LA COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE EST LIBRE

par

Pascal Boyer

Résumé. — Le résultat principal de ce travail est l'absence de torsion dans la $\overline{\mathbb{Z}}_l$-cohomologie de la tour de Lubin-Tate. Comme dans [**4**], la stratégie est globale et repose sur l'étude du complexe des cycles évanescents de certaines variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor. Nous reprenons les constructions de [**5**] sur les filtrations de stratification d'un faisceau pervers libre et nous montrons, qu'appliquées aux extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor ainsi qu'au faisceau pervers des cycles évanescents, ces constructions sont ≪ saturées ≫, ce qui dans notre situation signifie que les conoyaux, pris dans la catégorie des faisceaux p-pervers, de tous les morphismes d'adjonction $j_!j^* \to \mathrm{Id}$ considérés, sont sans torsion.

***Abstract* (The cohomology of Lubin-Tate spaces is free).** — The principal result of this work is the freeness in the $\overline{\mathbb{Z}}_l$-cohomology of the Lubin-Tate tower. As in [**4**], the strategy is a global one studying the complexe of nearby cycles of some Shimura varieties of Kottwitz-Harris-Taylor types. We use the constructions of [**5**] on the filtrations of stratification of a free perverse sheaf and we proove that applied to zero extension of Harris-Taylor local systems as well to the perverse sheaf of nearby cycles, these constructions are ≪ saturated ≫, which in our situation, means that the cokernel, taken in the category of p-perverse sheaves, of all the adjonction morphisms $j_!j^* \to \mathrm{Id}$ studied, are free.

Introduction

Dans [**4**], nous avons explicité les groupes de cohomologie à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ de la tour de Lubin-Tate en étudiant le faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{I}}$ des cycles évanescents d'une tour de variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor $X_{\mathcal{I}}$, cf. [**8**], en une place v de son corps reflex F. Le passage du global vers le local est fourni par un analogue du théorème de Serre-Tate

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 14L05, 11F80, 11F55, 11F70, 11G10, 11G18.
Mots clefs. — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, stratification, catégories quasi-abéliennes, théorie de torsion.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

couplé au théorème de comparaison de Berkovich. Pour étudier ce faisceau pervers, nous avons explicité sa filtration de monodromie-poids en décrivant les divers gradués au moyen des faisceaux pervers dits d'Harris-Taylor obtenus comme l'extension intermédiaire des systèmes locaux du même nom introduits dans [**8**]. Plus simplement, on peut considérer la filtration de $\Psi_{\mathcal{I}}$ par les noyaux itérés de la monodromie et donc la suite spectrale

$$E_1^{i,j} = \mathcal{H}^{i+j} \mathrm{gr}^K_{-j}(\Psi_{\mathcal{I}}) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j} \Psi_{\mathcal{I}}$$

calculant les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$ à partir de ceux de ses gradués.

Fait — *(cf.* [**4**] *§5.8) La suite spectrale $E_1^{i,j}$ dégénère en E_1, i.e. pour tout n, le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^n \Psi_{\mathcal{I}}$ admet une filtration dont les gradués sont les $\mathcal{H}^n \mathrm{gr}^K_k(\Psi_{\mathcal{I}})$.*

Cette observation nous fournit *une stratégie* pour montrer que ces $\mathcal{H}^n \Psi_{\mathcal{I}}$ sont sans torsion, cf. la preuve de la proposition 2.4.5, puisqu'il suffit de construire une version entière, i.e. à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_l$, de la filtration de $\Psi_{\mathcal{I}}$ par les noyaux itérés de la monodromie, puis de montrer que les $\mathcal{H}^n \mathrm{gr}^K_k(\Psi_{\mathcal{I}})$ sont sans torsion.

Une version entière de la filtration de $\Psi_{\mathcal{I}}$ par les noyaux itérés de la monodromie est donnée dans [**5**] en utilisant des morphismes d'adjonction $j^{=h}_! j^{=h,*} \to \mathrm{Id}$ associés à la stratification de Newton $j^{=h} : X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}$ de la fibre spéciale géométrique $X_{\mathcal{I},\bar{s}}$ de $X_{\mathcal{I}}$ à la place v. Nous rappelons au §1.3 la construction d'un telle filtration dite de stratification d'un faisceau pervers libre F et dont on note $\mathrm{gr}^k_!(F)$ les gradués.

Cet article se concentre donc sur le deuxième point qui consiste à montrer que les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i \mathrm{gr}^k_!(\Psi_{\mathcal{I}})$ des gradués de la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$, sont sans torsion. Le résultat repose sur une propriété difficile à contrôler de ces filtrations, à savoir qu'elles sont !-saturées i.e. que les conoyaux, pris dans la catégorie des faisceaux p-pervers, des morphismes d'adjonction $j^{=h}_! j^{=h,*} \to \mathrm{Id}$ considérés, sont sans torsion. Ainsi l'essentiel du travail consiste à montrer l'énoncé suivant qui résume les propositions 2.3.7 et 2.4.4.

Proposition — *Les filtrations de stratification construites à l'aide des morphismes d'adjonction $j^{=h}_! j^{=h,*} \to \mathrm{Id}$ pour*
— *d'une part l'extension par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor, et*
— *d'autre part pour le faisceau pervers des cycles évanescents $\Psi_{\mathcal{I}}$,*
sont !-saturées.

À partir de ce résultat, il est relativement aisé d'en déduire, cf. la proposition 2.4.5, que les fibres des faisceaux de cohomologie des $\mathrm{gr}^k_!(\Psi_{\mathcal{I}})$ et donc de $\Psi_{\mathcal{I}}$ sont sans torsion, cf. le théorème 2.4.1. Par passage du global au local via le théorème de Berkovich, nous en déduisons alors la liberté de la cohomologie de la tour de Lubin-Tate, théorème 1.1.4.

En ce qui concerne l'organisation du papier, le résultat principal, théorème 1.1.4, sur l'absence de torsion dans la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, est prouvée au §2.4 en admettant les résultats globaux, propositions 2.3.7 et 2.4.4, sur la saturation qui sont prouvés respectivement aux §3.2 et §3.3. Les notations sur les représentations sont données dans l'appendice A. Les résultats des lemmes et propositions de cet article concernant les

$\overline{\mathbb{Z}}_l$-faisceaux pervers libres sont, d'après [**4**] et [**5**], déjà connus sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$: ceux dont nous avons besoin, sont rappelés en appendice B.

Mentionnons enfin la thèse de H. Wang qui, par voie purement locale en se ramenant aux travaux de Bonnafé et Rouquier [**3**] sur la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig, montre la liberté de l'étage modéré de la cohomologie de la tour de Drinfeld. En utilisant le théorème de Faltings-Fargues, son résultat correspond au cas des représentations cuspidales de niveau zéro.

Table des matières

1. Rappels géométriques

Dans tout ce texte, les lettres $p \neq l$ désigneront deux nombres premiers distincts, d un entier strictement positif et Λ au choix une extension algébrique de $\mathbb{Q}_l$ comme par exemple $\overline{\mathbb{Q}}_l$, l'anneau des entiers d'une telle extension, comme par exemple $\mathbb{Z}_l^{nr}$ ou une extension algébrique de $\mathbb{F}_l$, comme par exemple $\overline{\mathbb{F}}_l$.

1.1. Espaces de Lubin-Tate. — On désignera par K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers, d'idéal maximal $\mathcal{P}_K$, ϖ_K une uniformisante et $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$ son corps résiduel de cardinal $q = p^f$. L'extension maximale non ramifiée de K sera notée K^{nr} de complété $\hat{K}^{nr}$, d'anneau des entiers respectif $\mathcal{O}_{K^{nr}}$ et $\mathcal{O}_{\hat{K}^{nr}}$. Soit $\Sigma_{K,d}$ le $\mathcal{O}_K$-module de Barsotti-Tate formel sur $\overline{\kappa}$ de hauteur d, cf. [**8**] §II. On considère la catégorie C des $\mathcal{O}_K$-algèbres locales artiniennes de corps résiduel $\overline{\kappa}$.

1.1.1. Définition. — Le foncteur qui à un objet R de C associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations par quasi-isogénies sur R de $\Sigma_{K,d}$ munies d'une structure de niveau n est pro-représentable par un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}_{LT,d,n}} = \coprod_{h\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}^{(h)}_{LT,d,n}$ où $\widehat{\mathcal{M}}^{(h)}_{LT,d,n}$ représente le sous-foncteur pour des déformations par des isogénies de hauteur h.

Remarque : chacun des $\widehat{\mathcal{M}}^{(h)}_{LT,d,n}$ est non-canoniquement isomorphe au schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}^{(0)}_{LT,d,n}$ noté $\mathrm{Spf}\,\mathrm{Def}_{d,n}$ dans [**4**]. On notera sans chapeau les fibres génériques de Berkovich de ces espaces ; ce sont donc des $\widehat{K^{nr}}$-espaces analytiques au sens de [**1**] et on note $\mathcal{M}^{d/K}_{LT,n} := \mathcal{M}_{LT,d,n}\hat{\otimes}_{\hat{K}^{nr}}\hat{\overline{K}}$.

Le groupe des quasi-isogénies de $\Sigma_{K,d}$ s'identifie au groupe $D^\times_{K,d}$ des unités de l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$, lequel, par définition, agit sur $\mathcal{M}^{d/K}_{LT,n}$. Pour tout $n \geq 1$, on a une action naturelle de $GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}^n_K)$ sur les structures de niveau et donc sur $\mathcal{M}^{d/K}_{LT,n}$; cette action se prolonge en une action de $GL_d(K)$ sur la limite projective $\lim\limits_{\leftarrow\, n}\mathcal{M}^{d/K}_{LT,n}$. Sur cette limite projective on dispose ainsi d'une action de $GL_d(K) \times D^\times_{K,d}$ qui se factorise par $\Big(GL_d(K) \times D^\times_{K,d}\Big)/K^\times$ où $K^\times$ est plongé diagonalement.

1.1.2. Définition. — Soit $\Psi^i_{K,\Lambda,d,n} \simeq H^i_c(\mathcal{M}^{(0)}_{LT,d,n}\hat{\otimes}_{\hat{K}^{nr}}\hat{\overline{K}}, \Lambda)$ le Λ-module de type fini associé, via la théorie des cycles évanescents de Berkovich, au morphisme structural $\widehat{\mathcal{M}^{(0)}_{LT,d,n}} \longrightarrow \mathrm{Spf}\,\hat{\mathcal{O}}^{nr}_K$.

On notera aussi $\mathcal{U}^i_{K,\Lambda,d,n} := H^i_c(\mathcal{M}^{d/K}_{LT,n}, \Lambda)$ et on pose $\mathcal{U}^i_{K,\Lambda,d} = \lim\limits_{\substack{\longrightarrow \\ n}} \mathcal{U}^i_{K,\Lambda,d,n}$ de sorte que $\mathfrak{K}_n := \mathrm{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_K) \longrightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}^n_K))$ étant pro-p pour tout $n \geq 1$, on a $\mathcal{U}^i_{K,\Lambda,d,n} = (\mathcal{U}^i_{K,\Lambda,d})^{\mathfrak{K}_n}$.

1.1.3. Notation. — *Considérant $\mathcal{U}^i_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,d}$ comme une représentation de $D^\times_{K,d}$, on pose, d'après A.2.6, pour $\overline{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(d)$:*

$$\mathcal{U}^i_{\overline{\tau}} := \mathcal{U}^i_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,d,\overline{\tau}}.$$

La description de la $\overline{\mathbb{Q}}_l$-cohomologie de ces espaces de Lubin-Tate est donnée dans [**4**] théorème 2.3.5. Le résultat principal que nous avons en vue est le suivant.

1.1.4. Théorème. — *Pour tout $h \geq 1$ et pour tout $0 \leq i \leq h-1$, le $\overline{\mathbb{Z}}_l$-module $\mathcal{U}^i_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,h}$ est sans torsion.*

1.2. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires simples. — Soit $F = F^+E$ un corps CM avec $E/\mathbb{Q}$ quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$.

1.2.1. Notation. — *Pour toute place finie w de F, on note F_w le complété de F en cette place, $\mathcal{O}_w$ son anneau des entiers d'idéal maximal $\mathcal{P}_w$ et de corps résiduel $\kappa(w)$.*

Dans [**8**], les auteurs justifient l'existence d'un groupe de similitudes G, noté G_τ dans loc. cit., vérifiant les points suivants :

— $G(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^\times \times U(1, d-1) \times U(0, d)^{r-1}$ où la signature $(1, d-1)$ est celle associée à la place τ ;

— $G(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p)^\times \times \prod_{i=1}^r (B^{op}_{v_i})^\times$ où $v = v_1, v_2, \cdots, v_r$ sont les places de F au dessus de la place u de E telle que $p = u^c u$ et où

— B est une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 vérifiant certaines propriétés, cf. [**8**], dont en particulier d'être soit décomposée soit une algèbre à division en toute place et décomposée à la place v.

Pour tout sous-groupe compact U^p de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \cdots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Ker}(\mathcal{O}^\times_{B_{v_i}} \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}^{m_i}_{v_i})^\times)$$

1.2.2. Notation. — *On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts $U^p(m)$ tels qu'il existe une place x pour laquelle la projection de U^p sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf.* [**8**] *bas de la page 90.*

Remarque : avec les notations précédentes, m_1 définit une application $\mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}$.

1.2.3. Définition. — Pour tout $I \in \mathcal{I}$, on note $X_I \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$ « la variété de Shimura associée à G » construite dans [**8**] et $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ le schéma de Hecke relativement au groupe $G(\mathbb{A}^\infty)$, au sens de [**4**]

Remarque : les morphismes de restriction du niveau $r_{J,I} : X_J \to X_I$ sont finis et plats. et même étales quand $m_1(J) = m_1(I)$.

1.2.4. Notations. — *(cf.* [**4**] *§1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, on note :*

— *$X_{I,s}$ la fibre spéciale de X_I et $X_{I,\bar{s}} := X_{I,s} \times \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique.*

— *Pour tout $1 \leq h \leq d$, $X^{\geq h}_{I,\bar{s}}$ (resp. $X^{=h}_{I,\bar{s}}$) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h, i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).*

— *On notera aussi $X^{\geq 0}_{I,\bar{s}} := X_I$.*

Remarque : pour tout $1 \leq h \leq d$, la strate de Newton de hauteur h est de pure dimension $d-h$; le système projectif associé définit alors un schéma de Hecke $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}}$ (resp. $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}}$) pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$, cf. [**8**] III.4.4, lisse dans le cas de bonne réduction, i.e. quand $m_1 = 0$.

1.2.5. Proposition. — *(cf. [**8**] p.116) Pour tout $1 \leq h < d$, les strates $X^{=h}_{I,\bar{s}}$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$ [1] au sens où il existe un sous-schéma fermé $X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}}$ tel que :*

$$X^{=h}_{I,\bar{s}} \simeq X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}} \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1}).$$

Pour $h=0$, on ne dispose que d'une unique strate et $X^{\geq 0}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_0}}$ désignera encore $X_{\mathcal{I}}$.

Soit $\mathcal{G}(h)$ le groupe de Barsotti-Tate universel sur $X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}}$:

$$0 \to \mathcal{G}(h)^c \longrightarrow \mathcal{G}(h) \longrightarrow \mathcal{G}(h)^{et} \to 0$$

où $\mathcal{G}(h)^c$ (resp. $\mathcal{G}(h)^{et}$) est connexe (resp. étale) de dimension h (resp. $d-h$). Notons

$$\iota_{m_1} : (\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d \longrightarrow \mathcal{G}(h)[p^{m_1}]$$

la structure de niveau universelle. Notant $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$, $X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}}$ est alors défini par la propriété que $\Big\{\iota_{m_1}(e_i) :\ 1 \leq i \leq h\Big\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$.

1.2.6. Notation. — *Pour tout $a \in GL_d(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1})/P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1})$, on notera $X^{=h}_{I,\bar{s},a}$ la strate de $X^{=h}_{I,\bar{s}}$ image par a de $X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}}$. Son adhérence dans $X^{\geq h}_{I,\bar{s}}$ sera notée $X^{\geq h}_{I,\bar{s},a}$.*

Remarque : $X^{=h}_{I,\bar{s},a}$ peut se définir directement en demandant que $\Big\{\iota_{m_1}(a.e_i) :\ 1 \leq i \leq h\Big\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$.

Le système projectif $(X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}})_{I \in \mathcal{I}}$ définit un schéma de Hecke $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$ pour $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d-h}(K)$ où $P_{h,d-h}(K)$ agit à travers le quotient $\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(K)$ de son Levi, via l'application $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$. On dira de l'action de $GL_h(F_v)$ qu'elle est *infinitésimale.*

Par ailleurs l'action d'un élément $w_v \in W_v$ est donnée par l'action de $-\deg(w_v)$ où deg est la composée du caractère non ramifié de W_v, qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes, avec la valuation v de K.

1.2.7. Notations. — *Avec la convention que i (resp. j) correspond à une immersion fermée (resp. une inclusion ouverte), on notera*

$$i^h : X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}} \hookrightarrow X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}}, \qquad i^h_a : X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},a} \hookrightarrow X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}}, \qquad j^{\geq h} : X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}}, \qquad j^{\geq h}_1 : X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}.$$

1. cf. l'appendice A pour les notations

Pour $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$ une strate de $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$, on notera

$$i^{h\leq +1}_{\overline{1_h},a} : X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},a} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}} \quad \text{et} \quad j^{h\leq +1}_{\overline{1_h},\neq a} : X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}} - X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},a} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}.$$

Plus généralement pour $1 \leq h \leq h+\delta \leq d$, on notera

$$i^{h\leq +\delta}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} : X^{\geq h+\delta}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{B}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}.$$

Dans le cas où $X^{\geq h+\delta}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{B}} = X^{\geq h+\delta}_{\mathcal{I},\bar{s}} \cap X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}$, on notera simplement $i^{h\ \leq +\delta}_{\mathcal{A}} : X^{\geq h+\delta}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}$.

Remarque : afin de de n'avoir que des faisceaux sur $X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}}$, on utilisera aussi la notation

$$j^{=h} := i^h \circ j^{\geq h}$$

qui, contrairement aux préconisations précédentes, n'est pas une inclusion ouverte.

1.2.8. Lemme. — *L'inclusion ouverte $j^{h\leq +1}_{\overline{1_h},\neq a}$ est affine.*

Démonstration. — Par symétrie il suffit de traiter le cas de $a = \overline{1_{h+1}}$. Or pour tout $\operatorname{Spec} A \longrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$, le fermé $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_{h+1}}} \times_{X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}} \operatorname{Spec} A$ est, avec les notations précédentes, donné par l'annulation de $\iota(e_{h+1})$. □

1.3. Filtrations de stratification d'après [5]. — Soient S le spectre d'un corps fini et X un schéma de type fini sur S, alors la t-structure usuelle sur $\mathcal{D}(X,\Lambda) := D^b_c(X,\Lambda)$ est

$$\begin{aligned} A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X,\Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \mathcal{H}^k i_x^* A = 0,\ \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X,\Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \mathcal{H}^k i_x^! A = 0,\ \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \hookrightarrow X$ et $\mathcal{H}^k(K)$ désigne le k-ième faisceau de cohomologie de K.

1.3.1. Notation. — *On note ${}^p\mathcal{C}(X,\Lambda)$, ou simplement ${}^p\mathcal{C}$ quand le contexte est clair, le cœur de cette t-structure. Les foncteurs cohomologiques associés seront notés ${}^p\mathcal{H}^i$; pour un foncteur T, on notera ${}^pT := {}^p\mathcal{H}^0 \circ T$.*

Remarque : ${}^p\mathcal{C}(X,\Lambda)$ est une catégorie abélienne noethérienne et Λ-linéaire. Pour Λ un corps, cette t-structure est autoduale pour la dualité de Verdier. Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, on peut munir la catégorie abélienne $\overline{\mathbb{Z}}_l$-linéaire ${}^p\mathcal{C}(X,\overline{\mathbb{Z}}_l)$ d'une théorie de torsion $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ où $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{F}$) est la sous-catégorie pleine des objets de l^∞-torsion T (resp. l-libres F) , i.e. tels que $l^N 1_T$ est nul pour N assez grand (resp. $l.1_F$ est un monomorphisme).

1.3.2. Définition. — Soit d'après [**10**] la t-structure duale

$$\begin{aligned} {}^{p+}\mathcal{D}^{\leq 0}(X,\overline{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1}(X,\overline{\mathbb{Z}}_l) :\ {}^p\mathcal{H}^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X,\overline{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0}(X,\overline{\mathbb{Z}}_l) :\ {}^p\mathcal{H}^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

de cœur ${}^{p+}\mathcal{C}(X,\overline{\mathbb{Z}}_l)$ muni de sa théorie de torsion $(\mathcal{F},\mathcal{T}[-1])$ « duale » de celle de ${}^p\mathcal{C}(X,\overline{\mathbb{Z}}_l)$.

Remarque : pour $j : U \hookrightarrow X \hookleftarrow F : i$ avec U ouvert de complémentaire F, la t-structure ainsi définie sur X muni de la théorie de torsion précédente, est obtenue par recollement à partir de celles sur U et F selon la recette

$$\mathcal{D}^{\leq 0}(X,\Lambda) := \{K \in \mathcal{D}(X,\Lambda) :\ j^*K \in \mathcal{D}^{\leq 0}(U,\Lambda) \text{ et } i^*K \in \mathcal{D}^{\leq 0}(F,\Lambda)\}$$
$$\mathcal{D}^{\geq 0}(X,\Lambda) := \{K \in \mathcal{D}(X,\Lambda) :\ j^*K \in \mathcal{D}^{\geq 0}(U,\Lambda) \text{ et } i^!K \in \mathcal{D}^{\geq 0}(F,\Lambda)\}.$$

où les théories de torsion sont reliées par

$$\mathcal{T} := \{P \in {}^p\mathcal{C}(X,\Lambda) :\ {}^pi^*P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{T}_U\}$$
$$\mathcal{F} := \{P \in {}^p\mathcal{C}(X,\Lambda) :\ {}^pi^!P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{F}_U\}$$

1.3.3. Définition. — (cf. [**5**] §1.3) Soit $\mathcal{F}(X,\Lambda) := {}^p\mathcal{C}(X,\Lambda) \cap {}^{p+}\mathcal{C}(X,\Lambda)$ la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » sur X à coefficients dans Λ. On identifiera aussi $\mathcal{F}(F,\Lambda)$ avec son image dans $\mathcal{F}(X,\Lambda)$ via le foncteur $i_* = i_! = i_{!*}$.

1.3.4. Lemme. — *(cf. [**5**] lemme 1.3.11) Pour $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert, on a*

$${}^{p+}j_!\mathcal{F}(U,\Lambda) \subset \mathcal{F}(X,\Lambda) \quad \textit{et} \quad {}^pj_*\mathcal{F}(U,\Lambda) \subset \mathcal{F}(X,\Lambda).$$

Remarque : si $j_!$ est t-exact alors, cf. [**5**] proposition 1.3.14, $j_! = {}^pj_! = {}^{p+}j_!$ et donc $j_!(\mathcal{F}(U,\Lambda)) \subset \mathcal{F}(X,\Lambda)$.

1.3.5. Lemme. — *Soit $L \in \mathcal{F}(X,\Lambda)$ tel que $j_!j^*L \in \mathcal{F}(X,\Lambda)$, alors $i_*{}^p\mathcal{H}^{-\delta}i^*L$ est nul pour tout $\delta \neq 0,1$; pour $\delta = 1$ c'est un objet de $\mathcal{F}(X,\Lambda)$.*

Démonstration. — Partons du triangle distingué $j_!j^*L \longrightarrow L \longrightarrow i_*i^*L \rightsquigarrow$. En utilisant la perversité de L et $j_!j^*L$, la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué précédent s'écrit

$$0 \to i_*{}^p\mathcal{H}^{-1}i^*L \longrightarrow {}^pj_!j^*L \longrightarrow L \longrightarrow i_*{}^p\mathcal{H}^0i^*L \to 0.$$

La liberté de $i_*{}^p\mathcal{H}^{-1}i^*L$ découle alors de celle, par hypothèse, de ${}^pj_!j^*L = j_!j^*L$. □

Rappelons, cf. [**5**] §1.3, que tout morphisme $f : L \longrightarrow L'$ de $\mathcal{F}(X,\Lambda)$ possède :
— un noyau $\mathrm{Ker}_{\mathcal{F}} f$ qui est le p-noyau de f, i.e. dans ${}^p\mathcal{C}(X,\Lambda)$;
— un conoyau $\mathrm{Coker}_{\mathcal{F}} f$ qui est le $p+$-conoyau de f, i.e. dans ${}^{p+}\mathcal{C}(X,\Lambda)$;
— une image $\mathrm{Im}_{\mathcal{F}} f$ qui est la $p+$-image de f ;
— une coimage $\mathrm{Coim}_{\mathcal{F}} f$ qui est la p-image de f ;
tels que $0 \to \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}} f \longrightarrow L \longrightarrow \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}} f \to 0$ et $0 \to \mathrm{Im}_{\mathcal{F}} f \longrightarrow L' \longrightarrow \mathrm{Coker}_{\mathcal{F}} \to 0$ sont des suites strictement exactes de $\mathcal{F}(X,\Lambda)$, où le qualificatif strict est rappelé dans la définition suivante.

1.3.6. Définition. — Un morphisme $f : L \longrightarrow L'$ de $\mathcal{F}(X,\Lambda)$ est dit *strict* et on note $f : L \mapsto\!\!\!\!\!\!\!+\ L'$, si la flèche canonique $\mathrm{Coim}_{\mathcal{F}} f \longrightarrow \mathrm{Im}_{\mathcal{F}} f$ est un isomorphisme.

Remarque : un monomorphisme $f : L \hookrightarrow L'$ dans ${}^p\mathcal{C}(X,\Lambda)$ entre faisceaux pervers libres, est strict si et seulement si son conoyau dans ${}^p\mathcal{C}(X,\Lambda)$ est libre. Cela revient aussi à demander que f est un monomorphisme de ${}^{p+}\mathcal{C}(X,\Lambda)$.

1.3.7. Définition. — Un *bimorphisme* de $\mathcal{F}(X,\Lambda)$ est un monomorphisme qui est aussi un épimorphisme.

Exemple : $\mathrm{Coim}_{\mathcal{F}} f \longrightarrow \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}\, f$ est un bimorphisme.

1.3.8. Notation. — *On notera $L \lhook\joinrel\twoheadrightarrow L'$ un bimorphisme de $\mathcal{F}(X,\Lambda)$. Si le support du noyau dans ${}^{p+}\mathcal{C}(X,\Lambda)$ est de dimension strictement plus petite que celle du support de L, on notera $L \lhook\joinrel\twoheadrightarrow_+ L'$.*

Remarque : tout morphisme $f : L \longrightarrow L'$ de $\mathcal{F}(X,\Lambda)$ admet, cf. [**5**] proposition 1.3.7, une factorisation canonique $L \relbar\joinrel\mapstochar\joinrel\twoheadrightarrow \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}} f \lhook\joinrel\twoheadrightarrow \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}\, f \lhook\joinrel\mapstochar\joinrel\rightarrow L'$.

1.3.9. Définition. — Pour L un objet de $\mathcal{F}(X,\Lambda)$, on dira que

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_e = L$$

est une $\mathcal{F}$-filtration si pour tout $1 \leq i \leq e-1$, $L_i \hookrightarrow L_{i+1}$ est un monomorphisme strict.

Pour $L \in \mathcal{F}(X,\Lambda)$, on considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[rrd, "\mathrm{can}_{*,L}"] & & \\
{}^{p+}j_!j^*L \arrow[ru, "\mathrm{can}_{!,L}"] \arrow[r, two heads, "\mapstochar" marking] & {}^pj_{!*}j^*L \arrow[r, hook, two heads, "+"'] & {}^{p+}j_{!*}j^*L \arrow[r, hook, "\mapstochar" marking] & {}^pj_*j^*L
\end{tikzcd}$$

où la ligne du bas est la factorisation canonique de ${}^{p+}j_!j^*L \longrightarrow {}^pj_*j^*L$ et les flèches $\mathrm{can}_{!,L}$ et $\mathrm{can}_{*,L}$ données par adjonction.

1.3.10. Définition. — On note $\mathcal{P}_L := i_*{}^p\mathcal{H}^{-1}_{libre} i^*j_*j^*L = \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}\Big({}^{p+}j_!j^*L \twoheadrightarrow {}^pj_{!*}j^*L\Big)$. Avec les notations du diagramme ci-dessus, on pose

$$\mathrm{Fil}^0_{U,!}(L) = \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}(\mathrm{can}_{!,L}) \quad \text{ et } \quad \mathrm{Fil}^{-1}_{U,!}(L) = \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}\Big((\mathrm{can}_{!,L})_{|\mathcal{P}_L}\Big).$$

Remarque : d'après le lemme 2.1.2 de [**5**], $\mathrm{Fil}^{-1}_{U,!}(L) \subset \mathrm{Fil}^0_{U,!}(L) \subset L$ est une $\mathcal{F}$-filtration au sens de 1.3.9, avec $L/\mathrm{Fil}^0_{U,!}(L) \simeq i_*{}^{p+}i^*L$ et ${}^pj_{!*}j^*L \lhook\joinrel\twoheadrightarrow_+ \mathrm{Fil}^0_{U,!}(L)/\mathrm{Fil}^{-1}_{U,!}(L)$, ce qui d'après le lemme 1.3.13 de [**5**] donne un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
{}^pj_{!*}j^*L \arrow[r, hook, two heads, "+"'] \arrow[rd, hook, two heads, "+"'] & \mathrm{Fil}^0_{U,!}(L)/\mathrm{Fil}^{-1}_{U,!}(L) \arrow[d, hook, two heads, "+"'] \\
 & {}^{p+}j_{!*}j^*L.
\end{tikzcd}$$

1.3.11. Définition. — La filtration $\mathrm{Fil}^{-1}_{U,!}(L) \subset \mathrm{Fil}^0_{U,!}(L) \subset L$ est dite *saturée* si $\mathrm{can}_{!,L}$ est strict i.e. si $\mathrm{Fil}^0_{U,!}(L) = \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}}(\mathrm{can}_{!,L})$.

Soit X un schéma muni d'une stratification $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \cdots \supset X^{\geq e}\}$, pour tout $1 \leq h < e$, on notera $X^{1 \leq h} := X^{\geq 1} - X^{\geq h+1}$ ainsi que $j^{1 \leq h} : X^{1 \leq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$ et $i^h : X^{\geq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$. On utilisera aussi $j^{\geq h} : X^{=h} := X^{\geq h} - X^{\geq h+1} \hookrightarrow X^{\geq h}$ et $j^{=h} = i^h \circ j^{\geq h}$.

1.3.12. Définition. — Un faisceau pervers P sera dit à support dans $X^{\geq h}$, si h est le plus petit entier $1 \leq r \leq d$ tel que $j^{=r,*}P$ est non nul. Dans le cas où $X = X_{\mathcal{I},\bar{s}}$, on dira que P est à support dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}$ s'il est à support dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}}$ et si pour toute strate $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$, le système local $j^{=h,*}_a P$ est non nul si et seulement si $a \in \mathcal{A}$.

Remarque : si $L \in \mathcal{F}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ est à support dans $X^{\geq h}$ alors $j^{=h,*}L$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-système local sur $X^{=h}$.

1.3.13. Définition. — Pour L un objet de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ et $1 \leq r \leq e-1$, soit

$$\mathrm{Fil}^r_{\mathfrak{S},!}(L) := \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}\Big(j^{1\leq r}_! j^{1 \leq r,*}L \longrightarrow L\Big).$$

1.3.14. Proposition. — *(cf.* [**5**] *§2.2) La définition précédente munit fonctoriellement tout objet L de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ d'une $\mathcal{F}$-filtration, au sens de 1.3.9, dite de stratification*

$$0 = \mathrm{Fil}^0_{\mathfrak{S},!}(L) \subset \mathrm{Fil}^1_{\mathfrak{S},!}(L) \subset \mathrm{Fil}^2_{\mathfrak{S},!}(L) \cdots \subset \mathrm{Fil}^{e-1}_{\mathfrak{S},!}(L) \subset \mathrm{Fil}^e_{\mathfrak{S},!}(L) = L.$$

Remarque : dualement on peut définir $\mathrm{Fil}^{-r}_{\mathfrak{S},*}(L) = \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}\Big(\mathrm{can}_{*,L} : L \longrightarrow {}^p j^{1\leq r}_* j^{1\leq r,*}L\Big)$ de façon à obtenir une $\mathcal{F}$-filtration $0 = \mathrm{Fil}^{-e}_{\mathfrak{S},*}(L) \subset \mathrm{Fil}^{1-e}_{\mathfrak{S},*}(L) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^0_{\mathfrak{S},*}(L) = L$ dont on note $\mathrm{gr}^{-r}_{\mathfrak{S},*}(L)$ les gradués.

1.3.15. Définition. — On dira que L est $\mathfrak{S}_!$*-saturé* (ou plus simplement !-saturée si la stratification $\mathfrak{S}$ est clairement identifiée), si pour tout $1 \leq r \leq e-1$ le morphisme d'adjonction $j^{1\leq r}_! j^{1\leq r,*}L \longrightarrow L$ est strict, i.e. si $\mathrm{Fil}^r_{\mathfrak{S},!}(L) = \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}}\Big(j^{1\leq r}_! j^{1\leq r,*}L \longrightarrow L\Big)$. Autrement dit si pour tout $1 \leq r \leq e-1$, ${}^p i^{r+1,*}L$ est un objet de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$.

Remarque : les filtrations $\mathrm{Fil}^{\bullet}_{\mathfrak{S},!}$ et $\mathrm{Fil}^{\bullet}_{\mathfrak{S},*}$ ne sont, en général, pas assez fines. Au §2.3 de [**5**], on définit des filtrations les plus fines possible relativement à $\mathfrak{S}$ au sens suivant.

1.3.16. Définition. — Un faisceau pervers $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$ est dit $\mathfrak{S}$*-adapté* s'il existe $1 \leq h \leq e$ tel que $L \simeq i^h_* i^{h,*}L$ et que le morphisme d'adjonction $j^{\geq h}_! j^{\geq h,*}\Big(i^{h,*}L\Big) \longrightarrow i^{h,*}L$ induit un bimorphisme

$${}^p j^{=h}_{!*} j^{=h,*}L \lhook\joinrel\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow_+ L.$$

Une $\mathcal{F}$-filtration sera dite $\mathfrak{S}$*-adaptée* si tous ses gradués le sont.

Dans [**5**] proposition 2.3.3, en utilisant les $\mathrm{Fil}^{-1}_{U,!}$, on construit de façon fonctorielle la filtration exhaustive de stratification de tout objet L de $\mathcal{F}(X,\Lambda)$, $\mathfrak{S}$-adaptée au sens précédent

$$0=\mathrm{Fill}^{-2^{e-1}}_{\mathfrak{S},!}(L)\subset \mathrm{Fill}^{-2^{e-1}+1}_{\mathfrak{S},!}(L)\subset\cdots\subset \mathrm{Fill}^{0}_{\mathfrak{S},!}(L)\subset\cdots\subset \mathrm{Fill}^{2^{e-1}-1}_{\mathfrak{S},!}(L)=L.$$

Décrivons rapidement la construction de loc. cit. :

— on commence par regarder le morphisme d'adjonction $j^{=1}_!j^{=1,*}L\longrightarrow L$ dont le conoyau Q_1 donnera des gradués pour des indices strictement positifs alors que le noyau P_1 de $j^{=1}_!j^{=1,*}L\longrightarrow j^{=1}_{!*}j^{=1,*}L$ donnera des gradués pour des indices strictement négatifs, le gradué d'indice 0 sera tel que $j^{=1}_{!*}j^{=1,*}L\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow_+ \mathrm{gr}^0_{\mathfrak{S},!}(L)$.

— On passe alors à la strate suivante $X^{=2}_{\mathcal{I},\bar s}$ pour P_1 et Q_1. Pour $F:=P_1$ (resp. $F:=Q_1$), on considère $j^{=2}_!j^{=2,*}F\longrightarrow F$. Le conoyau de ce morphisme donnera des gradués pour les indices $-2^{e-2}<k<0$ (resp. $2^{e-2}<k<2^{e-1}$), alors que le noyau de $j^{=2}_!j^{=2,*}F\longrightarrow j^{=2}_{!*}j^{=2,*}F$ donnera des gradués pour les indices strictement inférieurs à -2^{e-2} (resp. $0<k<2^{e-2}$) ; le gradué d'indice $k=-2^{e-2}$ (resp. $k=2^{e-2}$) vérifiant $j^{=2}_{!*}j^{=2,*}F\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow_+ \mathrm{gr}^k_{\mathfrak{S},!}(L)$.

— On traite ainsi toutes les strates jusqu'à $h=e$.

1.3.17. Définition. — On dira que L est *exhaustivement* $\mathfrak{S}_!$*-saturé* (resp. *exhaustivement* $\mathfrak{S}_!$*-parfait*) si dans la construction des $\mathrm{Fill}^\bullet_{\mathfrak{S},!}(L)$ tous les morphismes d'adjonction $\mathrm{can}_!$ considérés sont stricts, cf. 1.3.11 (resp. surjectifs dans ${}^{p+}\mathcal{C}(X,\Lambda)$).

Remarque : si L et L' à support dans une même strate de $\mathfrak{S}$, sont exhaustivement $\mathfrak{S}_!$-parfait, leur somme directe ne l'est plus à priori. Pour que ce soit vrai, il faut et il suffit que les strates de leurs constituants irréductibles soient les mêmes.

Dans la situation des variétés de Shimura du §1.2, la stratification $\mathfrak{S}$ sera donnée par celle de Newton de 1.2.4 ; nous ferons alors disparaitre $\mathfrak{S}$ des notations. On introduit par ailleurs la notation suivante, cf. aussi la définition 1.3.10.

1.3.18. Notation. — *Étant donné un faisceau p-pervers F supporté par $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s}$, au sens de la définition 1.3.12, tel que $j^{\geq h,*}F$ est libre, on notera P_F le noyau de $j^{=h}_!j^{=h,*}F\longrightarrow F$ soit*

$$P_F:=i^{h+1}_*\Big({}^p\mathcal{H}^{-1}i^{h+1,*}F\Big).$$

Dans le cas où $F\simeq j^{=h}_{!*}\mathcal{L}[d-h]$ pour un système local libre $\mathcal{L}$ sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar s}$, on le notera $P_{\mathcal{L}}$.

Remarque : d'après le lemme 1.3.5, P_F est libre même si F ne l'est pas.

2. Preuve du théorème principal : réduction

2.1. Rappels sur les faisceaux pervers de Hecke. — Soit $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}=(X_I)_{I\in\mathcal{I}}$ un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G},\mathcal{I})$ au sens du §1.2.2 de [**4**], pour $\mathbb{G}=G(\mathbb{A}^{\infty,v})\otimes P(F_v)$ où $P(F_v)$ est un sous-groupe de $G(F_v)\simeq GL_d(F_v)$. Rappelons que

— $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ est un système projectif de schémas relativement à des morphismes dits de restriction du niveau $[1]_{J,I} : \mathbb{X}_J \longrightarrow \mathbb{X}_I$, finis et plats ;
— pour tout $g \in \mathbb{G}$ et tous $J \subset I$ tels que $g^{-1}Jg \subset I$, on dispose d'un morphisme fini $[g]_{J,I} : \mathbb{X}_J \longrightarrow \mathbb{X}_I$ vérifiant les propriétés suivantes
  — pour $g \in I$ et $J \subset I$, $[g]_{J,I} = [1]_{J,I}$;
  — pour tous $g, g' \in \mathbb{G}$, et tous $K \subset J \subset I$ tels que $g^{-1}Jg \subset I$ et $(g')^{-1}Kg' \subset J$, on a $[gg']_{K,I} = [g]_{J,I} \circ [g']_{K,J} : \mathbb{X}_K \longrightarrow \mathbb{X}_J \longrightarrow \mathbb{X}_I$.

La catégorie $\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ (resp. $\mathrm{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$) des *faisceaux pervers* (resp. des *faisceaux*) *de Hecke* sur $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ à coefficients dans Λ est définie comme la catégorie dont :
— les objets sont les systèmes $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ où $\mathcal{F}_I$ est un faisceau pervers (resp. faisceau) sur $\mathbb{X}_I$ à coefficients dans Λ, tels que pour tout $g \in \mathbb{G}$ et $J \subset I$ tel que $g^{-1}Jg \subset I$, on dispose d'un morphisme de faisceaux sur $\mathbb{X}_I$, $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \longrightarrow [g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$ soumis à la condition de cocycle $u_{K,I}(g'g) = [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \circ u_{J,I}(g)$;
— Les flèches sont les systèmes $(f_I : \mathcal{F}_I \longrightarrow \mathcal{F}'_I)_{I \in \mathcal{I}}$ avec des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_I \arrow[r, "u_{J,I}(g)"] \arrow[d, "f_I"] & {[g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J)} \arrow[d, "{[g]_{J,I,*}(f_J)}"] \\ \mathcal{F}'_I \arrow[r, "u_{J,I}(g)"] & {[g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J)} \end{tikzcd}$$

Remarque : par rapport à [**4**] §1.3.7, on a supprimé les conditions (ii) et (iii). Les propositions 6.1 et 6.2 de loc. cit. sont encore valables, i.e. $\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ et $\mathrm{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ sont des catégories abéliennes munies de foncteurs $j_!, i*$ (resp. Rj_*, i_*, resp. $j_*, Ri^!$) qui sont t-exacts à droite (resp. t-exacts, resp. t exacts à gauche) avec les propriétés d'adjonction habituelles, de sorte que l'on se retrouve à nouveau dans une situation de recollement.

Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, comme les $[g]_{J,I,*}$ sont t-exacts, les théories de torsion à chaque étage munissent $\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ d'un « système » de théories de torsion et donc d'un « système » de t-structure $p+$, i.e. à chaque étage.

2.1.1. Notation. — *On notera $\mathcal{F}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » de Hecke, i.e. le système de Hecke des $\mathcal{F}(\mathbb{X}_I, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ pour $I \in \mathcal{I}$.*

2.2. Cycles évanescents et systèmes locaux d'Harris-Taylor entiers. —

2.2.1. Définition. — Pour tout $I \in \mathcal{I}$, le faisceaux pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\eta_v,I}(\Lambda[d-1])(\frac{d-1}{2})$ sur $X_{I,\bar{s}}$ sera noté $\Psi_{I,\Lambda}$. Le faisceau pervers de Hecke associé sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}$ est noté $\Psi_{\mathcal{I},\Lambda}$.

Remarque : soit, cf. [**8**] III.2, $\mathcal{L}_\xi$ le système local attaché à une représentation irréductible algébrique ξ de G sur Λ. Alors $R\Psi_{\eta_v,\mathcal{I}}(\mathcal{L}_\xi) \simeq R\Psi_{\eta_v,\mathcal{I}}(\Lambda) \otimes \mathcal{L}_\xi$, i.e. d'un point de vue faisceautique, le rôle de $\mathcal{L}_\xi$ est transparent ce qui justifie de n'étudier que le cas ξ trivial.

2.2.2. Lemme. — *Pour* $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ *est un objet de* $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I},\bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$.

Démonstration. — Le complexe $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ est pervers relativement à la t-structure usuelle notée p de sorte que son dual de Verdier $D\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ est $(p+)$-pervers. Ainsi comme $D\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l} \simeq \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$, on en déduit que $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ est pervers pour les deux t-structures p et $p+$, i.e. c'est un objet de $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I},\bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$. □

2.2.3. Définition. — À l'aide des variétés d'Igusa de première et seconde espèce, les auteurs de [**8**], associent à toute Λ-représentation admissible ρ_v de $\mathcal{D}_{v,h}^\times$, un Λ-système local $\mathcal{L}_{\Lambda,\overline{1_h}}(\rho_v)$ sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$ muni d'une action de $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$, où le deuxième facteur agit via la projection $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v) \longrightarrow \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(\mathcal{O}_v)$ comme dans la remarque suivant 1.2.6. On note alors

$$\mathcal{L}_\Lambda(\rho_v) := \mathcal{L}_{\Lambda,\overline{1_h}}(\rho_v) \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)} GL_d(\mathcal{O}_v)$$

sa version induite sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}}$.

Remarque : pour ρ_v une représentation de $D_{v,h}^\times$, on notera $\mathcal{L}_\Lambda(\rho_v)$ pour $\mathcal{L}_\Lambda(\rho_{v,|\mathcal{D}_{v,h}^\times})$.

Le découpage (B.2.9) de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ selon les classes d'équivalence inertielles des représentations irréductibles cuspidales π_v de $GL_g(F_v)$ pour g variant de 1 à d, n'est plus valable sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$. On peut utiliser la proposition A.2.6 afin de décomposer, pour ρ_v une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation entière de $D_{v,h}^\times$,

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\rho_v) \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\rho_{v,\bar{\tau}}),$$

où $\rho_{v,\bar{\tau}}$ désigne la $\bar{\tau}$-composante de ρ_v au sens de la proposition A.2.6. En appliquant cette décomposition à la restriction $\Big(\Psi_{\mathcal{I},\Lambda}\Big)_{|X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}}}$ du faisceau pervers des cycles évanescents à la strate $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}}$, cf. (B.2.10), on obtient nos premiers systèmes locaux d'Harris-Taylor entiers.

2.2.4. Proposition. — *(cf.* [**8**] *proposition IV.2.2 et le §2.4 de* [**4**]*)*
On a un isomorphisme[2] $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d-h}(F_v) \times W_v$*-équivariant*

$$\mathrm{ind}_{(D_{v,h}^\times)^0\varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,h}^\times} \Big(\mathcal{H}^{h-d-i}\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}\Big)_{|X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}}^{h-1-i}),$$

où $\mathcal{U}_{\bar{\tau}}^\bullet$ *est défini en 1.1.3.*

2.2.5. Notation. — *Pour* $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$, *on notera* $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar{\tau})$ *pour* $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}}^{h-1})$ *et* $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})$ *pour la version induite.*

En utilisant (B.2.10), on peut s'amuser à décrire $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ à partir des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-systèmes locaux d'Harris-Taylor de [**4**]. Pour ce faire introduisons la notation suivante.

2. Noter le décalage $[d-1]$ dans la définition de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$.

2.2.6. Notation. — *Avec les notations de A.2.7 et A.2.9, notons*

$$\mathcal{J}(\bar\tau) = \{-1 \leq i \leq s(\bar\tau) \text{ tel que } g_i(\bar\tau) \text{ divise } h\}.$$

Remarque : d'après A.2.7, on a $g_{-1}(\bar\tau) \mid g_0(\bar\tau) \mid \cdots \mid g_{s(\bar\tau)}$, de sorte que $\mathcal{J}(\bar\tau)$ est de la forme

$$\mathcal{J}(\bar\tau) = \{-1, \cdots, i_{\bar\tau}\}.$$

2.2.7. Proposition. — *Pour $\bar\tau$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible de $D_{v,h}^\times$, on a*

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{i \in \mathcal{J}(\bar\tau)} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\bar\tau)} j_{\overline{1_h}}^{=h,*} \mathcal{P}(\frac{h}{g_i(\bar\tau)}, \pi_v)(\frac{1-\frac{h}{g_i(\bar\tau)}}{2}). \tag{2.2.8}$$

Démonstration. — D'après [**4**] théorème 2.2.4, cf. aussi la proposition B.2.2, les gradués de la filtration par les poids de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ sont les $\mathcal{P}(t,\pi_v)(\frac{1-t+2i}{2})$ où

— π_v décrit les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour g variant de 1 à d,

— t varie de 1 à $\lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ et i de 0 à $t-1$.

Le résultat découle alors de la formule (B.2.10). □

Remarque : en utilisant la définition de $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ en terme d'extension intermédiaire d'un système local d'Harris-Taylor, cf. le §B.1, on peut exprimer $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,1}(\bar\tau)$ en termes des systèmes locaux $\widetilde{HT}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$.

Revenons à notre motivation principale qui est de montrer que les fibres des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ sont sans torsion. L'idée est de filtrer $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ de sorte que d'une part les fibres des faisceaux de cohomologie des gradués soient sans torsion et que d'autre part la suite spectrale calculant les fibres des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ à partir de celles de ses gradués, dégénère en E_1 sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Considérant le deuxième de ces points, on pourrait séparer les contributions des différents π_v mais d'un point de vue pratique, cf. la proposition 2.2.11, reposant sur les morphismes d'adjonction $j_!^{=h} j^{=h,*} \longrightarrow \mathrm{Id}$, il suffit de les regrouper selon leur $\bar\tau$-type au sens de la définition suivante.

2.2.9. Définition. — Pour un système local sans torsion $\mathcal{L}$ sur $X_{\mathcal{I},\bar s}^{=h}$, on écrit

$$\mathcal{L} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\rho_v} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\rho_v)^{m_{\rho_v}(\mathcal{L})}$$

où ρ_v décrit les représentations irréductibles admissibles de $D_{v,h}^\times$, les multiplicités $m_{\rho_v}(\mathcal{L})$ étant presque toutes nulles. Pour $\bar\tau$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible de $D_{v,h}^\times$, le système local $\mathcal{L}$ est dit de $\bar\tau$-type $\geq i$ (resp. pure de $\bar\tau$-type i) si tout ρ_v tel que $m_{\rho_v}(\mathcal{L}) \neq 0$, est, au sens de A.2.9, de $\bar\tau$-type $\geq i$ (resp. de $\bar\tau$-type i).

Remarque : d'après la proposition précédente, en général, $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau)$ n'est pas de pur $\bar\tau$-type. On introduit donc sa $\bar\tau$-filtration naïve au sens suivant.

2.2.10. Définition. — Notons pour $k=-1,\cdots,s(\bar\tau)$,

$$\mathrm{Fil}_k(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)) := \bigoplus_{i=-1}^{k} \bigoplus_{\pi_v\in \mathrm{Scusp}_i(\bar\tau)} j^{=h,*}_{\overline{1_h}} \mathcal{P}(\frac{h}{g_i(\bar\tau)},\pi_v)(\frac{1-\frac{h}{g_i(\bar\tau)}}{2})$$

le facteur direct de $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)$; on note $\mathrm{gr}_k(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau))$ les gradués de cette filtration. Soit alors

$$\mathrm{gr}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)) = \mathrm{Fil}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)) := \mathrm{Fil}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)) \cap \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau),$$

et $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)_{\geq 0} := \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)/\,\mathrm{Fil}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau))$. On définit ensuite

$$\mathrm{gr}_0(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)) := \mathrm{gr}_0(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)) \cap \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)_{\geq 0}$$

et $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)_{\geq 1} := \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)_{\geq 0}/\mathrm{gr}_0(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau))$. En continuant ce processus, on construit la $\bar\tau$-filtration naïve

$$\mathrm{Fil}_{-1}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)) \subset \mathrm{Fil}_0(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_{i_{\bar\tau}}(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)) = \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau)$$

dont les gradués $\mathrm{gr}_i(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau))$, pour $i\in\mathcal{J}(\bar\tau)$, sont de pur $\bar\tau$-type égal à i au sens de la définition précédente.

Remarque : on pourrait raffiner la construction précédente et construire des réseaux stables de chacun des $j^{=h,*}_{\overline{1_h}}\mathcal{P}(\frac{h}{g_i(\bar\tau)},\pi_v)(\frac{1-\frac{h}{g_i(\bar\tau)}}{2})$. En suivant cette stratégie, les énoncés des paragraphes suivants possèdent ainsi leur version relative à une unique $\overline{\mathbb{Q}}_l$-cuspidale. En fait un tel raffinement n'est pas réellement nécessaire puisque la propriété essentielle dont nous aurons besoin est celle de la proposition suivante, cependant le lecteur ne souhaitant pas « mélanger » les diverses cuspidales, est libre de penser aux énoncés des paragraphes suivants comme relatifs à un unique $\overline{\mathbb{Q}}_l$-système local d'Harris-Taylor.

2.2.11. Proposition. — *Pour tout i, l'extension par zéro de $\mathrm{gr}_i(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau))$ est exhaustivement !-parfaite au sens de la définition 1.3.17.*

Démonstration. — La propriété se lit sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on s'y ramène donc. Notons tout d'abord que pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ et pour tout $t\geq 1$, d'après [**5**] corollaire 3.3.8, le faisceau pervers $j^{\geq tg}_!\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v,t)[d-tg]$ est exhaustivement !-parfait. D'après la remarque après la définition 1.3.17, le fait que l'extension par zéro de $\mathrm{gr}_i(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_h}}(\bar\tau))$ soit exhaustivement !-parfait découle du fait que pour tout $\pi_v\in\mathrm{Scusp}_i(\bar\tau)$, les constituants irréductibles de $j^{\geq h}_!\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v,t)[d-h]$, où $t=\frac{h}{g_i(\bar\tau)}$, ont pour support les strates $X^{\geq h+kg_i(\bar\tau)}_{\mathcal{I},\bar s}$, pour $k=0,1,\cdots,\lfloor\frac{d-h}{g_i(\bar\tau)}\rfloor$, indépendamment de $\pi_v\in\mathrm{Scusp}_i(\bar\tau)$.

□

Remarque : $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\bar\tau)$, n'est pas exhaustivement !-parfait puisque les strates de ses composants irréductibles dépendent de π_v selon leur $\bar\tau$-type. Autrement dit la définition 2.2.10 propose le regroupement maximal pour que la propriété d'être exhaustivement !-parfait soit conservée.

2.3. Sur les extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor. — Partant des systèmes locaux de 2.2.5, on peut construire un certain nombre de nouveaux systèmes locaux en procédant comme dans la définition suivante.

2.3.1. Définition. — Pour $\bar\tau \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$, soit $\mathrm{Loc}(\bar\tau)$ le plus petit ensemble de systèmes locaux sur les strates de Newton ouvertes $X^{=h'}_{\mathcal{I},\bar s}$ pour $h' \geq h$, tel que

— $\mathrm{Loc}(\bar\tau)$ contient les $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau)$;

— il est stable par le processus suivant : pour $\mathcal{L} \simeq i^h_*\mathcal{L}' \in \mathrm{Loc}(\bar\tau)$ avec $\mathcal{L}'$ un système local sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar s}$ et un épimorphisme strict $j^{=h}_!\mathcal{L}[d-h] \mathrel{\mapstochar\twoheadrightarrow} F$ de noyau P_F, les systèmes locaux de la filtration de stratification exhaustive de P_F appartiennent à $\mathrm{Loc}(\bar\tau)$.

— si $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \in \mathrm{Loc}(\bar\tau)$ alors tout réseau stable de $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ appartient aussi à $\mathrm{Loc}(\bar\tau)$.

Remarque : pour $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \in \mathrm{Loc}(\bar\tau)$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-système local sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar s}$ et F un quotient de $j^{=h}_!\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}[d-h]$, on a diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& & F \arrow[d] \\
P_{\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}} \arrow[r, hook] & j^{=h}_!\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}[d-h] \arrow[ur, two heads] \arrow[r, two heads] & j^{=h}_{!*}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}[d-h] \\
P_F \arrow[u, hook, dashed] \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

qui fournit une injection $P_F \hookrightarrow P_{\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}}$.

2.3.3. Notations. — *Pour tout $h' \geq h$ (resp. $i \in \mathcal{J}(\bar\tau)$), on notera*

— $\mathrm{Loc}(h',\bar\tau)$ *(resp.* $\mathrm{Loc}(\bar\tau(i))$*) le sous-ensemble de* $\mathrm{Loc}(\bar\tau)$ *des systèmes locaux à support dans $X^{=h'}_{\mathcal{I},\bar s}$ (resp. de pur $\bar\tau$-type égal à i).*

— $\mathrm{Loc}(h',\bar\tau(i)) := \mathrm{Loc}(h',\bar\tau) \cap \mathrm{Loc}(\bar\tau(i))$.

— $\mathrm{Loc}(h') = \coprod_{1\leq h\leq h'} \coprod_{\bar\tau\in\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathrm{Loc}(h',\bar\tau)$ *et* $\mathrm{Loc} := \coprod_{1\leq h\leq d}\mathrm{Loc}(h)$.

— *pour $X^{=h'}_{\mathcal{I},\bar s,a}$ une strate de $X^{=h'}_{\mathcal{I},\bar s}$, on notera avec un indice a, les systèmes locaux supportés par $X^{=h'}_{\mathcal{I},\bar s,a}$.*

2.3.4. Proposition. — *Pour $\bar\tau \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ et $i \in \mathcal{J}(\bar\tau)$,*

(i) l'ensemble $\mathrm{Loc}(h',\bar\tau(i))$ *est non vide si et seulement si $h \leq h' \leq d$ est de la forme $h' = h + kg_i(\bar\tau)$.*

(ii) Pour $\mathcal{L} \in \mathrm{Loc}(h',\bar\tau(i))$, les systèmes locaux de la filtration exhaustive de stratification de $j^{=h'}_{!*}\mathcal{L}[d-h']$ sont tous dans $\mathrm{Loc}(\bar\tau(i))$.

(iii) Pour $\mathcal{L} \in \mathrm{Loc}(h',\bar\tau(i))$ et z un point géométrique de $X^{=h'}_{\mathcal{I},\bar s}$, l'action infinitésimale[3] *de $GL_{h'}(F_v)$ sur la fibre en z de $\mathcal{L}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l$ se décompose en une somme de représentations*

3. cf. la remarque qui suit 1.2.6

irréductibles dont le support cuspidal est un segment de Zelevinsky relativement à des cuspidales $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\bar\tau)$.

Démonstration. — Toutes ces questions se résolvent en regardant sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et concernent donc les systèmes locaux $\widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t)$ avec les notations du §B.1. Par définition $\widetilde{HT}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-t}{2}} \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$ appartient à $\mathrm{Loc}(\bar\tau)$ si et seulement si $\pi_v[t]_D \in \mathcal{C}_{\bar\tau}$; il est dans $\mathrm{Loc}(\bar\tau(i))$ si et seulement si $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\bar\tau)$, au sens de la notation A.2.10. Le résultat découle alors de la description (B.1.8) des constituants irréductibles de $j_!^{=h} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$, du diagramme (2.3.2) et des observations élémentaires suivantes :

— pour $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\bar\tau)$, les supports de ces constituants sont de la forme $X_{\mathcal{I},\bar s}^{=h+rg_i(\bar\tau)}$.

— Par définition $\widetilde{HT}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \mathrm{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-t+r}{2}} \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$ appartient à $\mathrm{Loc}(h + rg_i(\bar\tau), \bar\tau(i))$.

— Avec les notations de B.1, les deux sous-quotients irréductibles de $\mathrm{St}_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \mathrm{St}_r(\pi_v)$ ont pour support cuspidal un segment de Zelevisky relativement à π_v.

— Les $\bar{\mathbb{Q}}_l$-systèmes locaux irréductibles de $\mathrm{Loc}(h', \bar\tau(i))$, s'obtiennent en remplaçant dans $\widetilde{HT}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \mathrm{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-t+r}{2}} \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$, la représentation $\mathrm{St}_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \mathrm{St}_r(\pi_v)$ par $\mathrm{St}_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \Pi$ où Π est une représentation irréductible de $GL_{rg}(F_v)$ de même support cuspidal que $\mathrm{St}_r(\pi_v)$ et en faisant varier π_v, t et r tels que $\pi_v[t] \in \mathrm{Scusp}_i(\bar\tau)$ et $tg + rg_i(\bar\tau) = h'$.

□

2.3.5. Définition. — Un faisceau pervers $F \in \mathcal{F}(X_{\mathcal{I},\bar s}, \Lambda)$ est dit de pur $\bar\tau$-type égal à i, si tous les systèmes locaux de sa filtration exhaustive de stratification, appartiennent à $\mathrm{Loc}(\bar\tau(i))$.

2.3.6. Définition. — Un faisceau p-pervers F sera dit $\bar\tau$-admissible s'il existe $i \in \mathcal{J}(\bar\tau)$ tel qu'au sens de la définition 2.3.5, il est de pur $\bar\tau$-type i et qu'il vérifie les propriétés suivantes :

— $g_i(\bar\tau) > 1$,

— son support est une réunion de strate $X_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}}^{\geq h_0}$ pour h_0 de la forme $h_0 = h + kg_i(\bar\tau)$ avec $k \geq 0$;

— le morphisme d'adjonction $j_{\mathcal{A},!}^{=h_0} j_{\mathcal{A}}^{=h_0,*} F \longrightarrow F$ est surjectif dans ${}^p\mathcal{C}(X_{\mathcal{I},\bar s}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$.

Remarque : comme noté plus haut, d'après le corollaire 3.3.8 de [**5**], un faisceau p-pervers $\bar\tau$-admissible F est exhaustivement !-parfait au sens de la définition 1.3.17.

L'ingrédient principal de cet article est la proposition suivante dont la preuve est reportée au §3.2.

2.3.7. Proposition. — *Soit F un faisceau p-pervers $\bar\tau$-admissible, alors P_F est !-saturé.*

Remarque : le lecteur notera que F n'est pas supposé libre mais que, d'après 1.3.5, P_F l'est. En outre P_F est aussi $\bar\tau$-admissible, son support étant de la forme $X_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}_0}^{\geq h_0+\delta g_i(\bar\tau)}$.

2.3.8. Corollaire. — *Soient $\bar\tau \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ et F un faisceau p-pervers $\bar\tau$-admissible de pur $\bar\tau$-type i à support dans $X^{\geq h_0}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}}$, dont on note $X^{\geq h_0+\delta g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}_0}$ le support de P_F. Il existe alors :*

- *un entier $0 \leq r \leq \lfloor \frac{d-h_0}{g_i(\bar\tau)} \rfloor - \delta$,*
- *pour tout $k = 0, \cdots, r$, un système local $\mathcal{L}_k \in \mathrm{Loc}(h_0 + (\delta+k)g_i(\bar\tau), \bar\tau(i))$ sur un ensemble $X^{\geq h_0+(\delta+k)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}_k}$ de strates,*

ainsi qu'une résolution

$$0 \to j^{=h_0+(\delta+r)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A}_r,!}\mathcal{L}_r[d-h_0-(r+\delta)g_i(\bar\tau)] \longrightarrow \cdots \longrightarrow j^{=h_0+(1+\delta)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A}_1,!}\mathcal{L}_1[d-h_0-(\delta+1)g_i(\bar\tau)] \longrightarrow j^{=h_0+\delta g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A}_0,!}\mathcal{L}_0[d-h_0-\delta g_i(\bar\tau)] \longrightarrow P_F \to 0.$$

Remarque : pour $F = {}^p j^{=h_0}_{\mathcal{A},!*}\mathcal{L}[d-h_0]$ avec $\mathcal{L} \in \mathrm{Loc}(h_0, \bar\tau(i))_{\mathcal{A}}$, on a $\delta = 1$, $r = \lfloor \frac{d-h_0}{g_i(\bar\tau)} \rfloor - 1$ et pour tout $k = 0, \cdots, r$, on a $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}$. La résolution s'écrit alors

$$0 \to j^{=h_0+rg_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A},!}\mathcal{L}_r[d-h_0-(r+1)g_i(\bar\tau)] \longrightarrow \cdots \longrightarrow j^{=h_0+2g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A},!}\mathcal{L}_1[d-h_0-2g_i(\bar\tau)] \longrightarrow j^{=h_0+g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A},!}\mathcal{L}_0[d-h_0-g_i(\bar\tau)] \longrightarrow P_{\mathcal{L}} \to 0,$$

pour des systèmes locaux $\mathcal{L}_k$ que l'on pourrait aisément exprimer à l'aide des notations du §B.1 : ces précisions ne sont toutefois pas nécessaire pour ce que l'on cherche à prouver.

On a aussi un énoncé dual pour $0 \to {}^{p+}j^{=h_0}_{\mathcal{A},!*}\mathcal{L}[d-h_0] \longrightarrow j^{=h_0}_{\mathcal{A},*}\mathcal{L}[d-h_0] \longrightarrow Q_{\mathcal{L}} \to 0$ avec $Q_{\mathcal{L}} := i^{h_0+1}_{\mathcal{A},*}{}^p\mathcal{H}^0_{libre} i^{h_0+1,*}_{\mathcal{A}}\ {}^{p+}j^{=h_0}_{\mathcal{A},!*}\mathcal{L}[d-h_0]$ et

$$0 \to Q_{\mathcal{L}} \longrightarrow j^{=h_0+g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A},*}\mathcal{L}'_0[d-h_0-g_i(\bar\tau)] \longrightarrow \cdots \longrightarrow j^{=h_0+rg_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A},!}\mathcal{L}'_r[d-h_0-(r+1)g_i(\bar\tau)] \to 0$$

Sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, ces résolutions se déduisent simplement des résultats de [**4**], cf. (B.1.7), le faire pour un F général comme dans l'énoncé ci-dessus serait aussi quasi-immédiat. L'apport nouveau de 2.3.8, porte sur le fait que les flèches de la résolution sont strictes.

Démonstration. — Le faisceau pervers $j^{=h_0}_{\mathcal{A},!}j^{=h_0,*}_{\mathcal{A}}F$ est $\bar\tau$-admissible de pur $\bar\tau$-type i et la proposition 2.3.7 appliquée à F, nous fournit alors un épimorphisme strict

$$j^{=h_0+\delta g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A}_0,!}j^{=h_0+\delta g_i(\bar\tau),*}_{\mathcal{A}_0}P_F \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!+\ P_F$$

dont on note $P_{F,1}$ le noyau et $\mathcal{L}_0 := j^{=h_0+\delta g_i(\bar\tau),*}_{\mathcal{A}_1}P_F$. Considérons alors $F_1 = P_F$ qui est $\bar\tau$-admissible ainsi que l'épimorphisme, strict d'après la proposition 2.3.7 appliquée à F_1,

$$j^{=h_0+(\delta+1)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A}_1,!}j^{=h_0+2g_i(\bar\tau),*}_{\mathcal{A}_1}P_{F,1} \twoheadrightarrow P_{F,1} = P_{F_1},$$

où $X^{\geq h_0+(\delta+1)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}_1}$ est le support de $P_{F_1}=P_{F,1}$: on note $\mathcal{L}_1 := j^{=h_0+2g_i(\bar\tau),*}_{\mathcal{A}_1} P_{F,1}$. La situation est résumée par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
P_{F,1} \arrow[r, hook, "+"] & j^{=h_0+\delta g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A}_0,!}\mathcal{L}_0[d-h_0-\delta g_i(\bar\tau)] \arrow[r, two heads, "+"] & P_F \\
j^{=h_0+(\delta+1)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A}_1,!}\mathcal{L}_1[d-h_0-(\delta+1)g_i(\bar\tau)] \arrow[u, two heads, "+"] \arrow[ur, dashed, "\backslash"] \arrow[r, equal] & j^{=h_0+(\delta+1)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{A}_1,!} j^{=h_0+(\delta+1)g_i(\bar\tau),*}_{\mathcal{A}_1} P_{F,1} & \\
P_{F,2}. \arrow[u, hook, "+"] & &
\end{tikzcd}$$

où on pose $F_2=P_{F,1}$ et $P_{F,2}=P_{F_2}$. On reprend alors le raisonnement pour F_2 et ainsi de suite. $\square$

2.3.9. Corollaire. — *Avec les notations du corollaire précédent, les fibres des faisceaux de cohomologie de F sont sans torsion.*

Démonstration. — On utilise la résolution du corollaire précédent qui nous donne que pour un point géométrique z de $X^{=h'}_{\mathcal{I},\bar s}$, la fibre en z du faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^j P_F$ est nulle

— si h' n'est pas de la forme $h_0+(\delta+k)g_i(\bar\tau)$ pour $0\leq k\leq r$;

— si $h'=h_0+(\delta+k)g_i(\bar\tau)$ et si z n'est pas un point de $X^{=h_0+(\delta+k)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}_k}$;

— si, pour z un point de $X^{=h_0+(\delta+k)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}_k}$, j est distinct de $h_0+(\delta+k)g_i(\bar\tau)-d-k$.

Enfin pour z un point de $X^{=h_0+(\delta+k)g_i(\bar\tau)}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}_k}$ et $j=h_0+(\delta+k)g_i(\bar\tau)-d-k$, cette fibre est celle de $\mathcal{L}_k$ qui est donc sans torsion. On conclut alors à l'aide de la suite exacte courte

$$0\to P_F \longrightarrow j^{=h_0}_{\mathcal{A},!} j^{=h_0,*}_{\mathcal{A}} F \longrightarrow F\to 0.$$

$\square$

Bien que ce soit inutile pour prouver le théorème principal 2.4.1 de cet article, la proposition 2.3.11 suivante généralise le corollaire précédent. Considérons pour un temps une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation $\bar\tau$ de dimension 1 de $D^\times_{v,h}$ et $\mathcal{L}\in \mathrm{Loc}(h,\bar\tau)$ un système local tel que $\mathcal{L}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l$ est irréductible. Alors $F:={}^p j^{=h}_{!*}\mathcal{L}[d-h]$ est un faisceau p-pervers de pur $\bar\tau$-type -1 avec donc $g_{-1}(\bar\tau)=1$.
Remarque : sous ces hypothèses on a $\mathcal{L}\simeq\overline{\mathbb{Z}}_l$ où l'action du groupe fondamental $\Pi_1(X^{=h}_{\mathcal{I},\bar s})$ de $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar s}$ se factorise par son quotient $\Pi_1(X^{=h}_{\mathcal{I},\bar s})\twoheadrightarrow \mathcal{D}^\times_{v,h}$, où l'action de $\mathcal{D}^\times_{v,h}$ est donnée par un caractère χ_v.

2.3.10. Lemme. — *Avec les notations précédentes, on a*

$${}^p j^{\geq h}_{!*}\mathcal{L}[d-h]\simeq {}^{p+}j^{\geq h}_{!*}\mathcal{L}[d-h]\simeq \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h]_{|X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}}\times_{P_{h,d-h}(F_v)} GL_d(F_v).$$

Démonstration. — Comme $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}} = X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}} \times_{P_{h,d-h}(F_v)} GL_d(F_v)$, il suffit de montrer que

$$ {}^p j^{\geq h}_{\overline{1_h},!*} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \simeq {}^{p+} j^{\geq h}_{\overline{1_h},!*} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \simeq \overline{\mathbb{Z}}_{l,|X^{\geq h}_{\mathcal{I},\overline{1_h}}}[d-h]. $$

Or $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$ étant lisse sur $\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p$, $\overline{\mathbb{Z}}_l[d-h]$ y est pervers au sens des deux t-structures avec $i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}$ et $i^{h\leq +1,!}_{\overline{1_h}} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \in {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 1}$, d'où le résultat. □

En particulier les faisceaux de cohomologie de ${}^p j^{=h}_{!*} \mathcal{L}[d-h]$ sont sans torsion. Ce fait se généralise en enlevant l'hypothèse irréductible : en effet il suffit d'invoquer, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie d'un tel ${}^p j^{=h}_{!*} \mathcal{L}[d-h]$ à partir de ceux d'une filtration obtenue en filtrant $\mathcal{L}$ via une décomposition de $\mathcal{L} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ selon le procédé simpliste de 2.2.10.

2.3.11. Proposition. — *Pour tout $\mathcal{L} \in \operatorname{Loc}(h_0, \bar{\tau})$, les faisceaux de cohomologie de ${}^p j^{=h_0}_{!*} \mathcal{L}[d-h_0]$ sont sans torsion.*

Démonstration. — En procédant comme dans la définition 2.2.10, on construit une filtration de $P_{\mathcal{L}}$ dont les gradués $\operatorname{gr}_i(P_{\mathcal{L}})$ pour $i \in \mathcal{J}(\bar{\tau})$, sont $\bar{\tau}$-admissibles de pur $\bar{\tau}$-type i. Pour i tel que $g_i(\bar{\tau}) > 1$ (resp. $g_i(\bar{\tau}) = 1$) d'après le corollaire 2.3.9 (resp. d'après la remarque précédente), les faisceaux de cohomologie des $\operatorname{gr}_i(P_{\mathcal{L}})$ sont sans torsion. Notons alors que sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, les $\operatorname{gr}_i(P_{\mathcal{L}})$ sont en somme directe, de sorte que la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de $P_{\mathcal{L}}$ à partir de ceux des $\operatorname{gr}_i(P_{\mathcal{L}})$ dégénère en E_1. Ainsi les faisceaux de cohomologie de $P_{\mathcal{L}}$ sont sans torsion, et donc ceux de ${}^p j^{=h_0}_{!*} \mathcal{L}[d-h_0]$ aussi. □

2.4. Faisceaux de cohomologie des cycles évanescents. — D'après le théorème de comparaison de Berkovich, cf. [**2**], le théorème 1.1.4 découle de l'énoncé suivant que nous allons prouver en supposant, tout d'abord que les propositions 2.3.7 et 2.4.4 sont vraies. Rappelons que 2.3.7 sera prouvée au §3.2 alors que 2.4.4 le sera au §3.3.

2.4.1. Théorème. — *Pour tout i, les $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ sont sans torsion.*

Notons Iw_v le sous-groupe d'Iwahori de $GL_d(\mathcal{O}_v)$ des matrices triangulaires supérieures modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_v$, et soit $\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ le faisceau pervers des cycles évanescents de la variété de Shimura « de Hecke » $X_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v}$ de niveau Iwahori en v.

2.4.2. Lemme. — *Pour tout i, les $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ sont sans torsion.*

Démonstration. — Rappelons que $X_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$ a une réduction strictement semi-stable, i.e. $X_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v,\bar{s}} = \bigcup_{i=1}^d Y_i$ avec $Y_i \longrightarrow \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p$ lisse de pure dimension $d-1$ avec pour $i \neq j$, Y_i et Y_j ne possédant aucune composante connexe en commun. Selon la coutume pour $S \subset \{1, \cdots, d\}$, on note

$$ Y_S = \bigcap_{i \in S} Y_i, \qquad Y_S^0 = Y_S - \bigcup_{S \subset T} Y_T, \qquad X^{\geq h}_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v,\bar{s}} = \bigcup_{\sharp S \geq d-h} Y_S, \qquad X^{=h}_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v,\bar{s}} = \bigcup_{\sharp S = d-h} Y_S^0, $$

et $a_q : \coprod_{\sharp S=q} Y_S \longrightarrow X_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v,\bar{s}}$. Rappelons aussi que $\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v}$ est représenté par un bicomplexe, cf. [**9**] 3.6.7, tel qu'en notant $\tau_{\leq}^{hor}$ la troncation naïve horizontal, la filtration induite par $\tau_{\leq}^{hor}$ coïncide avec celle par les noyaux itérés de la monodromie avec pour gradués

$$\mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v}) \simeq \Big[i^*\mathcal{H}^{p+1}\bar{j}_*\overline{\mathbb{Z}}_l(1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow i^*\mathcal{H}^d\bar{j}_*\overline{\mathbb{Z}}_l(d-p) \to 0 \Big],$$

le premier faisceau étant placé en degré p. On en déduit en particulier que les faisceaux de cohomologie de $\mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v})$ sont sans torsion. □

2.4.3. Lemme. — *La filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ est saturée et les faisceaux de cohomologie de ses gradués sont sans torsion.*

Démonstration. — Nous avons vu que la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$ coïncide avec celle par les noyaux de la monodromie ; il reste alors à vérifier que pour tout $1 \leq p \leq d$, le morphisme d'adjonction $j_!^{=p} j^{=p,*}\Big(\mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v})\Big) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v})$ est strict. Dans ${}^{p+}\mathcal{C}$, on écrit

$$0 \to P_p \longrightarrow j_!^{=p} j^{=p,*}\Big(\mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v})\Big) \longrightarrow \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v}) \to 0$$

avec $0 \to P_{p,div} \longrightarrow P_p \longrightarrow T_p \to 0$, où $P_{p,div}$ est le plus grand sous-objet divisible de P_p et T_p son quotient de torsion. Supposons par l'absurde qu'il existe $1 \leq p \leq s$ tel que T_p est non nul et soit z un point générique du support de T. Alors $(\mathcal{H}^1 P_p)_z \simeq (\mathcal{H}^1 T_p)_z \neq 0$ est non nul et de torsion ainsi donc que $(\mathcal{H}^0 \mathrm{gr}_p^K(\Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v}))_z \simeq (\mathcal{H}^1 P)_z$, ce qui contredit le lemme précédent. □

Laissons à présent de côté le niveau Iwahori en v pour revenir au cas général. D'après la proposition 3.4.3 de [**5**], cf. aussi la proposition B.2.2, la filtration de stratification $\mathrm{Fil}_!^\bullet(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ est telle que les gradués $\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) := \mathrm{Fil}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) / \mathrm{Fil}_!^{h-1}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ sont à support dans $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$, où avec les notations de 2.2.5,

$$j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})[d-h].$$

2.4.4. Proposition. — *La filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ est saturée, i.e. pour tout $1 \leq h \leq d$,*

$$\bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})[d-h] \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!+\;\; \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}).$$

Remarque : la preuve sera donnée au §3.3. Le lecteur pourra trouver une illustration de cette filtration pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l$, à la figure 1 de [**5**].

2.4.5. Proposition. — *Le théorème 2.4.1 découle des propositions 2.3.7 et 2.4.4.*

Démonstration. — D'après 2.4.4 pour $j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq \bigoplus_{\bar\tau\in\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau)$, le morphisme d'adjonction $\bigoplus_{\bar\tau} j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau)[d-h] \longrightarrow \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ est un épimorphisme strict ; notons P_h son noyau. Fixons un $\bar\tau_0 \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ et considérons le poussé en avant $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_h \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \bigoplus_{\bar\tau} j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau)[d-h] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{h,\bar\tau_0} \arrow[r] & j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau_0)[d-h] \arrow[r, dashed] & \mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

ainsi que $P_{h,\bar\tau_0}$ le noyau de $j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau_0)[d-h] \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$.

2.4.6. Lemme. — *Les faisceaux de cohomologie de* $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ *sont sans torsion.*

Démonstration. — En procédant comme dans la définition 2.2.10, on filtre le faisceau pervers $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ de sorte que ses gradués $\mathrm{gr}_i\Big(\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})\Big)$ sont $\bar\tau_0$-admissibles de pur $\bar\tau_0$-type i. Si $g_i(\bar\tau_0) > 1$ (resp. $g_i(\bar\tau_0) = 1$), d'après le corollaire 2.3.9 (resp. d'après le lemme 2.4.2), les faisceaux de cohomologie des $\mathrm{gr}_i\Big(\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})\Big)$ sont sans torsion. En utilisant la dégénérescence en E_1, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, de la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$, à partir de ceux de $\mathrm{gr}_i\Big(\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})\Big)$, on en déduit que les faisceaux de cohomologie de $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ sont sans torsion. $\Box$

2.4.7. Lemme. — *Le quotient* $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ *est un facteur direct de* $\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$.

Démonstration. — Comme $j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau_0)[d-h]$ est un facteur direct de $\bigoplus_{\bar\tau} j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau)[d-h]$, la surjection

$$\bigoplus_{\bar\tau} j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau)[d-h] \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ \; j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau_0)[d-h]$$

admet une section $j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau_0)[d-h] \hookrightarrow\!\!\!\!\!+ \; \bigoplus_{\bar\tau} j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau)[d-h]$ telle que le composé avec $P_{h,\bar\tau_0} \hookrightarrow\!\!\!\!\!+ \; j_!^{=h}\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau_0)[d-h]$ se factorise par un monomorphisme strict $P_{h,\bar\tau_0} \hookrightarrow\!\!\!\!\!+ \; P_h$. On en déduit alors que la surjection $\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ \; \mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ admet aussi une section $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \hookrightarrow \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ qui est nécessairement stricte[4], d'où le résultat. $\Box$

2.4.8. Lemme. — *Les faisceaux de cohomologie de* $\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ *sont sans torsion.*

Démonstration. — On note $\mathrm{gr}_!^{h,\bar\tau_0}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ le quotient

$$0 \to \mathrm{gr}_{!,\bar\tau_0}^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^{h,\bar\tau_0}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \to 0.$$

La nullité de ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ implique celle de ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}\mathrm{gr}_!^{h,\bar\tau_0}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ de sorte que

$$j_!^{=h} j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^{h,\bar\tau_0}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ \; \mathrm{gr}_!^{h,\bar\tau_0}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$$

4. puisque si $w = v \circ u$ est un monomorphisme strict alors u aussi ; on l'applique à $w = \mathrm{Id}$ et u la section construite.

avec

$$j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^{h,\bar\tau_0}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq \bigoplus_{\substack{\bar\tau\in\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)\\ \bar\tau\neq\bar\tau_0}} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar\tau)[d-h].$$

On choisit alors $\bar\tau_1 \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ distinct de $\bar\tau_0$ et on reprend le raisonnement précédent pour $\mathrm{gr}_!^{h,\bar\tau_0}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ afin de construire $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_1}^{h,\bar\tau_0}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ dont les faisceaux de cohomologie sont sans torsion, puis $\mathrm{gr}_!^{h,\bar\tau_0,\bar\tau_1}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ tel que ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}\mathrm{gr}_!^{h,\bar\tau_0,\bar\tau_1}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ est nul. En épuisant ainsi les éléments de $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$, on construit une filtration de $\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ dont les gradués sont les $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_{i+1}}^{h,\bar\tau_0,\cdots,\bar\tau_i}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$, lesquels ont leurs faisceaux de cohomologie sans torsion. Le résultat découle alors de l'observation élémentaire suivante qui découle de (B.2.9) : sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de $\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ à partir de ceux des $\mathrm{gr}_{!,\bar\tau_{i+1}}^{h,\bar\tau_0,\cdots,\bar\tau_i}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$, dégénère en E_1. □

D'après la remarque suivant la proposition 3.4.3 de [**5**], sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, la filtration de stratification coïncide avec celle par les noyaux itérés de la monodromie ; d'après [**4**] §5.8, la suite spectrale associée à cette filtration et calculant les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ à partir de ceux des $\mathrm{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$, dégénère en E_1. On en déduit donc que, sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$, les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ sont aussi sans torsion. □

3. Etude de la saturation

Le but de ce paragraphe est donc de prouver les propositions 2.3.7 et 2.4.4. Donnons quelques mots sur le schéma de la preuve dans le cas où F est un faisceau pervers d'Harris-Taylor associé à un système local $\mathcal{L}$ sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$ tel que $\mathcal{L}[d-h]\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l \simeq j^{=tg,*}\mathcal{P}(t,\pi_v)$ où π_v est une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ pour $g>1$ et t tel que $h=tg$. Rappelons que pour

$$0\to P_{\mathcal{L}} \longrightarrow j^{=h}_{\overline{1_h},!}\mathcal{L}[d-h] \longrightarrow {}^p j^{=h}_{\overline{1_h},!*}\mathcal{L}[d-h]\to 0,$$

il s'agit de montrer que le morphisme d'adjonction

$$j^{=h+1}_{\overline{1_h},!}j^{=h+1,*}_{\overline{1_h}}P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}$$

est strict, au sens de la définition 1.3.6, ce qui ici signifie que le conoyau dans la catégorie des faisceaux p-pervers, est nul. L'idée est d'insérer une étape intermédiaire en considérant pour toute strate $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar s,c}$ de $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$, le morphisme d'adjonction

$$j^{=h+1}_{\overline{1_h}-\{c\},!}j^{=h+1,*}_{\overline{1_h}-\{c\}}P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}.$$

En utilisant que $j^{h\leq+1}_{\overline{1_h},\neq c}$ est affine, on commence par montrer que ce dernier morphisme est strict, i.e. son p-conoyau $i^{h+1}_{c,*}{}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}_c P_{\mathcal{L}}$ est libre, et il s'agit alors de prouver que le morphisme d'adjonction

$$j^{\geq h+1}_{c,!} j^{\geq h+1,*}_c \Big({}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}_c P_{\mathcal{L}} \Big) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}_c P_{\mathcal{L}}$$

est strict i.e. que la torsion T_c de son p-conoyau est nulle. Le principe consiste, en faisant varier c et en utilisant l'action de $GL_d(F_v)$, à montrer que $\mathcal{L} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ possède des vecteurs invariants sous l'action du sous-groupe unipotent $N_{tg-1,1}(F_v) \subset GL_{tg}(F_v)$, cf. la proposition 3.1.9. La contradiction découle alors de la proposition 2.3.4 (iii) et du lemme A.1.6.

3.1. Sur quelques faisceaux p-pervers de torsion. — L'objectif de ce paragraphe technique est de prouver la proposition 3.1.9 qui sera utilisée dans les paragraphes suivant pour prouver les propositions 2.3.7 et 2.4.4.

- — La propriété $(\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)})$ dans 3.1.9, est utilisée via le lemme A.1.6, afin de conclure en utilisant l'hypothèse $g_i(\bar\tau) > 1$ pour un faisceau $\bar\tau$-admissible,
- — tandis que $(\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h))$ n'est qu'une propriété intermédiaire en vue d'obtenir $(\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)})$ via la proposition 3.1.7.

Étant donné un faisceau pervers libre L sur $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$ muni d'une action compatible de $P_{h,d-h}(F_v)$, pour toute strate $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar s,a} \subset X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$, le faisceau pervers libre ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i^{h\leq+1,*}_{\overline{1_h},a} L$ est muni, avec les notations de A.1.2 pour $\Delta = \overline{1_h}$, d'une action compatible de $P_{\Delta(a)}(F_v)$ vu comme sous-groupe de $P_a(F_v)$.

On est ainsi naturellement amené à considérer des faisceaux pervers libres à support dans des strates $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,a}$ munis d'une action compatible d'un sous-groupe parabolique $P_{\Delta(a)}(F_v) \subset P_a(F_v)$ pour un certain drapeau $\Delta = \{a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset F_v^d\}$.

3.1.1. Définition. — Soit $\Delta = \{a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset F_v^d\}$ un drapeau et soit, pour $h \geq \dim a_r$, un faisceau pervers libre $L \in \mathcal{F}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar s}, \Lambda)$ à support dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}}$ où $\mathcal{A}$ est un ensemble de strate $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,a}$ tel que

$$X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}} = \bigcup_{a\in\mathcal{A}} X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,a} \subset X^{\geq \dim a_r}_{\mathcal{I},\bar s,a_r},$$

i.e. $a_r \subset a$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Un tel L est dit Δ-*Hecke-équivariant*

- — si pour tout $a \in \mathcal{A}$, ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i^{h,*}_a L$ est muni d'une action, par correspondances de Hecke, de $P_{\Delta(a)}(F_v)$ compatible à l'action par correspondances de $P_a(F_v)$ sur $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,a}$,
- — telle que pour toute $k > h$ et pour toute strate $X^{\geq k}_{\mathcal{I},\bar s,b}$ contenue dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,a}$ (resp. dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,a'}$), l'action sur

$$i^{k,*}_b L \simeq i^{h\leq+(k-h),*}_{a,b}\Big(i^{h,*}_a L\Big) \simeq i^{h\leq+(k-h),*}_{a',b}\Big(i^{h,*}_{a'} L\Big),$$

  du parabolique $P_{\Delta(a\subset b)}(F_v)$ est compatible à celle de $P_{\Delta(a'\subset b)}(F_v)$ au sens où l'action de $P_{\Delta(a\subset b)}(F_v) \cap P_{\Delta(a'\subset b)}(F_v)$ est la même qu'on le voit comme un sous-groupe de $P_{\Delta(a\subset b)}(F_v)$ ou de $P_{\Delta(a'\subset b)}(F_v)$.

L'action infinitésimale[5], sur ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_a^{h,*}L$ est par définition celle du sous-groupe parabolique associé au drapeau $\widehat{\Delta} = \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset a\}$ de V_a que l'on identifie à un parabolique de $GL_h(F_v)$.

3.1.2. Notation. — *On notera $\mathcal{F}_\Delta(X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ la catégorie quasi-abélienne dont les objets sont les faisceaux pervers « libres » de $\mathcal{F}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ qui sont Δ-Hecke équivariants à support dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}$ au sens de la définition 1.3.12, les morphismes étant ceux de $\mathcal{F}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ qui sont Δ-Hecke équivariants.*

Remarque : soit $L \in \mathcal{F}_\Delta(X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ avec $\sharp\mathcal{A} > 1$. Pour $a \in \mathcal{A}$, le morphisme d'adjonction $\mathrm{can}_{!,\neq a,L} : j^{=h}_{\neq a,!} j^{=h,*}_{\neq a} L \longrightarrow L$ fournit une suite exacte courte

$$0 \to L_{\neq a} \longrightarrow L \longrightarrow i^h_{a,*}\Big({}^{p+}\mathcal{H}^0 i_a^{h,*}L\Big) \to 0,$$

où $L_{\neq a} = \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}(\mathrm{can}_{!,\neq a,L}) \in \mathcal{F}_\Delta(X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}-\{a\}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ et ${}^{p+}\mathcal{H}^0 i_a^{h,*}L \in \mathcal{F}_{\Delta(a)}(X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},a}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$.

3.1.3. Définition. — Soit $\Delta = \{a_1 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r\}$ un drapeau ; on note $h = \dim a_r$. Un faisceau p-pervers de torsion T à support contenu dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},a_r}$ vérifie la propriété $(\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)})$ s'il existe

— $g \geq 1$ et une strate $X^{\geq h+g}_{\mathcal{I},\bar{s},a} \subset X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},a_r}$;

— un système local $\mathcal{L} \in \mathrm{Loc}(h+g)_a$ et des bimorphismes $\Delta(a)$-Hecke équivariants

$${}^p j^{=h+g}_{a,!*}\mathcal{L}[d-h-g] \lhook\joinrel\twoheadrightarrow K \lhook\joinrel\twoheadrightarrow K' \lhook\joinrel\twoheadrightarrow {}^{p+}j^{=h+g}_{a,!*}\mathcal{L}[d-h-g],$$

tels que

— T est le p-conoyau de $K \lhook\joinrel\twoheadrightarrow K'$, muni donc d'une action de $P_{\Delta(a)}(F_v)$ telle que

— il existe $a_r \subset a' \subsetneq a$ avec $\dim V_a/V_{a'} = 1$ et l'action infinitésimale du sous-groupe unipotent $N_{\widehat{\Delta(a' \subset a)}}(F_v)$ sur T est triviale.

Remarque : en utilisant la suite p-exacte (resp. $p+$-exacte) courte

$$0 \to K \longrightarrow K' \longrightarrow T \to 0 \qquad \text{resp. } 0 \to T[-1] \longrightarrow K \longrightarrow K' \to 0$$

par tiré en arrière (resp. poussé en avant), on en déduit que si T vérifie $(\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)})$ alors tout sous-objet (resp. quotient) de T la vérifie aussi.

On fixe à présent :

— des entiers $h \geq 0$ et $g > 0$ tels que $h + g < d$;

— pour $h > 0$ (resp. $h = 0$), $\Delta = \{\overline{1_h}\}$ (resp. $\Delta = \emptyset$) ;

— pour $h + g < h' \leq d$, un faisceau p-pervers de torsion T_0 sur $X^{\geq h'}_{\mathcal{I},\bar{s},b}$ avec $j_b^{\geq h',*}T_0 \neq 0$. On suppose en outre que T_0 est minimal au sens si $T'_0 \subset T_0$ est un sous-faisceau p-pervers non nul de T_0 alors $T'_0 = T_0$. On pose alors $T = i^{h'}_{b,*}T_0$.

---

5. cf. la première remarque du §B.1 et celle suivant 1.2.6

3.1.4. Lemme. — *Avec les notations précédentes, on suppose que pour toute strate* $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},c} \subset X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$*, contenant* $X^{\geq h'}_{\mathcal{I},\bar{s},b}$*, il existe*
- *une strate* $X^{\geq h+g}_{\mathcal{I},\bar{s},a} \subset X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},c}$,
- *un faisceau pervers libre* $L_a \in \mathcal{F}_{\Delta(a)}(X^{\geq h+g}_{\mathcal{I},\bar{s},a}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ *dont tous les systèmes locaux de sa filtration exhaustive de stratification sont dans* Loc,
- *un bimorphisme* $L_a \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L'_a$ *dont* T *est le p-conoyau.*

Alors T *vérifie (*$\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)}$*) où le système local* $\mathcal{L}$ *de la définition 3.1.3, est, sur* $\overline{\mathbb{Q}}_l$*, l'un des systèmes locaux de la filtration exhaustive de stratification d'un des* $L_a \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$.

Démonstration. — Choisissons une strate $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},c}$ contenant $X^{\geq h'}_{\mathcal{I},\bar{s},b}$, i.e. en reprenant les notations de A.1.2, telle que $V_c \subset V_b$. Notons alors $L_a \in \mathcal{F}_{\Delta(a)}(X^{\geq h+g}_{\mathcal{I},\bar{s},a}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ donné par l'énoncé. La deuxième propriété de l'énoncé assure que $N_{\Delta(a)}(F_v)$ agit trivialement sur T.

Comme $\dim V_b - \dim V_a = h' - h - g > 0$, on choisit

$$v \in V_b - V_a$$

et on pose $V =< \overline{1_h}, v >$ qui définit une strate $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},c'}$, contenant $X^{\geq h'}_{\mathcal{I},\bar{s},b}$, i.e. $V = V_{c'} \subset V_b$. Comme $V_{c'}$ n'est pas contenu dans V_a, on en déduit que $X^{\geq h+g}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$ n'est pas contenue dans $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},c'}$ de sorte que l'énoncé nous fournit une strate $X^{\geq h+g}_{\mathcal{I},\bar{s},a'}$ distincte de $X^{\geq h+g}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$ telle que T est muni d'une action triviale de $N_{\Delta(a')}(F_v)$.

Soit alors $v_a \in V_a$ n'appartenant pas à $V_{a'}$: notons $V^{a'}$ un supplémentaire de $V_{a'}$ contenant v_a puis W_a un supplémentaire de $< v_a >$ dans $V^{a'}$:

$$F^d = V_{a'} \oplus < v_a > \oplus W_a.$$

Soit $u \in N_{\Delta(a')}(F_v)$ égal à l'identité sur $V_{a'} + W_a$, qui envoie v_a sur $v_a + v$, où on rappelle que $v \in V_{a'}$. Comme u agit trivialement sur T, le p-conoyau de $u.L_a \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow u.L'_a$ est encore isomorphe à T ; l'action triviale de $N_{\Delta(u.a)}(F_v)$ sur $u.L_a$ et $u.L'_a$, induit une action triviale de $N_{\Delta(u.a)}(F_v)$ sur T. On en déduit en particulier que l'action infinitésimale du sous-groupe unipotent $N_{\Delta(\widehat{(a \cap u.a)} \subset a)}(F_v)$ est triviale sur T et il reste à vérifier que $V_a / V_{u.a} \cap V_a$ est de dimension 1, ce que l'on vérifie aisément en prenant, comme $v_a \in V_a$, une base de V_a sous la forme $(v_a, v_2, \cdots, v_{h+g})$ avec $v_i \in V_{a'} \oplus W_a$, pour tout $i = 2, \cdots, h+g$.

Il reste alors à construire le système local $\mathcal{L}$ de la définition 3.1.3. Considérons pour ce faire une filtration exhaustive de stratification

$$0 = \mathrm{Fill}_!^{-2^{d-1}}(L_a) \subset \cdots \mathrm{Fill}_!^{2^{d-1}-1}(L_a) = L_a$$

ainsi que les poussés en avant

$$\begin{tikzcd}
L_a \arrow[r, hook, two heads] \arrow[d] & L'_a \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed] & T \arrow[d, equal] \\
L_a / \mathrm{Fill}_!^h(L_a) \arrow[r, hook, two heads, dashed] & \widetilde{L}_a(h) \arrow[r, two heads] & T.
\end{tikzcd}$$

Comme $T[-1] \longrightarrow L_a$ est non trivial, il existe $h > -2^{d-1}$ tel que $T[-1] \longrightarrow L_a/\operatorname{Fill}^h_!(L_a)$ soit non trivial. Pour h minimal, par minimalité de T, on identifie T avec le p-conoyau de $\operatorname{gr}^h(L_a) \lhook\joinrel\twoheadrightarrow \big(\widetilde{L}_a(h)/\widetilde{L}_a(h-1)\big)$ où par construction de la filtration exhaustive, il existe une strate $X^{\geq h+g+\delta}_{\mathcal{I},\bar{s},b} \subset X^{\geq h+g}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$ et $\mathcal{L} \in \overline{\operatorname{Loc}}(h+g+\delta)_b$ avec

$$ {}^p j^{=h+g+\delta}_{b,!*}\mathcal{L}[d-h-g-\delta] \lhook\joinrel\twoheadrightarrow \operatorname{gr}^h(L_a) \lhook\joinrel\twoheadrightarrow {}^{p+} j^{=h+g+\delta}_{b,!*}\mathcal{L}[d-h-g-\delta], $$

d'où le résultat. □

3.1.5. *Définition*. — Pour $\Delta = \{a_1 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset F_v^d\}$ un drapeau, et un entier $h > \dim a_r$, on dira d'un faisceau p-pervers de torsion T qu'il vérifie la propriété $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h))$ s'il existe

— $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_r\}$ avec $\dim b_i = h$ pour tout $i = 1, \cdots, r$;

— une filtration $T_{-r} \subset \cdots \subset T_{-1} \subset T_0 = T$,

telles que pour tout $0 \leq k < r$, les gradués $\operatorname{gr}^{-k}(T) := T_{-k}/T_{-k-1}$ sont les p-conoyaux dans $\mathcal{F}_{\Delta(b_k)}(X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},b_k}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ d'un bimorphisme $L_k \lhook\joinrel\twoheadrightarrow L'_k$ où l'action de $N_{\Delta(b_k)}(F_v)$ est triviale.

Remarque : comme précédemment par tiré en arrière et poussé en avant, si T vérifie la propriété $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h))$ alors tout sous-objet et tout quotient la vérifie. Inversement si $0 \to T_1 \longrightarrow T \longrightarrow T_2 \to 0$ est une suite exacte courte avec T_1 et T_2 vérifiant $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h))$ alors T la vérifie aussi.

3.1.6. *Lemme*. — *Soit T le p-conoyau d'un bimorphisme $F' \lhook\joinrel\twoheadrightarrow F$ de $\mathcal{F}_\Delta(X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ tel que tous les systèmes locaux de la filtration exhaustive de stratification de F sont dans* Loc. *Alors T vérifie* $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h))$.

Remarque : d'après la remarque suivant la définition 2.3.6, si F est $\bar{\tau}$-admissible alors tous les systèmes locaux de sa filtration exhaustive de stratification sont dans Loc.

Démonstration. — Raisonnons par récurrence sur le cardinal de $\mathcal{A}$. Si ce cardinal est égal à 1, le résultat est évident. S'il y a plus d'une strate, notons F'_- l'image de $j^{=h}_{\mathcal{A}-\{b\},!} j^{=h,*}_{\mathcal{A}-\{b\}} F' \longrightarrow F'$. Par hypothèse les systèmes locaux de la filtration exhaustive de F'_- et F'/F'_- sont dans Loc de sorte que l'action de $N_{\Delta(b)}(F_v)$ sur F'/F'_- est triviale. Soit alors $T_-[-1]$ le noyau de $T[-1] \longrightarrow \big(F'/F'_-\big)$ de sorte que :

— le $(p+)$-monomorphisme $(T/T_-)[-1] \hookrightarrow F'/F'_-$ de conoyau $(\widetilde{F'/F'_-}) \in \mathcal{F}_{\Delta(a)}(X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},b}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ identifie T/T_- avec le p-conoyau du bimorphisme $F'/F'_- \lhook\joinrel\twoheadrightarrow (\widetilde{F'/F'_-})$ de $\mathcal{F}_{\Delta(b)}(X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},b}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ où l'action de $N_{\Delta(b)}(F_v)$ est triviale.

— le $(p+)$-monomorphisme $T_-[-1] \hookrightarrow F'_-$ identifie T_- au p-conoyau d'un bimorphisme $F'_- \lhook\joinrel\twoheadrightarrow F_-$.

Comme le support de $j^{=h,*}F_-$ a strictement moins de strates que F, d'après l'hypothèse de récurrence, T_- vérifie $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h))$ et comme T/T_- le vérifie aussi, on en déduit que T le vérifie, d'où le résultat. □

3.1.7. Proposition. — *Soient $g_{-1}\geq 1$ et $L\in\mathcal{F}_\Delta(X^{\geq h+g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}},\overline{\mathbb{Z}}_l)$ tels que :*

(i) $j^{=h+g_{-1}}_{\overline{1_h},!}j^{=h+g_{-1},*}_{\overline{1_h}}L\twoheadrightarrow L$ dans $\mathcal{F}_\Delta(X^{\geq h+g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}},\overline{\mathbb{Z}}_l)$,

(ii) pour tout $X^{=h+g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar s,a}\subset X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$, $j^{=h+g_{-1},*}_a L\in\mathrm{Loc}(h+g_{-1})$,

(iii) pour toute strate $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar s,c}\hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$, la torsion T de $i^{h+1}_{c,*}{}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}_c L$ vérifie la propriété ($\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h+g_{-1})$*) de la définition 3.1.5.*

Si ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{-1}+1,*}_{\overline{1_h}}L\neq 0$ alors il admet un sous-quotient non nul vérifiant ($\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)}$*) où le système local $\mathcal{L}$ de la définition 3.1.3, est, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, l'un des systèmes locaux de la filtration exhaustive de stratification de $L\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l$.*

Démonstration. — Rappelons les notations suivantes :

$$\begin{tikzcd}
X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}} & X^{\geq h+g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}} \arrow[l, hook', "i^{h\leq+g_{-1}}_{\overline{1_h}}"'] & X^{\geq h+g_{-1}+1}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}} \arrow[l, hook', "i^{h+g_{-1}\leq+1}_{\overline{1_h}}"'] & \\
X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar s,c} \arrow[u, hook, "i^{h\leq+1}_{\overline{1_h},c}"] & X^{\geq h+g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar s,c} \arrow[l, hook', "i_c^{h+1\leq+g_{-1}-1}"'] \arrow[u, hook, "i^{h+g_{-1}\leq+0}_{\overline{1_h},c}"] & X^{\geq h+g_{-1}+1}_{\mathcal{I},\bar s,c} \arrow[l, hook', "i_c^{h+g_{-1}\leq+1}"'] \arrow[u, hook, "i^{h+g_{-1}+1\leq+0}_{\overline{1_h},c}"] & X^{\geq h+g_{-1}+1+\delta}_{\mathcal{I},\bar s,b}. \arrow[l, hook', "i_{c,b}^{h+g_{-1}+1\leq+\delta}"']
\end{tikzcd}$$

D'après (i), ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{-1}+1,*}_{\overline{1_h}}L$ est de torsion et son support est de la forme $X^{\geq h+g_{-1}+1+\delta}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{B}}\subset X^{\geq h+g_{-1}+1}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$ pour $\delta\geq 0$. Soit alors $b\in\mathcal{B}$ et notons $\widetilde{T}_b:={}^p\mathcal{H}^0 i_b^{h+g_{-1}+\delta+1,*}L\neq 0$. Soit $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar s,c}$ contenant $X^{\geq h+g_{-1}+1+\delta}_{\mathcal{I},\bar s,b}$, i.e. $V_c\subset V_b$ et soit

$$\widetilde{T}_c:={}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+g_{-1}\leq+1,*}\Big({}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+g_{-1},*}L\Big)\simeq{}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{-1}+1\leq+0,*}_{\overline{1_h},c}\Big({}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{-1}+1,*}_{\overline{1_h}}L\Big)$$

le conoyau du morphisme d'adjonction $j^{\geq h+g_{-1}}_{c,!}j^{\geq h+g_{-1},*}_c\Big({}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+g_{-1},*}L\Big)\longrightarrow{}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+g_{-1},*}L$ qui est donc de torsion et non nul car ${}^p\mathcal{H}^0 i_{c,b}^{h+g_{-1}+1\leq+\delta,*}\widetilde{T}_c\simeq\widetilde{T}_b\neq 0$. On pose

$$T_c:=i^{h+g_{-1}+1}_{c,*}\widetilde{T}_c,\qquad\text{et}\qquad T_b:=i^{h+g_{-1}+\delta+1}_{b,*}\widetilde{T}_b,$$

de sorte que, en utilisant les morphismes d'adjonction adéquats, on a

$$i^{h+g_{-1}+1}_{\overline{1_h},*}{}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{-1}+1,*}_{\overline{1_h}}L\twoheadrightarrow T_c\twoheadrightarrow T_b.$$

3.1.8. Lemme. — *Le faisceau p-pervers T_c vérifie* ($\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h+g_{-1})$).

Démonstration. — Notons $L_c:=i_{c,*}^{h+g_{-1}}{}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+g_{-1},*}L$ et

$$L^c:=\mathrm{Im}_{{}^p\mathcal{C}}\Big(j^{=h+g_{-1}}_{c,!}j_c^{=h+g_{-1},*}L_c\longrightarrow L_c\Big)$$

de sorte que $0\to L^c\longrightarrow L_c\longrightarrow T_c\to 0$. D'après (iii), l'image T_c^- de $T=L_{c,tor}\hookrightarrow L_c\twoheadrightarrow T_c$ vérifie ($\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h+g_{-1})$), il suffit alors de montrer que $T_c^+:=T_c/T_c^-$ la vérifie aussi. Notons

$L_{c,f} := L_c/T$ le quotient libre de L_c et L_f^c le noyau de $L_{c,f} \twoheadrightarrow T_c^+$, i.e. T_c^+ est le p-conoyau de $L_f^c \hookrightarrow\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow L_{c,f}$. Le résultat découle alors du lemme 3.1.6. □

Notons $0 = T_c(-r) \subset \cdots \subset T_c(-1) \subset T_c(0) = T_c$ une filtration associée à la propriété $(\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h+g_{-1}))$ de T_c et soit k maximal tel que $T_c(-k) \hookrightarrow T_c \twoheadrightarrow T_b$ est non nul ; on note $T_b(c)$ l'image. Comme $\mathrm{gr}^{-k}(T_c) \twoheadrightarrow T_b(c)$ alors $T_b(c)$ est le p-conoyau d'un bimorphisme $L_{a_k} \hookrightarrow\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow L'_{a_k}$ où l'action de $N_{\Delta(a_k)}(F_v)$ est triviale.

Pour une autre strate $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},c'}$ contenant $X^{\geq h+g_{-1}+1+\delta}_{\mathcal{I},\bar{s},b}$, on construit de même une filtration $T_{c'}(-r') \subset \cdots \subset T_{c'}(0) = T_{c'}$. Comme T_b est encore un quotient de $T_{c'}$, il existe un k' tel que l'image de $T_{c'}(-k') \hookrightarrow T_{c'} \twoheadrightarrow T_b$ intersecte $T_b(c)$. Pour k' maximal et $T_b(c,c')$ cette intersection, on voit que $T_b(c,c')$ vérifie les hypothèses du lemme 3.1.4 pour c et c'. En épuisant ainsi toutes les strates de $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},c'}$ contenant $X^{\geq h+g_{-1}+1+\delta}_{\mathcal{I},\bar{s},b}$, on construit un sous-quotient $T_b(c_1,\cdots,c_r)$ non nul de ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{-1}+1,*}_{\overline{1_h}} L$ vérifiant les hypothèses de 3.1.4, ce qui permet de conclure. □

Avec les notations de la proposition précédente, soit

$$\mathrm{Fil}^0_!(L) \subset \mathrm{Fil}^1_!(L) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^d_!(L) = L$$

la filtration de stratification de $L \in \mathcal{F}_\Delta(X^{\geq h+g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$. On note $h_1 = h+g_{-1} < h_2 < \cdots < h_s$ les indices des gradués $\mathrm{gr}^{h_i}_!(L)$ non nuls qui par construction de la filtration de stratification sont à support dans $X^{\geq h_i}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$. *On suppose alors* que

$$\forall i = 1,\cdots,s, \quad j^{=h_i,*}_{\overline{1_h}} \mathrm{gr}^{h_i}_!(L) \in \mathrm{Loc}(h_i),$$

et que la filtration de stratification de L n'est pas saturée, i.e. il existe $1 \leq k \leq s$ tel que le morphisme d'adjonction $j^{=h_k}_! j^{=h_k,*} \mathrm{gr}^{h_k}_!(L) \longrightarrow \mathrm{gr}^{h_k}_!(L)$, n'est pas strict.
Remarque : on notera aussi $h_0 = h$; comme L est à support dans $X^{\geq h+g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}}$ avec $g_{-1} \geq 1$, on en déduit, par construction de la filtration de stratification, que $\mathrm{gr}^{h_0}_!(L)$ est nul.

3.1.9. Proposition. — *Soit $L \in \mathcal{F}_\Delta(X^{\geq h+g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ vérifiant les hypothèses ci-avant. On suppose en outre que pour toute strate $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},c}$ contenue dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$,*
— *la torsion de ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}_c L$ est triviale et*
— *que pour tout $0 \leq k \leq s$, ${}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*}_c \Big(L/\,\mathrm{Fil}^{h_k}_!(L)\Big) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ est nul.*
Alors il existe $1 \leq k \leq s$, tel que le p-conoyau de $j^{=h_k}_! j^{=h_k,*} \mathrm{gr}^{h_k}_!(L) \longrightarrow \mathrm{gr}^{h_k}_!(L)$ possède un sous-quotient non nul vérifiant $(\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)})$ où le système local $\mathcal{L}$ de la définition 3.1.3, est, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, l'un des systèmes locaux de la filtration exhaustive de stratification de $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$.

Démonstration. — Notons tout d'abord que, d'après les lemmes 1.2.8 et 1.3.5, pour tout $1 \leq k \leq s$, le faisceau p-pervers ${}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*}_c \Big(L/\,\mathrm{Fil}^{h_k}_!(L)\Big)$ est sans torsion et donc, d'après l'hypothèse de l'énoncé, il est nul. De la suite exacte

$$0 \to {}^p\mathcal{H}^{-1} i_c^{h+1,*}\Big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_k}(L)\Big) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}\operatorname{Fil}_!^{h_k}(L) \longrightarrow \\ {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*} L \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}\Big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_k}(L)\Big) \to 0,$$

et du fait que par hypothèse ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}L$ est sans torsion, on en déduit que ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}\operatorname{Fil}_!^{h_k}(L)$ est sans torsion.

Supposons que pour $0 \leq r < s$, on ait les propriétés suivantes :

(i) pour tout $0 \leq k \leq r$, on a $j_!^{=h_k} j^{=h_k,*}\operatorname{gr}_!^{h_k}(L) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!+\; \operatorname{gr}_!^{h_k}(L)$;

(ii) pour toute strate $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s},c}$ contenue dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$, ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}\big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_r}(L)\big)$ vérifie $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h_{r+1}))$.

Remarque : pour $r = 0$, la condition (i) est clairement vérifiée puisque par définition $\operatorname{gr}_!^{h_0}(L)$ est nul, tandis que (ii) l'est puisque par hypothèse la torsion de ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}L$ est triviale.

Dans la suite exacte longue associée au foncteur $i_c^{h+1,*}$ appliqué à

$$0 \to \operatorname{gr}_!^{h_{r+1}}(L) \longrightarrow L/\operatorname{Fil}_!^{h_r}(L) \longrightarrow L/\operatorname{Fil}_!^{h_{r+1}}(L) \to 0, \tag{3.1.10}$$

on obtient que, puisque ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_c^{h+1,*}\big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_{r+1}}(L)\big)$ est nul, la torsion de ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}\operatorname{gr}_!^{h_{r+1}}(L)$ s'injecte dans celle de ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}\big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_r}(L)\big)$. Ainsi

— si cette torsion est non nulle, elle vérifie $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h_{r+1}))$ de sorte que $\operatorname{gr}_!^{h_{r+1}}(L)$ vérifie les hypothèses de 3.1.7 et donc le p-conoyau du morphisme d'adjonction de (i) admet un sous-quotient non nul vérifiant $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)})$ et la proposition est démontrée.

— Si cette torsion est nulle alors la propriété (i) est vérifiée. Montrons alors (ii). Notons T la torsion de $i_{c,*}^{h+1}\,{}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}\big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_{r+1}}(L)\big)$. Comme par hypothèse ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_c^{h+1,*}\big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_{r+1}}(L)\big)$ est nul, $\operatorname{gr}_!^{h_{r+1}}(L)$ s'obtient comme le tiré en arrière suivant :

$$\begin{tikzcd} j_{\neq c,!}^{=h+1} j_{\neq c}^{=h+1,*}\big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_{r+1}}(L)\big) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \operatorname{gr}_!^{h_{r+1}}(L) \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, hook, dashed] & T \arrow[d, hook] \\ j_{\neq c,!}^{=h+1} j_{\neq c}^{=h+1,*}\big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_{r+1}}(L)\big) \arrow[r, hook] & \big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_{r+1}}(L)\big) \arrow[r] & i_{c,*}^{h+1}\,{}^p\mathcal{H}^0 i_c^{h+1,*}\big(L/\operatorname{Fil}_!^{h_{r+1}}(L)\big) \end{tikzcd}$$

de sorte que, d'après le lemme 3.1.6, T vérifie $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{unip}}(h_{r+1}))$.

On a donc montré les propriétés (i) et (ii) au rang $r+1$. Au final, comme la filtration de stratification de L est supposée non saturée, il existera un indice r tel que (i) n'est pas vérifiée pour $k = r$ et tel que, d'après ce que l'on a démontré, le conoyau du morphisme d'adjonction associé admettra un sous-quotient vérifiant $(\operatorname{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)})$.

□

3.2. Preuve de la proposition 2.3.7. — Soit donc $\bar\tau \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ et F un faisceau p-pervers $\bar\tau$-admissible au sens de la définition 2.3.6. Commençons par traiter le cas où F *est à support dans une unique strate* que, par symétrie, l'on peut supposer être $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$. On note alors $\mathcal{L} := j^{=h,*}_{\overline{1_h}} F[h-d]$ qui par hypothèse appartient à $\mathrm{Loc}(h,\bar\tau)$ et soit $P_F := i^{h+1}_{\overline{1_h},*}{}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*}_{\overline{1_h}} F$ avec

$$0 \to P_F \longrightarrow j^{=h}_{\overline{1_h},!}\mathcal{L}[d-h] \longrightarrow F \to 0.$$

Il s'agit alors de prouver que P_F est saturé.

3.2.1. Lemme. — *Pour toute strate $i^{h\leq +1}_{\overline{1_h},c} : X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar s,c} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$, le complexe $i^{h+1,*}_c P_F$ est un faisceau p-pervers libre.*

Démonstration. — Comme F est de la forme $i^{h}_{\overline{1_h},*}F'$, il suffit de montrer que $i^{h+1\leq +0,*}_{\overline{1_h},c}\Big({}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F'\Big)$ est p-pervers sans torsion. Pour ce faire, on utilise la suite spectrale

$$E_2^{r,s} = {}^p\mathcal{H}^r i^{h+1\leq +0,*}_{\overline{1_h},c}\Big({}^p\mathcal{H}^s i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F'\Big) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{r+s} i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h},c} F'.$$

Comme $j^{\geq h}_{\overline{1_h}}$ est affine, d'après le lemme 1.3.5, ${}^p\mathcal{H}^s i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F'$ est nul pour tout $s<-1$; la surjectivité $j^{\geq h}_{\overline{1_h},!} j^{\geq h,*}_{\overline{1_h}} F' \twoheadrightarrow F'$, implique aussi la nullité pour $s=0$. Ainsi la suite spectrale précédente dégénère en E_2 avec

$${}^p\mathcal{H}^r i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h},c} F' \simeq {}^p\mathcal{H}^{r+1} i^{h+1\leq +0,*}_{\overline{1_h},c}\Big({}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F'\Big).$$

De la même façon, comme $j^{h\leq +1}_{\overline{1_h},\neq c} : X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}} - X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar s,c} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$ est affine, ${}^p\mathcal{H}^r i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h},c} F'$ est nul pour $r<-1$ et sans torsion pour $r=-1$ d'après le lemme 1.3.5, d'où le résultat. $\square$

Soit i_0 tel que F est de $\bar\tau$-type i_0. D'après le lemme précédent, on a alors la suite exacte courte de faisceau p-pervers libres

$$0 \to j^{=h+1}_{\overline{1_h}-\{c\},!} j^{=h+1,*}_{\overline{1_h}-\{c\}} P_F \longrightarrow P_F \longrightarrow i^{h+1}_{c,*}{}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}_c P_F \to 0,$$

de sorte que P_F vérifie les hypothèses de la proposition 3.1.9 avec $g_{-1} = g_{i_0}(\bar\tau)$ et tous les gradués de sa filtration de stratification nuls sauf celui d'indice $h' = h + g_{i_0}(\bar\tau)$.

Supposons que P_F n'est pas saturé, i.e. que l'épimorphisme $j^{=h'}_{\overline{1_h},!} j^{=h',*}_{\overline{1_h}} P_F \twoheadrightarrow P_F$ n'est pas strict. Alors, d'après la proposition 3.1.9, le p-conoyau, qui est de torsion, admet un sous-quotient T' vérifiant $(\mathrm{Tor}_{\Delta,\mathrm{N}(1)})$, pour $\Delta := \{\overline{1_h}\}$ et où le système local $\mathcal{L}$ de la définition 3.1.3, est, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, l'un des systèmes locaux de la filtration exhaustive de stratification de $P_F \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$. Ainsi il existerait

— $t \geq 1$ et une strate $X^{\geq h+tg_{-1}}_{\mathcal{I},\bar s,b} \subset X^{\geq h'}_{\mathcal{I},\bar s,\overline{1_h}}$,

— un système local $\mathcal{L} \in \mathrm{Loc}(h+tg_{-1}, \bar\tau(i_0))_b$ tel que T' est le p-conoyau de $K \lhook\joinrel\twoheadrightarrow K'$ où

$${}^p j^{=h+tg_{-1}}_{b,!*}\mathcal{L}[d-h-tg_{-1}] \lhook\joinrel\twoheadrightarrow K \lhook\joinrel\twoheadrightarrow K' \lhook\joinrel\twoheadrightarrow {}^{p+}j^{=h+tg_{-1}}_{b,!*}\mathcal{L}[d-h-tg_{-1}],$$

— $b' \subsetneq b$ tel que $\dim V_b/V_{b'} = 1$ et

— l'action infinitésimale de $N_{\widehat{\Delta(b'\subset b)}}(F_v)$ sur T' est triviale.

Or, d'après la proposition 2.3.4, $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$, en tant que représentation de $GL_{tg_{-1}}(F_v)$ vu comme sous-groupe du Lévi de $P_{\widehat{\Delta(b'\subset b)}}(F_v)$, est une somme directe de représentations irréductibles Π dont le support cuspidal est un segment de Zelevinsky relativement à une représentation irréductible cuspidale $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_{i_0}(\bar\tau)$ avec les notations de l'appendice. Ainsi d'après le lemme A.1.6, et en utilisant que le foncteur de Jacquet commute avec la réduction modulo l, on devrait avoir $i_0 = -1$ et $g_{-1}(\bar\tau) = 1$ ce qui n'est pas par hypothèse, d'où le résultat.

Considérons à présent le cas général où le support de F est une réunion de strate de la forme $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}}$. On raisonne par récurrence sur le cardinal de $\mathcal{A}$. On suppose ainsi le résultat connu si le support de F est strictement contenu dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}}$.

3.2.2. Lemme. — *Pour tout $a \in \mathcal{A}$, le faisceau pervers ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{h+g_{i_0}(\bar\tau)+1,*} F$ est nul.*

Démonstration. — Considérons

$$\begin{tikzcd} & & & i^{h+1}_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{h+1,*} F_a =: P_{F_a} \arrow[d, hook] \\ & & & j^{=h}_{a,!} j_a^{=h,*} F_a \arrow[d, "\varphi"] \\ i^h_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{h,*} F \arrow[r, hook] & j^{=h}_{\mathcal{A}-\{a\},!} j^{=h,*}_{\mathcal{A}-\{a\}} F \arrow[r] & F \arrow[r, two heads] & i^h_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} F =: F_a \end{tikzcd}$$

où φ est un p-épimorphisme puisque son p-conoyau est

$$i^{h+1}_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h+1,*}\Big(i^h_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} F\Big) \simeq i^{h+1}_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1\leq +0,*}_{\mathcal{A},a}\Big({}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}_{\mathcal{A}} F\Big)$$

où ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+1,*}_{\mathcal{A}} F$ est nul par hypothèse. Notons alors $F_{\neq a}$ la p-image de $j^{=h}_{\mathcal{A}-\{a\},!} j^{=h,*}_{\mathcal{A}-\{a\}} F \longrightarrow F$, qui est donc à support dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar s,\mathcal{A}-\{a\}}$. Comme $j^{=h,*}_{\mathcal{A}-\{a\}} F \simeq j^{=h,*}_{\mathcal{A}-\{a\}} F_{\neq a}$, on en déduit que

$$i^h_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{h,*} F \simeq i^{h+1}_{\mathcal{A}-\{a\},*}\,{}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*}_{\mathcal{A}-\{a\}} F_{\neq a} =: P_{F_{\neq a}},$$

qui est donc à support dans $X^{\geq h+g_{i_0}(\bar\tau)}_{\mathcal{I},\bar s,a}$. L'hypothèse de récurrence appliqué à $F_{\neq a}$ donne alors la p-surjectivité de

$$j^{=h+g_{i_0}(\bar\tau)}_{a,!} j_a^{=h+g_{i_0}(\bar\tau),*}\Big(i^h_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{h,*} F\Big) \twoheadrightarrow i^h_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{h,*} F = P_{F_{\neq a}}$$

et donc la nullité de ${}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h\leq +(g_{i_0}(\bar\tau)+1),*}\Big({}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{h,*} F\Big)$. Ainsi via la suite spectrale

$$E_2^{r,s} = {}^p\mathcal{H}^r i_a^{h\leq +(g_{i_0}(\bar\tau)+1),*}\Big({}^p\mathcal{H}^s i_a^{h,*} F\Big) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{r+s} i_a^{h+g_{i_0}(\bar\tau)+1,*} F,$$

dont les termes non nuls sont dans le cadran $r, s \leq 0$, *il suffit de montrer la nullité de* ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{h\leq +(g_{i_0}(\bar\tau)+1),*}\Big({}^p\mathcal{H}^0 i_a^{h,*} F\Big)$.

Posons $F_a := F/F_{\neq a} = i^h_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^0 i^{h,*}_a F$ dont le support est $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$. Comme $i^{h+1}_{a,*}{}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*}_a F_a$ est à support dans $X^{\geq h+g_{i_0}(\bar{\tau})}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$, on a

$$P_{F_a} := i^{h+1}_{a,*}{}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*}_a F_a \simeq i^{h+g_{i_0}(\bar{\tau})}_{a,*}{}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h+g_{i_0}(\bar{\tau}),*}_a F_a.$$

D'après le cas d'une unique strate traité ci-avant, on a

$$j^{=h+g_{i_0}(\bar{\tau})}_{a,!} j^{=h+g_{i_0}(\bar{\tau}),*} P_{F_a} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ \; P_{F_a}$$

et donc ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{i_0}(\bar{\tau})+1,*}_a P_{F_a}$ est nul soit

$${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{i_0}(\bar{\tau})\leq+1,*}_a \Big({}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h+g_{i_0}(\bar{\tau}),*}_a \big(i^h_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^0 i^{h,*}_a F\big)\Big) \simeq 0.$$

De la nullité de ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h\leq+g_{i_0}(\bar{\tau}),*}\big({}^p\mathcal{H}^0 i^{h,*}_a F\big)$, et en utilisant la suite spectrale

$$E_2^{r,s} = {}^p\mathcal{H}^r i^{h+g_{i_0}(\bar{\tau})\leq+1,*}_a \Big({}^p\mathcal{H}^s i^{h\leq+g_{i_0}(\bar{\tau}),*}_a \big({}^p\mathcal{H}^0 i^{h,*}_a F\big)\Big) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{r+s} i^{h\leq+(g_{i_0}(\bar{\tau})+1),*}\big({}^p\mathcal{H}^0 i^{h,*}_a F\big),$$

on en déduit la nullité ${}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h\leq+(g_{i_0}(\bar{\tau})+1),*}_a\big({}^p\mathcal{H}^0 i^{h,*}_a F\big)$, d'où le résultat. □

Supposons alors, par l'absurde, que ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{i_0}(\bar{\tau})+1,*}_{\mathcal{A}} P_F$ est non nul et prenons $a \in \mathcal{A}$ tel que $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$ intersecte son support. On aurait ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{i_0}(\bar{\tau})+1,*}_a P_F$ non nul, ce qui n'est pas d'après le lemme précédent. Ainsi si donc ${}^p\mathcal{H}^0 i^{h+g_{i_0}(\bar{\tau})+1,*}_{\mathcal{A}} P_F$ est nul ce qui finit de démontrer la proposition 2.3.7.

3.3. Preuve de la proposition 2.4.4. — Notons

$$\bar{j} : X_{\mathcal{I},\bar{\eta}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}} \hookleftarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}} : i,$$

où $\bar{j}_! = {}^p\bar{j}_!$ et $\bar{j}_* = {}^p\bar{j}_*$. Pour toute strate $X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$, l'inclusion $\bar{j}^{\geq 1}_{\neq a} : X_{\mathcal{I},\bar{\eta}} - X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s},a} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{\eta}}$ étant affine, en raisonnant comme dans le lemme 3.2.1, on montre que $i^{1,*}_a \Psi_{\mathcal{I}}$ est pervers et libre, ce qui donne la suite exacte courte de $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I},\bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$

$$0 \to j^{\geq 1}_{\neq a,!} j^{\geq 1,*}_{\neq a} \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i^{1,*}_a \Psi_{\mathcal{I}} \to 0.$$

Pour pouvoir appliquer la proposition 3.1.9 avec $h = 0$ et $g_{-1} = 1$, montrons, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et par récurrence sur r, la nullité de ${}^p\mathcal{H}^{-1} i^{1,*}_a\big(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l} / \operatorname{Fil}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})\big)$. D'après ce que l'on vient de dire, le résultat est vérifié pour $r = 0$; supposons le donc acquis jusqu'au rang r et montrons le pour $r + 1$. Considérons pour ce faire les deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \to {}^p\mathcal{H}^{-1} i^{1,*}_a\big(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l} / \operatorname{Fil}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})\big) &\longrightarrow j^{\geq 1}_{\neq a,!} j^{\geq 1,*}_{\neq a}\big(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l} / \operatorname{Fil}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})\big) \\ \longrightarrow \big(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l} / \operatorname{Fil}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})\big) &\to i^1_{a,*}\,{}^p\mathcal{H}^0 i^{1,*}_a\big(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l} / \operatorname{Fil}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})\big) \to 0 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

et

$$0 = {}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{1,*}\Big(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l} / \operatorname{Fil}^r_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})\Big) \longrightarrow \\ {}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{1,*}\Big(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l} / \operatorname{Fil}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})\Big) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \operatorname{gr}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}) \longrightarrow \cdots \quad (3.3.2)$$

D'après (3.3.1) et (3.3.2), les constituants irréductibles de ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_a^{1,*}\Big(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l} / \operatorname{Fil}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})\Big)$ sont communs à $i^1_{a,*}\, {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \operatorname{gr}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$ et $j^{\geq 1}_{\neq a,!} j^{\geq 1,*}_{\neq a} \operatorname{gr}^{r+2+k}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$ pour un certain k, de sorte que l'affirmation résulte du lemme suivant.

3.3.3. Lemme. — *Les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux pervers $i^1_{a,*}\, {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \operatorname{gr}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$ et $j^{\geq 1}_{\neq a,!} j^{\geq 1,*}_{\neq a} \operatorname{gr}^{r+2+k}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$, n'ont aucun constituant irréductible en commun.*

Démonstration. — D'après [**4**] théorème 2.2.4 rappelé à la proposition B.2.2, les constituants irréductibles de $\operatorname{gr}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$ sont de la forme les $\mathcal{P}(t+\delta, \pi_v)(\frac{1-t+\delta}{2})$ où

$$tg = r+1$$

et π_v décrit les représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ et où $0 \leq \delta \leq \lfloor \frac{d}{g} \rfloor - t$.

En ce qui concerne $j^{\geq 1}_{\neq a,!} j^{\geq 1,*}_{\neq a} \operatorname{gr}^{r+2+k}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$, par exactitude des foncteurs $j^{\geq 1}_{\neq a,!}$ et $j^{\geq 1,*}_{\neq a}$, le faisceau pervers $j^{\geq 1}_{\neq a,!} j^{\geq 1,*}_{\neq a}\Big(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l} / \operatorname{Fil}^{r+1}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})\Big)$ est muni d'une filtration dont les gradués sont les $j^{\geq 1}_{\neq a,!} j^{\geq 1,*}_{\neq a} \operatorname{gr}^{r+2+k}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$ pour $0 \leq k \leq d-r-2$. Or par construction on a $j^{=r+2+k}_! j^{=r+2+k,*} \operatorname{gr}^{r+2+k}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}) \longrightarrow \operatorname{gr}^{r+2+k}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$ et donc, avec les notations de la proposition 2.2.7 et celles de B.1.1

$$\bigoplus_{b \not\supset a} \bigoplus_{g | r+2+k = tg} \bigoplus_{\pi_v \in \operatorname{Cusp}_v(g)} j^{=r+2+k}_{b,!} j_b^{=r+2+k,*} \mathcal{P}_b(t, \pi_v)(\frac{1-t}{2}) \\ \twoheadrightarrow j^{\geq 1}_{\neq a,!} j^{\geq 1,*}_{\neq a} \operatorname{gr}^{r+2+k}_!(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}), \quad (3.3.4)$$

où π_v décrit les représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ avec

$$tg = r+2+k.$$

Or d'après [**4**] 4.3.1 et 5.4.1, cf. aussi l'égalité (B.1.8), les constituants irréductibles du membre de gauche de (3.3.4) sont, à un facteur e_{π_v} près, de la forme

$$j^{=(t'+\delta')g}_{!*} HT(\pi_v, \Pi(\pi_v, t, \delta)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v) \otimes \Xi^{\frac{(t+\delta)g-d+1-t'+\delta'}{2}}$$

où $t'g = r+2+k$ pour un certain $k \geq 0$ et où $\Pi(\pi_v, t, \delta)$ est une représentation de $GL_{(t'+\delta')g}(F_v)$ que l'on ne souhaite pas préciser ici. Regardons alors un éventuel constituant irréductible commun :

— l'égalité des poids des faisceaux pervers considérés, donne $t - \delta = t' - \delta'$;
— l'égalité des supports donne $t + \delta = t' + \delta'$.

Ainsi finalement on doit avoir $t = t'$, $\delta = \delta'$ et la contradiction découle des égalités $tg = r+1$ et $t'g = r+2+k$ avec $k \geq 0$.

□

Ainsi d'après la proposition 3.1.9, soit $\Psi_{\mathcal{I}}$ est saturé soit il existe $r \geq 1$, tel que le p-conoyau du morphisme d'adjonction $j_!^{=r} j^{=r,*} \mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ admet un sous-quotient vérifiant la propriété $(\mathrm{Tor}_{(0),\mathrm{N}(1)})$. En raffinant la filtration de stratification de sorte que les gradués gr^k soient tels qu'il existe toujours $1 \leq h_k \leq d$, tels que $j^{=h_k,*}\mathrm{gr}^k$ soit un réseau stable d'un unique $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, t) \otimes \mathrm{St}_t(\pi_v) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$, alors les seuls gradués gr^k non saturés sont ceux pour lesquels π_v est un caractère.

En particulier en prenant les invariants sous le sous-groupe d'Iwahori en v, qui est un foncteur exact, on obtiendrait que $(\Psi_{\mathcal{I}})^{\mathrm{Iw}_v} = \Psi_{\mathcal{I}^v \mathrm{Iw}_v}$ n'est pas saturé, ce qui n'est pas d'après le lemme 2.4.3.

Appendice A
Rappels sur les représentations

A.1. Induites paraboliques. — Notons K un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal q une puissance de p. Une racine carrée $q^{\frac{1}{2}}$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ étant fixée, pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, nous noterons $\pi\{k\}$ la représentation tordue de π où l'action de $g \in GL_n(K)$ est donnée par $\pi(g)\nu(g)^k$ avec $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\mathrm{val}(\det g)}$.

A.1.1. Définition. — Pour V un sous-espace vectoriel de dimension h de K^n, soit P_V le sous-groupe parabolique associé et N_V son radical unipotent, i.e. l'ensemble des $g \in GL_n(K)$ tels que le noyau de $g - \mathrm{Id}$ contienne V et son image soit contenue dans V.

A.1.2. Notations. —

- *Dans le cas où dans la définition précédente, V est engendré par les h premiers vecteurs de la base canonique, V sera noté $\overline{1_h}$ et P_V par $P_{h,d-h}$.*
- *Pour tout $a \in GL_d(K)/P_{h,d-h}(K)$, on notera V_a l'image par a de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_h)$, où $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ désigne la base canonique de K^d. On notera aussi $P_a(K) = aP_{h,d-h}(K)a^{-1}$ le parabolique associé et $N_a = aN_{h,d}(K)a^{-1}$ son sous-groupe unipotent.*
- *Plus généralement pour un drapeau $\Delta = \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset K^d =: a_{r+1}\}$, de gradués a_i/a_{i-1}, on note $P_\Delta(F_v)$ le sous-groupe parabolique associé et $U_\Delta(F_v)$ son radical unipotent.*
- *Enfin pour $\Delta = \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset K^d\}$ un drapeau et $a_r \subset a \subset K^d$, on notera*
$$\Delta(a) := \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \cdots \subsetneq a_r \subset a \subset K^d\}.$$
Pour $a_r \subset a \subset b \subset K^d$, on notera $\Delta(a \subset b) := \big(\Delta(a)\big)(b)$.

Remarque : afin d'alléger les notations, on notera $\dim a$ pour $\dim V_a$.

A.1.3. Définition. — Soit $P = MN$ un parabolique standard de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N. On note $\delta_P : P(K) \to R^\times$ l'application définie par $\delta_P(h) = |\det(\mathrm{ad}(h)_{|\mathrm{Lie} N})|^{-1}$. Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des R-représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, et P_{n_1,n_2} le parabolique standard de $GL_{n_1+n_2}$ de Levi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ et de radical unipotent N, $\pi_1 \times \pi_2$ désigne l'induite parabolique normalisée de $P_{n_1,n_2}(K)$ à $GL_{n_1+n_2}(K)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : GL_{n_1+n_2}(K) \to V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_{P_{n_1,n_2}}^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)\Big(f(g)\Big), \quad \forall n \in N,\ \forall m \in M,\ \forall g \in GL_{n_1+n_2}(K).$$

Rappelons qu'une représentation π de $GL_n(K)$ est dite *cuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre. D'après [**12**] §V.4, la réduction modulo l d'une représentation irréductible cuspidale est encore irréductible cuspidale mais pas nécessairement supercuspidale.

A.1.4. Définitions. — *Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$. L'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de $\pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \cdots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$ est noté* $\mathrm{St}_s(\pi)$ *(resp.* $\mathrm{Speh}_s(\pi)$*).*

A.1.5. Définition. — Soit $P = MN$ un parabolique de GL_n de Lévi M avec pour radical unipotent N. Pour π une R-représentation admissible de $GL_n(K)$, l'espace des vecteurs $N(K)$-coinvariants est stable sous l'action de $M(K) \simeq P(K)/N(K)$. On notera $J_P(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}$.

A.1.6. Lemme. — *Soient* Π *une* $\overline{\mathbb{Q}}_l$*-représentation irréductible entière de* $GL_h(K)$ *et* $\widetilde{\pi}$ *un sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de* Π *tel que l'action de* $N_{h-1,1}(K)$ *est y triviale. Alors le support cuspidal de* Π *contient un caractère.*

Remarque : on appliquera ce lemme au cas où Π a pour support cuspidal un segment de Zelevinsky relativement à une représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$ avec $g > 1$ comme par exemple $\mathrm{St}_t(\pi)$ ou $\mathrm{Speh}_t(\pi)$ et $h = tg$.

Démonstration. — Si l'action de $N_{h-1,1}(K)$ sur $\widetilde{\pi}$ est triviale alors $J_{P_{h-1,1}(K)}(\widetilde{\pi})$ est simplement la restriction de $\widetilde{\pi}$ au sous-groupe de Lévi de $P_{h-1,1}(K)$. Or si le support cuspidal de Π n'admet aucun caractère, alors, d'après [**12**] §V.7, il en est de même de $\widetilde{\pi}$ et on a $J_{P_{h-1,1}(K)}(\widetilde{\pi}) = (0)$, d'où le résultat. □

A.2. Représentations de $D_{K,d}^\times$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_l$ et leurs relèvements. — Soient $D_{K,d}$ l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$, $\mathcal{D}_{K,d}$ son ordre maximal de radical $\mathcal{P}_{K,d}$: $1 + \mathcal{P}_{K,d} \subset \mathcal{D}_{K,d}^\times \subset D_{K,d}^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}$ de quotients successifs $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ et $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

A.2.1. Notation. — *Pour π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$ et $s \geq 1$, on note $\pi[s]_D$ la représentation irréductible de $D_{K,sg}^\times$ image de $\mathrm{St}_s(\pi^\vee)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands.*

Remarque : toute représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ s'écrit de manière unique $\pi[s]_D$ pour $s|d$ et π une représentation irréductible cuspidale de $GL_{d/s}(K)$.

A.2.2. Notation. — *On notera $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ l'ensemble des classes d'équivalence des $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentations irréductibles de $D_{v,h}^\times$.*

À torsion par un caractère non ramifié près, toute représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ se factorise par $D_{K,d}^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}$, on choisit alors un facteur irréductible ζ de $\tau_{|1+\mathcal{P}_{K,d}}$ et on note N_ζ le normalisateur de sa classe d'isomorphisme dans $D_{K,d}^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}$. Soit $\tilde{\zeta}$ son prolongement à N_ζ : en effet $1+\mathcal{P}_{K,d}$ étant un pro-p-groupe, la dimension de ζ est une puissance de p de sorte que, un p-Sylow de $N_\zeta/(1+\mathcal{P}_{K,d})$ étant cyclique, ζ admet un prolongement à N_ζ, cf. [**11**] lemme 1.19.

A.2.3. Proposition. — *(cf. [**7**] proposition 2.3.2)*
Soient $\bar\tau$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible de $D_{K,d}^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}$, et $\overline{\zeta}$ un facteur irréductible de $\bar\tau_{|1+\mathcal{P}_{K,d}}$. Il existe alors un caractère $\bar\chi$ de $K^\times$ tel que $\bar\tau \simeq \mathrm{ind}_J^{D_{K,d}^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}}\Big(\tilde{\bar\zeta}_{|J} \otimes \bar\chi\Big)$, avec $J := N_{\overline{\zeta}} \cap N_{\bar\chi}$ où $N_{\overline{\zeta}}$ (resp. $N_{\bar\chi}$) est le normalisateur de $\overline{\zeta}$ (resp. $\bar\chi$) et où $\tilde{\bar\zeta}$ est un relèvement de $\overline{\zeta}$ à $N_{\overline{\zeta}}$. Il existe en outre des entiers f', d', e' de produit égal à d tels que

$$J/(1+\mathcal{P}_{K,d}) \simeq \mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z},$$

où m est un diviseur de d' tel que $f'm = [D_{K,d}^\times : \varpi^{\mathbb{Z}}\mathcal{D}_{d,K}^\times J]$.

Remarque : d'après [**7**] proposition 2.3.3, deux sous-quotients irréductibles τ et τ' quelconques de la réduction modulo l d'une représentation irréductible entière de $D_{K,d}^\times$, sont inertiellement équivalents, i.e. il existe un caractère $\zeta : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que $\tau' \simeq \tau \otimes \zeta \circ \mathrm{val} \circ \mathrm{rn}$.

A.2.4. Notation. — *Pour $\bar\tau$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$, avec les notations de la proposition précédente, on notera*

$$m(\bar\tau) = [N_\chi \cap N_{r_l(\chi)} : J] \quad \text{et} \quad g(\bar\tau) := \frac{d}{e'} = f'd'.$$

A.2.5. Définition. — Pour $\bar\tau$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$, soit $\mathcal{C}_{\bar\tau} \subset \mathrm{Rep}^\infty_{\mathbb{Z}_l^{nr}}(D_{K,d}^\times)$ la sous-catégorie pleine formée des objets dont tous les $\mathbb{Z}^{nr}\mathcal{D}_{K,d}^\times$-sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\bar\tau_{|\mathcal{D}_{K,d}^\times}$. On note $\bar\tau^0$ un sous-quotient irréductible quelconque de $\bar\tau_{|\mathcal{D}_{K,d}^\times}$.

A.2.6. Proposition. — *(cf.* [**6**] *§B.2)*
Soit $P_{\bar\tau^0}$ une enveloppe projective de $\bar\tau^0$ dans $\mathrm{Rep}^\infty_{\mathbb{Z}_l^{nr}}(\mathcal{D}_{K,d}^\times)$. Alors la sous-catégorie $\mathcal{C}_{\bar\tau}$ est facteur direct dans $\mathrm{Rep}^\infty_{\mathbb{Z}_l^{nr}}(D_{K,d}^\times)$ pro-engendrée par l'induite $P_{\bar\tau} := \mathrm{ind}_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}^{D_{K,d}^\times}(P_{\bar\tau^0})$.

Ainsi toute $\mathbb{Z}_l^{nr}$-représentation $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}}$ de $D_{K,d}^\times$ se décompose en une somme directe $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}} \simeq \bigoplus_{\bar\tau} V_{\mathbb{Z}_{l,\bar\tau}^{nr}}$ où $\bar\tau$ décrit les classes d'équivalence des $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentations irréductibles de $D_{K,d}^\times$ et où $V_{\mathbb{Z}_{l,\bar\tau}^{nr}}$ est un objet de $\mathcal{C}_{\bar\tau}$, i.e. tous ses sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\bar\tau_{|\mathcal{D}_{K,d}^\times}$.

A.2.7. Notation. — *Avec les notations de la proposition A.2.3, soit $s(\bar\tau)$ la plus grande puissance de l divisant $\frac{d}{m(\bar\tau)g(\bar\tau)}$. On note alors*

$$g_{-1}(\bar\tau) = g_(\bar\tau) \quad et \quad \forall 0 \leq i \leq s(\bar\tau),\ g_i(\bar\tau) = m(\bar\tau)l^i g(\bar\tau).$$

A.2.8. Proposition. — *(cf.* [**7**] *proposition 2.3.2) Soient $\bar\tau$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ et $\tau' \in \mathcal{C}_{\bar\tau}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible entière. Il existe alors $-1 \leq i \leq s(\bar\tau)$ et une représentation irréductible cuspidale π_i de $GL_{g_i(\bar\tau)}(K)$ telle que $\tau' \simeq \pi_i[\frac{d}{g_i(\bar\tau)}]_D$.*

Remarque : avec les notations de la proposition précédente, la réduction modulo l de π_i est supercuspidale si et seulement si $i = -1$ et sinon son support supercuspidal est un segment de Zelevinsky-Vignéras de longueur $m(\bar\tau)l^i$.

A.2.9. Définition. — Avec les notations de la proposition précédente, τ' (resp. un sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de τ') sera dit de $\bar\tau$-type i. Plus généralement, pour tout $t \geq \frac{d}{g_i(\bar\tau)}$, la représentation $\pi_i[t]_D$ (resp. un sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de $\pi_i[t]_D$) de $D_{K,tg_i(\bar\tau)}^\times$ sera dite de $\bar\tau$-type i.

Exemple : soit π_{-1} une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ dont la réduction modulo l est supercuspidale. Soient $t \geq 1$ et $\bar\tau$ un constituant irréductible de la réduction modulo l de $\pi_{-1}[t]_D$: on a alors $g_{-1}(\bar\tau) = g$. Soit alors π_i une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g_i(\bar\tau)}(K)$ dont la réduction modulo l a pour support supercuspidal un segment de Zelevinsky $[r_l(\pi_{-1}\{\frac{1-s}{2}\}), r_l(\pi_{-1}\{\frac{s-1}{2}\})]$ avec $g_i(\bar\tau) = sg$. Pour tout t_i tel que $t_i g_i(\bar\tau) \geq tg$, la représentation $\pi_i[t_i]_D$ (resp. un sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de $\pi_i[t_i]_D$) est de $\bar\tau$-type i.

A.2.10. Notation. — *Avec les notations précédentes, on notera $\mathrm{Scusp}_i(\bar\tau)$ l'ensemble des classes d'équivalences des représentations π_i.*

Appendice B
Rappels des résultats faisceautiques sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$

Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats de [**4**] que nous utilisons dans ce texte : les notations sont celles des paragraphes précédents. Précisons de nouveau que tous les résultats de loc. cit. sont sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ ce qui permet de l'enlever des notations afin d'alléger les écritures.

Rappelons que pour σ_v (resp. π_v) une représentation de W_v (resp. de $GL_d(F_v)$), l'action d'un élément g sur

$$\sigma_v(n) \qquad (\text{resp. } \pi_v\{n\})$$

est donnée par $\sigma_v(g)|\operatorname{Art}_{F_v}^{-1}(g)|^n$ (resp. $\pi_v(g)|\det g|^n$) où $|-|$ est la valeur absolue sur F_v et $\operatorname{Art}_{F_v}^{-1} : W_v \longrightarrow F_v^\times$ le morphisme de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques Fr^{-1} de W_v de F_v sur les uniformisantes, i.e. $v(\operatorname{Art}_{F_v}^{-1}(\mathrm{Fr})) = -1$.

B.1. sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor. — Soient π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$. La représentation $\pi_v[t]_D$ de $D_{v,tg}^\times$, cf. la notation A.2.1, fournit d'après la définition 2.2.3, un système local sur $X^{=tg}_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1_h}}$

$$\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1_h}} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\rho_{v,i})_{\overline{1_h}}$$

où $(\pi_v[t]_D)_{|\mathcal{D}_{v,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \rho_{v,i}$ avec $\rho_{v,i}$ irréductible. Ce système local est noté $\mathcal{F}(t,\pi_v)_1$ dans loc. cit. 1.4.7 et muni d'une action de $P_{tg,d-tg}(F_v)$ via son quotient $GL_{d-tg} \times \mathbb{Z}$. Le système local utilisé tout au long de [**4**] est alors

$$\widetilde{HT}(\pi_v,\Pi_t) := \Big(\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_1 \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}\Big) \times_{P_{tg,d-tg}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où l'action du radical unipotent de $P_{tg,d-tg}(F_v)$ est triviale, et celle de $\Big(g^{\infty,v}, \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix}, \sigma_v\Big) \in G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{tg,d-tg}(F_v) \times W_v$ est donnée

- par celle de g_v^c sur $\mathrm{St}_t(\pi_v)$ et σ_v sur $\mathbb{L}(\pi_v)$, où $\mathbb{L}^\vee$ désigne la correspondance locale de Langlands, ainsi que
- celle de $(g^{\infty,v}, g_v^{et}, \mathrm{val}(\det g_v^c) - \deg \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ sur $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v[t]_D)_1 \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}$, où $\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$ est défini par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$.

Remarque : on dit de l'action de $GL_{tg}(F_v)$ qu'elle est *infinitésimale*, cf. aussi la remarque suivant 1.2.6.

Le faisceau pervers d'Harris-Taylor associé est alors

$$P(t,\pi_v) := j_{!*}^{=tg} \widetilde{HT}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))[d-tg] \otimes \mathbb{L}(\pi_v),$$

où $\mathbb{L}^\vee$ désigne la correspondance locale de Langlands.

Remarque : on rappelle que π'_v est inertiellement équivalente à π_v si et seulement s'il existe un caractère $\zeta : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes (\zeta \circ \mathrm{val} \circ \det)$. Les faisceaux pervers $P(t,\pi_v)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence inertielle de π_v et sont de la forme

$$P(t,\pi_v) = e_{\pi_v} \mathcal{P}(t,\pi_v)$$

où $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ est un faisceau pervers irréductible.

B.1.1. Notations. — *On notera*

— *pour tout strate* $X^{\geq tg}_{\mathcal{I},\bar{s},a}$, $\mathcal{P}_a(t,\pi_v) := i^h_{a,*} i^{h,*}_a \mathcal{P}(t,\pi_v)$,

— $HT(\pi_v,\Pi_t) := \widetilde{HT}(\pi_v,\Pi_t)[d-tg]$,

— $\mathrm{Fil}^{-tg}_*(\pi_v,\Pi_t)$ *le noyau du morphisme d'adjonction*

$$j^{=tg}_! HT(\pi_v,\Pi_t) \twoheadrightarrow j^{=tg}_{!*} HT(\pi_v,\Pi_t),$$

qui est à support dans $X^{\geq (t+1)g}_{\mathcal{I},\bar{s}}$. *Avec la notation 1.3.18,* $\mathrm{Fil}^{-tg}_*(\pi_v,\Pi_t)$ *est noté* $P_{\widetilde{HT}(\pi_v,\Pi_t)}$.

B.1.2. Proposition. — *(cf.* [**5**] *3.3.5) Le morphisme d'adjonction*

$$j^{=(t+1)g}_! j^{=(t+1)g,*} \mathrm{Fil}^{-tg}_*(\pi_v,\Pi_t) \longrightarrow \mathrm{Fil}^{-tg}_*(\pi_v,\Pi_t)$$

est surjectif.

En itérant cette proposition, on obtient, pour $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, la résolution

$$0 \to j^{=sg}_! HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{Speh}_{s-t}(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{s-t}{2}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow j^{=(t+2)g}_! HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{Speh}_2(\pi_v)) \otimes \Xi^1 \longrightarrow j^{=(t+1)g}_! HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathrm{Fil}^{-tg}_*(\pi_v,\Pi_t) \to 0. \quad \text{(B.1.7)}$$

où pour π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{t_1 g}(F_v)$ et $GL_{t_2 g}(F_v)$, $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ désigne l'induite normalisée $\pi_1\{-\frac{t_2}{2}\} \times \pi_2\{\frac{t_1}{2}\}$.

Remarque : de cette résolution on en déduit :

— le calcul des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor du théorème 2.2.5 de [**4**],

— la description des constituants irréductibles de $j^{=tg}_! HT(\pi_v,\Pi_t)$ de la proposition 4.3.1, complétée par le corollaire 5.4.1, de [**4**], cf. aussi le corollaire 3.3.8 de [**5**], qui dans le groupe de Grothendieck correspondant, s'écrit

$$\Big[j^{=tg}_! HT(\pi_v,\Pi_t) \Big] = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{d}{g} \rfloor - t} \Big[j^{=(t+r)g}_{!*} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \mathrm{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{r}{2}} \Big]. \quad \text{(B.1.8)}$$

B.2. sur le faisceau pervers des cycles évanescents. — La première étape de [**4**] consiste, cf. loc. cit. définition 2.2.2, à découper $\Psi_{\mathcal{I}}$ selon les classes d'équivalence inertielles $\mathrm{Cusp}_v(g)$ des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour g variant de 1 à d :

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{g=1}^{d} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_v(g)} \Psi_{\mathcal{I},\pi_v}. \tag{B.2.9}$$

Les résultats du §7 de [**4**] sur $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ sont résumés par la proposition 3.4.3 de [**5**] que nous reproduisons ci-dessous.

B.2.2. Proposition. — *(cf.* [**5**] *3.4.3) Soit*

$$0 = \mathrm{Fil}^0_!(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \subset \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^d_!(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$$

la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ de la proposition 1.3.14. Pour tout r non divisible par g, le gradué $\mathrm{gr}^r_!(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$ est nul et pour $r = tg$ avec $1 \leq t \leq s$, il est à support dans $X^{\geq tg}_{\mathcal{I},\bar{s}}$ avec [(6)]

$$j^{\geq tg,*}\mathrm{gr}^{tg}_!(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \simeq j^{\geq tg,*}\mathcal{P}(t,\pi_v)(\frac{1-t}{2}).$$

La surjection $j^{=tg}_! j^{\geq tg,*}\mathrm{gr}^{tg}_!(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^{tg}_!(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$, a alors pour image dans le groupe de Grothendieck

$$\sum_{i=t}^{s} \Big[\mathcal{P}(i,\pi_v)(\frac{1+i-2t}{2})\Big].$$

Remarque : dans [**5**], on explique comment ce résultat permet de calculer les fibres des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$, i.e. d'en déduire le corollaire 2.2.10 de [**4**]. En particulier la fibre en un point fermé de $X^{=tg}_{\mathcal{I},\bar{s}}$ de $\mathcal{H}^{h-d}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ est munie d'une action de $(D^\times_{v,tg})^0 := \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{val} \circ \mathrm{rn} : D^\times_{v,tg} \longrightarrow \mathbb{Z}\Big)$ et de $\varpi_v^{\mathbb{Z}}$ que l'on voit plongé dans $F_v^\times \subset D^\times_{v,tg}$. D'après le théorème 2.2.6 de [**4**], ou plus simplement d'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_{(D^\times_{v,tg})^0\varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D^\times_{v,tg}} \Big(\mathcal{H}^{tg-d}\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}\Big)_{|X^{=tg}_{\mathcal{I},\bar{s}}} &\simeq \mathcal{H}^{tg-d}P(t,\pi_v)(\frac{1-t}{2}) \\ &\simeq \widetilde{HT}(\pi_v,\mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v) \otimes \Xi^{\frac{1-t}{2}}. \end{aligned} \tag{B.2.10}$$

Références

[1] V.G. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.

[2] V.G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2) :367–390., 1996.

[3] Cédric Bonnafé and Raphaël Rouquier. Coxeter orbits and modular representations. *Nagoya Math. J.*, 183 :1–34, 2006.

6. à un facteur e_{π_v} près, $j^{\geq tg,*}\mathrm{gr}^{tg}_!(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$ est donc isomorphe à $\widetilde{HT}(\pi_v,\mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)(\frac{1-t}{2})$

[4] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.

[5] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.

[6] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne l-entière. *Duke Math. J. 161 (6)*, pages 951–1010, 2012.

[7] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo l. *Proc. London Math. Soc. 104*, pages 690–727, 2012.

[8] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[9] L. Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. In *Périodes p-adiques*, number 223 in Astérisque, 1994.

[10] D. Juteau. Decomposition numbers for perverse sheaves. *Annales de l'Institut Fourier, 59 (3)*, pages 1177–1229, 2009.

[11] M.-F. Vignéras. À propos d'une conjecture de Langlands modulaire. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 415–452. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.

[12] M.-F. Vignéras. Induced R-representations of p-adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.

Pascal Boyer, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25 • *E-mail :* `boyer@math.univ-paris13.fr`