
MONODROMIE DU FAISCEAU PERVERS DES CYCLES ÉVANESCENTS DE QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA SIMPLES

par

Boyer Pascal

Résumé. — Dans la situation géométrique des variétés de Shimura simples de Kottwitz étudiées dans le livre d’Harris et Taylor [13], on décrit la filtration de monodromie du complexe des cycles évanescents ainsi que la suite spectrale correspondante. On prouve en particulier que cette filtration coïncide avec celle donnée par les poids à un décalage près. D’après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, on en déduit une description de la filtration de monodromie-locale du modèle de Deligne-Carayol.

Abstract (Monodromy of the perverse sheaf of vanishing cycles of some simple Shimura varieties)

In the geometric situation of the simple Shimura varieties of Kottwitz studied in Harris and Taylor’s book [13], we describe the monodromy filtration of the vanishing cycles complex and the spectral sequence associated to it. We prove in particular that this filtration coincides with the weight one up to shift. Thanks to the Berkovich-Fargues’ theorem, we deduce the description of the local monodromy filtration of the Deligne-Carayol model.

Table des matières

Introduction.....	1
Partie I. Notations, rappels et énoncé du théorème principal.....	3
1. Variétés de Shimura simples : stratification et systèmes locaux.....	3
1.1. Classes d’équivalences inertielles : notations.....	3
1.2. Variétés de Shimura simples associées à des groupes unitaires.....	4
1.3. Stratification de la fibre spéciale.....	5
1.4. Systèmes locaux de Harris-Taylor.....	6
2. Résultats globaux et corollaires locaux.....	8
2.1. Notations.....	8
2.2. Énoncé des théorèmes globaux.....	10
2.3. Corollaires locaux.....	12
2.4. Synthèse des résultats locaux et globaux.....	15
2.5. Principe de la preuve : par récurrence sur le modèle local.....	16
2.6. Le cas d’égales caractéristiques de [4].....	16
Partie II. Preuve des énoncés globaux.....	16
3. Rappels sur les représentations de $GL_d(K)$	16

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, conjecture de monodromie-poids.

3.1. Induites paraboliques.....	16
3.2. Foncteurs de Jacquet.....	17
4. Reconstruction hors des points supersinguliers.....	18
4.1. Image dans \mathfrak{G} de $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$	18
4.2. Faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_v)$	18
4.3. Constituants simples des $j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$	22
5. Étude aux points supersinguliers.....	22
5.1. Cohomologie d'un faisceau de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{-d}$	22
5.2. Rappels sur la cohomologie des $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}}$ d'après [13].....	23
5.3. Groupes de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_v)$	25
5.4. Application aux constituants ponctuels des $j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$	26
5.5. Involution de Zelevinski et parties de poids minimal des $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^i$	27
5.6. Pureté de la filtration de monodromie de $\Psi_{\mathcal{I}}$: preuve de 2.2.4.....	28
5.7. Faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_v)$: preuve de 2.2.5.....	30
5.8. Description de la suite spectrale de monodromie : preuve de 2.2.6.....	30
Partie III. Appendice : schémas de Hecke et faisceaux associés	31
6. Faisceaux pervers de Hecke.....	31
7. Groupe de Grothendieck de Hecke.....	32
Références.....	34

Introduction

0.1 — Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p , d'anneau des entiers \mathcal{O}_K . Pour un entier d strictement positif fixé, on considère le groupe $D_{K,d}^\times$ (resp. W_K) des éléments inversibles de « l'algèbre » à division centrale sur K d'invariant $1/d$ (resp. le groupe de Weil de K). Pour un nombre premier $l \neq p$, Langlands (resp. Jacquet-Langlands) a (resp. ont) conjecturé l'existence d'une bijection \mathcal{L}^\vee (resp. JL) entre les \mathbb{Q}_l -représentations irréductibles admissibles de $GL_d(K)$ et les représentations l -adiques indécomposables de W_K (resp. entre les représentations admissibles irréductibles de $D_{K,d}^\times$ et les représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_d(K)$) qui sont compatibles à la formation des fonctions L ; on renvoie à [14] pour des énoncés précis.

À l'aide de la cohomologie étale, Deligne a construit une série de représentations $\mathcal{U}_{K,l,d}^i$ du groupe produit $GDW_K(d) := GL_d(K) \times D_{K,d}^\times \times W_K$. Pour $d = 2$ et pour ρ une représentation irréductible de $D_{K,2}^\times$ tel que $\pi := \text{JL}(\rho)$ soit une représentation cuspidale de $GL_2(K)$, Carayol dans [6], montre que la composante ρ -isotypique $\mathcal{U}_{K,l,2}^1(\rho)$ de $\mathcal{U}_{K,l,2}^1$ réalise les correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands, i.e.

$$\mathcal{U}_{K,l,2}^1(\text{JL}^{-1}(\pi^\vee)) \simeq \pi \otimes \mathcal{L}(\pi)(-\frac{1}{2}).$$

Le cas d quelconque est traité dans [13] et dans [3] en égales caractéristiques. En outre pour $d = 2$, Carayol [5] décrit également ce qui se passe pour les autres représentations.

Le but premier de ce travail est de faire de même pour d quelconque, i.e. calculer complètement les $\mathcal{U}_{K,l,d}^i(\rho)$ pour ρ une représentation irréductible quelconque de $D_{K,d}^\times$. Dans le cas où ρ est la représentation triviale, le résultat se formule comme suit.

Théorème 1 *Pour $0 \leq i \leq d - 1$, on a $\mathcal{U}_{K,l,d}^i(1^\vee) = \pi_i \otimes 1(-i)$ où π_i est l'unique quotient irréductible de l'induite parabolique $\text{Ind}_{P_{i,d}(K)}^{GL_d(K)} \text{St}_i \otimes 1$ où $P_{i,d}$ est le parabolique standard associé aux i premiers vecteurs et St_i est la représentation de Steinberg de $GL_i(K)$.*

Le cas général relativement à une représentation irréductible cuspidale π , cf. le théorème 2.3.5, s'énonce de manière similaire en faisant intervenir les représentations de Steinberg généralisées $\text{St}_s(\pi)$, leur image par la correspondance de Jacquet-Langlands et la correspondance de Langlands

de π . Une autre formulation de notre résultat revient à dire qu'il n'y a pas d'annulation dans l'expression, calculée dans [13], de la représentation virtuelle $\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i [\mathcal{U}_{K,l,d}^i(\rho)]$ où $\mathcal{U}_{K,l,d}^{d-i}(\rho)$, pour $1 \leq i \leq d$, y est alors donnée par le i -ème terme de plus haut poids. Via l'isomorphisme de Faltings, cf. [8] ou son exégèse [11], on obtient alors un énoncé analogue pour la tour de Drinfeld lequel avait été conjecturé en septembre 1995 par M. Harris après ses travaux sur le programme de Carayol.

0.2 — La preuve du théorème 1 procède par globalisation via l'étude des variétés de Shimura étudiées dans [13], qui sont de type PEL, définies sur un corps CM, F , et associées à un groupe de similitudes G/\mathbb{Q} tel que le groupe unitaire correspondant sur \mathbb{R} soit de la forme $U(1, d-1) \times U(0, d) \times \cdots \times U(0, d)$. Une place v au dessus de p est fixée de sorte que le complété F_v du localisé de F en v soit isomorphe au corps local précédemment noté K , d'anneau des entiers \mathcal{O}_v et tel que $G(F_v) \simeq GL_d(F_v)$: le groupe de Weil est noté W_v . A certains sous-groupes compacts $I = U^p(m)$ de $G(\mathbb{A}^\infty)$, on associe alors une tour de variétés de Shimura $X_{\mathcal{I}} := (X_I)_{I \in \mathcal{I}} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v$ munie d'une action par correspondances de $G(\mathbb{A}^\infty)$, classifiant des variétés abéliennes munies de structures additionnelles ; on obtient ainsi des schémas de Hecke au sens du §1.2.

0.3 — La fibre spéciale géométrique $\overline{X}_{\mathcal{I}}$ de $X_{\mathcal{I}}$ est stratifiée par des sous-schémas de Hecke localement fermés $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\overline{=h}}$ pour $1 \leq h \leq d$, de pure dimension $d-h$ tels que le théorème de Serre-Tate donne un isomorphisme entre le complété de l'hensélisé strict de l'anneau local de $X_{\mathcal{I}}$ en un point géométrique de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\overline{=h}}$ et l'anneau $R_{F_v,h}[[t_1, \dots, t_{d-h}]]$ où $R_{F_v,h}$ représente le foncteur des déformations de niveau infini d'un \mathcal{O}_v -module de Barsotti-Tate sur $\overline{\kappa}(v)$ de hauteur h . Par ailleurs pour $1 \leq h < d$, il existe un sous-schéma fermé $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{\overline{=h}}$ de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\overline{=h}}$ stable sous les correspondances associées aux éléments du sous-groupe parabolique $P_{h,d}(F_v)$ de $GL_d(F_v)$ (cf. la définition 3.1.1) et tel que

$$\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\overline{=h}} = \overline{X}_{\mathcal{I},1}^{\overline{=h}} \times^{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v) :$$

on dit que *les strates non supersingulières sont géométriquement induites*.

0.4 — Pour un nombre premier l distinct de p , les auteurs de [13] introduisent sur chacune des strates $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{\overline{=h}}$, des systèmes locaux de Hecke $\mathcal{F}_{\tau_v,1}$ associés aux représentations irréductibles τ_v de $D_{F_v,h}^\times$. Ils décrivent alors la restriction des faisceaux des cycles évanescents à la strate $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\overline{=h}}$ en fonction des faisceaux « induits » $\mathcal{F}_{\tau_v} := \mathcal{F}_{\tau_v,1} \times^{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v)$ et des cycles évanescents locaux $\Psi_{F_v,l,h}^i$, cf. (2.4.1).

0.5 — Le complexe $\Psi_{\mathcal{I}} := R\Psi_{\eta_v}(\overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1](\frac{d-1}{2})$ est vu comme un W_v -faisceau pervers de Hecke lequel est mixte d'après l'appendice de [12]. Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on note $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ sa composante π_v -isotypique au sens de la définition 2.2.2 et on considère ses bi-gradués $gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$ pour la bifiltration induite par les noyaux et les images de l'opérateur de monodromie pro-nilpotent N . Notre deuxième résultat concerne la description de ces bi-gradués dans la catégorie des W_{F_v} -faisceaux pervers de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}$. Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on note pour tout $t \geq 1$, $\text{St}_t(\pi_v)$ la représentation de Steinberg généralisée au sens du §3.1. Pour $d \geq tg$ et Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, on introduit le faisceau pervers de Hecke $HT(\pi_v, \Pi_t)$ sur la strate $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\overline{=tg}}$ défini à partir du système local de Hecke $\mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\text{St}_t(\pi_v)^\vee)} \otimes \Pi_t$. Les bi-gradués précédents se décrivent alors, théorème 2.2.4, au moyen des faisceaux pervers $j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ où $j^{\geq tg}$ désigne l'injection de la strate $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\overline{=tg}}$ dans son adhérence. En ce qui concerne le cas π_v triviale, l'énoncé est le suivant :

Théorème 2 *Le W_v -faisceau pervers de Hecke $gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I},1_v})$ est non nul si et seulement si $p, q \geq 0$ et $p+q \leq d-1$ auquel cas il est isomorphe à $j_{1*}^{\geq p+q+1} HT(1_v, \text{St}_{p+q+1})(-\frac{p-q}{2})$*

L'énoncé pour π_v quelconque est similaire et fait intervenir les correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands.

0.6 — La preuve procède par récurrence en supposant connus les $\mathcal{U}_{F_v,l,h}^i$ du modèle de Deligne-Carayol de hauteur h pour tout $1 \leq h < d$; l'initialisation de la récurrence correspondant au cas

cuspidal traité dans [3]. Du théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, on en déduit alors le théorème 2 sauf en ce qui concerne les faisceaux pervers supportés aux points supersinguliers ; en particulier on ne sait pas à quel (p, q) associer chacun des $j_!^{\geq d} HT(1_v, \text{St}_d)(-\frac{d-1-2k}{2})$ pour $0 \leq k < d$. De même on sait déterminer tous les faisceaux de cohomologie $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ en dehors des points supersinguliers. Après cette reconstruction hors des points supersinguliers, les ingrédients pour conclure sont, d'une part le calcul de la somme alternée de la cohomologie des systèmes locaux \mathcal{F}_τ donné dans [13], puis une propriété d'autodualité du modèle local sous l'involution de Zelevinski d'après [10]. Cette dernière propriété n'est pas indispensable à la preuve mais elle permet de courcir des calculs de groupes de cohomologie un peu fastidieux : le lecteur intéressé par cette preuve alternative pourra consulter [2].

Remerciements : je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Gérard Laumon pour son soutien constant tout au long de ces années ainsi qu'à Laurent Fargues pour m'avoir fourni une bonne notion de monodromie locale. La lisibilité de ce texte doit énormément à Jean-François Dat qui m'a tout d'abord fourni l'habillage catégoriel des faisceaux de Hecke et surtout suggéré d'utiliser la bifiltration ce qui a grandement simplifié la rédaction ; merci enfin pour ses relectures acharnées et ses nombreux conseils. Un dernier mot pour les referees, que je remercie pour la qualité de leurs corrections et suggestions qui ont largement contribué à une meilleure, et une plus juste, exposition.

PARTIE I

NOTATIONS, RAPPELS ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Dans ce papier on fixe :

- deux nombres premiers distincts $l \neq p$ ainsi qu'une puissance q de p ;
- une racine carrée $q^{1/2}$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$
- un entier $d \geq 1$;
- une extension finie K de \mathbb{Q}_p d'anneau des entiers \mathcal{O}_K , d'uniformisante ϖ_K et de corps résiduel de cardinal q .

Toutes les représentations considérées seront à valeurs dans un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel.

1. Variétés de Shimura simples : stratification et systèmes locaux

1.1. Classes d'équivalences inertielles : notations. — Pour tout $1 \leq h$, on note $D_{K,h}$ l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/h$ et d'ordre maximal $\mathcal{D}_{K,h}$; on considère l'identification $D_{K,h}^\times / \mathcal{D}_{K,h}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par l'opposé de la valuation de la norme réduite rn .

1.1.1. Définition. — Soit $\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ le caractère défini par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$.

On rappelle que la correspondance de Jacquet-Langlands locale est une bijection JL entre les représentations irréductibles admissibles de $D_{K,h}^\times$ et les représentations irréductibles admissibles essentiellement de carré intégrable de $GL_h(K)$.

1.1.2. Définition. — Pour π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$ et $t \geq 1$, $\pi[t]_D$ désignera la représentation $\text{JL}^{-1}(\text{St}_t(\pi))^\vee$ de $D_{K,tg}^\times$ où $\text{St}_t(\pi)$ est une représentation de Steinberg généralisée, cf. §3.

1.1.3. Définitions. — Deux représentations τ et τ' (resp. π et π') de $D_{K,h}^\times$ (resp. de $GL_g(K)$) sont dites inertiuellement équivalentes et on note $\tau \sim^i \tau'$ (resp. $\pi \sim^i \pi'$), s'il existe un caractère $\xi : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que $\tau \simeq \tau' \otimes \xi \circ \text{val} \circ \text{rn}$ (resp. $\pi \simeq \pi' \otimes \xi \circ \text{val} \circ \det$). On note $\mathfrak{A}(\tau)$ (resp. $\mathfrak{A}(\pi)$)

l'ensemble des caractères $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, tels que $\tau \otimes \chi \circ \text{val}(\text{rn}) \simeq \tau$ (resp. $\pi \otimes \chi \circ \text{val}(\text{det}) \simeq \pi$); le cardinal de $\mathfrak{A}(\tau)$ (resp. $\mathfrak{A}(\pi)$) sera noté e_τ (resp. e_π).

Remarque : par compatibilité de la correspondance de Jacquet-Langlands locale à la torsion par des caractères non ramifiés, pour tout entier g et pour toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$ et pour tout $t \geq 1$, l'entier $e_{\pi[t]_D}$ est égal à e_π où $\text{St}_t(\pi)$ est la représentation de Steinberg généralisée associée à π , cf. le §3.1.

De la réciprocity de Frobenius, on en déduit la proposition suivante.

1.1.4. Proposition. — Soient τ une représentation irréductible admissible de $D_{K,h}^\times$ de caractère central χ_τ et ρ une sous-représentation irréductible de la restriction de τ à $\mathcal{D}_{K,h}^\times$; on a

$$\text{Ind}_{\mathcal{D}_{K,h}^\times \times \varpi_K^\mathbb{Z}}^{D_{K,h}^\times} \rho = \bigoplus_{\tau' \in \diamond(\tau)} \tau' \quad (1.1.5)$$

où ϖ_K agit sur l'espace de ρ par le scalaire $\chi_\tau(\varpi_K)$ et où $\diamond(\tau)$ désigne l'ensemble des représentations irréductibles de $D_{K,h}^\times$ inertiellement équivalentes à τ et de caractère central χ_τ .

1.1.6. Corollaire. — Étant donnée une représentation irréductible τ de $D_{K,h}^\times$, la restriction de τ à $\mathcal{D}_{K,h}^\times$ se décompose en une somme de e_τ représentations irréductibles

$$\tau|_{\mathcal{D}_{K,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e_\tau} \rho_i. \quad (1.1.7)$$

Par ailleurs $\diamond(\tau)$ est de cardinal $\frac{h}{e_\tau}$.

Démonstration. — Les caractères $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ tels que $\tau \otimes \chi \circ \text{val}(\text{rn})$ ait même caractère central que τ forment un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ lequel opère donc sur $\diamond(\tau)$ avec pour stabilisateur $\mathfrak{A}(\tau)$ de sorte que $\diamond(\tau)$ est de cardinal $\frac{h}{e_\tau}$. En considérant ensuite les dimensions dans (1.1.5), on en déduit que la dimension de τ est égale à e_τ fois celle de ρ ce qui donne (1.1.7). \square

Pour $e \geq 1$, soit $\Delta(e)$ un ensemble d'éléments $\delta \in D_{K,h}^\times$ tel que les $v(\text{rn}(\delta))$ forment un système de représentants de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$.

1.1.8. Définition. — Pour V un $\mathcal{D}_{K,h}^\times$ -module, on notera

$$V^{\dagger e} := \bigoplus_{\delta \in \Delta(e)} V_\delta$$

où l'action de $\delta_0 \in \mathcal{D}_{K,h}^\times$ sur $V_\delta := V$ est donnée par celle de $\delta \circ \delta_0 \circ \delta^{-1}$ sur V .

1.2. Variétés de Shimura simples associées à des groupes unitaires. — On considère les variétés de Shimura simples associées à des groupes unitaires telles qu'elles sont définies dans [13]. Rappelons brièvement de quoi il s'agit, cf. [13] I.7. Soit $F = F^+E$ un corps CM, E/\mathbb{Q} une extension quadratique imaginaire pure, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. On peut alors définir un groupe unitaire G , noté G_τ dans loc. cit., tel que

$$- G(\mathbb{R}) \simeq U(1, d-1) \times U(0, d)^{r-1};$$

- $G(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p)^\times \times \prod_{i=1}^r (B_{v_i}^{op})^\times$ où $v = v_1, v_2, \dots, v_r$ sont les places de F au dessus de la place u de E telle que $p = u^c u$ et où B est une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 vérifiant certaines propriétés, cf. loc. cit., dont en particulier d'être soit décomposée soit une algèbre à division en toute place et décomposée à la place v . On notera encore v pour la valuation du complété F_v de F en v et W_v son groupe de Weil local.

Remarque : par rapport aux notations de [13], $d = n$ et $v = w$.

1.2.1 — Pour tout sous-groupe compact « assez petit »⁽¹⁾ $\gg U^p$ de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times);$$

on notera aussi $U^{p,v}(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=2}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times)$. A la donnée de G et $U^p(m)$, on associe, cf. [13] III.1, un schéma $X_{U^p(m)}$ projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$ tel que sur F on a, cf. [17] §8 :

$$X_{U^p(m)} = \text{Sh}_{U^p(m)}(G, X)^{\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)}$$

où $\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)$ désigne le sous-ensemble de $H^1(\mathbb{Q}, G)$ constitué des éléments qui deviennent triviaux dans $H^1(\mathbb{Q}_p, G)$ pour toute place p de \mathbb{Q} , et où $\text{Sh}_{U^p(m)}(G, X)$ désigne le modèle canonique sur F de la variété de Shimura associée à la donnée de Shimura (G, X) .

Remarque : le lecteur attentif aura noté que sur le facteur de similitude \mathbb{Q}_p^\times , nous ne considérons que le compact maximal. Pour obtenir des énoncés dans le cas général, il suffit d'utiliser le théorème VII.1.7 de [13].

1.2.2 — *Schémas de Hecke* : soient $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$ et \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de \mathbb{G} , de la forme $U^p(m)$ et donc muni d'une application $m_1 : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{N}$. Un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$, est un système projectif de schémas $\mathbb{X}_{\mathcal{I}} = (\mathbb{X}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ relativement à des morphismes finis $[1]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$ de restriction du niveau, tel que pour tout $g \in \mathbb{G}$ et tous $J \subset I$ tels que $g^{-1}Jg \subset I$, on dispose d'un morphisme fini de schémas $[g]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$ vérifiant les propriétés suivantes :

- pour $g \in I$ et $J \subset I$, $[g]_{J,I} = [1]_{J,I}$;
- pour tous $g, g' \in \mathbb{G}$, et tous $K \subset J \subset I$ tels que $g^{-1}Jg \subset I$ et $(g')^{-1}Kg' \subset J$, on a

$$[gg']_{K,I} = [g]_{J,I} \circ [g']_{K,J} : \mathbb{X}_K \rightarrow \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I.$$

Remarque : une présentation plus synthétique, cf. [7], est d'introduire la catégorie $\mathcal{I}(\mathbb{G})$ dont les objets sont les éléments de \mathcal{I} et les flèches sont données par

$$\text{Hom}_{\mathcal{I}(\mathbb{G})}(J, I) := J \setminus \{g \in \mathbb{G}, g^{-1}Jg \subset I\} / I$$

de sorte qu'un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$ est un foncteur de $\mathcal{I}(\mathbb{G})$ dans les schémas projectifs.

1.2.3 — **Fait 1** : (cf. [13] p.96) le système projectif $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ définit un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty), \mathcal{I})$ où les morphismes de restriction du niveau $r_{J,I} : X_J \rightarrow X_I$ sont finis et plats : si $m_1(J) = m_1(I)$ alors $r_{J,I}$ est étale.

1.3. Stratification de la fibre spéciale. — Pour $I \in \mathcal{I}$, on note \tilde{X}_I la fibre spéciale de X_I et $\bar{X}_I = \tilde{X}_I \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique. Pour tout $1 \leq h \leq d$, on dispose, cf. [13] p.111, d'une strate fermée $\tilde{X}_I^{\geq h}$ de \tilde{X}_I de pure dimension $d - h$: on note $\bar{X}_I^{\geq h} = \tilde{X}_I^{\geq h} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$ leur version géométrique. On note aussi

$$\tilde{X}_I^{=h} := \tilde{X}_I^{\geq h} - \tilde{X}_I^{\geq h+1}$$

et $\bar{X}_I^{=h} = \tilde{X}_I^{=h} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$.

Remarque : le sens de la notation vient du fait qu'un point géométrique de \bar{X}_I se factorise par $\bar{X}_I^{\geq h}$ si et seulement si la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate associé est de rang $\geq h$. Dans [13], les auteurs préfèrent mettre en avant la dimension de la partie étale du groupe de Barsotti-Tate associé et adoptent la notation $\bar{X}_I^{[d-h]}$ et $\bar{X}_I^{(d-h)}$ pour respectivement $\bar{X}_I^{\geq h}$ et $\bar{X}_I^{=h}$, ce qui a aussi l'avantage de faire apparaître les dimensions.

Remarque : dans le cas de bonne réduction, i.e. $m_1(I) = 0$, $\bar{X}_I^{\geq h}$ est lisse.

1. tel qu'il existe une place x pour laquelle la projection de U^p sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [13] bas de la page 90

1.3.1. Proposition. — (cf. [13] III.4.4) Les systèmes projectifs $(\tilde{X}_I^{\geq h})_{I \in \mathcal{I}}$ et $(\tilde{X}_I^=h)_{I \in \mathcal{I}}$ définissent des schémas de Hecke $\tilde{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$ et $\tilde{X}_{\mathcal{I}}^=h$ pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$.

On rappelle par ailleurs que l'inclusion

$$j^{\geq h} : \tilde{X}_{\mathcal{I}}^=h \hookrightarrow \tilde{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$$

est affine : en effet soit $\text{Spec } A$ un ouvert affine quelconque de $\tilde{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$ et soit $\mathcal{G}_A[p]$ le premier tronqué du groupe de Barsotti-Tate universel sur A ainsi que la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Ker}\left(F^h : \mathcal{G}_A[p] \rightarrow \mathcal{G}_A[p]^{(q^h)}\right) \longrightarrow \mathcal{G}_A[p] \longrightarrow \mathcal{G}'_A[p] \rightarrow 0.$$

Par définition de ces strates, $\tilde{X}_{\mathcal{I}}^=h \times_{\tilde{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}} \text{Spec } A$ est le lieu dans $\tilde{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$ où $\mathcal{G}'_A[p]$ est étale, ce qui définit bien un schéma affine.

Remarque : Tetsushi Ito prouve même que les $\tilde{X}_{\mathcal{I}}^=h$ sont des schémas affines, cf. [15].

Pour tout $0 < h < d$, les strates $\tilde{X}_{\mathcal{I}}^=h$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique $P_{h,d}(\mathcal{O}_v)$ cf. les notations du §3, au sens où il existe un sous-schéma fermé $\tilde{X}_{\mathcal{I},1}^=h$ tel que [13] p.116 :

$$\tilde{X}_{\mathcal{I}}^=h \simeq \tilde{X}_{\mathcal{I},1}^=h \times^{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/v^{m_1(I)})} GL_d(\mathcal{O}_v/v^{m_1(I)})$$

On notera $\tilde{X}_{\mathcal{I},1}^{\geq h}$ l'adhérence de $\tilde{X}_{\mathcal{I},1}^=h$ dans $\tilde{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$. Le système projectif $(\tilde{X}_{\mathcal{I},1}^=h)_{I \in \mathcal{I}}$ définit un schéma de Hecke $\tilde{X}_{\mathcal{I},1}^=h$ pour $\mathbb{G}_h = G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d}(F_v)$ et $\mathcal{I}_h = \mathcal{I} \cap \mathbb{G}_h$, où \mathbb{G}_h agit à travers son quotient

$G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$ via l'application $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$. Par ailleurs l'action

d'un élément $w_v \in W_v$ sur $\tilde{X}_{\mathcal{I},1}^=h$ est donnée par celle de $-\deg(w_v)$ où \deg est la composée du caractère non ramifié de W_v , qui envoie les frobenius géométrique sur les uniformisantes, avec la valuation v de F_v .

1.3.2. Définition. — Soit H_0/\mathbb{Q} le groupe algébrique forme intérieure de G telle que $H_0(\mathbb{R})$ est compact et $H_0(\mathbb{A}^\infty) \simeq G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times D_{v,d}^\times \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$.

Les points géométriques du $\overline{\mathbb{F}}_p$ -schéma $\overline{X}_{\mathcal{I}}^=d$ de dimension nulle sont dits supersinguliers de niveau I ; cet ensemble est constitué de $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$ classes d'isogénies telles que chaque classe $\overline{X}_{\mathcal{I},i}^=d(\overline{\mathbb{F}}_p)$ pour $i \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$, est en bijection, en tant que $H_0(\mathbb{A}^\infty)$ -ensemble, avec (cf. [13] lemme V.1.2 p.153) :

$$H_0(\mathbb{Q}) \backslash H_0(\mathbb{A}^\infty) / (\mathcal{D}_{v,d}^\times \times U^{p,v}(m)). \quad (1.3.3)$$

L'action de $c_v \in W_v$ sur $\overline{X}_{\mathcal{I},i}^=d(\overline{\mathbb{F}}_p) = H_0(\mathbb{Q}) \backslash (H_0(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z})$ est donnée par la translation de $-\deg(c_v)$ sur la composante $\mathbb{Z} \simeq D_{v,d}^\times / \mathcal{D}_{v,d}^\times$ qui envoie -1 sur une uniformisante $\Pi_{v,d}$ de $D_{v,d}$. L'action d'un élément $g^\infty \in H_0(\mathbb{A}^\infty)$ est donnée par la translation à gauche de $g^{\infty,v}$ sur $H_0(\mathbb{A}^{\infty,v})$ et la translation de $v(\det(g_v))$ sur la composante \mathbb{Z} .

Remarque : d'après [16], on a une bijection canonique $f : \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) \longrightarrow \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$ de sorte que dans la décomposition sur \mathcal{O}_v , $X_I = \text{Sh}_I(G, X)^{\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)}$, l'ensemble des points supersinguliers de la composante $\text{Sh}_I(G, X)$ indexée par $i \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)$ correspond à la classe d'isogénie des points supersinguliers de X_I associée à $f(i) \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$.

1.4. Systèmes locaux de Harris-Taylor. — On note $\mathbb{M}_h(F_v)$ l'ensemble des matrices de taille $h \times h$ à coefficients dans F_v .

1.4.1. Définition. — Soit $(\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+$ (resp. $(GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v))^+$) le sous-semi-groupe de $\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$ (resp. $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)$) formé des éléments (c, g) (resp. (g^0, g^{et})) tels que $\varpi_v^{\lfloor -c/h \rfloor} g \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_v)$ (resp. tels qu'il existe $a \in F_v^\times$ tel que $ag^{et} \in \mathbb{M}_{d-h}(\mathcal{O}_v)$ et $(ag^0)^{-1} \in \mathbb{M}_h(\mathcal{O}_v)$).

Remarque : la surjection $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v) \longrightarrow \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$ qui à (g_v^c, g_v^{et}) associe $(v(\det g_v^c), g_v^{et})$, induit une surjection de $(GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v))^+$ sur $(\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+$.

1.4.2 — Dans [13] §IV, les auteurs définissent les variétés d'Igusa de première espèce qui sont munies, [13] p.126, d'une action par correspondences de

$$G_h^+(\mathbb{A}^\infty) = G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$$

qui agit via le quotient $G_h^+(\mathbb{A}^\infty) \longrightarrow G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$.

1.4.3 — Via la notion de variété d'Igusa de seconde espèce, les auteurs de [13] associent à une représentation irréductible admissible :

- τ_v de $D_{v,h}^\times$, un système local $\mathcal{F}'_{\tau_v, I}$,
- ρ_v de $\mathcal{D}_{v,h}^\times$, un système local $\mathfrak{F}'_{\rho_v, I}$,

sur la variété d'Igusa de première espèce sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. D'après [13] IV.1.2 et IV.1.6, on considère $\mathcal{F}'_{\tau_v, I}$ (resp. $\mathfrak{F}'_{\rho_v, I}$) comme un système local sur $\overline{X}_{I,1}^{\overline{=h}}$ que l'on notera alors $\mathcal{F}_{\tau_v, I, 1}$ (resp. $\mathfrak{F}_{\rho_v, I, 1}$).

Remarque : de la décomposition $(\tau_v)_{|\mathcal{D}_{v,tg}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\tau_v}} \rho_{v,i}$ avec $\rho_{v,i}$ irréductible, on en déduit que

$$\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\tau_v}} \mathfrak{F}_{\rho_{v,i}, \mathcal{I}}.$$

Dans la suite nous utiliserons essentiellement les systèmes locaux $\mathcal{F}_{\tau_v, I, 1}$ au détriment des $\mathfrak{F}_{\rho_v, I, 1}$ et on renvoie au §2.4 pour une justification de ce choix.

Tout élément $(g^p, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta)$ de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D_{v,h}^\times / \mathcal{D}_{v,h}^\times$ définit un morphisme

$$(g^p, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta) : (g^p, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta)^* \mathcal{F}'_{\tau_v, J} \longrightarrow \mathcal{F}'_{\tau_v, I}$$

pour $J \subset I$ assez petit.

1.4.4. Définition. — Pour $1 \leq h < d$, et τ_v une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible admissible de $D_{v,h}^\times$, on note $\mathcal{F}_{\tau_v, I, 1}$ le faisceau sur $\overline{X}_{I,1}^{\overline{=h}}$ et on définit :

$$\mathcal{F}_{\tau_v, I} := \mathcal{F}_{\tau_v, I, 1} \times^{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/v^{m_1})$$

le faisceau induit sur toute la strate $\overline{X}_I^{\overline{=h}}$.

1.4.5 — *Faisceaux de Hecke* : soit $\mathbb{X}_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$ et \mathbb{K} un corps de coefficients qui ici sera exclusivement $\overline{\mathbb{Q}}_l$. La catégorie $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$ (resp. $\text{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$) des faisceaux pervers (resp. des faisceaux) de Hecke sur $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ à coefficients dans \mathbb{K} est définie comme la catégorie dont les objets sont les systèmes $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ où \mathcal{F}_I est un faisceau pervers (resp. faisceau) sur \mathbb{X}_I à coefficients dans \mathbb{K} , tels que

- (i) pour tout $g \in \mathbb{G}$ et $J \subset I$ tel que $g^{-1}Jg \subset I$, on dispose d'un morphisme de faisceaux sur \mathbb{X}_I , $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \longrightarrow [g]_{J,I,*} \mathcal{F}_J$ soumis à la condition de cocycle

$$u_{K,I}(g'g) = [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \circ u_{J,I}(g)$$

- (ii) pour tout $g \in I$, $u_{J,I}(g)$ induit un isomorphisme $\mathcal{F}_I \longrightarrow ([1]_{J,I,*} \mathcal{F}_J)^I$.

- (iii) pour tous I, J tel que $m_1(I) = m_1(J)$ et pour tout $g \in \mathbb{G}$ tel que $g^{-1}Jg \subset I$, l'adjoint de $u_{I,J}(g)$ induit un isomorphisme $[g]_{I,J}^* \mathcal{F}_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_J$.

Les flèches sont alors les systèmes $(f_I)_{I \in \mathcal{I}}$ avec $f_I : \mathcal{F}_I \longrightarrow \mathcal{F}'_I$ tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J) \\ \downarrow f_I & & \downarrow [g]_{J,I,*}(f_J) \\ \mathcal{F}'_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J) \end{array}$$

Remarque : à propos de la deuxième condition, pour tout g tel que $g^{-1}Jg \subset I$, $[g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$ est muni d'une action du groupe fini I/J , ce qui en fait un $\mathbb{K}[I/J]$ -faisceau de sorte que $([g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J)^I$ est un facteur direct de $[g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$. Par ailleurs toute flèche $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \longrightarrow [g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$ se factorise par $([g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J)^I$. Dans le cas où $g \in I$, on a $[g]_{J,I} = [1]_{J,I}$ et on demande que $u_{J,I}(g)$ induise un isomorphisme.

Remarque : dans le langage des catégories (co)-fibrées, la catégorie des faisceaux pervers de Hecke sur $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ est, avec la deuxième condition, une sous-catégorie pleine des sections de la catégorie $\text{Perv}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}} \times \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{K})$ au dessus de $\mathcal{I}(\mathbb{G})$ qui est fibrée par les ${}^p[g]_{J,I}^*$ et cofibrée par les $[g]_{J,I,*}$, cf. [7].

Remarque : dans la suite on prendra $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{Q}}_l$, et on supprimera \mathbb{K} des notations.

1.4.6 — Pour tout schéma de Hecke $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$, la catégorie $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}})$ vérifie les propriétés suivantes :

- elle est abélienne ;
- elle est munie des foncteurs usuels $j_{\mathcal{I},!}, Rj_{\mathcal{I},*}, j_{\mathcal{I},!}^*, {}^p j_{\mathcal{I}}^*$ (resp. $i_{\mathcal{I},*}, {}^p i_{\mathcal{I}}^*, {}^p Ri_{\mathcal{I}}^!$) pour toute immersion ouverte affine (resp. fermée) $j_{\mathcal{I}} : U_{\mathcal{I}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}}$ (resp. $i_{\mathcal{I}} : Y_{\mathcal{I}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}}$) de schémas de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$;
- elle est munie d'une dualité de Verdier.

On renvoie au §III pour une preuve de ces faits.

1.4.7 — **Fait2** : pour $0 \leq h < d$ et τ_v une représentation de $D_{v,h}^{\times}$, les $(\mathcal{F}_{\tau_v, I})_{I \in \mathcal{I}}$ définissent un faisceau de Hecke $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}}$ sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\overline{h}}$ pour $G(\mathbb{A}^{\infty}) \times D_{v,h}^{\times}/\mathcal{D}_{v,h}^{\times}$, muni d'une action compatible de W_v .

Démonstration. — En tant que faisceau $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1}$ ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de τ_v (cf. [13] p.136). On choisit τ'_v dans la classe d'équivalence inertielle de τ_v telle que son image soit finie. Le système local $\mathcal{F}_{\tau'_v, \mathcal{I}, 1}$ définit alors un système local $\widetilde{\mathcal{F}}_{\tau'_v, \mathcal{I}, 1}$ sur $\widetilde{X}_{\mathcal{I}, 1}^{\overline{h}}$ dont le changement de base à $\overline{X}_{\mathcal{I}, 1}^{\overline{h}}$ est isomorphe à $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1}$. Avec les notations de loc. cit., $(\widetilde{\text{Fr}}^{*f_1}, 1)$ agit alors trivialement sur $\widetilde{\mathcal{F}}_{\tau'_v, \mathcal{I}, 1}$. En remarquant cf. [13] p.123, que $\mathbb{Q}_p^{\times} \times \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$ est engendré par $(\widetilde{\text{Fr}}^{*f_1}, 1)$ et $\mathbb{Q}_p^{\times} \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+$, on prolonge l'action du sous semi-groupe précédent sur $\widetilde{\mathcal{F}}_{\tau'_v, \mathcal{I}, 1}$ à tout $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^{\times} \times \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^{\times} \times (D_{v,h}^{\times}/\mathcal{D}_{v,h}^{\times})$, où l'action de $c_v \in W_v$ est donnée par $-\deg(c_v) \in \mathbb{Z}$. Ainsi de la décomposition d'Iwasawa $GL_d(F_v) = P_{h,d}(F_v)GL_d(\mathcal{O}_v)$, en faisant agir trivialement le radical unipotent de $P_{h,d}(F_v)$, on munit $\widetilde{\mathcal{F}}_{\tau'_v, \mathcal{I}}$ d'une action de $GL_d(F_v)$. Les conditions (i), (ii) et (iii) sont alors clairement vérifiées en notant que pour (iii), $[g]_{I,J}$ est étale. \square

Remarque : soit χ un caractère de $\mathbb{Z} \simeq D_{v,h}^{\times}/\mathcal{D}_{v,h}^{\times}$. A partir de $\widetilde{\mathcal{F}}_{\tau_v, \mathcal{I}}$, on définit une action de $\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$ sur $\mathcal{F}_{\tau_v \otimes \chi, \mathcal{I}, 1} := \widetilde{\mathcal{F}}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1} \otimes \chi$ où l'action de (c, g^{et}) est donnée par celle de $(ac, gv) \times \Pi_{v,h}^{-a} \in (\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+ \times D_{v,h}^{\times}/\mathcal{D}_{v,h}^{\times}$, où $\Pi_{v,h}$ est une uniformisante de $\mathcal{D}_{v,h}$. Muni de cette action, $\mathcal{F}_{\tau_v \otimes \chi, \mathcal{I}, 1}$ dépend de τ_v et plus seulement de sa classe d'équivalence inertielle.

2. Résultats globaux et corollaires locaux

2.1. Notations. —

2.1.1. *Définition.* — Nous considérerons deux types de torsion relativement à W_v ou à $GL_d(F_v)$ que nous noterons respectivement $(-)$ et $\{-\}$. Ainsi pour σ_v (resp. π_v) une représentation

de W_v (resp. de $GL_d(F_v)$), l'action d'un élément g sur $\sigma_v(n)$ (resp. $\pi_v\{n\}$) est donnée par $\sigma_v(g)|\text{Art}_{F_v}^{-1}(g)|^n$ (resp. $\pi_v(g)|\det g|^n$) où $|\cdot|$ est la valeur absolue sur F_v et $\text{Art}_{F_v}^{-1} : W_v \rightarrow F_v^\times$ le morphisme de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques Fr^{-1} de W_v de F_v sur les uniformisantes, i.e. $v(\text{Art}_{F_v}^{-1}(\text{Fr})) = -1$; on notera $\deg(w_v) = v(\text{Art}_{F_v}^{-1}(w_v))$.

2.1.2. Définition. — Soit $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ un schéma de Hecke sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Un W_v -faisceau pervers de Hecke est un objet $P = (P_I)_{I \in \mathcal{I}}$ de $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}})$ muni d'une action compatible du groupe de Weil local W_v de F_v . L'action de l'inertie est alors potentiellement unipotente sur P_I pour tout $I \in \mathcal{I}$ et on note $\gamma : I_v \rightarrow \text{End}_{\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}})}(P)$. De même un \mathbb{Z} -faisceau pervers de Hecke est un faisceau pervers de Hecke muni d'une action compatible de \mathbb{Z} .

On considère les flèches suivantes de schémas de Hecke

$$i_{\mathcal{I}}^h : \overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathcal{I}} = \overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geq 1}, \quad j_{\mathcal{I}}^{\geq h} : \overline{X}_{\mathcal{I}}^{\leq h} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h},$$

ces dernières étant, d'après le début du §1.3, affines.

2.1.3. Définition. — Pour $1 \leq g \leq d$, on note $\text{Cusp}_v(g)$ l'ensemble des classes d'équivalences des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$. On note aussi s la partie entière de d/g .

On fixe $\pi_v \in \text{Cusp}_v(g)$ et soit t un entier strictement positif inférieur ou égal à s . On note alors :

- $\mathcal{F}(t, \pi_v)_1$ (resp. $\mathcal{F}(t, \pi_v)$) le faisceau de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{\leq d-tg}$ (resp. $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\leq tg}$) précédemment noté $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D, \mathcal{I}, 1}$ (resp. $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D, \mathcal{I}}$);
- pour Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, $HT(\pi_v, \Pi_t) = \widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t)[d - tg]$ le W_v -faisceau pervers de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\leq tg}$ défini par le \mathbb{Z} -faisceau de Hecke

$$\widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t) := \mathcal{L}_{\xi} \otimes \mathcal{F}(t, \pi_v) \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \otimes \Pi_t,$$

où :

- \mathcal{L}_{ξ} est le système local défini dans [13] III.2, associé à une représentation irréductible ξ de G sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et où la partie « infinitésimale » Π_t signifie qu'en niveau fini I , on prend Π_t^I , i.e. les invariants de Π_t sous le compact $I \in \mathcal{I}$;
- l'action de W_v se fait par son quotient $W_v \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie w_v sur $-\deg(w_v)$;
- le radical unipotent de $P_{tg,d}(F_v)$ agit trivialement alors que l'action du Levi $GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v)$ est donnée par l'action diagonale de $GL_{tg}(F_v)$ sur $\mathcal{F}(t, \pi_v)$ et Π_t , et l'action naturelle de $GL_{d-tg}(F_v)$ sur $\mathcal{F}(t, \pi_v)$.

Remarque : selon l'usage, quand il s'agira de l'action de W_v on notera (n) pour Ξ^{-n} .

- $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ le W_v -faisceaux pervers de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geq tg}$ de poids zéro défini par

$$i_{\mathcal{I},*}^{\geq tg} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathcal{L}(\pi_v)$$

où \mathcal{L}^{\vee} désigne la correspondance de Langlands.

- ponctuellement nous utiliserons aussi le W_v -faisceau pervers de Hecke, $\mathfrak{P}(t, \pi_v)$ où on remplace dans la définition de $\mathcal{P}(t, \pi_v)$, le faisceau de Hecke $\mathcal{F}(t, \pi_v)$ par le faisceau de Hecke $\mathfrak{F}_{\rho_v, \mathcal{I}}$ où ρ_v est une sous-représentation irréductible quelconque de la restriction de $\pi_v[t]_D$ à $\mathcal{D}_{v,tg}^{\times}$.

2.1.4. Remarque. — Comme on l'a noté à la fin de §1.4, $\mathcal{F}(t, \pi_v)$ en tant que W_v -faisceau de Hecke, dépend de π_v alors qu'en tant que faisceau, il ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de π_v . Cette remarque s'applique à nouveau au W_v -faisceau pervers de Hecke $HT(\pi_v, \Pi_t)$ alors que pour $\mathcal{P}(t, \pi_v)$, l'ajout de $\mathcal{L}(\pi_v)$ fait qu'il ne dépend, en tant que W_v -faisceau pervers de Hecke, que de la classe d'équivalence inertielle de π_v ce qui justifie au passage la définition de $\mathfrak{P}(t, \pi_v)$.

2.2. Énoncé des théorèmes globaux. —

2.2.1. Définition. — Soit $P \in \text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}})$ un W_v -faisceau pervers de Hecke sur $\mathbb{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$. Par définition de N , l'application $\tilde{\gamma} : i \in I_v \mapsto \gamma(i) \exp(-t_l(i)N)$, définit une action localement constante de I_v sur $P_{\mathcal{I}}$ qui définit alors un morphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -algèbres $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(I_v) \rightarrow \text{End}_{\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}})}(P)$ où $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(I_v)$ désigne l'algèbre des distributions localement constantes sur I_v . Pour σ'_v une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible lisse de I_v , on notera $P_{\sigma'_v}$, le facteur découpé via $\tilde{\gamma}$ par l'idempotent de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(I_v)$ associé à σ'_v .

Remarque : de la compacité de I_v , on en déduit que tout W_v -faisceau pervers P est à la fois le produit et le coproduit des $P_{\sigma'_v}$.

Une représentation σ'_v de I_v sera dite σ_v -isotypique, pour σ_v une représentation irréductible de W_v , si $(\sigma_v)|_{I_v}$ contient σ'_v . Par réciprocity de Frobenius, deux représentations irréductibles $\sigma_{v,1}$ et $\sigma_{v,2}$ de W_v sont inertiellement équivalentes si et seulement s'il existe une représentation irréductible σ'_v de I_v qui soit σ_i -isotypique pour $i = 1, 2$.

2.2.2. Définition. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on notera P_{π_v} et on l'appellera la composante π_v -isotypique de P , la somme des P_{σ} où σ parcourt les sous-représentations irréductibles de la restriction à I_v de la représentation $\mathcal{L}(\pi_v)$ de W_v associée à π_v^{\vee} par la correspondance de Langlands locale.

Soit $P_{\mathcal{I}}$ un W_v -faisceau pervers de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}$. Pour tout $J \in \mathcal{I}$, N_J est nilpotent et définit deux filtrations finies de P_J : la filtration par les noyaux $K_{J,\bullet}$ qui est croissante, et celle par les images I_J^{\bullet} qui est décroissante. Leur convolution donne la filtration $M_{J,\bullet}$ dite de monodromie. Ces familles de filtration induisent alors des filtrations $K_{\bullet}P_{\mathcal{I}}$, $I^{\bullet}P_{\mathcal{I}}$ et $M_{\bullet}P_{\mathcal{I}}$ dans la catégorie des W_v -faisceaux pervers de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}$, et on note gr_I^p (resp. gr_q^K) le gradué $I^p/I^{p+1}(P_{\mathcal{I}})$ (resp. $K_{q+1}/K_q(P_{\mathcal{I}})$). Dans la suite on étudiera plutôt les bigradués $gr_I^q gr_p^K = I^q \cap K_p$.

2.2.3 — Pour tout $J \in \mathcal{I}$, les faisceaux pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\eta_v, J}(\overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1](\frac{d-1}{2})$ sur \overline{X}_J définissent un W_v -faisceau pervers de Hecke que l'on note $\Psi_{\mathcal{I}}$ qui, d'après l'appendice de [12], est mixed.

2.2.4. Théorème. — Pour tout $\pi_v \in \text{Cusp}_v(g)$, la composante π_v -isotypique $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ de $\Psi_{\mathcal{I}}$ est nulle si $g > d$ et pour $1 \leq g \leq d$, on a un isomorphisme dans $\text{FPH}(\overline{X}_{\mathcal{I}})$

$$gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \begin{cases} \mathfrak{P}(p+q+1, \pi_v)(-\frac{p-q}{2}) & \text{si } p, q \geq 0 \text{ et } p+q+1 \leq \lfloor \frac{d}{g} \rfloor \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : ce résultat prouve en particulier la pureté de la filtration de monodromie, cf. (2.2.8).

On renvoie au §3 pour les rappels et les notations sur les représentations de $GL_d(F_v)$; pour les énoncés suivants précisons seulement que $\text{St}_t(\pi_v)$ (resp. $\text{Speh}_t(\pi_v)$) désigne la représentation de Steinberg (resp. de Speh) généralisée, que \times désigne l'induite parabolique normalisée et que pour π_1, π_2 des représentations de respectivement $GL_{t_1 g}(F_v)$, $GL_{t_2 g}(F_v)$, $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 := \pi_1 \{-\frac{t_2}{2}\} \times \pi_2 \{\frac{t_1}{2}\}$.

2.2.5. Théorème. — La restriction de $h^i j_{\mathcal{I}, !}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ à $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{-h}$ vérifie les points suivants :

- elle est nulle pour h ne s'écrivant pas sous la forme $(t+a)g$ avec $0 \leq a \leq s-t$;
- pour $h = (t+a)g$ avec $0 \leq a \leq s-t$, elle est nulle pour $i \neq tg-d+a(g-1)$ et sinon elle est isomorphe dans $\text{FH}(\overline{X}^{-h})$ à $\widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_a(\pi_v))(\frac{a}{2})$.

Remarque : pour $g > 1$, $h^i j_{\mathcal{I}, !}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ est nul pour i ne s'écrivant pas sous la forme $tg-d+a(g-1)$ avec $0 \leq a \leq s-t$ et pour un tel $i = tg-d+a(g-1)$ il est isomorphe dans $\text{FH}(\overline{X}_{\mathcal{I}})$ à $j_{\mathcal{I}, !}^{\geq (t+a)g} \widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_a(\pi_v))(\frac{a}{2})$.

2.2.6. Théorème. — Pour tous $p, q \geq 0$ tels que $p + q + 1 < \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, la flèche

$$gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \longrightarrow gr_I^{q+1} gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})[1]$$

déduite par décalage et rotation du triangle distingué $gr_I^{q+1} \rightarrow I^q/I^{q+2} \rightarrow gr_I^q$ est donnée en cohomologie par l'unique morphisme $GL_{(p+q+a+1)g}(F_v)$ -équivariant non nul

$$St_{p+q+1}(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_a(\pi_v) \longrightarrow St_{p+q+2}(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{a-1}(\pi_v)$$

pour tout $0 \leq a \leq s - p - q - 1$.

2.2.7 — La formulation de 2.2.4 nous a été suggérée par J.-F. Dat. Originellement l'énoncé portait sur les gradués de la filtration de monodromie; rappelons brièvement comment on passe de l'une à l'autre des descriptions, cf. [7] 5.1.6. Par définition on a $gr_k^M = \bigoplus_{p-q=k} gr_I^q gr_p^K$. Inversement N induit un isomorphisme $gr_I^p gr_p^K \simeq gr_I^{q+1} gr_{p-1}^K(-1)$ de sorte que

$$gr_I^q gr_0^K = \text{Ker}\left(gr_{-q}^M \xrightarrow{N} gr_{-q-2}^M(-1)\right), \quad N^p : gr_I^q gr_p^K \xrightarrow{\sim} gr_I^{q+p} gr_0^K(-p).$$

Ainsi 2.2.4 est équivalent à la formulation

$$gr_k^M(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})\left(\frac{k}{2}\right) = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathfrak{P}(t, \pi_v). \quad (2.2.8)$$

La suite spectrale à chaque niveau fini $J \in \mathcal{I}$

$$E_1^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i}^M(R\Psi_{\eta_v, J}(\overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1]) \Rightarrow R^{i+j+d-1} \Psi_{\eta_v, J}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$$

induit une suite spectrale dans les W_v -faisceaux de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}$:

$$E_{1, \pi_v}^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i}^M(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \Rightarrow h^{i+j} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} \quad (2.2.9)$$

Le lecteur vérifiera alors sans difficultés, ou avec l'aide du §5.8, que 2.2.6 est équivalent au fait que la suite spectrale ci-dessus dégénère en E_2 , et pour tous $1 \leq t \leq s$, $0 \leq \alpha \leq t-1$ et $0 \leq \beta < t-1-\alpha$, la flèche $d_{1, \pi_v}^{-\alpha+\beta, -d+tg-t+1+2\alpha}$ est donnée par l'unique application non nulle

$$St_{\alpha+\beta+1}(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{t-1-\alpha-\beta}(\pi_v) \longrightarrow St_{\alpha+\beta+2}(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{t-2-\alpha-\beta}(\pi_v)$$

en convenant que l'induite de Π avec « une représentation » de $GL_0(F_v)$ est égale à Π . En particulier en ce qui concerne l'aboutissement de la suite spectrale 2.2.9, on a le résultat partiel suivant qui sera complété par le corollaire 2.3.6.

2.2.10. Corollaire. — Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$. Pour tout point supersingulier z de $X_{\mathcal{I}}$, l'aboutissement de la suite spectrale 2.2.9, $E_{\infty, \pi_v}^{i,j} = E_{2, \pi_v}^{i,j}$ est nul si (i, j) n'est pas de la forme $(-k, 1-s+2k)$ avec $0 \leq k \leq s-1$ et sinon, en tant que $GL_d(F_v) \times D_{v,d}^\times \times W_v$ -module

$$\text{Ind}_{(D_{v,d}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,d}^\times} z^* E_{2, \pi_v}^{-k, 1-s+2k} \simeq \bigoplus_{\pi' \in \diamond(\pi_v)} [\overleftarrow{k}, \overrightarrow{s-1-k}]_{\pi'_v} \otimes V_{\pi'_v} \otimes \mathcal{L}(\pi'_v)\left(-\frac{d-s+2k}{2}\right)$$

où on renvoie au §3.1 pour la définition des représentations $[\overleftarrow{k}, \overrightarrow{s-1-k}]_{\pi'_v}$ et où $V_{\pi'_v} = z^* \mathcal{F}(s, \pi'_v)$ est une représentation de $D_{v,d}^\times$ qui reste encore à déterminer.

Remarque : nous verrons au corollaire 2.3.6 que $z^* \mathcal{F}(s, \pi'_v) \simeq \pi'_v[s]_D$.

Démonstration. — La description des termes initiaux de 2.2.9 découle directement de la description des gradués de monodromie, cf. 2.2.8, et des fibres des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers de Harris-Taylor $\mathcal{P}(t, \pi_v)$, cf. le théorème 2.2.5. La dégénérescence en E_2 et le calcul explicite des termes $E_{2, \pi_v}^{i,j}$ se déduit simplement du théorème 2.2.6 : plutôt que de grandes phrases l'illustration de la figure 1 dans le cas où $s = 4$ devrait convaincre le lecteur. Enfin l'écriture

en somme directe sur l'ensemble $\diamond(\pi_v)$ découle directement de la description des actions sur les faisceaux $HT(t, \pi_v)$ et de la proposition 1.1.4. \square

2.3. Corollaires locaux. — On complète les notations du début, i.e. K est une extension finie de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_K son anneau des entiers, \mathcal{P}_K l'idéal maximal engendré par une uniformisante ϖ_K et $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$ le corps résiduel de cardinal $q = p^f$. L'extension maximal non ramifiée de K sera notée K^{nr} de complété \hat{K}^{nr} , d'anneau des entiers respectifs $\mathcal{O}_{K^{nr}}$ et $\mathcal{O}_{\hat{K}^{nr}}$.

Soit $d \geq 1$ et $\Sigma_{K,d}$ le \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate formel sur $\bar{\kappa}$ de hauteur d , cf. [13] §II. On considère la catégorie \mathcal{C} des \mathcal{O}_K -algèbres locales, artiniennes, de corps résiduel $\bar{\kappa}$. Le foncteur qui à un objet R de \mathcal{C} associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations sur R de $\Sigma_{K,d}$ munies d'une structure de niveau n est pro-représentable par un anneau local complet, noethérien, régulier $R_{K,d,n}$ de corps résiduel $\bar{\kappa}$.

2.3.1. Définition. — Soit $\Psi_{K,l,d,n}^i$ le $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -espace vectoriel de dimension finie associé, via la théorie des cycles évanescents de Berkovich, au morphisme structural $\mathrm{Spf} R_{K,d,n} \rightarrow \mathrm{Spf} \hat{\mathcal{O}}_K^{nr}$.

Cet espace vectoriel est muni d'une action de $GL_d(\mathcal{O}_K)$ qui se factorise par le morphisme surjectif naturel $GL_d(\mathcal{O}_K) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K^n)$ et on pose $\Psi_{K,l,d}^i = \varinjlim_n \Psi_{K,l,d,n}^i$. Le groupe multiplicatif $D_{K,d}^\times$ de l'ordre maximal de l'algèbre à division centrale $D_{K,d}$ sur K d'invariant $1/d$ s'identifie avec le groupe des automorphismes de $\Sigma_{K,d}$ et agit donc naturellement sur $\Psi_{K,l,d}$ tout comme le sous-groupe d'inertie I_K .

2.3.2. Notation. — On notera $GDW_K(d)$ le groupe produit $GL_d(K) \times D_{K,d}^\times \times W_K$ et $GDW_K(d)^0$ le noyau de l'application $(g, \delta, c) \mapsto \mathrm{val}(\det(g^{-1})\mathrm{rn}(\delta) \mathrm{Art}_K^{-1}(c)) \in \mathbb{Z}$. On adoptera une notation similaire pour $GW_K^0(d)$.

2.3.3. Proposition. — (cf. [13] II.2.8) On peut prolonger l'action « naturelle » de $GL_d(\mathcal{O}_K) \times D_{K,d}^\times \times I_K$ sur $\Psi_{K,l,d}$ au groupe $GDW_K(d)^0$. Pour un caractère χ de K^\times d'image finie, soit $\Psi_{K,l,d,\chi}$ le facteur direct de $\Psi_{K,l,d}$ sur lequel le centre de $GL_d(\mathcal{O})$ agit via χ . On prolonge alors l'action de $GDW_K(d)^0$ sur $\Psi_{K,l,d,\chi}$ au groupe $GDW_K(d)^1 := GDW_K(d)^0 \times \varpi_K^{\mathbb{Z}}$ en faisant agir ϖ_K vu comme un élément de $D_{K,d}^\times$ (resp. $GL_d(K)$) via le scalaire $\chi^{-1}(\varpi_K)$ (resp. $\chi(\varpi_K)$).

2.3.4 — Dans la définition de $R_{K,d,n}$, il est agréable de considérer plutôt les déformations par quasi-isogénies ce qui donne un schéma formel $\mathrm{Spf} R_{K,d,n,\mathbb{Z}} \simeq \coprod_{\mathbb{Z}} \mathrm{Spf} R_{K,d,n}$ de sorte que la construction précédente fournit des $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -espaces vectoriels

$$\mathcal{U}_{K,l,d,\chi}^i := \mathrm{Ind}_{GDW_K(d)^1}^{GDW_K(d)} \Psi_{K,l,d,\chi}^i \simeq \mathrm{Ind}_{(D_{K,d}^\times)^0 \varpi_K^{\mathbb{Z}}}^{D_{K,d}^\times} \Psi_{K,l,d,\chi}^i$$

qui sont donc des représentations de $GDW_K(d) = GL_d(K) \times D_{K,d}^\times \times W_K$. Pour τ une représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$, on notera $\mathcal{U}_{K,l,d}^i(\tau) = \mathrm{Hom}_{D_{K,d}^\times}(\tau, \mathcal{U}_{K,l,d}^i)$.

2.3.5. Théorème. — Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$, on a

$$\mathcal{U}_{K,l,d}^{d-1-i}(\pi[s]_D) \simeq \begin{cases} \mathcal{L}(\pi)\left(-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}\right) \otimes \overleftarrow{[s-1-i, i]}_\pi & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

où $\overleftarrow{[s-1-i, i]}_\pi$ est l'unique sous-espace irréductible de l'induite $\mathrm{St}_{s-i}(\pi) \overrightarrow{\times} \mathrm{Speh}_i(\pi)$.

Remarque : comme mentionné dans l'introduction via l'isomorphisme de Faltings, cf. [8] ou [11], on obtient un énoncé analogue pour la tour de Drinfeld lequel avait été conjecturé dès 1995 par M. Harris après ses travaux sur le programme de Carayol.

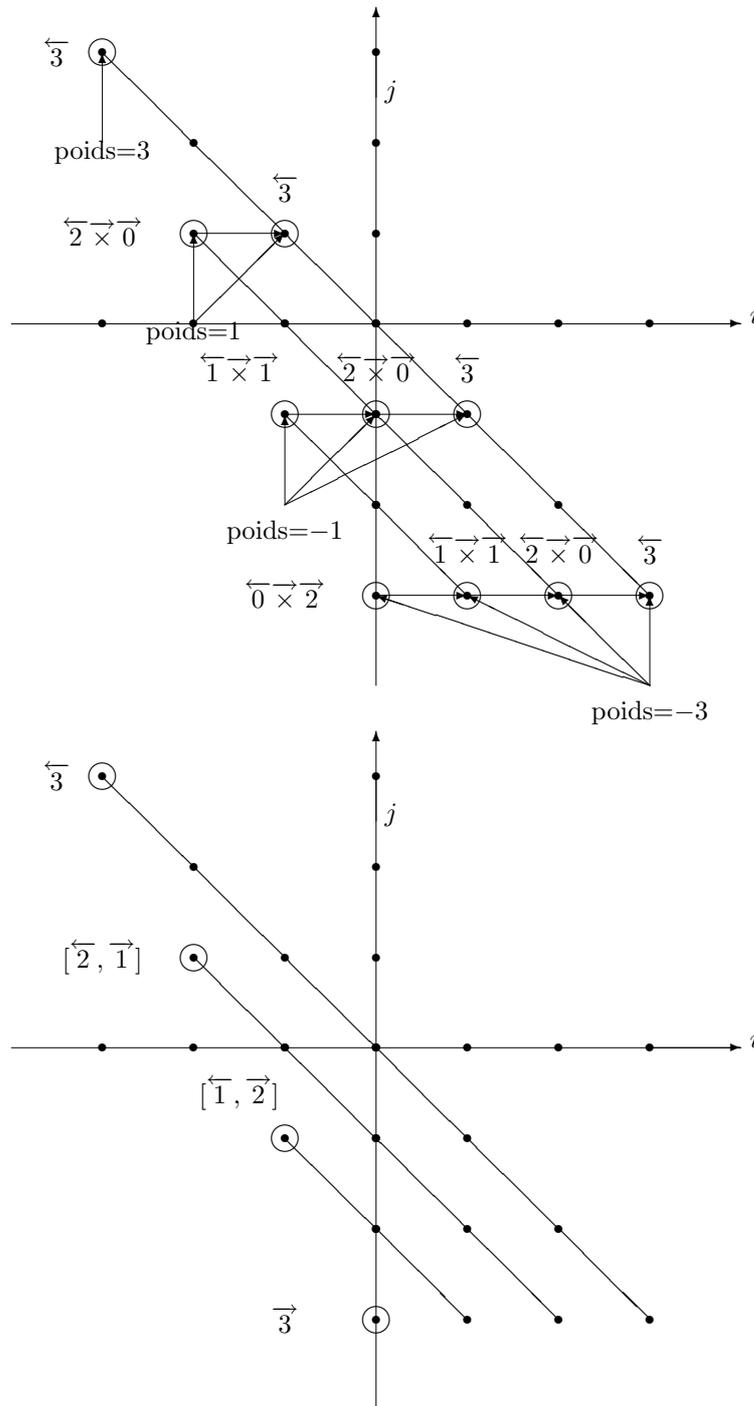


FIGURE 1. Fibres en un point supersingulier de la suite spectrale de monodromie 2.2.9 dans le cas où $s = 4$; la figure du haut représente les termes initiaux et celle du bas les termes E_2 et donc l'aboutissement de la suite spectrale.

Démonstration. — La stratégie est classique et passe par voie globale. Soit F un corps global et v une place de F vérifiant les hypothèses de §1.2 avec $F_v = K$. D'après le théorème de Serre-Tate, le complété de l'anneau local de X_I en un point géométrique de $\overline{X_I}^h$ est isomorphe à $R_{K,h,m_1}[[X_1, \dots, X_{d-h}]]$. D'après le théorème de comparaison de Berkovich, la fibre de $R^i\Psi_{\eta_v, I}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ en un point géométrique de $\overline{X_I}^h$ est isomorphe à $\Psi_{K,l,h,m_1(I)}^i$. On considère alors le sous-ensemble $\mathcal{I}^v \subset \mathcal{I}$ des éléments de \mathcal{I} tels que la composante hors v soit fixée et assez petite et on notera I_0^v l'élément maximal de \mathcal{I}^v . Soit z un point supersingulier de $\overline{X_{I_0^v}}^d$, les morphismes $[1]_{I, I_0^v}$ sont alors totalement ramifiés au dessus de z . D'après le corollaire 2.2.10, dans le groupe de Grothendieck de $GDW_v(d)$, on a l'égalité suivante

$$[\text{Ind}_{GDW_v(d)}^{GDW_v(d)} z^* \Psi_{\mathcal{I}}^*] = \sum_{g|d=sg} \sum_{\pi_v \in \mathcal{U}(g)} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [V_{\pi_v} \otimes \overleftarrow{[s-1-i, i]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}\right)]$$

où $\mathcal{U}(g)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $GL_g(F_v)$ et où $V_{\pi_v} := z^* \mathcal{F}(s, \pi_v)$ est d'après le théorème de Berkovich muni d'une action de $D_{v,d}^\times$ qu'il s'agit maintenant d'identifier. Par ailleurs d'après [13] théorème VII.1.5 et l'isomorphisme 2.4.2, dans le groupe de Grothendieck de $GDW_v(d)$ on a l'égalité suivante

$$[\text{Ind}_{GDW_v(d)}^{GDW_v(d)} z^* \Psi_{\mathcal{I}}^*] = \sum_{g|d=sg} \sum_{\pi_v \in \mathcal{U}(g)} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [\pi_v[s]_D \otimes \overleftarrow{[s-1-i, i]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}\right)]$$

Ainsi de l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{g|d=sg} \sum_{\pi_v \in \mathcal{U}(g)} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [V_{\pi_v} \otimes \overleftarrow{[s-1-i, i]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}\right)] = \\ \sum_{g|d=sg} \sum_{\pi_v \in \mathcal{U}(g)} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [\pi_v[s]_D \otimes \overleftarrow{[s-1-i, i]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}\right)] \end{aligned}$$

on en déduit que $[V_{\pi_v}] = [\pi_v[s]_D]$ dans le groupe de Grothendieck de $D_{v,d}^\times$, ce qui fournit le résultat local pour π_v unitaire. Le cas général découle alors de l'isomorphisme (cf. [13] II.2.9)

$$\Psi_{K,l,d}^i(\tau \otimes (\psi \circ v_K \circ \text{rn})) \simeq \Psi_{K,l,d}^i(\tau) \otimes (\psi^{-1} \circ \delta_d)$$

où $\delta_d : (g, c) \in GL_d(K) \times W_K \mapsto v_K(\det g) - \deg c \in \mathbb{Z}$ et $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$. \square

2.3.6. Corollaire. — *Étant donné un point géométrique z de $\overline{X_{\mathcal{I}}}^{tg}$, l'action de $D_{v,tg}^\times$ sur $\text{Ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,tg}^\times} z^* \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$, induit d'après le théorème de comparaison de Berkovich, une action sur $z^* \mathcal{F}(t, \pi_v)$ telle que ce dernier est isomorphe à $\pi_v[t]_D$.*

2.3.7. Corollaire. — *Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$. Le $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace gradué $gr_I^q gr_p^K \mathcal{U}_{F_v, l, d}(\pi_v[s]_D)[d-1]$ est non nul si et seulement si $p, q \geq 0$ et $p+q < s$, auquel cas il est concentré en degré $p+q-s+1$ donné par*

$$\overleftarrow{[p+q]}_{\pi_v} \overrightarrow{[s-2-p-q]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v)(q-p)$$

Par ailleurs pour tous $p, q \geq 0$ tels que $p+q < s-1$, le morphisme $GDW_K(d)$ -équivariant

$$gr_I^q gr_p^K \mathcal{U}_{F_v, l, d}^{1-s+p+q}[d-1] \rightarrow gr_I^{q+1} gr_p^K \mathcal{U}_{F_v, l, d}^{2-s+p+q}[d-1]$$

déduit par décalage et rotation du triangle distingué $gr_I^{q+1} \rightarrow I^q/I^{q+2} \rightarrow gr_I^q$ est donné par l'unique morphisme $GL_d(F_v)$ -équivariant non nul

$$\overleftarrow{[p+q]}_{\pi_v} \overrightarrow{[s-2-p-q]}_{\pi_v} \rightarrow \overleftarrow{[p+q+1]}_{\pi_v} \overrightarrow{[s-3-p-q]}_{\pi_v}$$

Démonstration. — D'après [9], la bifiltration de $z^*\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ induite par celle de $\Psi_{\mathcal{I}^v,\pi_v}$, est $GDW_v(d)^0$ équivariante⁽²⁾. Le résultat découle alors directement de 2.2.6. \square

2.4. Synthèse des résultats locaux et globaux. — Pour tout point géométrique z de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^h$, d'après le théorème de comparaison de Berkovich et [13] lemme II.2.8 (cf. aussi la proposition 2.3.3), la fibre $z^*\Psi_{\mathcal{I}}$ est munie d'une action de $(D_{v,h}^\times)^0$ ainsi que de $\varpi_v^{\mathbb{Z}}$ vu comme sous-groupe soit de $D_{v,h}^\times$ soit de $GL_h(F_v)$ telle que $(\varpi_v, \varpi_v) \in GL_h(F_v) \times D_{v,h}^\times$ agisse trivialement. Rappelons l'isomorphisme $G(\mathbb{A}^\infty) \times D_{v,tg}^\times / \mathcal{D}_{v,tg}^\times$ -équivariant du bas de la page 138 de [13] combiné à la proposition IV.2.2 de loc. cit. (cf. aussi la proposition 1.1.4)

$$\mathrm{Ind}_{(D_{v,h}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,h}^\times} (\Psi_{\mathcal{I}})_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^h} \simeq \bigoplus_{\tau_v} \mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}} \otimes \mathcal{U}_{F_v, l, tg}^{d-1+\bullet}(\tau_v) \quad (2.4.1)$$

où $\mathcal{U}_{F_v, l, tg}^\bullet$ est le complexe des cycles évanescents locaux définis au §2.3 et où τ_v décrit l'ensemble des représentations irréductibles admissibles de $D_{v,tg}^\times$. D'après le théorème 2.3.5, si la composante π_v -isotypique de $\mathcal{U}_{F_v, l, tg}^i(\tau_v)$ est non nulle alors $\tau_v \sim^i \pi_v[t]_D$ de sorte que l'isomorphisme (2.4.1) donne

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,tg}^\times} z^* \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{1-s+i} &\simeq \bigoplus_{\pi'_v \in \diamond(\pi_v)} z^* \mathcal{F}(t, \pi'_v) \otimes \mathcal{U}_{F_v, l, tg}^{d-s+i}(\pi'_v[t]_D) \\ &\simeq \bigoplus_{\pi'_v \in \diamond(\pi_v)} [\overleftarrow{i}, s-1-i]_{\pi'_v} \otimes \pi'_v[s]_D \otimes \mathcal{L}(\pi'_v)\left(-\frac{d-s+2i}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

où z est un point géométrique de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{tg}$. Ainsi avec les notations de la définition 1.1.8, l'isomorphisme (2.4.2) se « factorise » en un isomorphisme $D_{v,tg}^\times$ -équivariant

$$\begin{aligned} z^* \left(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{1-s+i} \right)^{\dagger e_{\pi_v}} &\simeq z^* \mathcal{F}(t, \pi_v) \otimes \mathcal{U}_{F_v, l, tg}^{d-1+\bullet}(\pi_v[t]_D) \\ &\simeq [\overleftarrow{i}, s-1-i]_{\pi_v} \otimes \pi_v[s]_D \otimes \mathcal{L}(\pi_v)\left(-\frac{d-s+2i}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

On réécrit alors le théorème 2.2.4 sous la forme.

2.4.4. Théorème. — *Pour tout $\pi_v \in \mathrm{Cusp}_v(g)$, la composante π_v -isotypique $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ de $\Psi_{\mathcal{I}}$ est nulle si $g > d$ et pour $1 \leq g \leq d$, on a un isomorphisme dans $\mathrm{FPH}(\overline{X}_{\mathcal{I}})$*

$$gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) = \begin{cases} \mathcal{P}(p+q+1, \pi_v)\left(-\frac{p-q}{2}\right) & \text{si } p, q \geq 0 \text{ et } p+q+1 \leq \lfloor \frac{d}{g} \rfloor \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

au sens de la formule (2.4.3) pour tout point géométrique z de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{tg}$.

Remarque : en tant que W_v -faisceau pervers de Hecke, on a $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}} = e_{\pi_v} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ et $\mathcal{P}(t, \pi_v) = e_{\pi_v} \mathfrak{P}(t, \pi_v)$; l'intérêt de l'écriture de 2.4.4 par rapport à 2.2.4 résulte juste dans (2.4.3). En quelque sorte le point de vue de $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ est faisceutique, c'est celui pris dans [13], alors que celui de $\mathfrak{P}(t, \pi_v)$ est celui des faisceaux pervers. Dans la suite on adoptera systématiquement le point de vue de 2.4.4, i.e. on privilégie les $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ au détriment des $\mathfrak{P}(t, \pi_v)$: quand les énoncés concerneront des W_v -faisceaux pervers de Hecke, il y aura un facteur e_{π_v} à simplifier pour passer au point de vue de 2.2.4.

2. La seule difficulté sérieuse est de montrer l'équivariance sous $D_{v,d}^\times$.

2.5. Principe de la preuve : par récurrence sur le modèle local. — On va raisonner par récurrence sur le modèle local, i.e. on suppose connue la conclusion du corollaire 2.3.7 pour tous les $\mathcal{U}_{F_v, l, h}$ avec $1 \leq h < d$. Un mot sur l'initialisation de cette récurrence : pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ fixée, la situation $h = g$ correspond au cas cuspidal traité dans [3] en remarquant que la monodromie est obligatoirement triviale. Le passage de $h = (s - 1)g$ à $d = sg$ est un peu différent selon que $s = 2$ ou $s > 2$; en effet pour $s = 2$, le cas cuspidal permet de reconstituer complètement les $\mathcal{U}_{F_v, l, 2g}^i(\pi_v[2]_D)$ mais en ce qui concerne la monodromie on ne peut pas arbitrer entre la situation où la monodromie serait triviale ou non. On utilise alors un argument de changement de base, cf. la preuve de la proposition 5.6.3, pour nous ramener au cas de $\mathcal{U}_{F_v, l, 2}^i(1_v[2]_D)$, et on invoque alors les résultats de Carayol dans [5] pour montrer que la monodromie n'est pas nulle.

Via le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, on dispose alors de la description explicite des fibres aux points non-supersinguliers des bigradués $gr_7^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}})$, cf. le début du §4.2, et même de leur restriction à ces strates, cf. le §4.2.2. Ainsi dans un premier temps, on va « reconstituer » les faisceaux pervers $\Psi_{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ en dehors des points supersinguliers. Dans un deuxième temps, à partir de calculs de groupes de cohomologie, on déterminera les faisceaux pervers concentrés aux points supersinguliers qui entrent dans la décomposition de $\Psi_{\mathcal{I}}$ en irréductibles, dans le groupe de Grothendieck \mathfrak{G} défini au §7. Enfin, à partir d'une propriété d'autodualité de la cohomologie du modèle local, théorème 5.5.1, on donnera les faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ et on décrira les flèches de la suite spectrale de monodromie, théorème 2.2.6.

2.6. Le cas d'égaux caractéristiques de [4]. — Les deux situations sont similaires : le lecteur ne voulant pas utiliser les simplifications qu'apporte la conjecture de monodromie-poids, connue en toute généralité en égaux caractéristiques, peut reprendre exactement les arguments de ce texte en considérant l'action de $GL_d(F_v)$ sur les structures de niveau telle que définie dans [3] tordue par $g \mapsto {}^t g^{-1}$.

Si comme dans [4], on décide de garder l'action de [3], il convient d'apporter les modifications suivantes aux notations de ce texte. Dans toutes les induites paraboliques considérées, il faut remplacer les paraboliques standards par les paraboliques opposés. Ainsi par rapport aux notations du §3.1, $\pi_1 \times \pi_2$ désigne l'induite parabolique de $\pi_1\{-n_2/2\} \otimes \pi_2\{n_1/2\}$ par rapport au parabolique $P_{n_1, n_1+n_2}^{op}(K)$; pour $n_1 = t_1 g$ et $n_2 = t_2 g$, on pose $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 = \pi_1\{t_2/2\} \times \pi_2\{-t_1/2\}$. L'avantage de cette dernière notation est qu'elle absorbe toutes les modifications de signe à apporter entre les énoncés en égaux caractéristiques et ceux en inégaux. Ainsi tous les énoncés de cet article sont valables dans la situation de [3] en posant $\pi_v[t]_D = \text{JL}^{-1}(\text{St}_t(\pi_v))$ et où \mathcal{L} désigne désormais la correspondance de Langlands locale. Les seuls énoncés auxquels il faut apporter un changement de signe sur la torsion des représentations de GL , sont ceux qui ne font pas intervenir la notation $\overrightarrow{\times}$: typiquement ceux provenant d'un calcul de foncteur de Jacquet, comme par exemple ceux relatifs aux calculs de Red_{τ_v} dans la proposition 5.2.3. Dans ces énoncés, soit on change le signe des puissances de Ξ soit on modifie sa définition en imposant $\Xi(1) = q^{-1}$.

PARTIE II

PREUVE DES ÉNONCÉS GLOBAUX

3. Rappels sur les représentations de $GL_d(K)$

3.1. Induites paraboliques. —

3.1.1. Définition. — Pour une suite $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k = d$, on note P_{r_1, r_2, \dots, r_k} le sous-groupe parabolique de GL_d standard associé au sous-groupe de Levi $GL_{r_1}(K) \times GL_{r_2-r_1}(K) \times \dots \times GL_{r_k-r_{k-1}}(K)$ et on note N_{r_1, \dots, r_k} son radical unipotent. On mettra en exposant *op* pour désigner les paraboliques opposés.

3.1.2 — Soient π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$; on note selon la coutume, $\pi_1 \times \pi_2$ l'induite parabolique $\text{Ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}$.

Remarque : le symbole \times est associatif, i.e. $\pi_1 \times (\pi_2 \times \pi_3) = (\pi_1 \times \pi_2) \times \pi_3$ que l'on notera donc $\pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3$.

3.1.3. Définitions. — (cf. [20]) Soit g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$:

- les sous-quotients irréductibles de $V(\pi, s) := \pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \dots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$ seront dits elliptiques de type π ;
- $V(\pi, s)$ possède un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible que l'on notera $\overleftarrow{[s-1]}_\pi$ (resp. $\overrightarrow{[s-1]}_\pi$); c'est une représentation de Steinberg (resp. de Spéh) généralisée notée habituellement $\text{St}_s(\pi)$ (resp. $\text{Spéh}_s(\pi)$);
- pour π_1 et π_2 des représentations respectivement de $GL_{t_1g}(K)$ et $GL_{t_2g}(K)$, on notera $\pi_1 \overleftrightarrow{\times} \pi_2$ l'induite parabolique $\pi_1\{-t_2/2\} \times \pi_2\{t_1/2\}$, l'entier g étant sous-entendu.

Remarque : le symbole $\overleftrightarrow{\times}$ est encore associatif; son introduction tient au fait que si π_1 et π_2 sont elliptiques de type π , il en est de même des sous-quotients irréductibles de $\pi_1 \overleftrightarrow{\times} \pi_2$.

3.1.4. Proposition-Définition. — Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$. Pour $1 \leq t < s$, l'induite parabolique $\overleftarrow{[t-1]}_\pi \overleftrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_\pi$ (resp. $\overrightarrow{[t-1]}_\pi \overleftrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_\pi$) est de longueur 2; on notera $\overleftarrow{[t-1, s-t]}_\pi$, (resp. $\overrightarrow{[t, s-t-1]}_\pi$) son unique sous-espace irréductible, et $\overleftarrow{[t, s-t-1]}_\pi$ (resp. $\overrightarrow{[t-1, s-t]}_\pi$) son unique quotient irréductible.

Notations : $\overleftarrow{[s-1]}_\pi$ désignera une représentation elliptique quelconque de type π de $GL_{sg}(K)$ et $\Pi \overleftrightarrow{\times} \overleftarrow{[1]}_\pi := \Pi$.

3.2. Foncteurs de Jacquet. — Soit $P = MN$ un parabolique de GL_d de Lévi M et de radical unipotent N .

3.2.1. Définition. — Pour π une représentation admissible de $GL_d(K)$, l'espace des vecteurs $N(K)$ -coinvariants est stable sous l'action de $M(K) \simeq P(K)/N(K)$. On notera $J_N(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}$.

3.2.2. Lemme. — (cf. [20] théorème 2.2) Soit g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$. Pour $1 \leq h \leq d$, le foncteur de Jacquet vérifie les propriétés suivantes :

- si g ne divise pas h , alors $J_{N_{h,d}^{op}}(\overleftarrow{[s-1]}_\pi) = J_{N_{h,d}^{op}}(\overrightarrow{[s-1]}_\pi) = (0)$;
- si $h = tg$ alors

$$J_{N_{tg,sg}^{op}}(\overleftarrow{[s-1]}_\pi) = \overleftarrow{[t-1]}_{\pi\{(t-s)/2\}} \otimes \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi\{t/2\}}$$

$$J_{N_{tg,sg}^{op}}(\overrightarrow{[s-1]}_\pi) = \overrightarrow{[t-1]}_{\pi\{(s-t)/2\}} \otimes \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi\{-t/2\}}$$

4. Reconstruction hors des points supersinguliers

4.1. Image dans \mathfrak{G} de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$. —

4.1.1. Définition. — On note \mathfrak{G} le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des W_v -faisceaux pervers de Hecke.

4.1.2. Théorème. — (cf. [13] théorème VII.1.5) Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$, on a

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i [U_{F_v, l, d}^{d-1-i}(\pi_v[s]_D)] = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [\overleftarrow{s-1-i}, \overrightarrow{i}]_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(-\frac{d+s-2-2i}{2}\right) \quad (4.1.3)$$

4.1.4. Proposition. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on a l'égalité suivante dans \mathfrak{G} :

$$[\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}] = \sum_{i=1}^s \sum_{t=i}^s (-1)^{t-i} [i_{\mathcal{I}, *}, j_{\mathcal{I}, !}^{\geq tg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{i-1}, \overrightarrow{t-i}]_{\pi_v}) \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(-\frac{2i-t-1}{2}\right)] \quad (4.1.5)$$

Démonstration. — L'isomorphisme (2.4.1) et l'égalité (4.1.3) déterminent pour tout $0 \leq h < d$, la somme $\sum_i (-1)^i [\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^i |_{\overline{X_{\mathcal{I}}}^h}]$ dans le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des faisceaux constructibles sur $\overline{X_{\mathcal{I}}}^h$. Le résultat découle alors du corollaire 7.8. \square

4.2. Faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_v)$. — On suppose 2.3.7 connu par récurrence pour tout $h < d$. D'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, pour tous $p, q \geq 0$ et $p+q \leq s-1$, on a les faits suivants où z est un point géométrique z de $\overline{X_{\mathcal{I}}}^h$ pour $h \neq d$.

(i) La fibre $z^* gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est nulle si h n'est pas de la forme tg et sinon, cf. (2.4.2), elle est muni d'une action naturelle de $GDW_v(tg)^1 = GDW_v(tg)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}$: on notera

$$\text{Ind} z^* gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) := \text{Ind}_{GDW_v(tg)^1}^{GDW_v(tg)^0} z^* gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$$

(ii) Pour tout $h = tg < d$, $\text{Ind} z^* h^i gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est soit nul soit pure de poids $p - q + i$; plus précisément

(iii) le support de $h^i gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est vide ou concentré aux points supersinguliers pour i qui n'est pas de la forme $-d + (p+q+1)g + a(g-1)$ avec $0 \leq a \leq s-p-q-1$ et sinon pour $g > 1$ (resp. $g = 1$) son support est $\overline{X_{\mathcal{I}}}^{=(p+q+1+a)g}$ (resp. $\overline{X_{\mathcal{I}}}^{\geq (p+q+1)}$). Pour tout point géométrique z de $\overline{X_{\mathcal{I}}}^{=(p+q+1+a)g}$, en tant que $GDW_v((p+q+1+a)g)$ -module on a

$$\begin{aligned} \text{Ind} z^* h^{-d+(p+q+1)g+a(g-1)} gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) &\simeq \\ &\bigoplus_{\pi'_v \in \hat{\diamond}(\pi_v)} \pi'_v[p+q+1+a]_D \otimes \mathcal{U}_{F_v, l, (p+q+1+a)g}^{(p+q+1+a)g-a}(\pi'_v[p+q+1+a]_D); \end{aligned}$$

la description de $z^* h^i gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ s'obtient selon le même procédé qu'en 2.4.3.

Il s'agit alors, à partir de ces résultats ponctuels et de l'égalité (4.1.5), de reconstituer, hors des points supersinguliers, les W_v -faisceaux pervers de Hecke $gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$, ainsi que ses faisceaux de Hecke de cohomologie. On va procéder en deux temps : en premier lieu on va montrer que, dans \mathfrak{G} , $gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ est égal à $\mathcal{P}(p+q+1, \pi_v) \left(-\frac{p-q}{2}\right)$ modulo des faisceaux pervers de Hecke concentrés aux points supersinguliers, puis dans un deuxième temps on montrera que les restrictions aux strates ouvertes des faisceaux de cohomologie des bigradués sont comme annoncées.

4.2.1. *Étape 1.* —

4.2.1. Lemme. — Pour tous $p, q \geq 0$ tels que $p + q \leq s - 1$, les gradués $gr_k^W gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ de la filtration par les poids sont, pour tout $k \neq p - q$, concentrés aux points supersinguliers.

Démonstration. — On considère la suite spectrale des poids

$$E_1^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i}^W gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \Rightarrow h^{i+j} gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}).$$

Soit alors $i_0 + j_0$ minimal avec $-i_0 > p - q$ tel que $E_1^{i_0, j_0}$ soit non nul. D'après 7.2, le support de $W_{>p-q} gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est de dimension $-i_0 - j_0$ et il existe un ouvert U de son support tel que sa fibre en tout point géométrique y est de poids $-i_0$. Par perversité la dimension du support des $E_1^{i,j}$ pour $i + j = i_0 + j_0 + 1$ est inférieure ou égale à $-i_0 - j_0 - 1$ et par minimalité de $i_0 + j_0$, les $E_1^{i,j}$ pour $i + j = i_0 + j_0 - 1$ et $i < i_0$ sont nuls de sorte que l'aboutissement de la suite spectrale ci-dessus ne peut pas être ponctuellement pur de poids $p - q$ en tout point non supersingulier ce qui contredit la propriété (ii) du début du §4.2.

Ainsi la conclusion du lemme est vérifiée pour tous $k > p - q$, p, q et π_v quelconque. Par ailleurs la dualité de Verdier induit un isomorphisme $D\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \Psi_{\mathcal{I}}$ et donc un isomorphisme $gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \simeq gr_1^p gr_q^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v^\vee})$, de sorte que le résultat est aussi vérifié pour $k < p - q$. \square

4.2.2. Proposition. — Dans \mathfrak{G} , pour $p + q + 1 < s$ avec p, q positifs ou nuls, $gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) - \mathcal{P}(p + q + 1, \pi_v)(-\frac{p-q}{2})$ est effectif concentré aux points supersinguliers.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur $p + q + 1$ de 1 à s . D'après la propriété (iii) du début du §4.2, on en déduit que $gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est de dimension $d - (p + q + 1)g$, au sens de la définition 7.3

4.2.3. Lemme. — Pour tout $1 \leq t \leq s$, dans \mathfrak{G}

$$j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) - j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$$

est effectif de dimension strictement plus petite que $d - tg$ et de poids strictement négatif.

Démonstration. — On a la suite exacte courte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow Q \rightarrow j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0$$

où $Q = i_{\mathcal{I}}^{\geq tg,*} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)[-1]$ est de poids inférieur ou égal à -1 et de dimension strictement inférieure à $d - tg$, d'où le résultat. \square

Ainsi d'après (4.1.5), $\mathcal{P}(t, \pi_v)(-\frac{t-1}{2})$ est un constituant de pure dimension $d - tg$ et de poids $t - 1$ de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}$ et donc d'après 4.2.1 de $\sum_{p-q=t-1} gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$. Or pour $q > 0$, $gr_1^q gr_{t-1+q}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est de dimension $d - (t + 2q)g < d - tg$ de sorte que $\mathcal{P}(t, \pi_v)(-\frac{t-1}{2})$ est un constituant de $gr_1^0 gr_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$. Ainsi dans \mathfrak{G} , on a

$$gr_1^0 gr_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) = \mathcal{P}(t, \pi_v)(-\frac{t-1}{2}) + Q_{\pi_v}(t)$$

où $Q_{\pi_v}(t) \in \mathfrak{G}$ est effectif; tous ses constituants étant à support dans $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{\geq tg+1}$, il est donc de dimension strictement plus petite que $d - tg$. Par ailleurs en utilisant les isomorphismes $N^q : gr_1^0 gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \simeq gr_1^q gr_{p-q}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$, dans \mathfrak{G} on a

$$gr_1^q gr_{t-1-q}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) = \mathcal{P}(t, \pi_v)(-\frac{t-1-2q}{2}) + Q_{\pi_v}(t)(q)$$

de sorte que la proposition 4.2.2 découle du lemme suivant. \square

4.2.4. Lemme. — Dans \mathfrak{G} , pour $1 \leq t < s$, $Q_{\pi_v}(t)$ est concentré aux points supersinguliers.

Démonstration. — D'après 4.2.1 les $gr_k^W gr_{t-1}^0 gr_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$, pour $k \neq t-1$, sont concentrés aux points supersinguliers de sorte que pour tout point géométrique z non supersingulier, la fibre en z de $h^i gr_I^0 gr_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ est isomorphe à celle de $h^i gr_{t-1}^W gr_I^0 gr_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$. En particulier on remarque que pour tout $0 > i > -d + tg$, la dimension du support de $h^i Q_{\pi_v}(t)$ est strictement plus petite que $-i$: en effet la propriété est vraie pour $gr_I^0 gr_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ (resp. $\mathcal{P}(t, \pi_v)$) d'après l'hypothèse de récurrence sur 2.3.7 (resp. par définition de l'extension intermédiaire). D'après le lemme 7.2, on en déduit que $Q_{\pi_v}(t)$ est de dimension nulle. Soit alors z un point non supersingulier. Si la fibre en z de $h^0 Q_{\pi_v}(t)$ était non nulle, elle serait pure de poids $t-1$; de la suite spectrale des poids on en déduirait alors que la fibre en z de $h^0 gr_I^0 gr_{t-1}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ aurait une partie de poids $t-1$ non nulle ce qui n'est pas. La conclusion est donc que $Q_{\pi_v}(t)$ est concentré aux points supersinguliers. \square

4.2.2. *Étape 2.* — Il s'agit de généraliser l'isomorphisme $(\Psi_{\mathcal{I}}^i)_{|\overline{X}^=h} \simeq \mathcal{F}(\Psi_{F_v, l, h}^{h-1+i})$ de [13] IV.2.2, au niveau des bi-gradués, i.e. $(h^i gr_I^q gr_p^K \Psi_{\mathcal{I}})_{|\overline{X}^=h} \simeq \mathcal{F}(gr_I^q gr_p^K \Psi_{F_v, l, h}^{h-1+i})$, ce qui doit pouvoir s'obtenir formellement comme dans [9] en considérant des complétés formels le long de sous-variétés de dimension quelconque. Ici, en utilisant, d'après l'hypothèse de récurrence 2.3.7, que les flèches $d_1^{p, q}$ de la suite spectrale de monodromie sont non nulles, du moins quand l'espace d'arrivée est non nul, nous sommes en mesure de procéder sans utiliser ce résultat.

4.2.5. **Proposition.** — *Pour $0 < h < d$ qui n'est pas divisible par g , la restriction des faisceaux de cohomologie $h^i gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ à la strate $\overline{X}_{\mathcal{I}}^=h$ est nulle pour tout i ; pour $h = tg$ elle est nulle pour tout i si $t \leq p + q$ et pour $t = p + q + 1 + a$ avec $0 \leq a < s - p - q - 1$ elle est nulle si $i \neq -d + tg - a$ avec*

$$(h^{-d+tg-a} gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}))_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg} \simeq \widehat{HT}(\pi_v, [\overleftarrow{p+q}]_{\pi_v} \overrightarrow{[a-1]}_{\pi_v}) \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{a+q-p}{2} \right)$$

Démonstration. — D'après la propriété (iii) du début de ce paragraphe, laquelle on le rappelle découle du théorème de comparaison de Berkovich-Fargues et l'hypothèse de récurrence locale, le résultat est vrai ponctuellement : il s'agit alors d'obtenir le dernier isomorphisme de faisceaux. On considère la suite spectrale de monodromie

$$E_{1, \pi_v}^{i, j} = h^{i+j} gr_{-i}^M(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \Rightarrow h^{i+j} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}.$$

Pour z un point géométrique de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg$, de l'hypothèse de récurrence locale 2.3.7 et comme observé à la fin du §2.2, $z^* E_{\infty, \pi_v}^{tg-d-r}$ est nul pour $r < 0$ ou $r \geq t$ et pour $0 \leq r < t$ isomorphe à $z^* E_{2, \pi_v}^{r+1-t, -d+tg+t-1-2r} = z^* \text{Ker } d_1^{r+1-t, -d+tg+t-1-2r}$. Ainsi pour tout $0 \leq r < t$,

$$\left(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{-d+tg-r} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg} \simeq \left(\text{Ker } d_1^{r+1-t, -d+tg+t-1-2r} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg}$$

avec d'après (2.4.1),

$$\left(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{-d+tg-r} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg}^{\dagger e_{\pi_v}} \simeq \widehat{HT}(\pi_v, [\overleftarrow{t-1-r}, \overrightarrow{r}]_{\pi_v}) \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(-\frac{t-1-2r}{2} \right).$$

Par ailleurs du point (iii) du début du §4.2, $z^* h^{-d+tg-r} gr_I^q gr_{t-1-r+q}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est nul pour $q \neq 0$ et donc

$$z^* E_{1, \pi_v}^{r+1-t, -d+tg+t-1-2r} \simeq z^* h^{-d+tg-r} gr_I^0 gr_{t-1-r}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}).$$

Pour $r = a$, on obtient donc la suite exacte courte de W_v -faisceaux de Hecke

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \left(\text{Ker } d_1^{a+1-t, -d+tg+t-1-2a} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg} &\longrightarrow \left(h^{-d+tg-a} gr_I^0 gr_{p+q}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg} \\ &\longrightarrow \left(\text{Ker } d_1^{a+2-t, -d+tg+t-1-2a} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

L'opérateur de monodromie N induit en outre un isomorphisme

$$\left(\text{Ker } d_1^{(a-1)+1-t, -d+tg+t-1-2(a-1)} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg} \xrightarrow{N} \left(\text{Ker } d_1^{a+2-t, -d+tg+t-1-2a} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}^=tg}(-1),$$

avec d'après ce qui précède

$$\left(\text{Ker } d_1^{(a-1)+1-t, -d+tg+t-1-2(a-1)} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}=tg} \simeq \left(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{-d+tg-a+1} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}=tg}$$

et $\left(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{-d+tg-a+1} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}=tg}^{\dagger e_{\pi_v}} \simeq \widehat{HT}(\pi_v, [\overleftarrow{t-a}, \overrightarrow{a-1}]_{\pi_v}) \otimes \mathcal{L}(\pi_v)(-\frac{t+1-2a}{2})$. En utilisant que $gr_1^q gr_p^K \simeq gr_1^0 gr_{p+q}^K(q)$, la suite exacte (4.2.6) s'écrit alors

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \widehat{HT}(\pi_v, [\overleftarrow{p+q}, \overrightarrow{a}]_{\pi_v}) \otimes \mathcal{L}(\pi_v)(\frac{a+q-p}{2}) &\longrightarrow (h^{-d+tg-a} gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}))_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}=tg} \\ &\longrightarrow \widehat{HT}(\pi_v, [\overleftarrow{p+q+1}, \overrightarrow{a-1}]_{\pi_v}) \otimes \mathcal{L}(\pi_v)(\frac{a+q-p}{2}) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

de sorte que sur $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{=tg}$, on a la suite exacte courte de faisceaux pervers de Hecke où on pose $t' = p + q + 1$:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{\pi_v[t'+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t'-1}, \overrightarrow{a}]_{\pi_v} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \xrightarrow{f} \mathcal{F}_{\pi_v[t'+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t'}, \overrightarrow{a-1}]_{\pi_v} \rightarrow 0 \quad (4.2.8)$$

et où d'après la proposition 4.2.2,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} \simeq \left(h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq t'g} \mathcal{F}_{\pi_v[t']_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_v} \otimes \Xi^{-a(g-1)/2} \times^{P_{t',g,d}(F_v)} GL_d(F_v) \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I},1}=(t'+a)g}.$$

Soit alors $\mathcal{G}_{\mathcal{I}} := \mathcal{H}_{\mathcal{I}} \otimes [\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_v} \otimes \Xi^{-a(g-1)/2}$ avec $\mathcal{H}_{\mathcal{I}} := \left(h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq t'g} \mathcal{F}_{\pi_v[t']_{D,1}} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I},1}=(t'+a)g}$.

On rappelle, cf. §2.1, que pour un point géométrique z de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=(t'+a)g}$, $\text{Ind}_{GL_{(t'+a)g}(F_v)}^{GL_{(t'+a)g}(F_v)} z^* \mathcal{H}_{\mathcal{I}}$, est munie d'une action de \mathbb{Z} telle que $(g_v^c, n) \in GL_{(t'+a)g}(F_v) \times \mathbb{Z}$ agit sur $\mathcal{G}_{\mathcal{I}}$ via l'action diagonale de $\text{val}(\det g_v^c) + n \in \mathbb{Z}$ sur $\text{Ind}_{GL_{(t'+a)g}(F_v)}^{GL_{(t'+a)g}(F_v)} z^* \mathcal{H}_{\mathcal{I}} \otimes \Xi^{-a(g-1)/2}$ et l'action de g_v^c sur $[\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_v}$. Ainsi en tant que représentation de $GL_{t'g}(F_v) \times \mathbb{Z}$, où $GL_{t'g}(F_v) \hookrightarrow P_{t',g,(t'+a)g}(F_v) \subset GL_{(t'+a)g}(F_v)$, $\text{Ind}_{GL_{(t'+a)g}(F_v)}^{GL_{(t'+a)g}(F_v)} z^* \mathcal{G}_{\mathcal{I}}$ est tel que ses constituants irréductibles sont de la forme $[\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_v, \{r+a(g-1)/2\}} \otimes \Xi^r$ pour $r \in \mathbb{R}$. Or comme l'image de $[\overleftarrow{t'}, \overrightarrow{a-1}]_{\pi_v}$ par le foncteur de Jacquet $J_{P_{t',g,(t'+a)g}(F_v)}$ ne contient jamais un constituant de la forme $[\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_v, \{a(g-1)/2\}} \otimes \cdots$, on en déduit que l'image de $\mathcal{G}_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ via l'application f de (4.2.8) dans $\mathcal{F}_{\pi_v[t'+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t'}, \overrightarrow{a-1}]_{\pi_v}$ est nulle. Ainsi en tant que $P_{t',g,(t'+a)g,d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ -faisceau de Hecke, on en déduit que $\mathcal{G}_{\mathcal{I}}$ est isomorphe à un sous-faisceau de $\mathcal{F}_{\pi_v[t'+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_v, \{a(g-1)/2\}} \otimes [\overrightarrow{a-1}]_{\pi_v, \{-t'(g-1)/2\}}$. Or on a $h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq t'g} \mathcal{F}_{\pi_v[t']_{D,1}} \otimes \Pi_{t'} \simeq \left(h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq t'g} \mathcal{F}_{\pi_v[t']_{D,1}} \otimes \Pi_{t'} \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I},1}=(t'+a)g} \times^{P_{t',g,(t'+a)g,d}(F_v)} P_{t',g,d}(F_v)$

avec $\mathcal{F}_{\pi_v[t']_{D,1}} \simeq \mathcal{F}_{\pi_v[t']_{D,1}} \times^{P_{t',g,d}(F_v)} GL_d(F_v)$, de sorte que de la transitivité de l'induction

$$\begin{aligned} \times^{P_{t',g,(t'+a)g,d}(F_v)} P_{t',g,d}(F_v) \times^{P_{t',g,d}(F_v)} GL_d(F_v) &= \times^{P_{t',g,(t'+a)g,d}(F_v)} GL_d(F_v) \\ &= \times^{P_{t',g,(t'+a)g,d}(F_v)} P_{(t'+a)g,d}(F_v) \times^{P_{(t'+a)g,d}(F_v)} GL_d(F_v). \end{aligned}$$

on en déduit que $h^{-d+t'g+a(g-1)} \mathcal{P}(t', \pi_v)_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}=(t'+a)g}$ est isomorphe à un sous-faisceau de $\mathcal{F}_{\pi_v[t'+a]_{D,1}} \otimes [\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_v} \otimes [\overrightarrow{a-1}]_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v)(-a(g-1)/2)$. En regardant la fibre en un point géométrique de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=(t'+a)g}$, et comme $\mathcal{F}_{\pi_v[t'+a]_{D,1}} \simeq \mathcal{F}_{\pi_v[t'+a]_{D,1}} \times^{P_{(t'+a)g,d}(F_v)} GL_d(F_v)$, on en déduit l'égalité des faisceaux et donc le résultat. \square

4.2.9. Corollaire. — *Pour tout $1 \leq t \leq s$ et pour $0 < h < d$ qui n'est pas divisible par g , la restriction des faisceaux de cohomologie $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ à la strate $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=h}$ est nulle pour tout i ; pour $h = (t+a)g$ elle est nulle si $i \neq -d + (t+a)g - a$ et sinon*

$$(h^{-d+(t+a)g-a} j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))_{|\overline{X}_{\mathcal{I}}=(t+a)g} \simeq \widehat{HT}(\pi_v, \Pi_t \otimes [\overrightarrow{a-1}]_{\pi_v})(\frac{a}{2})$$

Démonstration. — D'après 4.2.5 et 4.2.2, le résultat est vrai pour $\Pi_t = \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}$. Par ailleurs comme dans la preuve de 4.2.5, la restriction de $h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\pi_v[t]_{D,1}} \otimes \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}$ à $\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{(t+a)g}$ est isomorphe à $\mathcal{F}_{\pi_v[t+a]_{D,1}} \otimes \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v\{\frac{a(g-1)}{2}\}} \otimes \overrightarrow{[a-1]}_{\pi_v\{-\frac{t(g-1)}{2}\}} \otimes \Xi^{a(g-1)/2}$ en tant que $P_{tg,(t+a)g,d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ -faisceau de Hecke. On en déduit alors que

$$\left(h^{a(g-1)} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}_{\pi_v[t]_{D,1}} \otimes \Pi_t \right)_{|\overline{X}_{\mathcal{I},1}^{(t+a)g}} \simeq \mathcal{F}_{\pi_v[t+a]_{D,1}} \otimes \Pi_t \left\{ \frac{a(g-1)}{2} \right\} \otimes \overrightarrow{[a-1]}_{\pi_v\{-\frac{t(g-1)}{2}\}} \otimes \Xi^{a(g-1)/2}$$

en tant que $P_{tg,(t+a)g,d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ -faisceau de Hecke et on conclut comme ci-dessus en induisant à $GL_d(F_v)$. \square

4.3. Constituants simples des $j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$. —

4.3.1. Proposition. — *Pour tout $1 \leq t \leq s$, on a l'égalité dans \mathfrak{G} :*

$$i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) + \sum_{i=1}^{s-t} i_{\mathcal{I},*}^{(t+i)g} j_{\mathcal{I},!}^{\geq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[i-1]}_{\pi_v})(i/2) + P_{\pi_v}(\Pi_t) \quad (4.3.2)$$

où $P_{\pi_v}(\Pi_t) \in \mathfrak{G}$ est à support dans les points supersinguliers et de poids strictement négatif.

Démonstration. — D'après 4.2.9, pour tout $1 \leq t \leq s$, on a l'égalité suivante dans \mathfrak{G} :

$$i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{r=0}^{s-t} (-1)^r i_{\mathcal{I},*}^{(t+r)g} j_{\mathcal{I},!}^{\geq (t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[r-1]}_{\pi_v})(r/2) + Q_{\pi_v}(\Pi_t) \quad (4.3.3)$$

où $Q_{\pi_v}(\Pi_t)$ est un élément de \mathfrak{G} à support dans les points supersinguliers et de poids strictement négatif. Il s'agit alors d'inverser ce système d'égalités, ce qui se fait simplement soit matriciellement soit par récurrence sur t de s à 1. Raisonnons par récurrence : le cas $t = s$ est direct, supposons le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$ et traitons le cas de t . D'après l'hypothèse de récurrence on a donc modulo des W_v -faisceaux pervers de Hecke concentrés aux points supersinguliers

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) - i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) &= \sum_{r=1}^{s-t} (-1)^r \sum_{i=0}^{s-t-r} i_{\mathcal{I},*}^{(t+i+r)g} j_{\mathcal{I},!}^{\geq (t+i+r)g} \\ &HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[r-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[i-1]}_{\pi_v}) \left(\frac{r+i}{2} \right) \\ &= - \sum_{a=1}^{s-t} i_{\mathcal{I},*}^{(t+a)g} j_{\mathcal{I},!}^{\geq (t+a)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_a) \left(\frac{a}{2} \right) \end{aligned}$$

avec $\pi_a = \sum_{r=1}^a (-1)^r \overrightarrow{[r-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[a-r-1]}_{\pi_v} = \overleftarrow{[a-1]}_{\pi_v}$, d'où le résultat. \square

5. Étude aux points supersinguliers

Le but de ce paragraphe est de déterminer les faisceaux pervers ponctuels non précisés dans la proposition 4.3.1.

5.1. Cohomologie d'un faisceau de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=d}$. — Étant donné un faisceau de Hecke à support dans les points supersinguliers, ses groupes de cohomologie H^i sont nuls pour tout $i \neq 0$; en ce qui concerne son H^0 , il résulte de la description de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=d}$ donnée en (1.3.3).

5.1.1. Proposition. — *Soit $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ un faisceau de Hecke sur la composante $\overline{X}_{\mathcal{I},i}^{=d}$ indexée par i de $\overline{X}_{\mathcal{I}}^{=d} = \prod_{i \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)} \text{Sh}_{\mathcal{I}}(G, X)^{=d}$. On fixe une tour de points supersinguliers z_i de $\overline{X}_{\mathcal{I},i}^{=d}$.*

(i) *La fibre $z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ est munie d'une action de $H_0(\mathbb{Q}) \times GL_d(F_v)^0$ où $GL_d(F_v)^0$ est le noyau de la valuation du déterminant.*

(ii) En tant que $G(\mathbb{A}^\infty) \simeq H_0(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_d(F_v)$ -module, on a

$$H^0(\overline{X}_{\mathcal{I},i}^d, \mathcal{F}_{\mathcal{I}}) \simeq \text{Ind}_{H_0(\mathbb{Q})}^{H_0(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z}} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$$

avec $\delta \in H_0(\mathbb{Q}) \mapsto (\delta^{\infty,v}, \text{val orn}(\delta_v)) \in H_0(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z}$ et où l'action de $g_v \in GL_d(F_v)$ est donnée par celle de $(g_0^{-\text{val det } g_v} g_v, \text{val det } g_v) \in GL_d(F_v)^0 \times \mathbb{Z}$ où $g_0 \in GL_d(F_v)$ est un élément fixé tel que $\text{val det } g_0 = 1$.

Démonstration. — (i) Cela découle de la description des actions sur la bijection (1.3.3) en prenant z_i comme point base.

(ii) D'après (1.3.3), l'action de $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z}$ sur $\overline{X}_{\mathcal{I},i}^d(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est transitive de groupe d'isotropie $H_0(\mathbb{Q})$. On en déduit alors qu'en tant que $G(\mathbb{A}^{\infty,v})$ -module, $H^0(\overline{X}_{\mathcal{I},i}^d, \mathcal{F}_{\mathcal{I}})$ s'identifie à l'ensemble des fonctions localement constantes

$$f : G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z} \longrightarrow z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}} / \forall \delta \in H_0(\mathbb{Q}), \forall (\gamma, n) \in G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z}, \quad f(\delta(\gamma, n)) = \delta f(\gamma, n)$$

soit à $\text{Ind}_{H_0(\mathbb{Q})}^{H_0(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z}} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ d'où le résultat. \square

Remarque : l'isomorphisme de (ii) dépend du choix de l'élément g_0 tel que $\text{val det } g_0 = 1$.

5.1.2. Corollaire. — Avec les notations de la proposition précédente, si $z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ est munie d'une action du noyau $(D_{v,d}^\times)^0$ de la valuation de la norme réduite qui est compatible à l'action de $H_0(\mathbb{Q}) \hookrightarrow D_{v,d}^\times$, alors en tant que $G(\mathbb{A}^\infty)$ -module, on a

$$H^0(\overline{X}_{\mathcal{I},i}^d, \mathcal{F}_{\mathcal{I}}) \simeq \mathcal{C}^\infty(H_0(\mathbb{Q}) \backslash H_0(\mathbb{A}^\infty)) \otimes_{D_{v,d}^\times} \text{Ind}_{(D_{v,d}^\times)^0}^{D_{v,d}^\times} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \quad (5.1.3)$$

Démonstration. — D'après la proposition précédente, $H^0(X_{\mathcal{I},i}^d, \mathcal{F}_{\mathcal{I}})$ est isomorphe en tant que $G(\mathbb{A}^\infty)$ -module à $\text{Ind}_{H_0(\mathbb{Q})}^{H_0(\mathbb{A}^{\infty,v})} \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \right)$ où $\delta \in H_0(\mathbb{Q})$ envoie un élément $v \in z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ de la composante d'indice n dans la somme directe ci-dessus sur l'élément $\delta v \in z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ de la composante d'indice $n + \text{val rn}(\delta_v)$. Avec les hypothèses de l'énoncé, on écrit $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \text{Ind}_{(D_{v,d}^\times)^0}^{D_{v,d}^\times} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ de sorte que $H^0(X_{\mathcal{I},i}^d, \mathcal{F}_{\mathcal{I}}) \simeq \text{Ind}_{H_0(\mathbb{Q})}^{H_0(\mathbb{A}^{\infty,v})} \text{Ind}_{(D_{v,d}^\times)^0}^{D_{v,d}^\times} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ où $H_0(\mathbb{Q})$ agit sur $\text{Ind}_{(D_{v,d}^\times)^0}^{D_{v,d}^\times} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ via son plongement naturel dans $D_{v,d}^\times$. Le résultat découle alors de l'isomorphisme évident

$$\text{Ind}_{H_0(\mathbb{Q})}^{H_0(\mathbb{A}^{\infty,v})} \text{Ind}_{(D_{v,d}^\times)^0}^{D_{v,d}^\times} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \simeq \left(\text{Ind}_{H_0(\mathbb{Q})}^{H_0(\mathbb{A}^\infty)} 1 \right) \otimes_{D_{v,d}^\times} \text{Ind}_{(D_{v,d}^\times)^0}^{D_{v,d}^\times} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$$

où $H_0(\mathbb{A}^\infty) \simeq H_0(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times D_{v,d}^\times$. \square

Remarque : une fois le corollaire 2.3.6 prouvé, on disposera d'une formule pour calculer la cohomologie des $\mathcal{F}(s, \pi_v)$ qui confrontée à la formule donnée par [13] et rappelée à la proposition 5.2.3, fournira une relation du type Jacquet-Langlands entre les représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$ et celles de $H_0(\mathbb{A})$; on renvoie le lecteur intéressé à la lecture de [2].

5.2. Rappels sur la cohomologie des $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}}$ d'après [13]. —

5.2.1. Définition. — Une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A})$ sera dite cohomologique si Π_∞ est cohomologique pour une certaine représentation algébrique ξ sur \mathbb{C} de la restriction des scalaires de F à \mathbb{Q} de GL_g , i.e. il existe i tel que

$$H^i((\text{Lie } G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes (\xi')^\vee) \neq (0)$$

où U_τ est un sous-groupe compact modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, maximal, cf. [13] p.92, et où ξ' est le caractère sur \mathbb{C} associé à ξ via un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ fixé. On dira que Π est cohomologique pour ξ .

On note $[H_c^*(\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1})] := \sum_i (-1)^{h-d+i} [H_c^i(\overline{X}_{\mathcal{I}, 1}^{\neq h}, \mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1} \otimes \mathcal{L}_\xi)]$ dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times GL_h(F_v) \times \mathbb{Z}$. Pour un W_v -faisceau pervers de Hecke P sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}$, on écrira de même $[H^*(P)]$ pour l'image de $\sum_i (-1)^i H^i(\overline{X}_{\mathcal{I}}, P \otimes \mathcal{L}_\xi)$ dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$.

5.2.2. Définition. — Pour Groth le groupe de Grothendieck d'un groupe de la forme $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times \tilde{G}$, on notera $\text{Groth}\{\Pi^{\infty, v}\}$ le sous-groupe facteur direct de Groth engendré par les irréductibles de la forme $\Pi^{\infty, v} \otimes \sigma$ où σ est une représentation irréductible quelconque de \tilde{G} . On notera alors $[H^*(P)]\{\Pi^{\infty, v}\}$ la projection de $[H^*(P)]$ sur ce facteur direct.

Remarque : on rappelle, cf. §1.2, que $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times GL_d(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$. Pour Π une représentation de $G(\mathbb{A})$, sa composante pour le facteur de similitude \mathbb{Q}_p^\times , sera noté comme dans [13], $\Pi_{p,0}$. Comme tous les compacts de \mathcal{I} contiennent le facteur \mathbb{Z}_p^\times , les représentations Π qui vont intervenir, par la suite, dans les différents groupes de cohomologie, devront toutes vérifier que $(\Pi_{p,0})|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1$.

5.2.3. Proposition. — (cf. [13] théorèmes V.5.4, VI.2.7) Soit Π une représentation de $G(\mathbb{A})$ telle que :

- $(\Pi_{p,0})|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1$;
- il existe une place x de F avec $G(F_x) \simeq GL_d(F_x)$ et Π_x de carré intégrable.

Dans le groupe de Grothendieck de $GL_{d-h}(F_v) \times \mathbb{Z}$, on a l'égalité suivante :

$$[H_c^*(\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1})]\{\Pi^{\infty, v}\} = \begin{cases} \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G) m(\Pi) \text{Red}_{\tau_v}(\Pi_v) & \text{si } \Pi_\infty \text{ est cohomologique pour } \xi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

où $m(\Pi)$ est la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes de $G(\mathbb{A})$ et $\text{Red}_{\tau_v} : \text{Groth}(GL_d(F_v)) \longrightarrow \text{Groth}(D_{v,h}^\times / \mathcal{D}_{v,h}^\times \times GL_{d-h}(F_v))$ est défini comme la composition des deux applications suivantes :

- tout d'abord

$$\begin{aligned} \text{Groth}(GL_d(F_v)) &\longrightarrow \text{Groth}(GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)) \\ [\Pi_v] &\mapsto [J_{N_{h,d}^{op}}(\Pi_v) \otimes \delta_{P_{h,d}}^{1/2}] \end{aligned}$$

- puis

$$\begin{aligned} \text{Groth}(GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)) &\longrightarrow \text{Groth}(D_{v,h}^\times / \mathcal{D}_{v,h}^\times \times GL_{d-h}(F_v)) \\ [\alpha \otimes \beta] &\mapsto \sum_\psi \text{vol}(D_{v,h}^\times / F_v^\times, d\bar{h}_v)^{-1} \text{Tr } \alpha(\varphi_{\text{JL}(\tau_v^\vee \otimes \psi)})[\psi \otimes \beta], \end{aligned}$$

où :

- ψ décrit les caractères de $\mathbb{Z} \simeq D_{v,h}^\times / \mathcal{D}_{v,h}^\times$ tels que α et $\tau_v^\vee \otimes \psi$ ont le même caractère central;
- pour ϖ_v une représentation admissible irréductible de carré intégrable de $GL_h(F_v)$, φ_{ϖ_v} est un pseudo-coefficient pour ϖ_v , cf. [13] p.29;
- on considère des mesures de Haar associées sur $GL_h(F_v)$ et $D_{v,h}^\times$.

Démonstration. — D'après [13] V.5.4, on a $d[H_c^*(\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1})] = \text{Red}_{\tau_v}([H^*(\Psi_{\mathcal{I}})])$. On écrit $[H^*(\Psi_{\mathcal{I}})] = \sum_{\Upsilon^\infty} \Upsilon^\infty \otimes R_\xi^*(\Upsilon^\infty)$: le résultat découle alors de [13] VI.2.7, en utilisant VI.2.4, qui affirme que si Υ^∞ est telle qu'il existe une place x telle que Υ_x^∞ est de carré intégrable alors :

- soit $R_\xi^i(\Upsilon^\infty)$ est nulle pour tout i ;
- soit il existe des représentations $\Upsilon_{\infty, i}$ cohomologiques pour ξ telles que $\Upsilon = \Upsilon^\infty \Upsilon_{\infty, i}$ est automorphe et $\dim R_\xi(\Upsilon^\infty) = dm(\Upsilon) \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)$, avec $\Upsilon = \Upsilon^\infty \Upsilon_{\infty, 1}$ où $m(\Upsilon)$ est la multiplicité de Υ dans l'espace des formes automorphes.

□

5.2.5. Définition. — Pour W (resp. V) un $GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ -module (resp. $GL_{tg}(F_v)$ -module), $V \otimes_{\det} W$ désigne l'espace $V \otimes W$ muni de l'action $P_{tg,d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ où un élément $\left(\begin{pmatrix} g^c & * \\ 0 & g^{et} \end{pmatrix}, n \right)$ agit via l'action naturelle de $g^c \otimes (g^{et}, n + \text{val}(\det g^c))$.

5.3. Groupes de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_v)$. — On fixe désormais un diviseur g de $d = sg$ ainsi qu'une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$. On considère alors une représentation automorphe irréductible Π de $G(\mathbb{A})$ cohomologique pour ξ telle que $\Pi_v \simeq \text{St}_s(\pi_v)$ et $(\Pi_{p,0})|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1$; d'après [13] VI.2.2 si Π' est une représentation irréductible automorphe de $G(\mathbb{A})$ cohomologique pour ξ telle que $(\Pi')^{\infty,v} \simeq \Pi^{\infty,v}$ alors $\Pi'_v \simeq \Pi_v$.

5.3.1. Proposition. — Soit π'_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g'}(F_v)$; pour $1 \leq t \leq d/g'$, Π_t désigne une représentation quelconque de $GL_{tg'}(F_v)$.

– Si π'_v n'est pas dans la classe d'équivalence inertielle de π_v alors

$$[H^i(i_{\mathcal{I},*}^{tg'} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg'} HT_{\xi}(\pi'_v, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty,v} \} = 0$$

pour tout i et pour tout $1 \leq t \leq d/g'$.

– Si $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes \chi_0 \circ \text{val} \circ \det$ pour $\chi_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, alors $[H^i(i_{\mathcal{I},*}^{tg'} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg'} HT_{\xi}(\pi'_v, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty,v} \}$ est :

- nul pour tout i si $1 \leq t < s$;
- nul pour tout $i \neq 0$ si $t = s$ et dans $\text{Groth}(GL_d(F_v) \times \mathbb{Z})$:

$$[H^0(i_{\mathcal{I},*}^{sg} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq sg} HT(\pi'_v, \Pi_s))] \{ \Pi^{\infty,v} \} = \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)m(\Pi)\Pi_s \otimes \left(\bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi_0^{-1} \chi^{-1} \right).$$

Démonstration. — D'après (4.3.3), on a l'égalité

$$H^*(i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi'_v, \Pi_t)) = \sum_{a=0}^{s-t} (-1)^a H^*(i_{\mathcal{I},*}^{(t+a)g} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq (t+a)g} HT(\pi'_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a-1}]_{\pi'_v})(a/2) + [H^0(Q_{\pi_v}(\Pi_t))], \quad (5.3.2)$$

où $H^0(Q_{\pi_v}(\Pi_t))$ est de poids strictement négatif.

5.3.3. Lemme. — Avec les notations ci-dessus, $[H^*(i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi'_v, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty,v} \}$ est :

- nul pour tout $1 \leq t \leq d/g'$ si π'_v n'est pas inertielle équivalente à π_v ;
- pour $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes \chi_0 \circ \text{val} \circ \det$, égal à

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)m(\Pi) \left[[\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{s-t}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi_0^{-1} \chi^{-1}) \right].$$

Démonstration. — D'après le lemme 3.2.2,

$$J_{N_{tg,d}^{op}}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) \otimes \delta_{P_{tg,d}}^{1/2} = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v \{ \frac{(s-t)(g-1)}{2} \}} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v \{ -\frac{t(g-1)}{2} \}}$$

de sorte que

$$\text{Red}_{\pi'_v[t]_D}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi'_v \not\sim^i \pi_v \\ (\Xi^{-\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \chi_0^{-1}) \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v \{ -\frac{t(g-1)}{2} \}}; & \pi'_v \simeq \pi_v \otimes \chi_0 \circ \text{val}(\det) \end{cases}$$

Les résultats découlent alors de la proposition 5.2.3 et de l'isomorphisme $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$ -équivariant

$$H^*(i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi'_v, \Pi_t)) \otimes \Xi^{\frac{d-tg}{2}} = \text{Ind}_{P_{tg,d}(F_v)}^{GL_d(F_v)} \Pi_t \otimes_{\det} \left(H_c^*(\mathcal{F}_{\pi'_v[t]_D, \mathcal{I}, 1}) \right).$$

□

Pour $t = s$ et $\pi'_v \sim^i \pi_v$, le résultat découle de l'égalité $j_{\mathcal{I},!}^{\geq sg} HT(\pi'_v, \Pi_s) = j_{\mathcal{I},!}^{\geq sg} HT(\pi_v, \Pi_s)$ dans le groupe de Grothendieck des W_v -faisceaux pervers de Hecke. On suppose donc $t < s$; le lemme précédent donne alors l'égalité suivante dans $\text{Groth}(GL_d(F_v) \times \mathbb{Z})$:

$$\sum_{a=0}^{s-t} (-1)^a [H^*(i_{\mathcal{I},*}^{(t+a)g} j_{\mathcal{I},!}^{\geq (t+a)g} HT(\pi'_v, \Pi_t \times \overrightarrow{[a-1]_{\pi_v}})(a/2))] \{ \Pi^{\infty, v} \} = \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)m(\Pi) \\ (\Pi_t \overrightarrow{\times} \Upsilon) \otimes \left(\Xi^{\frac{s-t}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi_0^{-1} \chi^{-1} \right)$$

avec

$$\Upsilon = \sum_{a=0}^{s-t-1} (-1)^a \overrightarrow{[a-1]} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-a-1]_{\pi_v}} + (-1)^{s-t} \overrightarrow{[s-t-1]_{\pi_v}} = 0.$$

Du fait que pour tout i , $H^i(i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ est pur de poids i , du calcul précédent et de (5.3.2), on en déduit qu'ils sont nuls pour tout $i < 0$ de sorte que, par dualité, ils sont nuls pour i avec en outre $H^0(Q_{\pi_v}(\Pi_t)) = 0$. \square

5.3.4. Corollaire. — *Sous les hypothèses de la proposition précédente, $[H^0(Q_{\pi_v}(\Pi_t))] \{ \Pi^{\infty, v} \}$ est nul.*

5.4. Application aux constituants ponctuels des $j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$. —

5.4.1. Corollaire. — *Pour tout $1 \leq t \leq s$, les W_v -faisceaux pervers de Hecke $P_{\pi_v}(\Pi_t)$ de la proposition 4.3.1 sont nuls.*

Démonstration. — D'après la preuve de la proposition 4.3.1, cela revient à prouver que les $Q_{\pi_v}(\Pi_t)$ sont nuls; en utilisant 5.1.2 et 5.3.4, il suffit en fait de montrer que les $Q_{\pi_v}(\Pi_t)$ vérifient les hypothèses de 5.1.2.

Pour montrer que les $Q_{\pi_v}(\Pi_t)$ vérifient les hypothèses de 5.1.2, on va utiliser le fait que d'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, la restriction à la strate supersingulière des faisceaux de cohomologie des $gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ les vérifie. Considérons alors la filtration par les poids de $gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ et le triangle distingué

$$W_{< p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})) \rightarrow gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) \rightarrow W_{\geq p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})) \xrightarrow{+1}$$

On rappelle que, d'après 4.2.2, pour tout $k \neq p - q$, $gr_k^W gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ est concentré aux points supersinguliers alors que pour $k = p - q$, il est dans \mathfrak{E} égal à $\mathcal{P}(p + q + 1, \pi_v)(-\frac{p-q}{2})$ plus des faisceaux pervers concentrés aux point supersinguliers. Ainsi pour tout $i < -1$, on a

$$h^i gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) \simeq h^i \mathcal{P}(p + q + 1, \pi_v)(-\frac{p-q}{2})$$

de sorte que pour tout $i < -1$, la restriction aux points supersinguliers de $h^i j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ vérifie les hypothèses de 5.1.2. Par ailleurs pour un point supersingulier z , on a la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow z^* h^{-1}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})) \rightarrow z^* h^{-1} W_{\geq p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})) \rightarrow z^* h^0 W_{< p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})) \\ \rightarrow z^* h^0 W_{\geq p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})) \rightarrow z^* h^0 W_{\geq p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})) \rightarrow 0 \quad (5.4.1)$$

On rappelle que le h^0 d'une extension intermédiaire d'un faisceau pervers non ponctuel est nul. On considère alors les parties de poids supérieur ou égal à $p - q$ de cette suite exacte de sorte que $W_{\geq p-q} z^* h^0 W_{< p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}))$ est nul. Par ailleurs on a

$$W_{\geq p-q} z^* h^0 W_{\geq p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})) \simeq z^* h^0 W_{\geq p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}))$$

qui est donc isomorphe à $W_{\geq p-q}(z^* h^0 gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}))$. Ainsi comme la restriction à la strate supersingulière de $h^0 gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ vérifie les hypothèses de 5.1.2 et comme l'action du groupe

de Galois commute à celle de $G(\mathbb{A}^\infty)$, on en déduit que $h^0 W_{\geq p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}))$ les vérifie aussi. En utilisant que la dualité de Verdier échange $gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ et $gr_I^p gr_K^q(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$, on en déduit que $h^0 W_{\leq p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}))$ les vérifie aussi et donc aussi $h^0 W_{< p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}))$. Finalement, dans le groupe de Grothendieck des faisceaux de Hecke sur $\overline{X}_{\mathcal{I}}^d$, d'après (5.4.1), on obtient que

$$h^{-1} W_{\geq p-q}(gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})) \simeq h^{-1} \mathcal{P}(p+q+1, \pi_v)(-\frac{p-q}{2})$$

vérifie les hypothèses de 5.1.2.

Ainsi pour tout i , la restriction aux points supersinguliers de $h^i j_{!*}^{\geq tq} HT(\pi_v, \Pi_t)$ vérifie les hypothèses de 5.1.2 de sorte que, en utilisant (4.3.3), les $Q_{\pi_v}(\Pi_t)$ vus dans \mathfrak{G} , les vérifient aussi. \square

5.4.2. Corollaire. — Soit $1 \leq g \leq d$ et π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$; on note $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$. Dans \mathfrak{G} on a l'égalité

$$[\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}] = \sum_{k=1-s}^{s-1} \sum_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} [\mathcal{P}(t, \pi_v)(-\frac{k}{2})]$$

avec pour tous $p, q \geq 0$ et $p+q+1 < s$,

$$[gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})] - [\mathcal{P}(p+q+1, \pi_v)(-\frac{p-q}{2})]$$

est nul ou concentré aux points supersinguliers de la forme $\sum_{k=0}^{s-1} \epsilon_k(p, q) \mathcal{P}(s, t)(\frac{s-1-2k}{2})$ avec $\epsilon_k(p, q) = 0$ ou 1 et $\sum_{p, q \geq 0} \epsilon_k(p, q) = 1$.

5.5. Involution de Zelevinski et parties de poids minimal des $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^i$. — Rappelons les faits suivants de [10] : $\mathcal{U}_{F_v, l, d}$ est un objet de la catégorie dérivée $\mathbb{D}_{tf}^b(\overline{\mathbb{Q}}_l[GDW_v(d)]_\infty)$ des $GDW_v(d)$ -modules lisses de type fini à cohomologie bornée. On dispose par ailleurs d'un foncteur de dualisation

$$D : \overline{\mathbb{Q}}_l[GDW_v(d)] - \text{mod}_\infty \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l[GDW_v(d)] - \text{mod}_\infty$$

tel que pour tout $i \geq 0$, $R^i D(\pi) = \varinjlim_K \text{Ext}_{\overline{\mathbb{Q}}_l[GDW_v(d)] - \text{mod}_\infty}^i(\pi, \mathcal{C}_c^\infty(GDW_v(d)/K))$ où K parcourt les sous-groupes compacts ouverts pro- p de $GDW_v(d)$. On note \mathbf{D} le foncteur dérivé sur $\mathbb{D}_{tf}^b(\overline{\mathbb{Q}}_l[GDW_v(d)]_\infty)$. Fargues montre alors que $\mathcal{U}_{F_v, l, d}(\frac{d-1}{2})[d-1]$ est autodual pour \mathbf{D} et il en déduit le résultat suivant.

5.5.1. Théorème. — (corollaire 4.8 de [10]) Soit g un diviseur de $d = sg$ et π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$. Considérons la $GDW_v(d)$ -représentation irréductible $\Pi_v \otimes \tau_v \otimes \sigma_v$, où Π_v est elliptique de type π_v (resp. Π_v quelconque), et supposons qu'il existe i tel que $\Pi_v \otimes \tau_v \otimes \sigma_v$ soit un constituant de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-1-i}(\frac{d-1}{2})$, alors $\text{Zel}(\Pi_v)^\vee \otimes \tau_v^\vee \otimes \sigma_v^\vee$ est un constituant de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s+i}(\frac{d-1}{2})$ (resp. de $\sum_j \mathcal{U}_{F_v, l, d}^j(\frac{d-1}{2})$), où Zel désigne l'involution de Zelevinski sur $GL_d(F_v)$.

5.5.2. Proposition. — Soient g un diviseur de $d = sg$ et π_v une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F_v)$. Dans le groupe de Grothendieck de $GDW_v(d)$, si $\Pi_v \otimes \tau_v \otimes \mathcal{L}(\pi_v)(-\frac{s(g-1)+2k}{2})$ est un constituant non nul de l'image de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^i$, avec Π_v quelconque, on a alors les propriétés suivantes :

- (i) $0 \leq k \leq s-1$;
- (ii) si $k = s-1$, alors on a $i = d-1$ avec $\Pi_v = \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ et $\tau_v = \pi_v[s]_D$;
- (iii) si $k = 0$ alors on a $i = d-s$ avec $\Pi_v = \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ et $\tau_v = \pi_v[s]_D$.

Démonstration. — (i) D'après 5.4.1, $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ est mixte de poids inférieur à $s - 1$ de sorte que pour tout point supersingulier z , $\text{Ind } z^* h^{-i} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ est de poids inférieur ou égal à $s - 1$ pour tout $i \geq 0$. Ainsi d'après le théorème de Berkovich-Fargues, on a $k \leq s - 1$. L'inégalité $k \geq 0$ découle alors de (5.5.1), ce qui prouve (i).

(ii) et (iii) sont équivalents d'après (5.5.1); traitons donc le cas de (ii). Les faisceaux pervers qui constituent $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ et qui ne sont pas concentrés aux points supersinguliers, sont de poids strictement inférieur à $s - 1$, on en déduit donc que le cas $k = s - 1$ impose $i = d - 1$. Autrement dit pour tout $i < d - 1$, les $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^i$ sont mixtes de poids strictement inférieur à $s - 1$ de sorte que (ii) découle de (4.1.3). \square

Remarque : dans la suite nous utilisons de manière essentielle (iii) alors qu'à priori on ne connaît que (ii). Il est en fait possible de prouver (iii) à partir de (ii) sans utiliser (5.5.1) qui repose sur un théorème difficile de Faltings de comparaison entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld, cf. [8] ou [11]. Pour cela on étudie la suite spectrale des cycles évanescents : la dualité de Grothendieck-Verdier est alors l'ingrédient qui permet de passer des poids « minimaux » aux poids « maximaux ». Cependant cette étude réclame de nombreux calculs de groupes de cohomologie qui alourdissent et allongent la rédaction. Dans le but d'alléger la lecture de ce texte nous avons préféré « externaliser » l'implication (ii) \Rightarrow (iii) soit dans la boîte noire (5.5.1) soit, pour la preuve via la suite spectrale des cycles évanescents, dans [2].

5.6. Pureté de la filtration de monodromie de $\Psi_{\mathcal{I}}$: preuve de 2.2.4. —

5.6.1. Lemme. — *Pour z un point supersingulier de $\overline{X_{\mathcal{I}}}^{-d}$, si $z^* h^i \mathcal{P}(t, \pi_v)$ est non nulle, alors son image dans le groupe de Grothendieck de $GL_d(F_v) \times W_v$ est celle de*

$$[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \pi \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{s-t}{2} \right)$$

où π est une somme de représentations elliptiques de type π_v de $GL_{(s-t)g}(F_v)$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur t de s à 1, le cas $t = s$ étant trivial car $\mathcal{P}(s, \pi_v) = j_{\mathcal{I}, !}^{\geq sg} HT(s, [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v})$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$ et traitons le cas de t . On considère la suite spectrale associée à la filtration par les poids de $j_{\mathcal{I}, !}^{\geq tg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})$. D'après l'hypothèse de récurrence, tous les $z^* E_1^{i,j}$ sont de la forme de l'énoncé pour $i > 0$ et nuls pour $i < 0$. Ainsi, $z^* E_{\infty}^n$ étant nul, $z^* h^i \mathcal{P}(t, \pi_v)$ est pur de poids $t - s$ de sorte que d'après 2.1, cf. aussi la fin de la preuve de 4.2.5, $z^* h^i \mathcal{P}(t, \pi_v)$ est de la forme $\left(\text{Ind}_{P_{t,g,d}(F_v)}^{GL_d(F_v)} [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v \{ \frac{(s-t)(g-1)}{2} \}} \otimes \pi \left\{ -\frac{tg}{2} \right\} \right) \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{s-t}{2} \right)$. Le résultat découle alors du fait qu'en tant que représentation de $GL_d(F_v)$ tous les constituants irréductibles des $z^* E_1^{i,j}$ pour $i > 0$ sont π_v -elliptiques. \square

5.6.2. Lemme. — *Pour tout point supersingulier z et pour tout $i \neq t - s$, $z^* h^i \mathcal{P}(t, \pi_v)$ est nul.*

Démonstration. — Considérons la suite spectrale des poids de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$, $E_1^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i}^W(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) \Rightarrow h^{i+j} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}$ et plus particulièrement les parties de poids $1 - s$ des $z^* E_1^{i,j}$, où z est une tour de points supersinguliers. On raisonne par l'absurde : soit donc t minimal et $\delta > 0$ minimal pour lequel $z^* h^{t-s+\delta} \mathcal{P}(t, \pi_v)$ est non nul. On rappelle, cf. 5.4.2, que dans \mathfrak{G} , $gr_I^{t-1} gr_0^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) - \mathcal{P}(t, \pi_v) \left(\frac{t-1}{2} \right)$ est effectif concentré aux points supersinguliers de la forme $\sum_{i=0}^{s-1} \epsilon_i(0, t-1) \mathcal{P}(s, \pi_v) \left(\frac{s-1-2i}{2} \right)$ avec $\epsilon_i(0, t-1) = 0, 1$. De la suite spectrale des poids pour $gr_I^{t-1} gr_0^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ et du lemme précédent, on en déduit que $z^* E_1^{t-1, 1-s+\delta}$ admet un constituant de la forme $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{s-1}{2} \right)$. Or pour tout $i+j = \delta - s$ et $i < t-1$, (resp. $i+j = 2-s+\delta$ et $i > t-1$) les constituants irréductibles de poids $1 - s$ de $z^* E_1^{i,j}$ sont nuls (resp. de la forme $[\overleftarrow{i}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-i-1}]_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{s-1}{2} \right)$). On en

déduit donc que $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v)(\frac{s-1}{2})$ est un constituant de l'aboutissement, soit de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s+\delta}(\frac{d-1}{2})$ ce qui n'est pas d'après (5.5.2). \square

Fin de la preuve du théorème 2.2.4 : il s'agit de prouver que $\mathcal{P}(s, \pi_v)(\frac{s-1}{2})$ est un constituant de $gr_I^{s-1} gr_0^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$, de sorte que par application de N , on en déduira que pour tout $0 \leq k \leq s-1$, $\mathcal{P}(s, \pi_v)(\frac{s-1-2k}{2})$ est un constituant $gr_I^{s-1-k} gr_k^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$, ce qui d'après 5.4.2, achèvera la preuve du théorème 2.2.4.

Soit d'après 5.4.2, (p, q) tel que $\epsilon_0(p, q) = 1$, i.e. tel que $\mathcal{P}(s, \pi_v)(\frac{s-1}{2})$ est un constituant de $gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$. Si on avait $p > 0$, alors par application de N , $\mathcal{P}(s, \pi_v)(\frac{s+1}{2})$ serait un constituant de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}$ ce qui n'est pas d'après 5.4.2. De même si on avait $(p, q) = (0, s-1+\delta)$ avec $\delta > 0$, par application de $N^{s-1+\delta}$, $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{s-1+\delta}{2})$ serait un constituant de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}$ ce qui n'est pas d'après 5.4.2.

Si on avait $(p, q) = (0, s-1-\delta)$ avec $\delta \geq 2$, alors d'après 5.4.2 et 5.6.2, comme $z^* h^{-1} \mathcal{P}(s-\delta, \pi_v)$ est nul, on en déduit que $z^* h^0 gr_I^{s-1-\delta} gr_0^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ est non nul de poids $1-s$; il en est donc de même de $z^* h^0 gr_{1-s+\delta}^M(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ et donc aussi de $z^* h^0 \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}$ car pour tout $k \neq 2-s$, la partie de poids $1-s$ de $z^* h^{-1} gr_k^M(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ est nulle. La contradiction découle alors de (5.5.2).

Supposons alors $(p, q) = (0, s-2)$ et $s > 2$; par application de la dualité de Verdier (resp. de N^{s-2}), on en déduit que $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{s-1}{2})$ (resp. $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{s-3}{2})$) est un constituant de $gr_I^0 gr_{s-2}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$. Ainsi par une nouvelle application de N , $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{s-3}{2})$ est aussi un constituant de $gr_I^1 gr_{s-3}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ de sorte qu'il apparaîtrait avec une multiplicité 2 contredisant 5.4.2.

Au final il ne reste plus qu'à traiter le cas $s = 2$: la situation défavorable correspondrait à $\mathcal{P}(2, \pi_v)(-1/2)$ et $\mathcal{P}(2, \pi_v)(1/2)$ constituants de $gr_I^0 gr_0^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ de sorte que dans la cohomologie globale, la monodromie serait nulle ce qui est en contradiction avec la proposition suivante pour $s = 2$. \square

Avec les notations de [13], la somme alternée de la cohomologie de la variété globale à valeur dans \mathcal{L}_ξ , dans le groupe de Grothendieck des représentations de $G(\mathbb{A}) \times \text{Gal}(\overline{F}/F)$, y est écrite sous la forme

$$\sum_{\Pi^\infty} \Pi^\infty \otimes [R_\xi(\Pi^\infty)], \quad [R_\xi(\Pi^\infty)] = \sum_i (-1)^i R_\xi^i(\Pi^\infty)$$

où Π^∞ décrit l'ensemble des représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Par ailleurs, corollaire VI.2.7 de loc. cit., s'il existe une représentation irréductible Π_∞ de $G(\mathbb{R})$ telle que $\Pi := \Pi^\infty \otimes \Pi_\infty$ est cohomologique avec $BC(\Pi) = (\psi, \Upsilon)$ où $JL(\Upsilon)$ est cuspidale, avec les notations de loc. cit., alors $R_\xi^i(\Pi^\infty)$ est nulle pour $i \neq d-1$.

5.6.3. Proposition. — *Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$, il existe une représentation irréductible automorphe Π de $G(\mathbb{A})$ cohomologique telle que*

- $\Pi_v \simeq [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$;
- l'action de l'opérateur de monodromie N sur $R_\xi^{d-1}(\Pi^\infty)$ est non nulle.

Remarque : Yoshida et Taylor dans [19], ont prouvé ce résultat en se ramenant par changement de base au cas Iwahori puis en étudiant la suite spectrale de Rapoport-Zink. En ce qui nous concerne, nous ne devons traiter que le cas particulier de l'énoncé : par changement de base on se ramène au cas Iwahori comme dans [19] et d'après ce qui précède il suffit de considérer le cas de GL_2 déjà traité par Carayol dans [5].

Démonstration. — Pour $s = 2$ et $g = 1$, c'est à dire pour GL_2 , le résultat se trouve dans [5] théorème B : le cas qui nous intéresse, i.e. celui du calcul de la non nullité de la monodromie, est

traité au §11.4. D'après ce qui précède, ce cas initialise une récurrence qui permet de traiter le cas Iwahori, i.e. $g = 1$ et $s \geq 2$ quelconque.

Considérons désormais le cas général de π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ pour $g > 1$. D'après le corollaire VI.2.6 de loc. cit., on peut choisir une représentation automorphe cuspidale Υ de $GL_d(\mathbb{A}_F)$ telle que :

- $\Upsilon^c \simeq \Upsilon^\vee$;
- Υ_∞ a le même caractère central qu'une représentation algébrique de $Res_{\mathbb{Q}}^G(GL_d)$;
- $\Upsilon_v \simeq St_s(\pi_v)$.

Soit alors $L(v)$ une extension de F_v telle que la restriction de $\sigma_v = \mathcal{L}(\pi_v)$ à $L(v)$ soit non ramifiée. D'après cf. [18] IV-2, $L(v)/F_v$ peut être prise résoluble. On globalise alors la situation comme dans [13] :

- $(F')^+/F^+$ est une extension résoluble de corps totalement réels avec v' une place de $(F')^+$ au dessus de la place v de F^+ ;
- l'extension $(F')^+_v/F_v^+$ est isomorphe à l'extension $L(v)/F_v$.

On pose alors $F' = E(F')^+$ et on considère le changement de base $\Upsilon' := BC_{F'/F}(\Upsilon)$; d'après loc. cit. (théorèmes VI.1.1 et VI.2.9) on associe à Υ et Υ' des représentations cohomologiques Π et Π' de respectivement $G(\mathbb{A}_F)$ et $G(\mathbb{A}_{F'})$ avec $\Pi_v \simeq St_s(\pi_v)$ et $\Pi'_v \simeq \overleftarrow{[s-1]}_\zeta \boxplus \cdots \boxplus \overleftarrow{[s-1]}_\zeta$, pour ζ un caractère de $F'_{v'}$. Par ailleurs d'après le théorème VII.1.9 de loc. cit. appliqué aux bonnes places de F , et en utilisant le théorème de densité de Cebotarev, on en déduit que la représentation galoisienne $R_\xi((\Pi')^\infty)$ est isomorphe à $R_\xi(\Pi^\infty)_{|\text{Gal}(\overline{F'}/F')}$. Le cas Iwahori donne $R_\xi((\Pi')^\infty)_{v'} \simeq (\text{Sp}_s \otimes \zeta^{-1})^g$ de sorte que $R_\xi(\Pi^\infty)_v \simeq \text{Sp}_s \otimes \mathcal{L}(\pi_v)$ et la monodromie est donc nulle. \square

5.7. Faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}(t, \pi_v)$: preuve de 2.2.5. —

5.7.1. Proposition. — *Pour tous $p, q \geq 0$ avec $p + q + 1 \leq s$, et pour z un point supersingulier, $z^* h^i gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ en tant que $GDW_v(d)$ -module est nul pour $i \neq p + q + 1 - s$ et sinon isomorphe à*

$$\pi_v[s]_D \otimes \overleftarrow{[p+q]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-2-p-q]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{q-p}{2} \right)$$

Démonstration. — D'après 2.2.4, $gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ est isomorphe à $\mathcal{P}(p+q+1, \pi_v)(-\frac{p-q}{2})$ de sorte que d'après 5.6.2, $z^* h^i gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ est nul pour $i \neq p + q + 1 - s$. D'après (4.3.3) et 5.4.1, l'image de $\sum_i z^* h^i \mathcal{P}(t, \pi_v)$, dans le groupe de Grothendieck de $GL_d(F_v) \times W_v$, est égale à celle de $z^* \mathcal{F}(s, \pi_v) \otimes \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{s-t}{2} \right)$. Le faisceau étant induit, on en déduit finalement que

$$z^* h^{t-s} \mathcal{P}(t, \pi_v) \simeq z^* \mathcal{F}(s, \pi_v) \otimes \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{s-t}{2} \right)$$

D'après le théorème de Berkovich-Fargues, $z^* \mathcal{F}(s, \pi_v)$ est munie d'une action de $D_{v,d}^\times$ qu'il s'agit maintenant d'identifier. On regarde comme dans la preuve de 5.6.2, la suite spectrale des poids de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$, $E_1^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i}^{W_v}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) \Rightarrow h^{i+j} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}$ et on remarque alors que $z^* \mathcal{F}(s, \pi_v) \otimes \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{s-1}{2} \right)$ est un constituant $z^* E_1^{0,1-s}$ alors que $\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ n'est pas un constituant de $z^* E_1^{i,j}$ pour $(i,j) \neq (0, 1-s)$. On en déduit alors que $z^* \mathcal{F}(s, \pi_v) \otimes \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left(\frac{s-1}{2} \right)$ est un constituant de l'aboutissement de sorte que d'après (5.5.2) (iii) et le théorème de Berkovich, $z^* \mathcal{F}(s, \pi_v) \simeq \pi_v[s]_D$ d'où le résultat. \square

5.8. Description de la suite spectrale de monodromie : preuve de 2.2.6. — Il s'agit de montrer que, pour tous $p, q \geq 0$ avec $p + q + 1 \leq s - 1$, la flèche

$$gr_1^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) \longrightarrow gr_I^{q+1} gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})[1] \quad (5.8.1)$$

déduite par décalage et rotation du triangle distingué $gr_I^{q+1} \rightarrow I^q/I^{q+2} \rightarrow gr_I^q$ est donnée en cohomologie en un point supersingulier z

$$z^*h^{p+q+1-s}\mathcal{P}(p+q+1, \pi_v)\left(-\frac{p-q}{2}\right) \longrightarrow z^*h^{p+q+2-s}\mathcal{P}(p+q+2, \pi_v)\left(-\frac{p-q-1}{2}\right)$$

par l'unique morphisme $GL_{sg}(F_v)$ -équivariant non nul

$$[\overleftarrow{p+q}]_{\pi_v} \times \overrightarrow{[s-p-q-2]}_{\pi_v} \longrightarrow [\overleftarrow{p+q+1}]_{\pi_v} \times \overrightarrow{[s-p-q-3]}_{\pi_v}$$

On rappelle que les gradués de la filtration de monodromie sont donnés par $gr_k^M = \bigoplus_{p-q=k} gr_I^q gr_p^K$. On remarque alors que pour tous $p, q \geq 0$ avec $p+q+1 \leq s-1$, il ne peut pas y avoir de morphisme $GDW_v(d)$ -équivariant entre deux sous-quotients irréductibles de

$$z^*h^{p+q+1-t}gr_I^q gr_p^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) \text{ et } z^*h^{p+q+2-t}gr_I^{q'} gr_{p-q-\delta+q'}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$$

pour tout $\delta \geq 1$ sauf si $q' = q+1$: en effet pour que $z^*h^{p+q+2-t}gr_I^{q'} gr_{p-q-\delta+q'}^K(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}})$ soit non nul, il faut, d'après 2.2.5, que $p'+q'+1 = p+q+2$, et pour que le poids soit le même il faut que $p' = p$. Ainsi la suite spectrale de monodromie $E_1^{i,j} = h^{i+j}gr_{-i}^M(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}) \Rightarrow h^{i+j}\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}^{\dagger e_{\pi_v}}$ dégénère en E_2 et les $d_1^{i,j}$ sont données par (5.8.1). Par ailleurs en utilisant que N^p induit un isomorphisme $gr_I^q gr_p^K \simeq gr_I^{q+p} gr_0^K$, on est ramené à traiter le cas de $p = 0$. On remarque alors que $z^*h^{q+1-s}\mathcal{P}(q+1, \pi_v)(q/2)$ est de poids $1-s$, le résultat découlant ainsi de (5.5.2).

PARTIE III

APPENDICE : SCHÉMAS DE HECKE ET FAISCEAUX ASSOCIÉS

Il s'agit ici de prouver les résultats techniques sur la catégorie des faisceaux pervers de Hecke et sur le groupe de Grothendieck des W_v -faisceaux pervers de Hecke.

6. Faisceaux pervers de Hecke

6.1. Proposition. — *Pour tout schéma de Hecke $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$, les catégories $\text{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$ et $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$ sont abéliennes.*

Démonstration. — Les catégories à niveau fini étant abéliennes, on construit étage par étage les noyaux et conoyaux; l'existence des morphismes de transition découle alors de la t -exactitude des morphismes finis $[g]_{J,I}$ qui sont étales si $m_1(I) = m_1(J)$. En ce qui concerne les conoyaux, on notera que $([1]_{J,I,*}\mathcal{F}_J)^I \simeq e_I([1]_{J,I,*}\mathcal{F}_J)$ où e_I est le projecteur de $\mathbb{K}[I/J]$ associé à la représentation triviale, de sorte que le foncteur qui à \mathcal{F}_J associe $([1]_{J,I,*}\mathcal{F}_J)^I$ est exact. □

6.2. Proposition. — *Soient $\overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}$, $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ et $\mathbb{Y}_{\mathcal{I}}$ des schémas de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$ tels que $j_{\mathcal{I}} : \mathbb{X}_{\mathcal{I}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}$ soit un système projectif d'immersions ouvertes affines \mathbb{G} -équivariantes et $\mathbb{Y}_{\mathcal{I}} = \overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}} \setminus \mathbb{X}_{\mathcal{I}}$. On dispose alors des foncteurs $j_!, Rj_*, j_{!*} : \text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K}) \longrightarrow \text{FPH}_{\mathbb{G}}(\overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$, ${}^p j^* = {}^p j^! : \text{FPH}_{\mathbb{G}}(\overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K}) \longrightarrow \text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$ et pour $i : \mathbb{Y}_{\mathcal{I}} := \overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}} - \mathbb{X}_{\mathcal{I}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}$ des foncteurs $i_* = i_! : \text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{Y}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K}) \longrightarrow \text{FPH}_{\mathbb{G}}(\overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$, ${}^p i^*, {}^p Ri^! : \text{FPH}_{\mathbb{G}}(\overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K}) \longrightarrow \text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{Y}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$.*

Démonstration. — On rappelle, cf. [1] 4.1.10, que $j_!, Rj_*, j^*, i_*$ sont t -exactes et donc égaux à leur version perverse alors que i^* est t -exact à droite. De même les morphismes $[g]_{J,I}$ étant finis, étales si $m_1(I) = m_1(J)$, $[g]_{J,I}^*$ (resp. $[g]_{J,I,*}$) est t -exact à droite (resp. t -exact) de sorte que $({}^p [g]_{J,I}^*, {}^p [g]_{J,I,*})$ et $({}^p [g]_{J,I,*}, {}^p [g]_{J,I}^!)$ forment des paires de foncteurs adjoints, cf. [1]

1.3.17, avec ${}^p[1]_{J,I}^*$ et ${}^p[g]_{J,I}^!$ (resp. ${}^p[1]_{J,I,*}$, resp. ${}^p[g]_{J,I,*}$) exacts à droite (resp. à gauche, resp. exact). Pour $J \subset I$, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{X}_J \subset & \xrightarrow{j_J} & \overline{\mathbb{X}}_J & \xleftarrow{i_J} & \mathbb{Y}_J \\ \downarrow [g]_{J,I} & & \downarrow \overline{[g]}_{J,I} & & \downarrow \widetilde{[g]}_{J,I} \\ \mathbb{X}_I \subset & \xrightarrow{j_I} & \overline{\mathbb{X}}_I & \xleftarrow{i_I} & \mathbb{Y}_I \end{array}$$

Soient alors $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ un objet de $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$ et $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_I)$.

- Par application de $Rj_{I,*}$ (resp. $j_{I,!}$), on obtient $Rj_{I,*}\mathcal{F}_I \xrightarrow{Rj_{I,*}(u_{J,I}(g))} Rj_{I,*}[g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_I) = \overline{[g]}_{J,I,*}(Rj_{J,*}\mathcal{F}_I)$ (resp. $j_{I,!}\mathcal{F}_I \xrightarrow{j_{I,!}(u_{J,I}(g))} j_{I,!}[g]_{J,I,!}(\mathcal{F}_I) = \overline{[g]}_{J,I,*}(j_{J,!}\mathcal{F}_I)$). Ce qui construit Rj_* et $j_!$. De la même façon on construit i_* .

- Les cas de ${}^p j_*$ et ${}^p j_!$ s'obtiennent alors par adjonction.

- On définit dans la catégorie abélienne $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$, $j_{I*} := \text{Im}(j_! \rightarrow Rj_*)$ ainsi que ${}^p i^! := {}^p i^* \circ \text{Ker}(1 \rightarrow Rj_* j^*)$.

□

6.3. Proposition. — *La dualité de Verdier induit une involution de la catégorie des faisceaux pervers de Hecke.*

Démonstration. — On définit $\widetilde{u_{J,I}(g)} : D\mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$ pour tous I, J, g tels que $g^{-1}Jg \subset I$, comme la composée

$$D\mathcal{F}_I \simeq ([1]_{K,I,*}D\mathcal{F}_K)^I = \left([g]_{J,I,*}[g^{-1}]_{K,J,*}D\mathcal{F}_K \right)^I \xrightarrow{[g]_{J,I,*}Du_{K,J}(g^{-1})} ([g]_{J,I,*}D\mathcal{F}_J)^I$$

où $K \subset J$ est tel que $gKg^{-1} \subset J$. La condition de cocycle est alors clairement vérifiée ainsi que l'isomorphisme $D\mathcal{F}_I \rightarrow ([g]_{J,I,*}D\mathcal{F}_J)^I$ pour tout élément $g \in I$.

□

7. Groupe de Grothendieck de Hecke

On note \mathfrak{G} le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des W_v -faisceaux pervers de Hecke. On notera aussi \mathfrak{G}_I pour le groupe de Grothendieck de niveau I et $p_{\mathfrak{G}} : \mathfrak{G} \rightarrow \varinjlim_I \mathfrak{G}_I$.

7.1. Définition. — Un élément P de \mathfrak{G} sera dit effectif si pour tout $I \in \mathcal{I}$ son image $p_{\mathfrak{G}}(P)$ dans $\varinjlim_I \mathfrak{G}_I$ l'est au sens usuel, c'est à dire s'écrit comme une somme à coefficients positifs de faisceaux pervers simples.

Remarque : les objets de $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\overline{\mathbb{X}}_{\mathcal{I}}; \mathbb{K})$ ne sont pas en général de longueur finie, cependant tout objet effectif a une image non nulle dans $\varinjlim_I \mathfrak{G}_I$ et donc dans \mathfrak{G} .

7.2. Lemme. — *Soit P_I un élément effectif de \mathfrak{G} et soit $n_I = -\min\{i \mid h^i P_I \neq 0\}$. Alors le support de $h^{-n_I} P_I$ est de dimension n_I et on dit que P_I est de dimension n_I .*

Démonstration. — On rappelle que pour tout i , $h^i P_I$ a un support de dimension inférieure ou égale à $-i$. Par ailleurs tout élément effectif de \mathfrak{G}_I s'écrit de manière unique comme une somme à coefficients entiers positifs de faisceaux pervers simples de la forme $j_{I*}\mathcal{L}_I$, où \mathcal{L}_I est un système local irréductible sur un ouvert U_I de son adhérence : on note $j : U_I \hookrightarrow \overline{X}_I$. La propriété est alors vraie pour $j_{I*}\mathcal{L}_I$ et donc pour P_I : en effet il suffit de regarder une suite spectrale de faisceaux de cohomologie associée à une filtration de P_I telle que les gradués soient simples. □

7.3. Définition. — Un faisceau pervers de Hecke $P = (P_I)_{I \in \mathcal{I}}$ sera dit de dimension (resp de pure dimension) $n := \sup_{I \in \mathcal{I}} n_I$ (resp. $n_I = n$ pour tout $I \in \mathcal{I}$ tel que P_I n'est pas nul). On notera que cette notion de dimension ne dépend que de l'image de P dans $\varprojlim_I \mathfrak{G}_I$.

7.4. Lemme. — Soit $P \in \mathfrak{G}$ effectif et soit $\mathbb{U}_{\mathcal{I}} \hookrightarrow \mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ une immersion ouverte telle que pour tout point géométrique $z_{\mathcal{I}}$ de $\mathbb{U}_{\mathcal{I}}$, $\sum_i (-1)^i z_{\mathcal{I}}^* h^i P$ soit nulle dans le groupe de Grothendieck correspondant. Alors P est à support dans $\mathbb{Y}_{\mathcal{I}} := \mathbb{X}_{\mathcal{I}} \setminus \mathbb{U}_{\mathcal{I}}$ au sens où pour tout $I \in \mathcal{I}$, les faisceaux pervers simples de l'image de P_I sont à support dans \mathbb{Y}_I au sens usuel.

Démonstration. — On se ramène donc à niveau fini I . Soit alors S_I un faisceau pervers simple de dimension maximale d parmi les constituants de P_I ; d'après 7.2, $h^{-d} S_I$ a un support de dimension d alors que par maximalité de d , pour $i < -d$, les $h^i S'_I$ pour S'_I un constituant quelconque de P_I , sont nuls. Par perversité les $h^i S'_I$ pour $i > -d$ sont de dimension strictement inférieure à d de sorte qu'il existe un ouvert V_I du support de S_I tel que pour tout point géométrique z de cet ouvert $\sum_i (-1)^i z^* h^i P_I$ soit non nul. On en déduit donc que $V_I \subset \mathbb{Y}_I$ et donc que les supports des $h^i S_I$ sont contenus dans \mathbb{Y}_I . On raisonne alors par récurrence descendante sur la dimension des constituants de P_I de d à 0, ce qui donne le résultat. \square

7.5. Proposition. — Soit $D_c^b(X, \mathbb{K})$ la catégorie dérivée des \mathbb{K} -complexes constructibles sur un \mathbb{F}_q -schéma X que l'on muni de la t -structure de perversité autoduale (resp. de la t -structure triviale) de coeur la catégorie $\text{Perv}(X)$ (resp. $\text{Const}(X)$) des faisceaux pervers (resp. des faisceaux constructibles) sur X . Pour tout objet \mathcal{F} de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, son image dans $\text{Groth}(\text{Perv}(X))$ est déterminée par son image dans $\text{Groth}(\text{Const}(X))$.

Démonstration. — Étant donnée une catégorie triangulée A localement petite, on considère son groupe de Grothendieck $K(A)$ défini comme le groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes d'objets de A quotienté par les relations : $A = B + C$ pour tout triangle distingué $B \rightarrow A \rightarrow C \xrightarrow{+1}$. Le résultat découle alors du lemme classique suivant. \square

7.6. Lemme. — Soit $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ une catégorie dérivée munie d'une t -structure non dégénérée : on note \mathcal{C} son coeur qui est alors une catégorie abélienne de groupe de Grothendieck $\text{Groth}(\mathcal{C})$. L'application qui à un objet \mathcal{F} de \mathcal{D} associe

$$\sum_i (-1)^i [{}^p h^i \mathcal{F}] \in \text{Groth}(\mathcal{C})$$

induit un isomorphisme du groupe de Grothendieck $K(\mathcal{D})$ de la catégorie triangulée \mathcal{D} , sur $\text{Groth}(\mathcal{C})$.

Démonstration. — Pour tout objet \mathcal{G} de \mathcal{D} et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a un triangle distingué

$$\tau_{\leq n} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \tau_{\geq n+1} \mathcal{G} \xrightarrow{+1}$$

de sorte que si \mathcal{G} est un objet de $\mathcal{D}^{\geq n}$, on a $[\mathcal{G}] = (-1)^n [{}^p h^n \mathcal{G}] + [\tau_{n+1} \mathcal{G}]$ car $\tau_{\leq n} \mathcal{G} = \tau_{\leq n} \tau_{\geq n} \mathcal{G} = ({}^p h^n \mathcal{G})[n]$. Soient alors a et b tels que \mathcal{F} soit un objet de $\mathcal{D}^{[a, b]}$. En appliquant ce qui précède à $\tau_{\geq n} \mathcal{F}$ pour n variant de a à b , on obtient l'égalité $[\mathcal{F}] = \sum_i (-1)^i [{}^p h^i \mathcal{F}]$, de sorte que l'application $\sum_i \alpha_i [P_i] \in \text{Groth}(\mathcal{C}) \mapsto \sum_i \alpha_i [P_i] \in K(\mathcal{D})$ est inverse de celle de l'énoncé. \square

7.7. Proposition. — Soit X un schéma muni d'une stratification

$$X^{\geq d} \subset X^{\geq d-1} \subset \dots \subset X^{\geq 1} = X$$

et soit \mathcal{P} un faisceau pervers sur X . Alors l'image de \mathcal{P} dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers sur X est déterminée par celles de $\sum_i (-1)^i [h^i(\mathcal{P})|_{X=h}]$ dans le groupe de Grothendieck des faisceaux localement constant sur $X^=h := X^{\geq h} - X^{\geq h+1}$ pour tout $1 \leq h \leq d$.

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas d’une immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$ de complémentaire $i : Z \hookrightarrow X$. Du triangle distingué $j_!j^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{F} \xrightarrow{+1}$, on en déduit que l’image d’un objet \mathcal{F} de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ dans $\text{Groth}(\text{Const}(X))$ est déterminée par celle de $j^*\mathcal{F}$ dans $\text{Groth}(\text{Const}(U))$ et celle de $i^*\mathcal{F}$ dans $\text{Groth}(\text{Const}(Z))$. □

7.8. Corollaire. — Soit $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ un schéma de Hecke muni d’une stratification

$$\mathbb{X}_{\mathcal{I}}^{\geq d} \subset \mathbb{X}_{\mathcal{I}}^{\geq d-1} \subset \dots \subset \mathbb{X}_{\mathcal{I}}^{\geq 1} = X$$

et soit P un W_v -faisceau pervers de Hecke de longueur finie. L’image de P dans \mathfrak{G} est alors déterminée par les images de $(\sum_i (-1)^i h^i P)_{|\mathbb{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}}$, pour tout $1 \leq h \leq d$, dans le groupe de Grothendieck des faisceaux constructibles sur $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$.

Démonstration. — La catégorie des sections de la catégorie fibrée formée par les $D_c^b(\mathbb{X}_I)$ n’est pas triangulée mais possède une famille évidente de triangles distingués à savoir ceux qui à chaque étage le sont. Le raisonnement précédent s’applique tel quel en remarquant, cf. le lemme 5.1.5 de [7], que tous les triangles considérés sont distingués, pourvu que toute suite exacte de faisceaux pervers $P_1 \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P_2$ se complète de manière unique en un triangle distingué de $D_c^b(\text{FH})$. A chaque étage, d’après [1] cor 1.1.10 ii), il existe un unique $\delta_I : P_{2,I} \rightarrow P_{1,I}[1]$ complétant la suite $P_{1,I} \rightarrow P_I \rightarrow P_{2,I}$ en un triangle distingué. Le fait que $(\delta_I)_{I \in \mathcal{I}}$ est un morphisme découle alors de cette unicité et de la t -exactitude des $[g]_{J,I,*}$. □

Références

- [1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. <http://people.math.jussieu.fr/~boyer/fichiers/MP-cohomologique.pdf>.
- [3] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3) :573–629, 1999.
- [4] P. Boyer. Faisceaux pervers des cycles évanescents des variétés de Drinfeld et groupes de cohomologies du modèle de Deligne-Carayol. <http://people.math.jussieu.fr/~boyer/fichiers/livre.pdf>, à paraître aux *Mémoires de la SMF*, 2009.
- [5] H. Carayol. Sur les représentations l -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup. (4)*, 19 :409–468, 1986.
- [6] H. Carayol. Nonabelian Lubin-Tate theory. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L -functions*, volume 11 of *Perspect. Math.*, pages 15–39. Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [7] J.-F. Dat. Nonabelian Lubin-Tate theory and elliptic representations. (Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques.). *Invent. Math.*, 169(1) :75–152, 2007.
- [8] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [9] L. Fargues. Filtration de monodromie et cycles évanescents formels. *ce volume*.
- [10] L. Fargues. Dualité de Poincaré et involution de Zelevinsky dans la cohomologie étale équivariante des espaces analytiques rigides. <http://www.math.u-psud.fr/fargues/Dualite.dvi>, 2006.
- [11] L. Fargues, A. Genestier, and V. Lafforgue. *The isomorphism between Lubin-Tate and Drinfeld towers. (L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld.)*. Progress in Mathematics 262. Basel : Birkhäuser. xii, 406 p., 2008.
- [12] U. Goertz and T. Haines. The Jordan-Hoelder series for nearby cycles on some Shimura varieties and affine flag varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 609 :161–213, 2007.
- [13] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

- [14] G. Henniart. Sur la conjecture de Langlands locale pour GL_n . *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 13(1) :167–187, 2001. 21st Journées Arithmétiques (Rome, 2001).
- [15] T. Ito. Hasse invariants for somme unitary Shimura varieties. *Math. Forsch. Oberwolfach report 28/2005*, pages 1565–1568, 2005.
- [16] R.E. Kottwitz. Stable trace formula : elliptic singular terms. *Math. Ann.*, 275(3) :365–399, 1986.
- [17] R.E. Kottwitz. Points on some Shimura varieties over finite fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(2) :373–444, 1992.
- [18] J.-P. Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [19] R. Taylor and T. Yoshida. Compatibility of local and global Langlands correspondences. *J.A.M.S.*, 20 :467–493, 2007.
- [20] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.