(\Psi_\varrho, h) \rightarrow \mathrm{gr}_{!}^h(\Psi_\varrho)$  vérifiant

$$0 \rightarrow {}^{p(c)} j_{\neq c,!}^{j=h} j_{\neq c}^{j=h,*} \mathrm{gr}_{!}^h(\Psi_\varrho) \rightarrow \mathrm{gr}_{!}^h(\Psi_\varrho) \rightarrow {}^{p+} j_{c,!}^{j=h} j_c^{j=h,*} \mathrm{gr}_{!}^h(\Psi_\varrho) \rightarrow 0.$$

On utilise ensuite le corollaire 3.2.7 pour conclure.

S'il n'existe pas d'entier  $t$  tel que  $tg_{-1} = h$  alors il n'y a rien à démontrer puisque  $HR_p(h) = HR_p(h+1)$ . Notons alors  $t$  tel que  $tg_{-1}(\varrho) = h$ . Les cas  $h_z = 2g_{-1}(\varrho)$  et  $h_z = 3g_{-1}(\varrho)$ , ayant été traités ci-avant, on suppose donc  $h_z \geq 4g_{-1}(\varrho)$ , de sorte que d'après 3.2.8, on a une surjection

$$\mathrm{gr}^4(\Psi_\varrho, h) \twoheadrightarrow {}^{p+} \mathrm{gr}_{!,-1,c}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho),$$

et on note  $\mathrm{gr}^{4,-}(\Psi_\varrho, h)$  son noyau. Soit alors  $X$  le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} {}^{p(c)} \mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & X \dashrightarrow \mathrm{gr}^{4,-}(\Psi_\varrho, h) \\ \parallel & & \downarrow \\ {}^{p(c)} \mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & \mathrm{Fil}^4(\Psi_\varrho, h) / \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^4(\Psi_\varrho, h) \\ & & \downarrow \\ & & {}^{p+} \mathrm{gr}_{!,-1,c}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho). \end{array}$$

Ainsi en échangeant l'ordre des termes de l'extension définissant  $X$ , on obtient

$$0 \rightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}^{4,-}(\Psi_\varrho, h) \longrightarrow X \longrightarrow \widetilde{p}\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

où l'extension

$$0 \rightarrow \widetilde{p}\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \longrightarrow Y \longrightarrow p^+\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

est  $GL_d(F_v)$ -équivariant, car tous les autres quotients de la filtration modifiée de  $\Psi_\varrho$  le sont. Ainsi d'après la proposition 2.3.7, on a

$$\widetilde{p}\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \simeq p^+\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho).$$

Supposons, par l'absurde que le conoyau

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{Coker}\left(\widetilde{\mathrm{gr}}^{4,-}(\Psi_\varrho, h) \hookrightarrow_+ \mathrm{gr}^{4,-}(\Psi_\varrho, h)\right) \\ &= \mathrm{Coker}\left(p^{(c)}\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \hookrightarrow_+ p^+\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho)\right), \end{aligned}$$

est non nul.

(a) En voyant  $T$  comme quotient de  $\mathrm{gr}^{4,-}(\Psi_\varrho, h)$  comme ci-dessus, d'après (2.2.1),  $T$  admettrait une filtration

$$(0) = \mathrm{Fil}^0(T) \subset \mathrm{Fil}^1(T) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^r(T) = T$$

dont les gradués  $\mathrm{gr}^k(T)$  s'écriraient comme le conoyau  $T_\delta$  d'un bimorphisme

$$p_{J_{c,!}^*}^{j=\delta g_{i_\delta}(\varrho)} HT(\pi_{v,\delta}, \mathrm{St}_\delta(\pi_{v,\delta}))\left(\frac{\delta-1}{2}\right) \hookrightarrow_+ p_{J_{c,!}^*}^{j=\delta g_{i_\delta}(\varrho)} HT(\pi_{v,\delta}, \mathrm{St}_\delta(\pi_{v,\delta}))\left(\frac{\delta-1}{2}\right) \twoheadrightarrow T_\delta,$$

où  $\pi_{v,\delta} \in \mathrm{Cusp}_{i_\delta}(\varrho)$  avec lorsque  $i_\delta = -1$ ,  $\delta < t$ . Or un tel  $T_\delta[l]$  peut s'écrire comme extensions successives de  $M_d(F_v)$ -représentations de petites induites  $\sigma|_{M_{\delta g_{i_\delta}(\varrho)}(F_v)} \times \bar{\pi}$ , pour  $\sigma$  la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_\delta(\pi_{v,\delta})$ , de sorte que sa dérivée vérifie la propriété suivante : pour  $i_\delta = -1$ , cette dérivée est d'ordre  $< tg_{-1}(\varrho)$  et pour  $i_\delta \geq 0$ , cet ordre est divisible par  $g_0(\varrho)$ .

(b) Comme conoyau de  $p^{(c)}\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \hookrightarrow_+ p^+\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$ ,  $T[l]$  admet comme sous-quotient une « grosse induite mirabolique », cf. 2.3.5, de la forme  $r_l(\mathrm{St}_t(\pi_v)) \times \sigma$  où  $\sigma$  est une représentation de  $M_c(F_v)$ . Ces représentations ont alors des dérivées d'ordre  $\delta + kg_{-1}(\varrho)$  pour  $1 \leq k \leq t$  et  $\delta > 0$  l'ordre de la dérivée de  $\sigma$  : il existe ainsi une dérivée d'ordre strictement plus grand que  $(t-1)g_{-1}(\varrho)$  et non divisible par  $g_0(\varrho)$ , ce qui contredit la propriété obtenue en (a).

Ainsi on a  $p^+\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho) = p^{(c)}\mathrm{gr}_{!,\neq c,-1}^{tg_{-1}(\varrho),+}(\Psi_\varrho)$ , d'où  $HR_p(h)$  en faisant varier  $c$ . □

**3.2.10. Lemme.** — *Si  $HR_\Psi(h+1)$  et  $HR_p(h)$  sont vérifiées alors  $HR_\Psi(h)$  aussi.*

*Démonstration.* — Comme dans la preuve du lemme précédent,  $\mathrm{gr}^3(\Psi_\varrho, h)_{-1} \ll$  passe à travers » la flèche notée  $\heartsuit$  dans la figure (10), ce qui permet de construire  $\mathrm{Fil}^4(\Psi_\varrho, h-1)$  avec  $\mathrm{gr}^5(\Psi_\varrho, h-1)$  vérifiant les hypothèses demandées.

Il s'agit alors de faire remonter  $\mathrm{gr}^2(\Psi_\varrho, h)$  le long de la flèche notée  $\diamond$  dans la figure 10. Soit alors

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Fil}^1(\Psi_\varrho, h) & \hookrightarrow & \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h) & \twoheadrightarrow & \mathrm{gr}^2(\Psi_\varrho, h) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathrm{gr}_{!, \neq c, -1}^{h-1, +}(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \mathrm{gr}^2(\Psi_\varrho, h) \end{array}$$

et il s'agit de montrer que

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_{!, \neq c, -1}^{h-1, +}(\Psi_\varrho) \rightarrow P \rightarrow \mathrm{gr}^2(\Psi_\varrho, h) \rightarrow 0 \quad (3.2.11)$$

est scindée. Dans le cas contraire, on aurait

$$0 \rightarrow \widehat{\mathrm{gr}}^2(\Psi_\varrho, h) \rightarrow P \rightarrow \widehat{\mathrm{gr}}_{!, \neq c, -1}^{h-1, +}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0$$

avec, puisque les réseaux ne sont pas modifiés,

$$\mathrm{gr}_{!, \neq c, -1}^{h-1, +}(\Psi_\varrho) \hookrightarrow_+ \widehat{\mathrm{gr}}_{!, \neq c, -1}^{h-1, +}(\Psi_\varrho) \twoheadrightarrow T \neq 0.$$

Or rappelons que  $\mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$  a été construit de sorte que la partie libre de son  ${}^p\mathcal{H}^0 i_z^* \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$  est triviale. Ainsi si  $T$  était non nul, on en déduirait que  ${}^p\mathcal{H}^0 i_z^* \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$  serait de torsion, ce qui n'est pas par hypothèse.  $\square$

Comme illustré dans le cas  $s = 3$ , on passe ensuite des isomorphismes  ${}^p\mathrm{gr}_{!}^{tg-1(\varrho), +}(\Psi_\varrho) \simeq {}^{p+}\mathrm{gr}_{!}^{tg-1(\varrho), +}(\Psi_\varrho)$ , à la proposition 2.4.1, par récurrence sur  $t$  de  $s_\varrho$  à 1. Seul le cas  $t = s_\varrho - 1$  nécessite l'hypothèse  $l > 2$  pour contrôler la théorie des représentations. Comme dans le cas  $s = 2$ , le quotient  $T$  de

$${}^p j_{!*}^{(s_\varrho-1)g-1(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_{s_\varrho-1}(\pi_v)) \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*}^{(s_\varrho-1)g-1(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_{s_\varrho-1}(\pi_v)) \twoheadrightarrow T,$$

est tel que  $\mathrm{ind} z^* T[l]$  est, à torsion près, une induite parabolique  $r_l(\mathrm{St}_{s_\varrho-1}(\pi_v)) \times \bar{\pi}$  pour une certaine représentation  $\bar{\pi}$  de  $GL_{g-1(\varrho)}(F_v)$  qu'il s'agit de préciser. Par ailleurs lors des échanges on sait que les sous-quotients irréductibles de  $\mathrm{ind} z^* T[l]$  sont à prendre parmi ceux de la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_{s_\varrho}(\pi_v)$ . On en déduit alors que, à torsion près  $\bar{\pi} = \varrho$  et que  $\mathrm{ind} z^* T[l]$  doit contenir tous les sous-quotients irréductibles de la réduction modulo  $l$  de  $LT_{\pi_v}(s_\varrho - 2, 1)$ , cf. les notations de A.1.4.

Or d'après la proposition 4.3.2 de [8] ou plutôt sa version duale explicitée dans la remarque suivant loc. cit., la réduction modulo  $l$  de  $LT_{\pi_v}(s_\varrho - 2, 1)$  admet un sous-quotient irréductible, noté  $I_{\underline{0}}(\overleftarrow{[s_\varrho - 2, \overline{1}]}_{\pi_v})$  dans [8], qui n'est pas un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\mathrm{St}_{s_\varrho}(\pi_v)$ .

On traite ensuite les cas  $t = 1, \dots, s_\varrho - 2$  exactement comme on a traité le cas  $t = 1$  pour  $s_\varrho = 3$ .

**3.3. Preuve du théorème principal.** — D’après le théorème de comparaison de Berkovich, cf. [4], le théorème 1.1.4 découle de l’énoncé suivant.

**3.3.1. Théorème.** — *Les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_\varrho$  sont sans torsion.*

*La preuve procède en deux temps.*

(a) On utilise tout d’abord la suite exacte courte (3.2.2) pour montrer que si torsion il y avait, alors la  $l$ -torsion, en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation de  $M_d(F_v)$ , n’aurait que des grosses dérivées.

Rappelons que d’après la proposition B.3.5, sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , les gradués de la filtration de stratification de  $i_{c,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  sont des faisceaux pervers d’Harris-Taylor et que la suite spectrale calculant ses faisceaux de cohomologie à partir de ceux de ses gradués, dégénère en  $E_1$ .

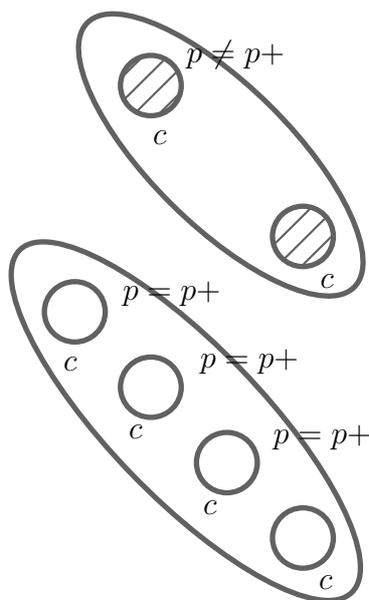


FIGURE 11. Filtration de  $\mathcal{H}^0 i_c^{1,*} \Psi_\varrho$  pour  $s = 4$  et  $m(\varrho) = 2$ .

Sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ , la torsion provient donc uniquement des gradués qui ne seront pas de  $p$ -extensions intermédiaires des faisceaux pervers d’Harris-Taylor. Ainsi pour  $d = 2$ , sachant que les seuls faisceaux pervers d’Harris-Taylor non ponctuels sont associés à des caractères, le résultat découle trivialement du lemme 2.1.6.

Dans le cas général notons<sup>(18)</sup>  $z$  un point générique de dimension maximale tel que la fibre en  $z$  d'un  ${}^p\mathcal{H}_z^0 i_z^*$  d'un de ces gradués soit de torsion non nulle. Ce gradué est associé à un faisceau pervers d'Harris-Taylor pour  $\pi_v$  de  $\varrho$ -type  $\geq 0$ . Notons alors que cette torsion, qui apparait donc dans la première page  $E_1$  de la suite spectrale calculant  ${}^p\mathcal{H}_z^0 i_z^* \Psi_{\bar{\tau}}$ , admet pour sous-quotients, des représentations de la forme  $\bar{\pi} \times \sigma_{|M_{tg_i(\bar{\tau})}(F_v)}$  où

- $\sigma$  est un sous-quotient de la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_t(\pi_v)$  et
- $\bar{\pi}$  est, d'après le corollaire 2.4.2, un sous-quotient irréductible de  $V_{\varrho}(r + tm(\varrho)l^i, < \underline{\delta}_i)$ .

Supposons par l'absurde qu'une partie de cette torsion persiste dans l'aboutissement et notons alors  $i$  le  $\varrho$ -type minimal correspondant. On obtient en particulier que tous les sous-quotients irréductibles de  ${}^p\mathcal{H}_z^0 i_z^* \Psi_{\varrho}$ , ont une dérivée d'ordre  $\geq g_i(\varrho)$ .

(b) L'idée est maintenant de considérer la filtration de stratification  $\text{Fil}_1^\bullet(\Psi_{\varrho})$  puis de considérer la suite spectrale associée calculant  ${}^p\mathcal{H}_z^0 i_z^* \Psi_{\bar{\tau}}$ , pour montrer que si sa torsion était non nulle, alors la  $l$ -torsion en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation, contiendrait, avec les mêmes notations que dans (a), une induite parabolique irréductible de la forme  $\bar{\pi} \times \sigma$  avec

$$0 \rightarrow \bar{\pi}_{|M_h(F_v)} \times \sigma \longrightarrow (\bar{\pi} \times \sigma)_{|M_{h+tg_i(\varrho)}(F_v)} \longrightarrow \bar{\pi} \times \sigma_{|M_{tg_i(\varrho)}(F_v)} \rightarrow 0.$$

En effet puisque les supports cuspidaux sont disjoints,  $\bar{\pi} \times \sigma$  est bien irréductible. On observe alors que  $\bar{\pi}_{|M_h(F_v)} \times \sigma$  admet un sous-quotient irréductible ayant une dérivée d'ordre  $< g_i(\varrho)$ , d'où la contradiction.

Pour mettre en forme ce calcul, on commence par filtrer chacun des gradués  $\text{gr}_1^k(\Psi_{\varrho})$ , où  $k$  est divisible par  $g_{-1}(\varrho)$ ,

$$\text{Fil}_{\varrho}^{-i_{\varrho}(k)}(\text{gr}_1^k(\Psi_{\varrho})) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \text{Fil}_{\varrho}^0(\text{gr}_1^k(\Psi_{\varrho})) \hookrightarrow \text{Fil}_{\varrho}^{-1}(\text{gr}_1^k(\Psi_{\varrho})),$$

avec  $i_{\varrho}(k) \geq -1$  maximal de sorte que  $g_{i_{\varrho}(k)}(\varrho)$  divise  $k$  et de sorte que

$$\text{gr}_{\varrho}^i \text{gr}_1^k(\Psi_{\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_i(\varrho)} \text{gr}_1^k(\Psi_{\pi_v}).$$

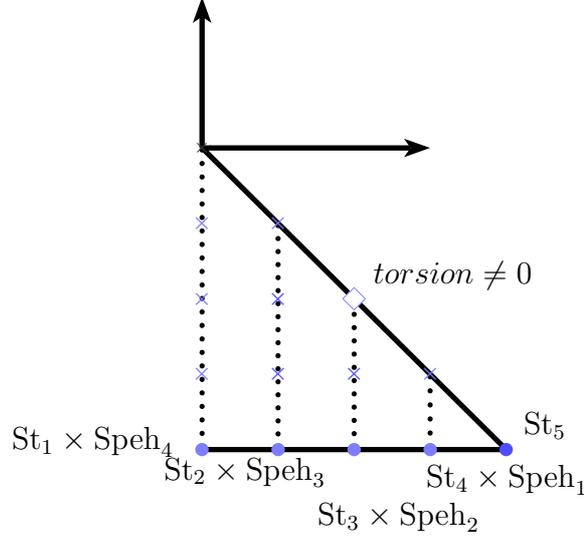
En numérotant les éléments de  $\text{Cusp}_i(\varrho)$ , on filtre ensuite chacun des  $\text{gr}_{\varrho}^i \text{gr}_1^k(\Psi_{\varrho})$  de façon à définir des gradués  $\text{gr}_{!,\pi_v}^k(\Psi_{\varrho})$  tels que

$$\text{gr}_{!,\pi_v}^k(\Psi_{\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \text{gr}_1^k(\Psi_{\pi_v}).$$

Rappelons que d'après [7] sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , pour  $\pi_v \in \text{Cusp}_i(\varrho)$  avec  $s_i(\varrho) := \lfloor d/g_i(\varrho) \rfloor$ , alors pour tout  $1 \leq t \leq s_i(\varrho)$ , la filtration de stratification exhaustive de  $\text{gr}_{!,\pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_{\varrho})$  a pour gradués successifs les  ${}^p j_{!*}^{(t+\delta)g_i(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_{t+\delta}(\pi_v))(\frac{1-t+2\delta}{2})$ . Il s'agit ici de montrer que sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ , on obtient bien les  $p$ -extensions intermédiaires. Pour  $i = -1$  comme les  $p$  et  $p+$  extensions intermédiaires sont les mêmes, il n'y a rien à montrer.

On raisonne alors par l'absurde en supposant qu'il existe  $i$ , que l'on prendra minimal pour la propriété qui suit, tel qu'ils existe  $\pi_v \in \text{Cusp}_i(\varrho)$  et  $1 \leq t \leq s_i(\varrho)$ , pour lesquels

<sup>18</sup>. On peut pour simplifier considérer comme dans le paragraphe précédent que  $z$  est un point super-singulier.


 FIGURE 12.  $E_1^{p,q}$  calculant les faisceaux de cohomologie de  $\mathrm{gr}_{!,\pi_v}^5(\Psi_\varrho)$ .

un des gradués de  $\mathrm{gr}_{!,\pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  n'est pas une  $p$ -extension intermédiaire. D'après le corollaire 2.4.2, il existe  $\delta > 0$  et  $z$  un point générique de  $\mathrm{Sh}_{L,\bar{s}_v}^{tg_i(\varrho)+\delta g_{-1}(\varrho)}$  de sorte que le  ${}^p\mathcal{H}^r i_z^*$  du quotient de cette extension intermédiaire par la  $p$ -extension, est nul pour  $r < 0$  et non nul de torsion pour  $r = 0$ . Nous allons alors montrer que la torsion de  ${}^p\mathcal{H}^0 i_z^* \Psi_\varrho$  serait non nulle et que la  $l$ -torsion, en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation, admet des petites dérivées.

Comme précédemment, pour simplifier, on va supposer que  $z$  est un point supersingulier, i.e.  $tg_i(\varrho) + \delta g_{-1}(\varrho) = d$ , et on commence par montrer que  ${}^p\mathcal{H}^0 \mathrm{ind} z^* \mathrm{gr}_{!,\pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  est non nul et de torsion. Pour cela on étudie la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = {}^p\mathcal{H}^{p+q} \mathrm{ind} z^* \mathrm{gr}_{-p}^{tg_i(\varrho)}(\mathrm{gr}_{!,\pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_\varrho)) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^i \mathrm{ind} z^* \mathrm{gr}_{!,\pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_\varrho),$$

associée à la filtration de stratification de  $\mathrm{gr}_{!,\pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ , dont on pourra trouver une illustration à la figure 12 dans le cas où  $t = 1$  et  $s = 5$  et où on suppose que le gradué associé à  $P(\pi_v, 3)$  ne serait pas une  $p$  extension intermédiaire.

Rappelons que les quotients libres non nuls de  $E_1^{p,q}$ , correspondent aux  $(p, 1 - t)$  avec  $0 \leq p \leq t - 1$  et que seul  $E_2^{0,1-t}$  a un quotient libre non nul isomorphe à  $LT_{\pi_v}(t - 1, s - t)$ . On remarque alors que les termes de torsion  $E_{1,tor}^{p,-p}$  pour  $0 \leq p < s - t$  non tous nuls par hypothèse, ne sont pas modifiés, i.e.  $E_\infty^{p,-p} = E_1^{p,-p}$  pour  $0 \leq p < s - t$  et comme les quotients libres des  $E_\infty^{k,-k}$  sont tous nuls, on en déduit donc que  ${}^p\mathcal{H}^0 i_z^* \mathrm{gr}_{!,\pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_\varrho)$  est de torsion et non nul. Notons par ailleurs que, d'après le corollaire 2.4.2, la  $l$ -torsion de  ${}^p\mathcal{H}^0 \mathrm{ind} z^* \mathrm{gr}_{!,\pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ , en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation de  $GL_d(F_v)$  admet comme sous-quotient tous ceux de  $r_l(\mathrm{St}_t(\pi_{v,i})) \times V_\varrho(s_i(\varrho) - t, < \underline{\delta}_i)$ . Considérons alors un sous-quotient

$\text{St}_{\underline{k}}(\varrho)$  quelconque de  $r_l(\text{St}_t(\pi_{v,i}))$  avec donc  $\underline{k}$  qui est de la forme  $(0, \dots, 0, u_i, u_{i+1}, \dots)$ , i.e. ces  $i$ - premières coordonnées sont nulles. Ainsi l'induite irréductible

$$\text{St}_{\underline{k}}(\varrho) \times \text{St}_{(s_i(\varrho)-t, 0, \dots)}(\varrho) \quad (3.3.2)$$

est un sous-quotient de la  $l$ -torsion de  ${}^p\mathcal{H}^0 \text{ ind } z^* \text{gr}_{!, \pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ . On note aussi que  $\text{St}_{\underline{k}}(\varrho) \times \text{St}_{(s_i(\varrho)-t, 0, \dots)}(\varrho)$ , en tant que représentation de  $M_d(F_v)$ , admet des dérivées d'ordre  $g_{-1}(\varrho)$ .

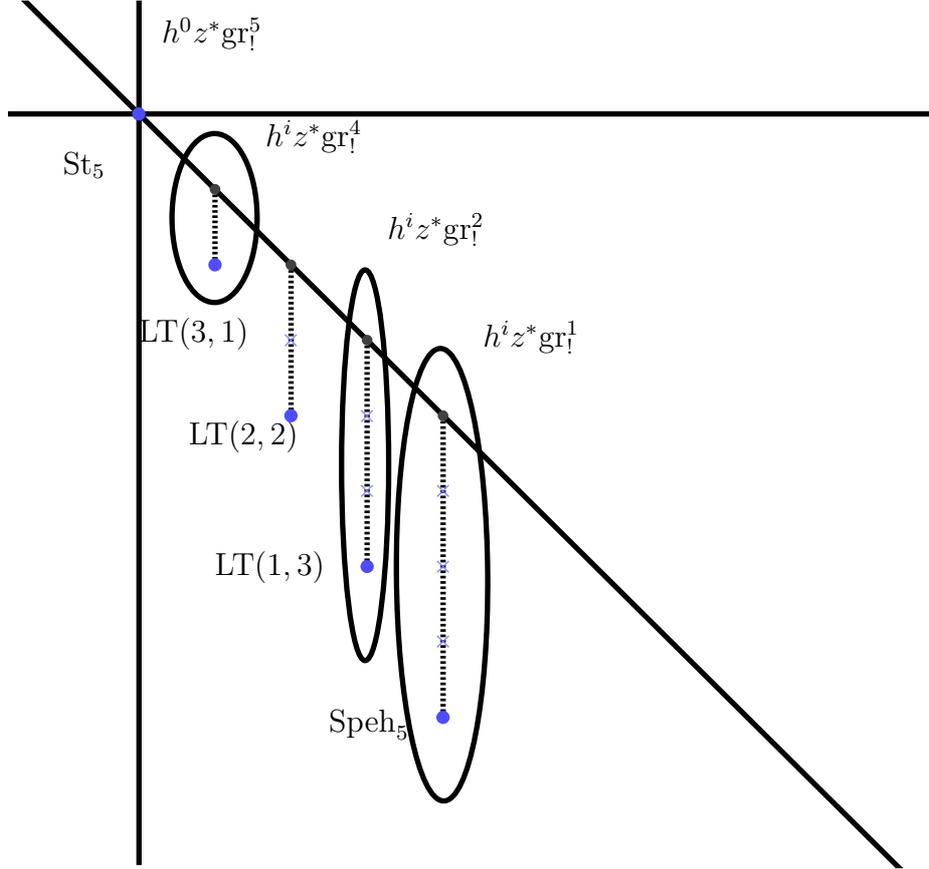


FIGURE 13.  $E_{1, \pi_v}^{p, q}$  calculant les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\pi_v}$ .

On étudie ensuite la suite spectrale

$$E_{1, \varrho}^{p, q} = {}^p\mathcal{H}^{p+q} \text{ ind } z^* \text{gr}_{!}^{d-p}(\Psi_\varrho) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{p+q} \text{ ind } z^* \Psi_\varrho,$$

associée à la filtration précédente de  $\Psi_\varrho$  dont les gradués sont les  $\text{gr}_{!, \pi_v}^{tg_i(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ . Rappelons, cf. [7], que sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  la suite spectrale dégénère en  $E_1$ , cf. la figure 13 pour  $\Psi_{\pi_v}$  avec  $\pi_v$  une irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et  $d = 5g$ . Par hypothèse, rappelons qu'on raisonne par l'absurde, il existe  $k < d$  tel que  ${}^p\mathcal{H}^0 \text{ ind } z^* \text{gr}_{!}^k(\Psi_\varrho)$ , qui est de torsion, est non nul et sa  $l$ -torsion en tant que représentation de  $GL_d(F_v)$  admet un sous-quotient irréductible générique.

**3.3.3. Lemme.** — On suppose à nouveau  $l \neq 2$ . Pour tout  $u \geq -1$  et pour tout  $\pi_v \in \text{Cusp}_u(\varrho)$ , la réduction modulo  $l$  de  $LT_{\pi_v}(s_i(\varrho) - 2, 1)$  n'admet pas pour sous-quotient la représentation  $\text{St}_{\underline{k}}(\varrho) \times \text{St}_{(s_i(\varrho)-t, 0, \dots)}(\varrho)$  de 3.3.2.

*Démonstration.* — La proposition 4.1.3 de [8] décrit les sous-quotients irréductibles de la réduction modulo  $l$  de  $LT_{\pi_v}(s - t - 1, t)$  (et donc en particulier pour  $t = 1$ ) en fonction de leur niveau de cuspidalité qui sont donc de la forme  $\text{St}_{(k_{-1}, k_0, \dots)}(\varrho_u) \times I_{\underline{0}}(LT_{\pi_v}(s', t))$ , où

—  $I_{\underline{0}}$  est la notation désignant le sous-quotient de niveau de cuspidalité minimal : ainsi

$$\text{St}_{(s_i(\varrho)-t, 0, \dots)}(\varrho) = I_{\underline{0}}(\text{St}_{s_i(\varrho)-t}(\pi_v)),$$

—  $s' + \sum_{r \geq -1} g_{u+r}(\varrho) = s - t$ .

Le résultat découle alors de la remarque précédant le corollaire 4.3.3 de loc. cit. qui nous dit que  $\text{St}_{(s, 0, \dots)}(\varrho)$  n'est pas isomorphe à  $I_{\underline{0}}(LT_{\pi_v}(s', t))$  pour  $t > 0$ .  $\square$

Notons alors les faits suivants :

- (a) parmi les  $E_{1, \varrho}^{p, q}$  seuls ceux pour  $p + q = 0$  sont susceptibles d'avoir de la torsion ;
- (b) les quotients libres des  $E_{1, \varrho}^{p, -p}$  pour  $p \neq 0$  sont tous nuls ;

Du points (a) et du lemme précédent, on en déduit que  $E_{\infty, \varrho}^{d-k, k-d}$  est de torsion et que sa  $l$ -torsion admet 3.3.2 comme sous-quotient. Du point (b), on en déduit que ce sous-quotient est aussi un sous-quotient de la  $l$ -torsion de  ${}^p\mathcal{H}^0 \text{ ind } z^* \Psi_{\varrho}$  laquelle, en tant que représentation de  $M_d(F_v)$ , admet donc une dérivée d'ordre  $g_{-1}(\varrho)$  ce qui contredit (a) et conclut la preuve du théorème.  $\square$

*Remarque :* dans l'argument ci-avant, le point important est l'irréductibilité de l'induite parabolique  $\bar{\pi} \times \sigma$  où  $\bar{\pi}$  est de  $\varrho$ -niveau strictement plus petit que  $\underline{\delta}_i$  alors que  $\sigma$  est de niveau supérieur ou égal à  $\underline{\delta}_i$ . L'information sur  $\bar{\pi}$  est obtenue à le corollaire 2.4.2 et repose sur 2.4.1.

Dans les arguments au final on a prouvé le résultat suivant qui se formule simplement et qui peut être utilisé efficacement, cf. par exemple [12].

**3.3.4. Théorème.** — Les gradués de la filtration exhaustive de stratification de  $\Psi_{\varrho}$  utilisant les adjonctions  $j_! j^* \rightarrow \text{Id}$  (resp.  $\text{Id} \rightarrow j_* j^*$ ) construit dans [9], sont les  $p$ -extensions intermédiaires (resp. les  $p+$  extensions intermédiaires) des systèmes locaux d'Harris-Taylor.

Comme on a montré qu'en général, i.e. dès que le  $\varrho$ -type est  $\geq 0$ , les  $p$  et  $p+$  extensions intermédiaires ne sont pas isomorphes, on constate que les réseaux des systèmes locaux d'Harris-Taylor des gradués des filtrations de stratification de  $\Psi_{\varrho}$ , varient selon la façon dont on filtre. Pour plus de précisions sur ces réseaux et le lien avec le lemme d'Ihara, on renvoie le lecteur à [11].

*Remarque :* For  $\pi_v$  a irreducible cuspidal representation of  $\varrho$ -type  $u$ , then using repeatedly the exact epimorphisms

$$j_!^{=(t+\delta)g_u(\varrho)} HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t-1, \delta)) \otimes \Xi^{\delta/2} \twoheadrightarrow j_!^{=(t+\delta)g_u(\varrho)} HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t-1, \delta)) \otimes \Xi^{\delta/2},$$

for  $\delta = 0, \dots, s_u(\varrho) - t$ , we then deduce the following resolution

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow j_!^{=s_u(\varrho)g_u(\varrho)} HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t-1, s_u(\varrho) - t)) \otimes \Xi^{\frac{s_u-t}{2}} \rightarrow \dots \rightarrow \\ j_!^{=(t+2)g_u(\varrho)} HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t-1, 2)) \otimes \Xi^1 \rightarrow j_!^{=(t+1)g_u(\varrho)} HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t-1, 1)) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \\ \rightarrow j_!^{=tg_u(\varrho)} HT(\pi_v, St_t(\pi_v)) \rightarrow \mathrm{gr}_{!, \pi_v}^{tg_u(\varrho)}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

## Appendice A

### Rappels sur les représentations

**A.1. de  $GL_d(K)$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ .** — Notons  $K$  un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal  $q$  une puissance de  $p$ . Une racine carrée  $q^{\frac{1}{2}}$  de  $q$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  étant fixée, pour  $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , nous noterons  $\pi\{k\}$  la représentation tordue de  $\pi$  où l'action de  $g \in GL_n(K)$  est donnée par  $\pi(g)\nu(g)^k$  avec  $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\mathrm{val}(\det g)}$ .

**A.1.1. Définition.** — Pour  $V$  un sous-espace vectoriel de dimension  $h$  de  $K^n$ , soit  $P_V$  le sous-groupe parabolique associé et  $N_V$  son radical unipotent, i.e. l'ensemble des  $g \in GL_n(K)$  tels que le noyau de  $g - \mathrm{Id}$  contienne  $V$  et son image soit contenue dans  $V$ .

**A.1.2. Notations.** — — Dans le cas où dans la définition précédente,  $V$  est engendré par les  $h$  premiers vecteurs de la base canonique,  $V$  sera noté  $\overline{1}_h$  et  $P_V$  par  $P_{h,d-h}$ .  
— Pour tout  $a \in GL_d(K)/P_{h,d-h}(K)$ , on rappelle qu'on note encore  $a$  le sous-espace vectoriel obtenu comme l'image par  $a$  de  $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_h)$ , où  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  désigne la base canonique de  $K^d$ . On notera aussi  $P_a(K) = aP_{h,d-h}(K)a^{-1}$  le parabolique associé et  $N_a = aN_{h,d}(K)a^{-1}$  son sous-groupe unipotent. Le facteur  $GL_h(K)$  de  $P_a(K)$  est appelé « son facteur infinitésimal ».

*Remarque :* afin d'alléger les notations, on notera  $\dim a$  pour  $\dim V_a$ .

**A.1.3. Définition.** — Soit  $P = MN$  un parabolique standard de  $GL_n$  de Lévi  $M$  et de radical unipotent  $N$ . On note  $\delta_P : P(K) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$  l'application définie par  $\delta_P(h) = |\det(\mathrm{ad}(h)|_{\mathrm{Lie}N})|^{-1}$ . Pour  $(\pi_1, V_1)$  et  $(\pi_2, V_2)$  des représentations de respectivement  $GL_{n_1}(K)$  et  $GL_{n_2}(K)$ , et  $P_{n_1, n_2}$  le parabolique standard de  $GL_{n_1+n_2}$  de Lévi  $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$  et de radical unipotent  $N$ ,  $\pi_1 \times \pi_2$  désigne l'induite parabolique normalisée de  $P_{n_1, n_2}(K)$  à  $GL_{n_1+n_2}(K)$  de  $\pi_1 \otimes \pi_2$  c'est à dire l'espace des fonctions  $f : GL_{n_1+n_2}(K) \rightarrow V_1 \otimes V_2$  telles que

$$f(nmg) = \delta_{P_{n_1, n_2}}^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)\left(f(g)\right), \quad \forall n \in N, \forall m \in M, \forall g \in GL_{n_1+n_2}(K).$$

Pour  $g$  fixé et sous-entendu, étant données  $\pi_1$  et  $\pi_2$  des représentations de respectivement  $GL_{t_1g}(F_v)$  et  $GL_{t_2g}(F_v)$ ,  $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$  désignera l'induite normalisée  $\pi_1\{-\frac{t_2}{2}\} \times \pi_2\{\frac{t_1}{2}\}$ .

Rappelons qu'une représentation irréductible  $\pi$  de  $GL_n(K)$  est dite *cuspidale* (resp. *supercuspidale*) si elle n'est pas isomorphe à un sous-quotient (resp. à un sous-espace) d'une induite parabolique propre. D'après [20] §V.4, la réduction modulo  $l$  d'une représentation irréductible cuspidale est encore irréductible cuspidale mais pas nécessairement supercuspidale.

**A.1.4. Notations.** — Soient  $g$  un diviseur de  $d = sg$  et  $\pi$  une représentation cuspidale irréductible de  $GL_g(K)$ .

— L'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de

$$\pi \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} \pi = \pi \left\{ \frac{1-s}{2} \right\} \times \pi \left\{ \frac{3-s}{2} \right\} \times \cdots \times \pi \left\{ \frac{s-1}{2} \right\}$$

est noté  $St_s(\pi)$  (resp.  $Speh_s(\pi)$ ).

— L'unique sous-espace (resp. quotient) irréductible de

$$St_t(\pi) \overrightarrow{\times} Speh_r(\pi) = St_t(\pi \left\{ \frac{-r}{2} \right\}) \times Speh_r(\pi \left\{ \frac{t}{2} \right\})$$

(resp. de  $St_{t-1}(\pi) \overrightarrow{\times} Speh_{r+1}(\pi) = St_{t-1}(\pi \left\{ \frac{-r-1}{2} \right\}) \times Speh_{r+1}(\pi \left\{ \frac{t-1}{2} \right\})$ ) est noté  $LT_\pi(t-1, r)$ .

**A.1.5. Notation.** — Pour  $n \geq 2$ , on note  $M_n(K)$  le sous-groupe de  $P_{1,n-1}(K)$  dont le premier coefficient en haut à gauche est égal à 1.

*Remarque :* Quitte à tordre les actions par  $g \mapsto \sigma({}^t g^{-1})\sigma^{-1}$ , où  $\sigma$  est la matrice de permutation associé au cycle  $(12 \cdots n)$ , on reconnaît le traditionnel groupe mirabolique dont le radical unipotent  $V_{n-1}(K)$  est abélien isomorphe à  $(K^\times)^{n-1}$ .

**A.1.6. Lemme.** — Soit  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(K)$ , alors en tant que représentation du parabolique  $M_{(t+s)g}(K)$ , on a des isomorphismes

$$St_t(\pi \left\{ -\frac{s}{2} \right\})|_{M_{tg}(K)} \times Speh_s(\pi \left\{ \frac{t}{2} \right\}) \simeq LT_\pi(t-1, s)|_{M_{(t+s)g}(K)},$$

et

$$St_t(\pi \left\{ -\frac{s}{2} \right\}) \times Speh_s(\pi \left\{ \frac{t}{2} \right\})|_{M_{sg}(K)} \simeq LT_\pi(t, s-1)|_{M_{(t+s)g}(K)},$$

où dans le premier isomorphisme, l'induite parabolique est relativement à

$$\begin{pmatrix} M_{tg} & U \\ 0 & GL_{sg} \end{pmatrix}$$

alors que dans le deuxième, il s'agit de l'induite à support compact relativement à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{sg-1} \\ 0 & GL_{tg} & U \\ 0 & 0 & GL_{sg-1} \end{pmatrix}.$$

*Remarque* : si dans le lemme précédent, on remplace la représentation de Steinberg  $\text{St}_t(\pi)$  par  $LT_\pi(\delta, t - \delta - 1)$ , le membre de droite dans le premier isomorphisme devient  $LT_\pi(\delta, t - \delta - 1 + s)$ .

*Démonstration.* — On rappelle cf. par exemple [18] §III.1.10, que

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})|_{M_{sg}(K)} \\ \rightarrow \left( \text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \right)|_{M_{(t+s)g}(K)} \\ \rightarrow \text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où le deuxième terme est l'induite parabolique relativement à  $\begin{pmatrix} M_{tg} & U \\ 0 & GL_{sg} \end{pmatrix}$  et le premier,

l'induite à support compact relativement à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{sg-1} \\ 0 & GL_{tg} & U \\ 0 & 0 & GL_{sg-1} \end{pmatrix}$ . En outre pour tout

$k \geq 0$ , la dérivée d'ordre  $k$  de  $\text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$  est, cf. [18] p153, donnée par celle de  $\text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)}$  induite avec  $\text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$ , i.e.

$$\left( \text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \right)^{(k)} \simeq \left( \text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \right)^{(k)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}).$$

Rappelons que la dérivée d'ordre  $k$  de  $\text{St}_t(\pi)$  est nulle sauf si  $k$  est de la forme  $\delta g$  avec  $0 \leq \delta \leq t$  auquel cas elle est isomorphe à  $\text{St}_{t-\delta}(\pi\{\frac{\delta}{2}\})$ . Ainsi en raisonnant par récurrence sur  $t$ , on en déduit que  $\text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$  et  $LT_{\pi_v}(t-1, s)|_{M_{(t+s)g}(K)}$  ont les mêmes dérivées et qu'elles sont toutes d'ordre  $\leq tg$ . Considérons alors le morphisme composé

$$\begin{aligned} LT_{\pi_v}(t-1, s)|_{M_{(t+s)g}(K)} \hookrightarrow \left( \text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \right)|_{M_{(t+s)g}(K)} \\ \twoheadrightarrow \text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \end{aligned}$$

et notons  $K \hookrightarrow \text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})|_{M_{sg}(K)}$  son noyau. D'après [21] proposition 5.3 et corollaire 6.8,  $\text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})|_{M_{sg}(K)}$  est homogène, i.e. tout sous-espace  $M_{(t+s)g}(K)$ -équivariant irréductible a une dérivée d'ordre  $(t+1)g$ , or on vient de voir que les dérivées de  $LT_\pi(t-1, s)|_{M_{(t+s)g}(K)}$  sont d'ordre  $\leq tg$ , de sorte que

$$LT_\pi(t-1, s) \hookrightarrow \text{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \text{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}).$$

Comme ces deux termes ont les mêmes dérivées, cette injection est un isomorphisme.  $\square$

**A.2. Réduction modulo  $l$  d'une Steinberg généralisée d'après [8].** — On rappelle que  $l$  et  $p$  désignent des nombres premiers distincts et que  $q$  est une puissance de  $p$ . On note  $e_l(q)$  l'ordre de l'image de  $q$  dans  $\mathbb{F}_l^\times$ . Afin de simplifier la lecture, dans la suite on utilisera la lettre  $\pi$  pour désigner une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière et les lettres  $\varrho$  et  $\rho$  pour des  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations.

**A.2.1. Définition.** — Une représentation  $\varrho$  de  $GL_n(K)$  est dite

- *cuspidale* si pour tout sous-groupe parabolique propre  $P$  de  $GL_n(K)$ ,  $J_P(\varrho)$  est nul.
- Elle sera dite *supercuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre. On notera  $\text{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(g)$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations supercuspidales de  $GL_g(K)$ .

*Remarque :* sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , les notions de cuspidales et de supercuspidales coïncident, ce qui n'est pas le cas sur  $\overline{\mathbb{F}}_l$ , cf. ci-après.

**A.2.2. Proposition.** — (cf. [18] III.5.10) *La réduction modulo  $l$  d'une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $GL_g(K)$  est irréductible cuspidale.*

**A.2.3. Proposition.** — [14] §2.2.3

*Soit  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale entière. Alors pour tout  $s \geq 1$ , la réduction modulo  $l$  de  $\text{Speh}_s(\pi)$  est irréductible.*

**A.2.4. Définition.** — Une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible est dite  $l$ -Speh (resp.  $l$ -superSpeh) si c'est la réduction modulo  $l$  d'une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière  $\text{Speh}_s(\pi)$  pour  $\pi$  irréductible cuspidale (resp. et dont la réduction modulo  $l$  de  $\pi$  est supercuspidale).

**A.2.5. Notation.** — On notera  $\epsilon(\varrho)$  le cardinal de la droite de Zelevinski de  $\varrho$ , i.e. de l'ensemble des classes d'équivalence  $\{\varrho\{i\} / i \in \mathbb{Z}\}$ . On pose alors cf. [20] p.51

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho), & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1; \\ l, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Remarque :*  $\epsilon(\varrho)$  est un diviseur de  $e_l(q)$ .

**A.2.6. Définition.** — Étant donné un multi-ensemble  $\underline{s} = \{\rho_1^{n_1}, \dots, \rho_r^{n_r}\}$  de représentations cuspidales, on note d'après [20] V.7,  $\text{St}(\underline{s})$  l'unique représentation non dégénérée de l'induite

$$\rho(\underline{s}) := \overbrace{\rho_1 \times \dots \times \rho_1}^{n_1} \times \dots \times \overbrace{\rho_r \times \dots \times \rho_r}^{n_r}.$$

*Remarque :* d'après [20] V.7, toutes les représentations non dégénérées sont de cette forme.

**A.2.7. Notation.** — Pour  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale et  $s \geq 1$ , on note  $\underline{s}(\rho)$  le multi-segment  $\{\rho, \rho\{1\}, \dots, \rho\{s-1\}\}$  et comme dans [20] V.4,  $\text{St}_s(\rho) := \text{St}(\underline{s}(\rho))$ .

**A.2.8. Proposition.** — [20] V.4 Soit  $\varrho$  une représentation irréductible cuspidale. La représentation non dégénérée  $\text{St}_s(\varrho)$  est cuspidale si et seulement  $s = 1$  ou  $m(\varrho)l^k$  pour  $k \geq 0$ .

*Remarque :* d'après [18] III-3.15 et 5.14, toute représentation irréductible cuspidale est de la forme  $\text{St}_s(\varrho)$  pour  $\varrho$  irréductible supercuspidale et  $s = 1$  ou de la forme  $m(\varrho)l^k$  avec  $k \geq 0$ .

**A.2.9. Notation.** — Soit  $\varrho$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(K)$ ; on note  $\varrho_{-1} = \varrho$  et pour tout  $i \geq 0$ ,  $\varrho_i = \text{St}_{m(\varrho)l^i}(\varrho)$ .

**A.2.10. Définition.** — On dira d'une  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation irréductible cuspidale entière qu'elle est de  $\varrho$ -type  $i \geq -1$  si, à torsion par un caractère non ramifié près, sa réduction modulo  $l$  est de la forme  $\varrho_i$ . On note alors  $\text{Cusp}_i(\varrho)$  l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles cuspidales de  $\varrho$ -type  $i$ .

**A.2.11. Notation.** — Soit  $s \geq 1$  un entier et  $\varrho$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(K)$ . Soit  $\mathcal{I}_\varrho(s)$  l'ensemble des suites  $(m_{-1}, m_0, \dots)$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telles que

$$s = m_{-1} + m(\varrho) \sum_{k=0}^{+\infty} m_k l^k.$$

On notera  $\text{lg}_\varrho(s)$  le cardinal de  $\mathcal{I}_\varrho(s)$ . On munit enfin  $\mathcal{I}_\varrho(s)$  d'une relation d'ordre

$$(m_{-1}, m_0, \dots) > (m'_{-1}, m'_0, \dots) \Leftrightarrow \exists k \geq -1 \text{ tel que } \forall i > k : m_i = m'_i \text{ et } m_k > m'_k.$$

**A.2.12. Définition.** — Pour  $\underline{i} = (i_{-1}, i_0, \dots) \in \mathcal{I}_\varrho(s)$ , on définit

$$\text{St}_{\underline{i}}(\varrho) := \text{St}_{\underline{i}_{-1}}(\varrho_{-1}) \times \text{St}_{\underline{i}_0}(\varrho_0) \times \dots \times \text{St}_{\underline{i}_u}(\varrho_u)$$

où  $i_k = 0$  pour tout  $k > u$  et où les  $\varrho_i$  sont définis en A.2.9.

**A.2.13. Théorème.** — Soit  $\pi$  une  $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $GL_g(K)$  et  $\varrho$  sa réduction modulo  $l$ . Dans le groupe de Grothendieck des  $\overline{\mathbb{F}_l}$ -représentations de  $GL_{sg}(K)$ , on a l'égalité suivante :

$$r_l(\text{St}_s(\pi)) = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}_\varrho(s)} \text{St}_{\underline{i}}(\varrho).$$

Par ailleurs pour tout  $\underline{i} \in \mathcal{I}_\varrho(s)$  et pour tout parabolique  $P$ ,  $J_P(\text{St}_{\underline{i}}(\varrho))$  est égal à la somme des constituants irréductibles de  $\varrho$ -niveau  $\underline{i}$  de  $r_l(J_P(\text{St}_s(\pi)))$ .

*Remarque :* pour  $s < m(\varrho)$ , la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_s(\pi)$  est irréductible.

**A.2.14. Définition.** — On dira que  $l$  est banal pour  $GL_d(K)$  si  $e_l(q) > d$ .

*Remarque* : dans le cas banal toute représentation cuspidale est supercuspidale, i.e.  $m(\varrho) < s$  avec les notations précédentes.

Pour  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale entière de  $GL_g(K)$ , comme, d'après A.2.2, sa réduction modulo  $l$ , notée  $\varrho$ , est irréductible, on en déduit qu'à isomorphismes près,  $\pi$  possède un unique réseau stable, cf. par exemple [2] proposition 3.3.2 et la remarque qui suit.

**A.2.15. Définition.** — (cf. [8]) Étant donné un réseau de  $\text{St}_t(\pi)$ , la surjection (resp. l'injection)

$$\text{St}_t(\pi) \xrightarrow{\times} \pi \rightarrow \text{St}_{t+1}(\pi),$$

induit un réseau de  $\text{St}_{t+1}(\pi)$  de sorte que par récurrence on dispose d'un réseau  $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, t)$  que l'on qualifie de *réseau d'induction*. On note alors

$$RI_{\overline{\mathbb{F}}_l, -}(\pi, t) := RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, t) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l,$$

**A.2.16. Proposition.** — (cf. [8] propositions 3.2.2 et 3.2.7) Pour tout  $0 \leq k \leq \lg_\varrho(s)$ , il existe une sous-représentation  $V_{\varrho, -}(s; k)$  de longueur  $k$  de  $RI_{\overline{\mathbb{F}}_l, -}(\pi, s)$

$$(0) = V_{\varrho, \pm}(s; 0) \subsetneq V_{\varrho, \pm}(s; 1) \subsetneq \cdots \subsetneq V_{\varrho, \pm}(s; \lg_\varrho(s)) = RI_{\overline{\mathbb{F}}_l, -}(\pi, s),$$

définie de sorte que l'image de  $V_{\varrho, -}(s; k)$  dans le groupe de Grothendieck est telle que tous ses constituants irréductibles sont de  $\varrho$ -niveau strictement plus grand que n'importe quel constituant irréductible de  $W_{\varrho, -}(s; k) := V_{\varrho, -}(s; \lg_\varrho(s)) / V_{\varrho, -}(s; k)$ .

**A.2.17. Notation.** — Une représentation irréductible  $\varrho$  étant fixée ainsi qu'un entier  $s$ , pour  $k \geq 0$  tel que  $m(\varrho)l^k \leq s$ , on note :

- $\underline{\delta}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathcal{I}_\varrho(s)$  et
- pour tout  $t$  tel que  $m(\varrho)l^k t \leq s$ ,  $V_{\varrho, -}(s, \geq t \cdot \underline{\delta}_k)$  le sous-espace  $V_{\varrho, -}(s, \lg_\varrho(s))$  défini ci-dessus tel que tous les constituants irréductibles de  $V_{\varrho, -}(s, \lg_\varrho(s))$  sont de  $\varrho$ -niveau plus grand ou égal à  $t \cdot \underline{\delta}_k$ ,
- et  $V_{\varrho, -}(s, < t \cdot \underline{\delta}_k) := V_{\varrho, -}(s, \lg_\varrho(s)) / V_{\varrho, -}(s, \geq t \cdot \underline{\delta}_k)$ .

**A.3. Représentations de  $D_{K,d}^\times$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{F}}_l$  et leurs relèvements.** — Soient  $D_{K,d}$  l'algèbre à division centrale sur  $K$  d'invariant  $1/d$ ,  $\mathcal{D}_{K,d}$  son ordre maximal de radical  $\mathcal{P}_{K,d} : 1 + \mathcal{P}_{K,d} \subset \mathcal{D}_{K,d}^\times \subset D_{K,d}^\times / \varpi^\mathbb{Z}$  de quotients successifs  $\mathbb{F}_{q^d}^\times$  et  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

**A.3.1. Notation.** — Pour  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(K)$  et  $s \geq 1$ , on note  $\pi[s]_D$  la représentation irréductible de  $D_{K,sg}^\times$  image de  $\text{St}_s(\pi^\vee)$  par la correspondance de Jacquet-Langlands.

*Remarque* : toute représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times$  s'écrit de manière unique  $\pi[s]_D$  pour  $s|d$  et  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_{d/s}(K)$ .

**A.3.2. Notation.** — On notera  $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$  l'ensemble des classes d'équivalence des  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de  $D_{v,h}^\times$ .

À torsion par un caractère non ramifié près, toute représentation irréductible  $\tau$  de  $D_{K,d}^\times$  se factorise par  $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ , on choisit alors un facteur irréductible  $\rho$  de  $\tau_{1+\mathcal{P}_{K,d}}$  et on note  $N_\rho$  le normalisateur de sa classe d'isomorphisme dans  $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ . Comme  $1+\mathcal{P}_{K,d}$  est un pro- $p$ -groupe, la dimension de  $\rho$  est une puissance de  $p$  de sorte que, un  $p$ -Sylow de  $N_\rho/(1+\mathcal{P}_{K,d})$  étant cyclique,  $\rho$  admet un prolongement  $\tilde{\rho}$  à  $N_\rho$ , cf. [19] lemme 1.19. Soit alors  $\zeta$  une sous-représentation irréductible de  $N_\rho$  agissant sur  $\text{Hom}_{1+\mathcal{P}_{K,d}}(\tilde{\rho}, \tau)$  laquelle d'après la preuve de la proposition 2.3.2 de [14] que nous suivons, est de la forme  $\zeta \simeq \text{ind}_J^{N_\rho}(\chi)$  pour un groupe  $J$  contenant  $N_\rho \cap \mathcal{O}_{K,d}^\times$  et un caractère  $\chi$  de  $J$  trivial sur  $1+\mathcal{P}_{K,d}$ .

**A.3.3. Proposition.** — (cf. [14] proposition 2.3.2)  
Avec les notations précédentes, on a

$$\tau = \text{ind}_J^{D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}}(\tilde{\rho}|_J \otimes \chi)$$

avec  $J = N_\rho \cap N_\chi$  où  $N_\chi$  désigne le normalisateur de  $\chi$ . La réduction  $r_l(\tau)$  de  $\tau$  modulo  $l$  est de la forme

$$\text{ind}_J^{D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}}(r_l(\tilde{\rho}|_J) \otimes r_l(\chi))$$

où  $r_l(\tilde{\rho}|_J)$  reste irréductible de normalisateur  $N_\rho$  de sorte que la longueur de  $r_l(\tau)$  est égale à

$$m(\tau) := [N_\rho \cap N_{r_l(\chi)} : J].$$

*Remarque :* deux sous-quotients irréductibles  $\tau$  et  $\tau'$  quelconques de la réduction modulo  $l$  d'une représentation irréductible entière de  $D_{K,d}^\times$ , sont inertiuellement équivalents, i.e. il existe un caractère  $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$  tel que  $\tau' \simeq \tau \otimes \zeta \circ \text{val}$  orn.

Par construction il existe des entiers  $f', d', e'$  de produit égal à  $d$  tels que

$$J/(1+\mathcal{P}_{K,d}) \simeq \mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z},$$

où  $m$  est un diviseur de  $d'$  tel que  $f'm = [D_{K,d}^\times : \varpi^\mathbb{Z} \mathcal{D}_{d,K}^\times J]$ . L'abélianisé de  $J/(1+\mathcal{P}_{K,d})$  s'identifie, via la norme, à  $\mathbb{F}_{q^{f'm}}^\times \times m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z}$  et le nombre de représentations irréductibles strictement congrues à  $\tau$  est la plus grande puissance de  $l$  divisant le cardinal de cet abélianisé.

**A.3.4. Notation.** — Pour  $\bar{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times$ , avec les notations de la proposition précédente et  $\tau$  un relèvement, avec les notations précédentes, on notera

$$m(\bar{\tau}) = [N_\chi \cap N_{r_l(\chi)} : J] \quad \text{et} \quad g(\bar{\tau}) := \frac{d}{e'} = f'd'.$$

Soit aussi  $s(\bar{\tau})$  la plus grande puissance de  $l$  divisant  $\frac{d}{m(\bar{\tau})g(\bar{\tau})}$  et on note

$$g_{-1}(\bar{\tau}) = g(\bar{\tau}) \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq s(\bar{\tau}), \quad g_i(\bar{\tau}) = m(\bar{\tau})l^i g(\bar{\tau}).$$

**A.3.5. Définition.** — Pour  $\bar{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times$ , soit  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$  la sous-catégorie pleine formée des objets dont tous les  $\mathbb{Z}_l^{nr} \mathcal{D}_{K,d}^\times$ -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de  $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$ . On note  $\bar{\tau}^0$  un sous-quotient irréductible quelconque de  $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$ .

**A.3.6. Proposition.** — (cf. [13] §B.2)

Soit  $P_{\bar{\tau}^0}$  une enveloppe projective de  $\bar{\tau}^0$  dans  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(\mathcal{D}_{K,d}^\times)$ . Alors la sous-catégorie  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$  est facteur direct dans  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$  pro-engendrée par l'induite  $P_{\bar{\tau}} := \text{ind}_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}^{D_{K,d}^\times}(P_{\bar{\tau}^0})$ .

Ainsi toute  $\mathbb{Z}_l^{nr}$ -représentation  $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}}$  de  $D_{K,d}^\times$  se décompose en une somme directe  $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau}} V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$  où  $\bar{\tau}$  décrit les classes d'équivalence inertielles des  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de  $D_{K,d}^\times$  et où  $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$  est un objet de  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ , i.e. tous ses sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de  $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$ .

**A.3.7. Proposition.** — (cf. [14] proposition 2.3.2) Soient  $\bar{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{K,d}^\times$  et  $\tau' \in \mathcal{C}_{\bar{\tau}}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière. Il existe alors  $-1 \leq i \leq s(\bar{\tau})$  et une représentation irréductible cuspidale  $\pi_i$  de  $GL_{g_i(\bar{\tau})}(K)$  telle que  $\tau' \simeq \pi_i[\frac{d}{g_i(\bar{\tau})}]_D$ .

*Remarque :* avec les notations de la proposition précédente, la réduction modulo  $l$  de  $\pi_i$  est supercuspidale si et seulement si  $i = -1$  et sinon son support supercuspidal est un segment de Zelevinsky-Vignéras de longueur  $m(\bar{\tau})l^i$  associé à une supercuspidale  $\varrho$  de  $GL_{g_{-1}(\bar{\tau})}(K)$ . En outre  $\bar{\tau}$  est uniquement déterminée par  $\varrho$ , on dira qu'elle est de type  $\varrho$ .

**A.3.8. Notation.** — Étant donné une représentation irréductible supercuspidale  $\varrho$  de  $GL_g(K)$  et un multiple  $h = tg$  de  $g$ , on notera  $\varrho[t]_D \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$  la classe de la représentation de  $D_{K,h}^\times$  de type  $\varrho$ . On note

$$\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(\varrho) := \left\{ \varrho[t]_D : 1 \leq t \leq \frac{d}{g} \right\}.$$

*Exemple :* soit  $\pi_{-1}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $GL_g(K)$  dont la réduction modulo  $l$  est supercuspidale. Soient  $t \geq 1$  et  $\bar{\tau}$  un constituant irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\pi_{-1}[t]_D$  : on a alors  $g_{-1}(\bar{\tau}) = g$ . Soit alors  $\pi_i$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_{g_i(\bar{\tau})}(K)$  dont la réduction modulo  $l$  a pour support supercuspidal un segment de Zelevinsky  $[r_l(\pi_{-1}[\frac{1-s}{2}]), r_l(\pi_{-1}[\frac{s-1}{2}])]$  avec  $g_i(\bar{\tau}) = sg$ . Pour tout  $t_i$  tel que  $t_i g_i(\bar{\tau}) \geq tg$ , la représentation  $\pi_i[t_i]_D$  (resp. un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\pi_i[t_i]_D$ ) est de  $\bar{\tau}$ -type  $i$ .

**A.3.9. Notation.** — On notera parfois  $\text{Cusp}_i(\bar{\tau})$  l'ensemble, précédemment noté  $\text{Cusp}_i(\rho)$  en A.2.10, des classes d'équivalences des représentations  $\pi_i$ .

**A.3.10. Proposition.** — Soit  $\pi_{v,i} \in \text{Cusp}_i(\bar{\tau})$ . Pour  $t \geq 1$ , on a alors l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck

$$r_l(\pi_{v,u}[t]_D) = l^u \sum_{i=0}^{m(\rho)-1} r_l(\pi_{v,-1}[tm(\rho)l^u]_{\nu^i}). \quad (\text{A.3.11})$$

*Remarque :* dans le cas où  $\epsilon(\rho) = 1$ , la formule (A.3.11) s'écrit  $r_l(\pi_{v,u}[t]_D) = l^{u+1}r_l(\pi_{v,-1}[t]_D)$ .

## Appendice B

### Rappels des résultats faisceautiques sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ d'après [7]

Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats de [7] que nous utilisons dans ce texte : les notations sont celles des paragraphes précédents. Précisons de nouveau que tous les résultats de loc. cit. sont sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  ce qui permet de l'enlever des notations afin d'alléger les écritures.

Rappelons que pour  $\sigma_v$  (resp.  $\pi_v$ ) une représentation de  $W_v$  (resp. de  $GL_d(F_v)$ ), l'action d'un élément  $g$  sur

$$\sigma_v(n) \quad (\text{resp. } \pi_v\{n\})$$

est donnée par  $\sigma_v(g) |\text{Art}_{F_v}^{-1}(g)|^n$  (resp.  $\pi_v(g) |\det g|^n$ ) où  $|\cdot|$  est la valeur absolue sur  $F_v$  et  $\text{Art}_{F_v}^{-1} : W_v \rightarrow F_v^\times$  le morphisme de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques  $\text{Fr}^{-1}$  de  $W_v$  de  $F_v$  sur les uniformisantes, i.e.  $v(\text{Art}_{F_v}^{-1}(\text{Fr})) = -1$ .

**B.1. sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor.** — Soient  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et  $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$ . La représentation  $\pi_v[t]_D$  de  $D_{v,tg}^\times$ , cf. la notation A.3.1, fournit un système local sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\overline{=tg}}$

$$\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h} = \bigoplus_{i=1}^{e\pi_v} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\rho_{v,i})_{\overline{1}_h}$$

où  $(\pi_v[t]_D)_{|D_{v,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e\pi_v} \rho_{v,i}$  avec  $\rho_{v,i}$  irréductible et muni d'une action de  $P_{tg,d-tg}(F_v)$  via son quotient  $GL_{d-tg} \times \mathbb{Z}$ .

*Remarque :* ce système local est noté  $\mathcal{F}(t, \pi_v)_1$  dans loc. cit. 1.4.7.

**B.1.1. Notation.** — Pour toute strate pure  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\overline{=tg}}$ , on note  $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a$  l'image de  $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h}$  par un élément quelconque de  $a \in GL_d(F_v)/P_{tg,d-tg}(F_v)$ .

*Exemple :* pour  $h \leq tg$  on a ainsi  $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h}$  est la somme directe des  $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a$  sur les strates pures  $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{\overline{=tg}}$  contenues dans  $X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\geq h}$ .

**B.1.2. Définition.** — Les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont les

$$\widetilde{HT}_a(\pi_v, \Pi_t) := \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}$$

et leurs versions induites

$$\widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t) := \left( \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h} \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \right) \times_{P_{tg,d-tg}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où l'action du radical unipotent de  $P_{tg,d-tg}(F_v)$  est triviale, et celle de

$$(g^{\infty,v}, \left( \begin{array}{cc} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{array} \right), \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{tg,d-tg}(F_v) \times W_v$$

est donnée

- par celle de  $g_v^c$  sur  $\Pi_t$  et  $\deg(\sigma_v) \in \mathbb{Z}$  sur  $\Xi^{\frac{tg-d}{2}}$  ainsi que
- celle de  $(g^{\infty,v}, g_v^{et}, \text{val}(\det g_v^c) - \deg \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$  sur  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h} \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}$ , où  $\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$  est défini par  $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$ .

On dit de l'action de  $GL_{tg}(F_v)$  qu'elle est *infinitésimale*, cf. aussi la remarque précédant 1.2.9.

**B.1.3. Notation.** — Pour

- $z_{\mathcal{I}}$  un point géométrique de  $X_{\mathcal{I},\overline{s}}^{-tg}$  et  $i_z : \overline{\{z\}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\overline{s}}$ ,
  - ainsi que  $HT(\pi_v, \Pi_t)$  un système local d'Harris-Taylor sur  $X_{\mathcal{I},\overline{s}}^{-tg}$ ,
- on note

$$\text{ind } z^* HT(\pi_v, \Pi_t) := \text{ind}_{GL_{tg}(\mathcal{O}_v)}^{GL_{tg}(F_v)} i_z^* HT(\pi_v, \Pi_t).$$

**B.1.4. Notations.** — On pose

$$HT(\pi_v, \Pi_t) := \widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t)[d - tg],$$

et le faisceau pervers d'Harris-Taylor associé est

$$P(t, \pi_v) := j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v),$$

ou sa version non induite

$$P(t, \pi_v)_a = i_{a,*}^h i_a^{h,*} P(t, \pi_v) = j_{a,!}^{-tg} HT_a(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v),$$

où  $\mathbb{L}^\vee$  désigne la correspondance locale de Langlands.

*Remarque :* on rappelle que  $\pi'_v$  est inertiuellement équivalente à  $\pi_v$  si et seulement s'il existe un caractère  $\zeta : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$  tel que  $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes (\zeta \circ \text{val} \circ \det)$ . Les faisceaux pervers  $P(t, \pi_v)$  ne dépendent que de la classe d'équivalence inertielle de  $\pi_v$  et sont de la forme

$$P(t, \pi_v) = e_{\pi_v} \mathcal{P}(t, \pi_v)$$

où  $\mathcal{P}(t, \pi_v)$  est un faisceau pervers irréductible.

**B.1.5. Notation.** — On note  $\mathrm{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$  le noyau du morphisme d'adjonction

$$j_!^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t),$$

qui est à support dans  $X_{\bar{I}, \bar{s}}^{\geq tg+1}$ .

**B.1.6. Proposition.** — (cf. [9] 3.3.5) Le faisceau pervers  $\mathrm{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$  est en fait à support dans  $X_{\bar{I}, \bar{s}}^{\geq t(g+1)}$  et le morphisme d'adjonction

$$j_!^{=(t+1)g} j^{=(t+1)g,*} \mathrm{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow \mathrm{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$$

est surjectif.

En itérant cette proposition, on obtient, pour  $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ , la résolution

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow j_!^{=sg} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{Speh}_{s-t}(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{s-t}{2}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow j_!^{=(t+2)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{Speh}_2(\pi_v)) \otimes \Xi^1 \\ \longrightarrow j_!^{=(t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathrm{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

*Remarque :* de cette résolution on en déduit :

- le calcul des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor du théorème 2.2.5 de [7]. Précisément, pour  $g > 1$ , le  $i$ -ème faisceau de cohomologie de  ${}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  est nul sauf si  $i$  est de la forme  $-d + tg + \delta(g-1)$  auquel cas il est isomorphe à  $HT(\pi_v, \Pi_t \{ \frac{-\delta}{2} \} \times \mathrm{Speh}_\delta(\pi_v \{ \frac{t}{2} \})) [tg - d] \otimes \Xi^{\frac{\delta}{2}}$ .
- la description des constituants irréductibles de  $j_!^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  de la proposition 4.3.1, complétée par le corollaire 5.4.1, de [7], cf. aussi le corollaire 3.3.8 de [9], qui dans le groupe de Grothendieck correspondant, s'écrit

$$\left[ j_!^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \right] = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{d}{g} \rfloor - t} \left[ j_{!*}^{=(t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{r}{2}} \right]. \quad (\text{B.1.7})$$

**B.2. sur le faisceau pervers des cycles évanescents.** — La première étape de [7] consiste, cf. loc. cit. définition 2.2.2, à découper  $\Psi_{\mathcal{I}}$  selon les classes d'équivalence inertielles  $\mathrm{Cusp}_v(g)$  des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  pour  $g$  variant de 1 à  $d$  :

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{g=1}^d \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_v(g)} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}. \quad (\text{B.2.1})$$

Les résultats du §7 de [7] sur  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  sont résumés par la proposition 3.4.3 de [9] que nous reproduisons ci-dessous.

**B.2.2. Proposition.** — (cf. [9] 3.4.3) Soit

$$0 = \mathrm{Fil}_!^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \mathrm{Fil}_!^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_!^d(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  de la proposition 1.3.16. Pour tout  $r$  non divisible par  $g$ , le gradué  $\mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  est nul et pour  $r = tg$  avec  $1 \leq t \leq s$ , il est à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq tg}$  avec<sup>(19)</sup>

$$j^{\geq tg, *} \mathrm{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \simeq j^{\geq tg, *} \mathcal{P}(t, \pi_v) \left( \frac{1-t}{2} \right).$$

La surjection  $j_!^{=tg} j^{\geq tg, *} \mathrm{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \rightarrow \mathrm{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ , où dans le groupe de Grothendieck

$$\left[ \mathrm{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \right] = \sum_{i=t}^s \left[ \mathcal{P}(i, \pi_v) \left( \frac{1+i-2t}{2} \right) \right].$$

*Remarque :* dans [9], on explique comment ce résultat permet de calculer les fibres des faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ , i.e. d'en déduire le corollaire 2.2.10 de [7]. En particulier la fibre en un point fermé de  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq tg}$  de  $\mathcal{H}^{tg-d} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  est munie d'une action de  $(D_{v, tg}^\times)^0 := \mathrm{Ker}(\mathrm{val} \circ \mathrm{rn} : D_{v, tg}^\times \rightarrow \mathbb{Z})$  et de  $\varpi_v^{\mathbb{Z}}$  que l'on voit plongé dans  $F_v^\times \subset D_{v, tg}^\times$ . D'après le théorème 2.2.6 de [7], ou plus simplement d'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_{(D_{v, tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v, tg}^\times} \left( \mathcal{H}^{tg-d} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} \right)_{|X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq tg}} &\simeq \mathcal{H}^{tg-d} P(t, \pi_v) \left( \frac{1-t}{2} \right) \\ &\simeq \widetilde{HT}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v) \otimes \Xi^{\frac{1-t}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

**B.2.3. Notation.** — On note

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_!^{tg, -}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \rightarrow \mathrm{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \rightarrow \mathrm{gr}_!^{tg, +}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \rightarrow 0,$$

avec  $\mathrm{gr}_!^{tg, +}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) := \mathcal{P}(t, \pi_v) \left( \frac{1-t}{2} \right)$ .

**B.3. Compléments.** — Les résultats de ce paragraphe sont développés plus en détail dans [10]. L'article n'étant pas encore publié, nous donnons ci-après un rapide aperçu du §6 de loc. cit.

Etant donnée une inclusion de strates pures  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$ , l'ingrédient essentiel et nouveau par rapport à [7] est l'utilisation des morphismes

$$j_{a-c}^{\geq h} : X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h} - X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$$

que l'on notera simplement  $j_{\neq c}^{\geq h}$  lorsque  $a = \overline{1}_h$ . On s'intéressera plus particulièrement, pour  $P$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau pervers supporté dans  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h}$ , aux morphismes d'adjonction  $j_{a-c, !}^{=h} j_{a-c}^{=h, *} P \rightarrow P$ . Dans les applications  $P$  sera en fait à support dans  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h+g}$ , pour  $g \geq 1$ , de sorte que

$$j_{a-c, !}^{=h} j_{a-c}^{=h, *} P = j_{a-c, !}^{=h+g} j_{a-c}^{=h+g, *} P,$$

où  $j_{a-c}^{=h+g} = i^{h+g} \circ j_{a-c}^{\geq h+g}$  avec

$$j_{a-c}^{\geq h+g} : X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h+g} - X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq h+g} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq h+g}.$$

*Remarque :* on autorise  $h = 0$  auquel cas  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, a}^{\geq 0}$  est la variété de Shimura  $X_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathrm{Spec} \mathcal{O}_v$ .

19. à un facteur  $e_{\pi_v}$  près,  $j^{\geq tg, *} \mathrm{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  est donc isomorphe à  $\widetilde{HT}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v) \left( \frac{1-t}{2} \right)$

L'intérêt principal des inclusions  $j_{a-c}^{\geq h}$  est son caractère affine rappelé dans le lemme suivant.

**B.3.1. Lemme.** — *L'inclusion ouverte  $j_{a-c}^{\geq h}$  est affine.*

*Démonstration.* — Par symétrie il suffit de traiter le cas de  $a = \overline{1}_h$  et  $c = \overline{1}_{h+1}$ . Or pour tout  $\text{Spec } A \rightarrow X_{\overline{1}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$ , le fermé  $X_{\overline{1}, \overline{s}, \overline{1}_{h+1}}^{\geq h+1} \times_{X_{\overline{1}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}} \text{Spec } A$  est, avec les notations du §1.2, donné par l'annulation de  $\iota(e_{h+1})$ .  $\square$

En utilisant la description des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor et du complexe des cycles évanescents, donnée dans [7] et rappelée plus haut, nous allons donner quelques résultats sur l'effet du foncteur exact  $j_{\neq c, !}^{\neq h, *}$  sur les faisceaux pervers d'Harris-Taylor et le complexe des cycles évanescents. On commence par  $h = 0$  et un faisceau pervers d'Harris-Taylor  $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$  à support dans  $X_{\overline{1}, \overline{s}}^{\geq tg}$  de sorte que pour toute strate pure  $X_{\overline{1}, \overline{s}, c}^{\geq 1}$ ,

$$j_{\neq c, !}^{\neq 1, *} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \simeq \cdots \simeq j_{\neq c, !}^{\neq tg, *} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)).$$

Pour simplifier les notations on prendra  $c = \overline{1}_1$ .

**B.3.2. Lemme.** — (cf. le corollaire 6.6 de [10]) *Etant donné un système local d'Harris-Taylor  $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$  relativement à une représentation irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $Gl_g(F_v)$ , on a la suite exacte courte*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow & {}^p j_{\overline{1}_1, !}^{\neq (t+1)g} HT_{\overline{1}_{(t+1)g}}(\pi_v, \text{St}_{t+1}(\pi_v)|_{P_{1, (t+1)g-1}(F_v)}) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \\ \rightarrow & j_{\neq \overline{1}_1, !}^{\neq 1, *} ({}^p j_{!*}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))) \rightarrow {}^p j_{\neq \overline{1}_1, !}^{\neq 1, *} j_{\neq \overline{1}_1}^{\neq 1, *} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3.3})$$

où on note

$$\begin{aligned} & {}^p j_{\overline{1}_1, !}^{\neq (t+1)g} HT_{\overline{1}_{(t+1)g}}(\pi_v, \text{St}_{t+1}(\pi_v)|_{P_{1, (t+1)g-1}(F_v)}) := \\ & \text{Ind}_{P_{1, (t+1)g-1, d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1, d-1}(F_v)} {}^p j_{\overline{1}_{(t+1)g}, !}^{\neq (t+1)g} HT_{\overline{1}_{(t+1)g}}(\pi_v, \text{St}_{t+1}(\pi_v)|_{P_{1, (t+1)g-1}(F_v)}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Il s'agit simplement d'identifier  ${}^p \mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_1}^{1, *} ({}^p j_{!*}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)))$  avec le premier terme de la suite exacte courte de l'énoncé. La technique est commune avec les preuves des lemmes qui suivront : on construit tout d'abord une surjection de  ${}^p \mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_1}^{1, *} ({}^p j_{!*}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)))$  vers le faisceau pervers de l'énoncé et on vérifie dans un deuxième temps que les faisceaux de cohomologie de ces deux faisceaux pervers possèdent les mêmes germes en tout point géométrique. Pour le premier point notons tout d'abord que

$${}^p \mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_1}^{1, *} ({}^p j_{!*}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))) \simeq {}^p \mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_1}^{1, *} ({}^p j_{\neq \overline{1}_1, !}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))).$$

Dans [7] 4.5.1, on décrit  $j_{\overline{1}_{tg},!}^{-tg} HT_{\overline{1}_{tg}}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$  dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers Hecke équivariant. En appliquant alors le foncteur  ${}^p\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{tg+1,*}$  à la filtration par les poids de  $j_{\overline{1}_{tg},!}^{-tg} HT_{\overline{1}_{tg}}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ , on obtient

$${}^p\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{tg+1,*} \left( j_{\overline{1}_{tg},!}^{-tg} HT_{\overline{1}_{tg}}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right) \twoheadrightarrow \text{Ind}_{P_{1,tg-1,g,d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1,tg-1,d-tg}(F_v)} j_{\overline{1}_{(t+1)g},!}^{-=(t+1)g} HT_{\overline{1}_{(t+1)g}} \left( \pi_v, \left( \text{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-1}{2} \right\}) \right)_{|M_{tg}(F_v)} \otimes \pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\} \right) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$${}^p\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{tg+1,*} \left( j_{!}^{-tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \right) \twoheadrightarrow \text{Ind}_{P_{1,(t+1)g-1,d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1,d-1}(F_v)} j_{\overline{1}_{(t+1)g},!}^{-=(t+1)g} HT_{\overline{1}_{(t+1)g}} \left( \pi_v, \left( \text{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-1}{2} \right\}) \right)_{|M_{tg}(F_v)} \times \pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\} \right) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}}$$

où d'après le lemme A.1.6,

$$\left( \text{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-1}{2} \right\}) \right)_{|M_{tg}(F_v)} \times \pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\} \simeq \text{St}_{t+1}(\pi_v)_{|M_{(t+1)g}(F_v)}.$$

Ainsi on obtient bien une surjection de  ${}^p\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{1,*} (j_{\neq \overline{1},!}^{-tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)))$  vers le faisceau pervers induit de l'énoncé.

Passons à présent au deuxième point. Pour tout point géométrique  $z$  de  $X_{\overline{L}, \overline{s}, \overline{1}_1}^=h$ , le germe en  $z$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie de  ${}^p\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}}^{1,*} (j_{!}^{-tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)))$  est isomorphe à celui du  $(i-1)$ -ème de  $j_{!}^{-tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ . Ainsi d'après [7], ce germe est

- nul si  $(h, i)$  n'est pas de la forme  $((t+\delta)g, (t+\delta)g - d - \delta)$  avec  $(t+\delta)g \leq d$ ,
- et sinon il est isomorphe au germe en  $z$  de  $HT(\pi_v, \Pi)$  où  $\Pi$  est l'induite normalisée

$$\Pi := \left( \text{St}_t(\pi_v \left\{ -\frac{\delta}{2} \right\}) \right)_{|M_{tg}(F_v)} \times \text{Speh}_{\delta}(\pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\}) \simeq LT(t, \delta - 1, \pi_v)_{|M_{(t+\delta)g}(F_v)},$$

le dernier isomorphisme étant donné par le lemme A.1.6.

On calcule de même le germe en  $z$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie du premier faisceau pervers de la suite exacte courte de l'énoncé. Les conditions d'annulation sont les mêmes et sinon on trouve le germe en  $z$  de  $HT(\pi_v, \Pi')$  avec

$$\Pi' := \text{St}_{t+1}(\pi_v)_{|M_{(t+1)g}(F_v)} \left\{ \frac{1-\delta}{2} \right\} \times \text{Speh}_{\delta-1}(\pi_v \left\{ \frac{t+1}{2} \right\})$$

qui d'après le lemme A.1.6 est isomorphe à  $\Pi \simeq LT_{\pi_v}(t, \delta - 1)_{|M_{(t+\delta)g}(F_v)}$ . □

Considérons à présent  $h \geq 1$  et  $a = \overline{1}_h$ . Pour  $\mathcal{L}[d-h] = HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$  un système local d'Harris-Taylor relativement à une représentation irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$  et  $\Pi_t$  une représentation de  $GL_{tg}(F_v)$  avec  $h = tg$ , ne jouant aucun rôle, on notera

$$P_{\mathcal{L}} := i_*^{h+1} {}^p\mathcal{H}^{-1}i_{\overline{1}_h}^{h+1,*} \left( j_{\overline{1}_h,!}^{-h} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t) \right),$$

de sorte que

$$0 \rightarrow P_{\mathcal{L}} \longrightarrow j_{\overline{1}_h, !}^{\overline{h}} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow {}^p j_{\overline{1}_h, !*}^{\overline{h}} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0.$$

**B.3.4. Lemme.** — On a une suite exacte courte de faisceaux pervers  $P_{\Delta(c)}(F_v)$ -équivariants

$$0 \rightarrow j_{\neq c, !}^{\overline{h+1}} j_{\neq c}^{\overline{h+1},*} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}} \longrightarrow {}^p j_{c, !*}^{\overline{h+g}} j_c^{\overline{h+g},*} P_{\mathcal{L}} \rightarrow 0.$$

*Remarque :* rappelons que dans [7], on calcule dans un premier temps l'image de  $j_{\overline{1}_h, !}^{\overline{h}} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$  dans un groupe de Grothendieck de faisceaux pervers équivariants au moyen de la formule des traces calculant la somme alternée de la cohomologie à support compact de  $HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$ . Moralement donc la suite exacte de l'énoncé est à portée de la formule des traces puisque

- d'une part l'injectivité du morphisme d'adjonction  $j_{\neq c, !}^{\overline{h+1}} j_{\neq c}^{\overline{h+1},*} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}$  est formelle et découle du caractère affine de  $j_{\overline{1}_h, \neq c}^{\overline{h \leq +1}}$ ,
- et que l'image dans le groupe de Grothendieck du quotient se déduit par récurrence de celle de  $P_{\mathcal{L}}$  et de  $j_{\neq c, !}^{\overline{h+1}} j_{\neq c}^{\overline{h+1},*} P_{\mathcal{L}}$ .

*Démonstration.* — En ce qui concerne le fait que le morphisme d'adjonction

$$j_{\neq c, !}^{\overline{h+1}} j_{\neq c}^{\overline{h+1},*} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}$$

soit injectif, on renvoie le lecteur au lemme 2.1.2 qui traite ce point plus généralement sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ . Le quotient de ce morphisme d'adjonction est  ${}^p \mathcal{H}_c^0 i_c^{\overline{h+1},*} P_{\mathcal{L}}$  et il s'agit donc de montrer qu'il est isomorphe à  ${}^p j_{c, !*}^{\overline{h+g}} j_c^{\overline{h+g},*} P_{\mathcal{L}}$ . On suit la stratégie détaillée dans la preuve du lemme précédent : le morphisme d'adjonction  $j_{c, !}^{\overline{h+g}} j_c^{\overline{h+g},*} ({}^p \mathcal{H}_c^0 i_c^{\overline{h+1},*} P_{\mathcal{L}}) \longrightarrow ({}^p \mathcal{H}_c^0 i_c^{\overline{h+1},*} P_{\mathcal{L}})$  est surjectif et fournit donc une surjection

$$({}^p \mathcal{H}_c^0 i_c^{\overline{h+1},*} P_{\mathcal{L}}) \twoheadrightarrow {}^p j_{c, !*}^{\overline{h+g}} j_c^{\overline{h+g},*} P_{\mathcal{L}}.$$

On est, comme précédemment, ramené à montrer que les faisceaux de cohomologie de ces deux faisceaux pervers possèdent les mêmes germes en tout point géométrique de  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq \overline{h+g}}$ . Par symétrie du problème et afin de simplifier les notations on suppose que  $c = \overline{1}_{h+1}$  et que  $z$  est un point géométrique de  $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_{h+\delta}}^{\overline{h+\delta}}$ . Notons que le germe en  $z$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie de  ${}^p \mathcal{H}_c^0 i_c^{\overline{h+1},*} P_{\mathcal{L}}$  est isomorphe à celui de  $P_{\mathcal{L}}$  lequel, d'après la suite exacte courte

$$0 \rightarrow P_{\mathcal{L}} \longrightarrow j_!^{\overline{h}} \mathcal{L}[d-h] \longrightarrow {}^p j_{!*}^{\overline{h}} \mathcal{L}[d-h] \rightarrow 0,$$

est isomorphe à celui du  $(i-1)$ -ème faisceau de cohomologie de  ${}^p j_!^{\overline{h}} \mathcal{L}[d-h]$ . D'après [7], le germe en  $z$  de  $\mathcal{H}^i({}^p j_!^{\overline{h}} \mathcal{L}[d-h])$  est non nul si et seulement si  $\delta$  est de la forme  $rg$  avec  $h+rg \leq d$  et  $i = h-d+r(g-1)$  auquel cas il est isomorphe, en tant que  $P_{\Delta(\overline{1}_{h+1} \subset \overline{1}_{h+rg})}(F_v)$  au germe en  $z$  de

$$HT_{\overline{1}_{h+rg}} \left( \pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{-r}{2} \right\} \otimes \left( \text{Speh}_r(\pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\}) \right)_{|M_{rg}(F_v)} \right) [rg+h-d].$$

En ce qui concerne le germe en  $z$  de  ${}^p j_{c,!}^{-h+g} j_c^{-h+g,*} P_{\mathcal{L}}$ , notons tout d'abord que

$$j_{1_{h+1}}^{-h+g,*} P_{\mathcal{L}} \simeq \text{Ind}_{P_{\Delta(1_{h+1} \subset 1_{h+g})}(F_v)}^{P_{\Delta(1_{h+1})}(F_v)} \left( j_{1_{h+g}}^{-h+g,*} P_{\mathcal{L}} \right),$$

et que donc, d'après [7], le germe en question est isomorphe à celui de

$$HT_{1_{h+rg}} \left( \pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{-r}{2} \right\} \otimes \left( (\pi_v \left\{ \frac{t-r+1}{2} \right\})_{|M_g(F_v)} \times \text{Speh}_{r-1}(\pi_v \left\{ \frac{t+1}{2} \right\}) \right) \right) [rg+h-d].$$

Le résultat découle alors du fait, cf. A.1.6, que  $(\text{Speh}_r(\pi_v))_{|M_{rg}(F_v)}$  est irréductible isomorphe à  $(\pi_v \left\{ \frac{-r+1}{2} \right\})_{|M_g(F_v)} \times \text{Speh}_{r-1}(\pi_v \left\{ \frac{1}{2} \right\})$ .  $\square$

Terminons par l'effet de  $\bar{j}_{\neq a,!} \bar{j}_{\neq a}^*$  sur le complexe des cycles évanescents. Rappelons qu'en notant

$$\bar{j} : X_{\mathcal{I},\bar{\eta}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}} \hookleftarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}} : \bar{i},$$

où  $\bar{j}_! = {}^p \bar{j}_!$  et  $\bar{j}_* = {}^p \bar{j}_*$  pour la  $t$ -structure dont la construction est rappelée au début du §3.2, le complexe des cycles évanescents est  ${}^p \mathcal{H}^{-1} \bar{i}^* \bar{j}_* \bar{\mathbb{Q}}_l$ . Ainsi en utilisant que pour toute strate pure  $X_{\bar{s},a}^{\geq 1}$ , l'inclusion  $\bar{j}_{\neq a} : \bar{X}_{\mathcal{I}} - X_{\bar{s},a}^{\geq 1} \hookrightarrow \bar{X}_{\mathcal{I}} := X_{\mathcal{I}} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_v} \text{Spec } \bar{\mathcal{O}}_v$  étant affine, le lemme 2.1.2 nous donne que  $i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}}$  est pervers et libre, ce qui donne la suite exacte courte de  $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I},\bar{s}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)$

$$0 \rightarrow \bar{j}_{\neq a,!} \bar{j}_{\neq a}^* \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow i_a^1 {}^p \mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \rightarrow 0.$$

Rappelons, cf. [7], que  $\Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l}$  se décompose en une somme directe

$$\Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l} \simeq \bigoplus_{\pi} \Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}$$

où  $\pi$  décrit les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  pour  $1 \leq g \leq d$ .

**B.3.5. Proposition.** — *Avec les notations précédentes, et pour  $\pi$  irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$ , le faisceau pervers  $i_{a,*}^1 {}^p \mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}$  admet une filtration*

$$\text{Fil}_a^1(\Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}) \subset \text{Fil}_a^2(\Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}) \subset \dots \subset \text{Fil}_a^s(\Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}),$$

où  $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$  avec pour gradués

$$\text{gr}_a^k(\Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}) \simeq {}^p j_{a,!}^{-kg} HT_a(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{1-k}{2}}.$$

*Remarque :* comme dans la remarque suivant le lemme B.3.4, ce résultat est à la portée de la formule des traces et permet de simplifier les arguments les plus complexes de [7].

*Démonstration.* — Par symétrie il suffit de considérer le cas  $a = \bar{1}_1$ . On rappelle que d'après [7], l'image  $I_{\pi}$  du morphisme d'adjonction

$$\Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi} \longrightarrow j_*^{-g} j^{=g,*} \Psi_{\mathcal{I},\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}$$

admet une filtration  $\text{Fil}^1(I_\pi) \subset \dots \subset \text{Fil}^s(I_\pi)$  dont les gradués sont  $\text{gr}^k(I_\pi) \simeq {}^p j_{!*}^{\text{=kg}} HT(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$ .

**B.3.6. Lemme.** — Pour tout  $1 \leq r \leq s$ , le faisceau pervers  $i_{1,*}^1 {}^p \mathcal{H}^0 i_{1,*}^{1,*} \text{Fil}^r(I_\pi)$  admet une filtration similaire à celle de l'énoncé de la proposition précédente, i.e. dont les gradués sont les  ${}^p j_{1,*}^{\text{=kg}} HT_{1,*}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{k}{2}}$  pour  $1 \leq k \leq r$ .

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur  $r$  de 1 à  $s$ . Comme il est clair que

$$i_{1,*}^1 {}^p \mathcal{H}^0 i_{1,*}^{1,*} \left( {}^p j_{!*}^{\text{=rg}} HT(\pi_v, \text{St}_r(\pi_v)) \right) \simeq {}^p j_{1,*}^{\text{=rg}} HT_{1,*}(\pi_v, \text{St}_r(\pi_v)),$$

il suffit de vérifier que

$$i_{1,*}^1 {}^p \mathcal{H}^{-1} i_{1,*}^{1,*} \left( {}^p j_{!*}^{\text{=rg}} HT(\pi_v, \text{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-r}{2}} \right) \longrightarrow {}^p \mathcal{H}^0 i_{1,*}^{1,*} \left( \text{Fil}^{r-1}(I_\pi) \right) \quad (\text{B.3.7})$$

est nulle. Or d'après l'hypothèse de récurrence tous les constituants irréductibles de  ${}^p \mathcal{H}^0 i_{1,*}^{1,*} \left( \text{Fil}^{r-1}(I_\pi) \right)$  sont des extensions intermédiaires de systèmes locaux sur des strates  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\text{=kg}}$  pour  $1 \leq k \leq r-1$  alors que  ${}^p \mathcal{H}^{-1} i_{1,*}^{1,*} \left( {}^p j_{!*}^{\text{=rg}} HT(\pi_v, \text{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-r}{2}} \right)$  est à support dans  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq (r+1)g}$  de sorte que (B.3.7) est nécessairement nulle.  $\square$

On a ainsi une surjection de  $i_{1,*}^1 {}^p \mathcal{H}^0 i_{1,*}^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}$  vers le  $\text{Fil}_{1,*}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$  de l'énoncé et comme dans la preuve du lemme B.3.4 il suffit de montrer que ces deux faisceaux pervers ont les mêmes germes en tout point géométrique de  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, 1_1}^{\geq 1}$ . Considérons donc  $z$  un point géométrique de  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, 1_h}^{\text{=h}}$ . D'après [7], la fibre en  $z$  du  $i$ -ème faisceau de cohomologie  $\mathcal{H}^i j_{1_{kg},*}^{\text{=kg}} HT_{1_{kg}}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$  est nulle si  $(h, i)$  n'est pas de la forme  $(tg-d, tg-d+k-t)$  avec  $k \leq t \leq \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$  et sinon est isomorphe à celle de

$$HT_{1_{tg}}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v \{ \frac{k-t}{2} \})) \otimes \text{Speh}_{t-k}(\pi_v \{ \frac{k}{2} \}) \otimes \Xi^{\frac{1+t-2k}{2}}.$$

On en déduit alors que la fibre en  $z$  de  $j_{1,*}^{\text{=kg}} HT_{1,*}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$  est isomorphe à celle de

$$HT_{1_{tg}} \left( \pi_v, \left( \text{St}_k(\pi_v \{ \frac{k-t}{2} \}) \right)_{|M_{kg}(F_v)} \times \text{Speh}_{t-k}(\pi_v \{ \frac{k}{2} \}) \right) \otimes \Xi^{\frac{1+t-2k}{2}},$$

où on induit de  $M_{kg}(F_v) \otimes GL_{(t-k)g}(F_v)$  à  $M_{tg}(F_v)$ . Par ailleurs, en regardant les poids, on voit que la suite spectrale calculant la fibre des faisceaux de cohomologie de  $\text{Fil}_{1,*}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$  en fonction de ceux des  $\text{gr}_{1,*}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$  dégénère en  $E_1$ . D'après A.1.6,

$$\left( \text{St}_k(\pi_v \{ \frac{k-t}{2} \}) \right)_{|M_{kg}(F_v)} \times \text{Speh}_{t-k}(\pi_v \{ \frac{k}{2} \}) \simeq \left( LT_\pi(k, t-1-k)_{\pi_v} \right)_{|M_{tg}(F_v)}$$

de sorte que d'après le résultat principal de [7], la fibre en  $z$  de  $\mathcal{H}^i \left( \text{Fil}_{1,*}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \right)$  est isomorphe à celle de  $\mathcal{H}^i \left( {}^p \mathcal{H}^0 i_{1,*}^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi} \right)$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque* : les mêmes arguments que précédemment appliqués à  $\mathrm{Fil}_!^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$  donnent

$$i_{a,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \left( \mathrm{Fil}_!^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \right) \simeq \mathrm{Fil}_a^r(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}).$$

On en déduit alors que l'image du morphisme d'adjonction

$$j_{\mathbb{1}_1,!}^{\overline{g}} j_{\mathbb{1}_1}^{\overline{g},*} \left( i_{\mathbb{1}_1,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}_1}^{1,*} \mathrm{Fil}_!^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \right) \longrightarrow i_{\mathbb{1}_1,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}_1}^{1,*} \mathrm{Fil}_!^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi})$$

est  $j_{\mathbb{1}_1,!}^{\overline{g}} HT(\pi_v, \pi_v)(\frac{1}{2})$ . Plus généralement les applications successives des morphismes d'adjonction

$$j_{\mathbb{1}_1,!}^{\overline{kg}} j_{\mathbb{1}_1}^{\overline{kg},*} \left( i_{\mathbb{1}_1,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}_1}^{k,*} \mathrm{Fil}_!^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \right) \longrightarrow i_{\mathbb{1}_1,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}_1}^{r,*} \left( \mathrm{Fil}_!^{rg}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \right)$$

donnent pour images les  ${}^p j_{\mathbb{1}_1,!}^{\overline{kg}} HT_{\mathbb{1}_1}(\pi_v, \mathrm{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$  pour  $1 \leq k \leq r$ .

*Remarque* : on notera enfin que de la description des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de  ${}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}_1,!}^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$  à partir de ceux des gradués de la proposition B.3.5, dégénère en  $E_1$ .

## Références

- [1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [2] J. Bellaïche. À propos d'un lemme de Ribet. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 109 :45–62, 2003.
- [3] V.G. Berkovich. étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.
- [4] V.G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2) :367–390., 1996.
- [5] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups. I. *Ann. Scient. de l'ENS 4e série, tome 10 n4*, pages 441–472, 1977.
- [6] C. Bonnafé and R. Rouquier. Coxeter orbits and modular representations. *Nagoya Math. J.*, 183 :1–34, 2006.
- [7] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [8] P. Boyer. Réseaux d'induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate. *Journal of Algebra*, 336, issue 1 :28–52, 2011.
- [9] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de Shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.
- [10] P. Boyer. Groupe mirabolique, stratification de Newton raffinée et cohomologie des espaces de Lubin-Tate. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 148(1) :1–23, 2020.
- [11] P. Boyer. Local Ihara's lemma and applications. *International Mathematics Research Notices*, pages 1–58, 10 2021.

- [12] P. Boyer. Galois irreducibility implies cohomology freeness for KHT Shimura varieties. <https://www.math.univ-paris13.fr/~boyer/recherche/rho-irred2.pdf>, 2022.
- [13] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne  $l$ -entière. *Duke Math. J.* 161 (6), pages 951–1010, 2012.
- [14] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo  $l$ . *Proc. London Math. Soc.* 104, pages 690–727, 2012.
- [15] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [16] L. Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. In *Périodes  $p$ -adiques*, number 223 in *Astérisque*, 1994.
- [17] D. Juteau. Decomposition numbers for perverse sheaves. *Annales de l'Institut Fourier*, 59 (3), pages 1177–1229, 2009.
- [18] M.-F. Vignéras. *Représentations  $l$ -modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [19] M.-F. Vignéras. À propos d'une conjecture de Langlands modulaire. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 415–452. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [20] M.-F. Vignéras. Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.
- [21] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. II. On irreducible representations of  $GL(n)$ . *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.