CONGRUENCES AUTOMORPHES ET TORSION DANS LA COHOMOLOGIE D'UNE VARIÉTÉ DE SHIMURA UNITAIRE SIMPLE

par

Boyer Pascal

Résumé. — Nous donnons d'une part un procédé relativement souple de construction de classes de cohomologie de torsion dans la cohomologie d'une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor à coefficients dans un système local « pas trop régulier ». D'autre part nous montrons qu'associée à toute classe de cohomologie de torsion, il existe une infinité de représentations irréductibles automorphes cohomologiques, en caractéristique nulle, qui sont deux à deux non isomorphes et faiblement congruentes au sens de [**16**].

***Abstract* (Automorphic congruences and torsion in the cohomology of a simple unitary Shimura variety)**

We first give a relative flexible process to construct torsion cohomology classes for Shimura varieties of Kottwitz-Harris-Taylor type with coefficient in a non too regular local system. We then prove that associated to each torsion cohomology class, there exists a infinity of irreducible automorphic representations in characteristic zero, which are pairwise non isomorphic and weakly congruent in the sense of [**16**].

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

Introduction

Soient $F = EF^+$ un corps CM et $X_{I,\eta} \to \operatorname{Spec} F$ une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor associée donc à une groupe de similitudes $G/\mathbb{Q}$ et un sous-groupe compact ouvert I. On note $\mathrm{Spl}(I)$ l'ensemble des nombres premiers $p \neq l$ tels que

— $p = uu^c$ est décomposé dans l'extension quadratique imaginaire E/Q,

— $G(\mathbb{Q}_p)$ est décomposé, i.e. de la forme $\mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{v|u} GL_d(F_v)$ et

— la composante locale en p de I est maximale.

Pour l un nombre premier, et ξ une représentation irréductible algébrique de G donnant lieu à un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-système local V_ξ sur $X_{I,\bar\eta}$, dans [**9**] on étudie la torsion dans les $H^i(X_{I,\bar\eta}, V_\xi)$ et on montre en particulier que d'un point de vue automorphe, rien de nouveau apparait au sens où toutes les classes de torsion se relèvent en caractéristique nulle dans la cohomologie en degré médian d'une variété d'Igusa. D'après [**10**], le phénomène semble partagé par une large classe de variétés de Shimura. Ainsi au moins du point de vue de la correspondance de Langlands, l'existence de classes de cohomologie de torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura n'est d'aucun intérêt.

Le but de ce travail, qui prolonge [**9**], est alors dans un premier temps, de donner un procédé « relativement souple » de construction de classes de cohomologie de torsion pour ces variétés de Shimura. Pour ce faire, on choisit une représentation ξ pas trop régulière au sens de [**14**] de façon à ce que la $\overline{\mathbb{Q}}_l$-cohomologie de $X_{I,\bar\eta}$ à coefficients dans V_ξ, ne soit pas concentrée en degré médian. Le principe est alors de calculer la cohomologie via la suite spectrale des cycles évanescents en une place v divisant suffisamment le niveau, puis d'utiliser les filtrations du $\overline{\mathbb{Z}}_l$-faisceau pervers des cycles évanescents $\Psi_{I,v}$ construites dans [**6**] et dont les gradués se décrivent à l'aide des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. Ces derniers sont en particulier indexés par une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $1 \leq g \leq d$. Comme déjà remarqué dans [**7**], lorsque la réduction modulo l d'un tel π_v n'est plus supercuspidale, la cohomologie du faisceau pervers associé admet de la torsion pourvu que le niveau soit suffisamment grand, cf. la proposition 2.2.11. Tout l'objet du §2.2 est alors de montrer que cette torsion subsiste dans l'aboutissement de la suite spectrale associée à la filtration de $\Psi_{I,v}$. Voici une version imprécise du résultat principal obtenu dans cette direction, cf. 2.4.1.

Théorème. — *Supposons qu'il existe*

— *une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible supercuspidale ϱ de $GL_g(F_v)$ dont la droite de Zelevinsky est de cardinal* 2,

— *un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-relèvement π_v ainsi*
— *qu'une représentation Π automorphe irréductible et ξ-cohomologique, dont la composante locale en v est de la forme* $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)\times ?$ *avec $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor \geq 4$ et ? une représentation quelconque.*

Alors pour un niveau fini I tel que Π possède des vecteurs non nuls invariants sous I, la torsion de la cohomologie de $X_{I,\bar\eta}$ à coefficients dans V_ξ, est non nulle.

Dans un deuxième temps au §3, on propose une application automorphe à l'existence de classes de torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor, en construisant des congruences automorphes faibles au sens du §3 de [**16**]. Pour formuler une version allégée du résultat principal, cf. le corollaire 3.7, notons suivant 1.2.6, $\mathrm{Spl}(I)$ l'ensemble des places de F au dessus d'un nombre premier $p \neq l$ décomposé dans E et telle que $B_v^\times \simeq GL_d(F_v)$

Théorème. — *Pour $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal d'une algèbre de Hecke non ramifiée, associé à une classe de torsion dans la cohomologie de $X_{I,\bar\eta}$ à coefficient dans V_ξ, il existe une famille*

$$\Pi(p)$$

indexée par les nombres premiers $p \in \mathrm{Spl}(I)$, de représentations irréductibles automorphes ξ-cohomologiques, telle que pour premier $q \in \mathrm{Spl}(I)$ distinct de p, la composante locale en q (resp. en p) de $\Pi(p)$ est non ramifiée (resp. est ramifiée), ses paramètres de Satake modulo l étant donnés par $\mathfrak{m}$.

En particulier pour $p \neq q$ des premiers de $\mathrm{Spl}(I)$, les représentations $\Pi(p)$ et $\Pi(q)$ ne sont pas isomorphes alors qu'elles sont non ramifiées en toute place de $\mathrm{Spl}(I) - \{p, q\}$ et y partagent les mêmes paramètres de Satake modulo l. Au sens du §3 de [**16**], on dit que ces représentations sont faiblement congruentes.

1. Rappels

1.1. sur les représentations. — Considérons un corps local K muni de sa valeur absolue $|-|$: on note q le cardinal de son corps résiduel. Pour π une représentation de $GL_d(K)$ et $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, on note

$$\pi\{n\} := \pi \otimes q^{-n \,\mathrm{val} \circ \det}.$$

1.1.1. Notations. — *Pour π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, $\pi_1 \times \pi_2$ désigne l'induite parabolique normalisée*

$$\pi_1 \times \pi_2 := \mathrm{ind}_{P_{n_1,n_1+n_2}(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{\frac{n_2}{2}\} \otimes \pi_2\{-\frac{n_1}{2}\},$$

où pour toute suite $\underline{r} = (0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k = d)$, on note $P_{\underline{r}}$ le sous-groupe parabolique de GL_d standard associé au sous-groupe de Levi

$$GL_{r_1} \times GL_{r_2-r_1} \times \cdots \times GL_{r_k-r_{k-1}}.$$

Rappelons qu'une représentation irréductible est dite supercuspidale si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

1.1.2. Définition. — (cf. [**17**] §9 et [**4**] §1.4) Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$. L'induite

$$\pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \cdots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$$

possède un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible noté habituellement $\mathrm{St}_s(\pi)$ (resp. $\mathrm{Speh}_s(\pi)$) ; c'est une représentation de Steinberg (resp. de Speh) généralisée.

Remarque : du point de vue galoisien, via la correspondance de Langlands locale, la représentation $\mathrm{Speh}_s(\pi)$ correspond à la somme directe $\sigma(\frac{1-s}{2}) \oplus \cdots \oplus \sigma(\frac{s-1}{2})$ où σ correspond à π. Plus généralement pour π une représentation irréductible quelconque de $GL_g(K)$ associée à σ par la correspondance de Langlands locale, on notera $\mathrm{Speh}_s(\pi)$ la représentation de $GL_{sg}(K)$ associée, par la correspondance de Langlands locale, à $\sigma(\frac{1-s}{2}) \oplus \cdots \oplus \sigma(\frac{s-1}{2})$.

1.1.3. Définition. — Une $\bar{\mathbb{Q}}_l$-représentation lisse de longueur finie π de $GL_d(K)$ est dite *entière* s'il existe une extension finie $E/\mathbb{Q}_l$ contenue dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ et une $\mathcal{O}_E$-représentation L de $GL_d(K)$, qui est un $\mathcal{O}_E$-module libre, telle que $\bar{\mathbb{Q}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L \simeq \pi$ et tel que L est un $\mathcal{O}_E GL_n(K)$-module de type fini. Soit κ_E le corps résiduel de $\mathcal{O}_E$, on dit que

$$\bar{\mathbb{F}}_l \otimes_{\kappa_E} \kappa_E \otimes_{\mathcal{O}_E} L$$

est la réduction modulo l de L.

Remarque : le *principe de Brauer-Nesbitt* affirme que la semi-simplifiée de $\bar{\mathbb{F}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L$ est une $\bar{\mathbb{F}}_l$-représentation de $GL_d(K)$ de longueur finie qui ne dépend pas du choix de L. Son image dans le groupe de Grothendieck sera notée $r_l(\pi)$ et dite *la réduction modulo l de π*.
Exemples : d'après [**15**] V.9.2 ou [**11**] §2.2.3, la réduction modulo l de $\mathrm{Speh}_s(\pi)$ est irréductible.

1.1.4. Définition. — Pour ϱ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible supercuspidale ϱ de $GL_{g_{-1}(\varrho)}(F_v)$, on note

$$\epsilon(\varrho) = \sharp\Big\{\varrho\{i\} : \ i \in \mathbb{Z}\Big\}$$

le cardinal de la droite de Zelevinsky de ϱ, et

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho) & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1, \\ l & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : $\epsilon(\varrho)$ est un diviseur de l'ordre $e_l(q)$ de q modulo l.

1.1.5. Définition. — (cf. [**15**] III.5.14) Pour tout s de la forme

$$s = 1, m(\varrho), m(\varrho)l, \cdots, m(\varrho)l^u, \cdots,$$

l'induite parabolique

$$\varrho\{\frac{1-s}{2}\} \times \cdots \times \varrho\{\frac{s-1}{2}\}$$

admet un unique sous-quotient cuspidal que l'on note respectivement

$$\rho_{-1} \simeq \varrho, \ \rho_0, \ \rho_1, \ \cdots, \ \rho_u, \ \cdots$$

Remarque : toute $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible cuspidale (resp. supercuspidale) est de la forme ρ_u (resp. ϱ_{-1}) pour $u \geq -1$ et ϱ une représentation irréductible supercuspidale.

1.1.6. Définition. — La réduction modulo l d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible cuspidale π_v étant irréductible cuspidale et donc de la forme ρ_u, on dira qu'elle de ϱ-type u. Pour $u \geq 0$, on notera

$$g_u(\varrho) := g_{-1}(\varrho) m(\varrho) l^u,$$

et $\mathrm{Cusp}(\varrho, u)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles cuspidales de ϱ-type u.

Remarque : lorsque ϱ sera clairement fixé, on notera plus simplement g_u pour $g_u(\varrho)$.

1.1.7. Notations. — *On note $D_{K,d}$ l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$ et d'ordre maximal $\mathcal{D}_{K,d}$: la norme réduite* Nrd *composée avec la valuation donne une identification $D_{K,d}/\mathcal{D}_{K,d} \simeq \mathbb{Z}$. Pour π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible supercuspidale de $GL_g(K)$ avec $d = sg$,*

$$\pi[s]_D$$

désignera la représentation de $D_{K,d}^\times$ associée à $\mathrm{St}_t(\pi^\vee)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands.

Remarque : on rappelle qu'avec ces notations, toute représentation irréductible admissible de $D_{K,d}^\times$ est de la forme $\pi[s]_D$ pour g décrivant les diviseurs de d et π les représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(K)$.

Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible supercuspidale entière de ϱ-type u. On note alors ι l'image de $\mathrm{Speh}_s(\varrho^\vee)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands modulaire définie par J.-F. Dat au §1.2.4 de [**11**]. Autrement dit si π_ϱ est un relèvement cuspidal de ϱ, alors

$$\iota = r_l\Big(\pi_\varrho[s]_D\Big).$$

1.1.8. Proposition. — *(cf.* [**11**] *proposition 2.3.3) Avec les notations précédentes, la réduction modulo l de $\pi[s]_D$ est de la forme*

$$\iota\{-\frac{m(\tau)-1}{2}\} \oplus \iota\{-\frac{m(\tau)-3}{2}\} \oplus \cdots \oplus \iota\{\frac{m(\tau)-1}{2}\}$$

où $\iota\{n\}$ désigne $\iota \otimes q^{-n \operatorname{val} \circ \mathrm{Nrd}}$ et $m(\tau) := m(\varrho) l^u$.

1.2. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples. — Soit $F = F^+E$ un corps CM avec $E/\mathbb{Q}$ quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Pour v une place de F, on notera

— F_v le complété du localisé de F en v,
— $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de F_v,
— ϖ_v une uniformisante et
— q_v le cardinal du corps résiduel $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F, B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*_{|F}$ est la conjugaison complexe c. Pour $\beta \in B^{*=-1}$, on note $\sharp_\beta$ l'involution $x \mapsto x^{\sharp_\beta} = \beta x^* \beta^{-1}$ et $G/\mathbb{Q}$ le groupe de similitudes, noté G_τ dans [**12**], défini pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_\mathbb{Q} R)^\times \text{ tel que } gg^{\sharp_\beta} = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$. Si x est une place de $\mathbb{Q}$ décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times, \tag{1.2.1}$$

où, en identifiant les places de F^+ au dessus de x avec les places de F au dessus de y, $x = \prod_i z_i$ dans F^+.

Dans [**12**], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :
— si x est une place de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;
— les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

Rappelons, cf. [**12**] bas de la page 90, qu'un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ est dit « assez petit » s'il existe une place x pour laquelle la projection de U^v sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité.

1.2.2. Notation. — *Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Pour $I \in \mathcal{I}$, on note $X_{I,\eta} \longrightarrow \operatorname{Spec} F$ la variété de Shimura associée, dit de Kottwitz-Harris-Taylor.*

Remarque : pour tout $v \in \mathrm{Spl}$, la variété $X_{I,\eta}$ admet un modèle projectif $X_{I,v}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$ de fibre spéciale X_{I,s_v}. Pour I décrivant $\mathcal{I}$, le système projectif $(X_{I,v})_{I\in\mathcal{I}}$ est naturellement muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$, où $\deg = \mathrm{val} \circ \mathrm{Art}^{-1}$ où $\mathrm{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

1.2.3. Notations. — *(cf. [**3**] §1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, la fibre spéciale géométrique $X_{I,\bar{s}_v}$ admet une stratification de Newton*

$$X_{I,\bar{s}_v} =: X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1} \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 2} \supset \cdots \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq d}$$

où $X_{I,\bar{s}_v}^{=h} := X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h} - X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}$ est un schéma affine (1)*, lisse de pure dimension $d-h$ formé des points géométriques dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate est de rang h. Pour tout $1 \leq h < d$, nous utiliserons les notations suivantes :*

$$i_{h+1} : X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, \quad j^{\geq h} : X_{I,\bar{s}_v}^{=h} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h},$$

ainsi que $j^{=h} = i_h \circ j^{\geq h}$.

1. cf. par exemple [**13**]

Rappelons que les strates de Newton non supersingulières sont géométriquement induites au sens suivant, cf. [**2**] : il existe un sous-schéma fermé $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ stable par les correspondances de Hecke associées au parabolique $P_{h,d}(F_v)$ et tel que si la composante en v de I est $\mathrm{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_v) \twoheadrightarrow GL_d(\mathcal{O}_v/\varpi_v^n))$ alors

$$X^{=h}_{I,\bar{s}_v} = \coprod_{g \in GL_d(\mathcal{O}_v/\varpi_v^n)/P_{h,d}(\mathcal{O}_v/\varpi_v^n)} g.X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}.$$

1.2.4. Notation. — *Pour $g \in GL_d(\mathcal{O}_v/\varpi_v^n)/P_{h,d}(\mathcal{O}_v/\varpi_v^n)$, on notera $V_g \subset (\mathcal{O}_v/\varpi_v^n)^d$, l'image par g du sous-espace $V_{\overline{1_h}}$ engendré par les h-premiers vecteurs de la base canonique. Pour $V \subset (\mathcal{O}_v/\varpi_v^n)^d$ de la forme $g.V_{\overline{1_h}}$, on notera*

$$X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,V} := g.X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}.$$

1.2.5. Notation. — *On note $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ l'adhérence schématique de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$, et pour tout $h' \geq h$,*

$$X^{\geq h'}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}} := X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}} \cap X^{\geq h'}_{I,\bar{s}_v}.$$

On utiliser $j^{\geq h'}_{\overline{1_h}} : X^{=h'}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}} \hookrightarrow X^{\geq h'}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ ainsi que $j^{=h'}_{\overline{1_h}} := i^{h'}_{\overline{1_h}} \circ j^{\geq h'}_{\overline{1_h}}$ où $i^{h'}_{\overline{1_h}} : X^{\geq h'}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}} \hookrightarrow X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$.

1.2.6. Notation. — *On fixe un nombre premier l non ramifié dans E et on note* Spl *l'ensemble des places v de F telles que $p_v := v_{|\mathbb{Q}} \neq l$ est décomposé dans E et $B_v^\times \simeq GL_d(F_v)$. Pour $I \in \mathcal{I}$, on notera* $\mathrm{Spl}(I)$ *le sous-ensemble de* Spl *des places ne divisant pas le niveau I.*

1.3. Faisceaux pervers d'Harris-Taylor. — À toute représentation irréductible admissible τ_v de $D_{v,h}^\times$, Harris et Taylor associent un système local de Hecke $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I},\overline{1_h}}$ sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$, au sens du §1.4.5 de [**3**], avec une action de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times P_{h,d}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times \mathbb{Z}$ qui d'après [**12**] p.136, se factorise par $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}^\times_{F_v,h}$ via

$$(g^{\infty,p}, g_{p,0}, c, g_v, g_{v_i}, k) \mapsto (g^{p,\infty}, g_{p,0}q^{k-v(\det g_v^c)}, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta). \tag{1.3.0}$$

où $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) := G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D^\times_{F_v,h}$, $g_v = \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix}$ et $\delta \in D_{v,h}^\times$ est tel que $v(\mathrm{rn}(\delta)) = k + v(\det g_v^c)$. On note $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I}}$ le faisceau sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$ induit associé :

$$\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I}} := \mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I},\overline{1_h}} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et t un entier strictement positif tel que $tg \leq d$, on introduit suivant [**3**] la notation $\mathcal{F}(\pi_v,t)_{\overline{1_{tg}}}$ (resp. $\mathcal{F}(\pi_v,t)$) pour désigner le faisceau de Hecke sur $X^{=tg}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{tg}}}$ (resp. $X^{=tg}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$) précédemment noté $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D,\mathcal{I},\overline{1_{tg}}}$ (resp. $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D,\mathcal{I}}$).

1.3.1. Notation. — *Avec les notations précédentes,* $HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_{tg}}}(\pi_v,\Pi_t)$ *désignera le* W_v*-faisceau pervers de Hecke sur* $X^{=tg}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{tg}}}$ *défini par*

$$HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_{tg}}}(\pi_v,\Pi_t) := \mathcal{F}(\pi_v,t)_{\overline{1_{tg}}}[d-tg]\otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}\otimes \Pi_t,$$

où Π_t *(resp.* Ξ*) une représentation de* $GL_{tg}(F_v)$ *(resp. de* $\mathbb{Z}$*). En ce qui concerne les actions :*
- *celle de* $G(\mathbb{A}^{\infty,v})$ *est donnée par son action naturelle sur* $\mathcal{F}(\pi_v,t)_{\overline{1_{tg}}}$*,*
- *celle de* $P_{h,d}(F_v)$*, à travers son Levi* $GL_h(F_v)\times GL_{d-h}(F_v)$*, est donnée par l'action naturelle de* $GL_{d-h}(F_v)$ *sur* $\mathcal{F}(\pi_v,t)_{\overline{1_{tg}}}$ *et l'action diagonale de* $\mathbb{Z}$ *sur* $\mathcal{F}(\pi_v,t)_1$ *et* $\Xi^{\frac{tg-d}{2}}$*, tandis que celle de* $GL_h(F_v)$ *est donnée par son action diagonale sur* $\Pi_t\otimes\Xi^{\frac{tg-d}{2}}$ *où, sur le deuxième facteur, on utilise la valuation du déterminant.*

Pour tout $h\leq tg$*, on notera*

$$HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_h}}(\pi_v,\Pi_t) \quad \textit{resp. } HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v,\Pi_t)$$

pour désigner la version induite à toute la strate de Newton $X^{=tg}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ *(resp. à* $X^{=tg}_{\mathcal{I},\bar{s}_c}$*). Enfin on otera l'indice* $\overline{\mathbb{Q}}_l$*, pour désigner un* $\overline{\mathbb{Z}}_l$*-réseau stable sous l'action des correspondances de Hecke associées à* $P_{h,d}(F_v)$*.*

1.3.2. Définition. — Le faisceau pervers d'Harris-Taylor associé à $\mathrm{St}_t(\pi_v)$ est par définition l'extension intermédiaire

$$P_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v,t) := {}^p j^{=tg}_{!*} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v,\mathrm{St}_t(\pi_v)).$$

Remarque : sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$, on deux notions d'extensions intermédiaires ${}^p j^{=tg}_{!*}$ et ${}^{p+} j^{=tg}_{!*}$.

1.3.3. Notation. — *Suivant* [**12**]*, à toute* $\mathbb{C}$*-représentation irréductible algébrique de dimension finie* ξ *de* G*, on associe un système local* V_ξ *sur* $X_{\mathcal{I}}$ *et on décore tous nos faisceaux d'un indice* ξ *pour désigner leur torsion par* V_ξ *: par exemple* $HT_\xi(\pi_v,\Pi_t) := HT(\pi_v,\Pi_t)\otimes V_\xi$*.*

2. Torsion dans la cohomologie

On fixe à présent une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible supercuspidale ϱ de $GL_{g_{-1}}(F_v)$ ainsi qu'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible cuspidale entière $\pi_{v,-1}$ de ϱ-type -1. Contrairement au paragraphe suivant, on considère ici des niveaux I ramifiés en v.

2.1. Rappels sur la $\overline{\mathbb{Q}}_l$-cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor. — Pour $1\leq h=tg_{-1}\leq d$, on note $\mathcal{I}_v(h)$ l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts de la forme

$$U_v(\underline{m},h) := U_v(\underline{m}^v)\times\begin{pmatrix} I_h & 0\\ 0 & K_v(m_1)\end{pmatrix},$$

où $K_v(m_1)=\mathrm{Ker}\Big(GL_{d-h}(\mathcal{O}_v)\longrightarrow GL_{d-h}(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^{m_1}))\Big)$.

2.1.1. Notation. — *On note* $[H^i_{\xi,!}(tg_{-1},\pi_{v-1})]$ *l'image de*

$$\lim_{\substack{\longrightarrow\\ I\in\mathcal{I}_v(h)}} H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\overline{1_h},\xi}(\pi_{v,-1},\Pi_t)[d-h])$$

dans le groupe de Grothendieck Groth(v,h) *des représentations admissibles de* $G(\mathbb{A}^\infty)\times GL_{d-h}(F_v)\times GL_h(F_v)\times\mathbb{Z}$.

Remarque : l'action de $\sigma\in W_v$ est donnée par celle de $-\deg\sigma\in\mathbb{Z}$, composée avec celle de $\mathrm{Art}^{-1}(\sigma)$ sur le facteur $\mathbb{Q}_p^\times$ de $G(\mathbb{Q}_p)$.

2.1.2. Définition. — On dit d'une représentation irréductible automorphe Π qu'elle est ξ-cohomologique s'il existe un entier i tel que

$$H^i\Big((\mathrm{Lie}\ G(\mathbb{R}))\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C},U,\Pi_\infty\otimes\xi^\vee\Big)\neq(0),$$

où U est un sous-groupe compact maximal modulo le centre de $G(\mathbb{R})$.

2.1.3. Définition. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$,

$$s_\xi(\pi_v)$$

désignera le plus grand entier s tel qu'il existe une représentation automorphe ξ-cohomologique Π telle que sa composante locale en v est de la forme $\mathrm{Speh}_s(\pi'_v)\times ?$ où π'_v est inertiellement équivalente à π_v et ? désigne une représentation de $GL_{d-sg_{-1}}(F_v)$ que l'on ne cherche pas à préciser.

2.1.4. Proposition. — *(cf.* [**4**] *§5 ou* [**9**] *§3.3) Pour tout* $1\leq t\leq s_{-1}:=\lfloor\frac{d}{g_{-1}}\rfloor$, *et pour tout* i *tel que* $|i|>s_\xi(\pi_{v,-1})-t$, *alors* $[H^i_{\xi,!}(tg_{-1},\pi_{v,-1})]$ *est nul. Pour* $t\leq s_\xi(\pi_{v,-1})$ *et pour* $i=s_\xi(\pi_{v,-1})-t)$, *alors* $[H^i_{\xi,!}(tg_{-1},\pi_{v,-1})]$ *est non nul.*

2.2. Torsion dans la cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. — Dans cette section nous allons rappeler comment, d'après le §4.5 de [**7**], on peut construire de la torsion dans la cohomologie d'un faisceau pervers d'Harris-Taylor.

2.2.1. Notation. — *On note* $\mathbb{F}(-)$ *le foncteur* $(-)\otimes^{\mathbb{L}}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{F}}_l$.

2.2.2. Proposition. — *(cf.* [**8**]*) Pour tout* $1\leq t\leq s_{-1}:=\lfloor\frac{d}{g_{-1}}\rfloor$, *on a*

$${}^p j^{=tg}_{!*}HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_{v,-1},\Pi_t)\simeq {}^{p+}j^{=tg}_{!*}HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_{v,-1},\Pi_t).$$

On note $HT_{\overline{\mathbb{F}}_l,\xi}(\pi_{v,-1},\Pi_t)$, la réduction modulo l d'un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-réseau stable de $HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_{v,-1},\Pi_t)$.

2.2.3. Corollaire. — *Pour* $t\leq s_\xi(\pi_{v,-1})$,

$$H^i(X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!}HT_{\overline{\mathbb{F}}_l,\xi}(\pi_{v,-1},\Pi_t))$$

est nul pour tout $i>s_\xi(\pi_{v,-1})-t$ *et non nul pour* $i=s_\xi(\pi_{v,-1})-t$. *Pour* $t>s_\xi(\pi_{v,-1})$, *tous ces groupes de cohomologie sont nuls.*

Remarque : autrement dit la conclusion de la proposition 2.1.4 est encore valable sur $\overline{\mathbb{F}}_l$.

Démonstration. — Rappelons l'égalité suivante sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers équivariant de Hecke, cf. [**3**] corollaire 5.4.1

$$\begin{aligned} j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t) = {}^p j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t) + \\ \sum_{i=1}^{s_{-1}-t} {}^p j^{=(t+i)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t\{i\frac{g-1}{2}\} \times \mathrm{St}_i(\pi_{v,-1}\{-t\frac{g-1}{2}\})) \otimes \Xi^{\frac{i}{2}} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

La filtration de stratification construite dans [**6**]

$$0 = \mathrm{Fil}_!^{t-s_{-1}-1}(\pi_{v,-1},\Pi_t) \subset \mathrm{Fil}_!^{t-s}(\pi_{v,-1},\Pi_t) \subset \cdots \mathrm{Fil}_!^0(\pi_{v,-1},\Pi_t)$$

a pour gradués, d'après [**5**], les

$$\mathrm{gr}_!^i(\pi_{v,-1},\Pi_t) \simeq {}^p j^{=(t+i)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t\{i\frac{g-1}{2}\} \times \mathrm{St}_i(\pi_{v,-1}\{-t\frac{g-1}{2}\})) \otimes \Xi^{\frac{i}{2}},$$

pour certains réseaux stables qu'il est inutile de préciser. On considère alors la suite spectrale associée à cette filtration et calculant les groupes de cohomologie de $j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)$

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathrm{gr}_!^{-p}(\pi_{v,-1},\Pi_t)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)). \quad (2.2.5)$$

2.2.6. Lemme. — *Pour tout $i < t - s_\xi(\pi_{v,-1})$ (resp. $i = t - s_\xi(\pi_{v,-1})$) le groupe de cohomologie $H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t))$ est nul (resp. non nul et sans torsion).*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur t de s_{-1} à 1. Pour $t = s_{-1}$, on rappelle que

$$\begin{aligned} {}^p j^{=s_{-1}g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_{-1}}) \simeq j^{=s_{-1}g_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_{-1}}) \\ \simeq j^{=s_{-1}g_{-1}}_{\overline{1_h},*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_{-1}}) \simeq {}^{p+} j^{=s_{-1}g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_{-1}}) \end{aligned}$$

de sorte que, considérant que $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ est affine, les $H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{=s_{-1}g_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_{-1}})$ (resp. $H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{=s_{-1}g_{-1}}_{\overline{1_h},*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_{-1}}))$ son nuls pour $i < 0$ (resp. $i > 0$), et donc concentrés en degré médian. En utilisant en outre que $j^{\geq h}_{\overline{1_h}}$ est affine, de sorte que $j^{=h}_{\overline{1_h},!}$ et $j^{=h}_{\overline{1_h},*}$ commutent avec le foncteur de réduction modulo l, on en déduit qu'il en est de même pour $H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{=s_{-1}g_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{F}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_{-1}})$ ce qui impose que $H^0(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{=s_{-1}g_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_{-1}})$ est sans torsion, cf. la suite exacte courte générale (2.2.8) rappelée plus bas. Le résultat découle alors de la proposition 2.1.4.

Supposons alors le résultat acquis jusqu'au rang $t+1$ et revenons à l'étude de la suite spectrale (2.2.5).

— Considérons tout d'abord le cas où $t > s_\xi(\pi_{v,-1})$ auquel cas, par récurrence tous les $E_1^{p,q}$ avec $p > 0$ sont nuls. Or $X^{=tg_{-1}}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ étant affine, les E_∞^{p+q} sont nuls pour $p+q < 0$, ce qui impose que les $H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, {}^p j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t))$ sont nuls pour $i < 0$ et sans torsion pour $i = 0$. Or d'après la proposition 2.1.4, on en déduit qu'il est nul aussi pour $i = 0$ et par dualité, d'après la proposition 2.2.2, nul pour tout i.

— Supposons à présent $t \leq s_\xi(\pi_{v,-1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour $p > 0$ fixé, les $E_1^{p,q}$ sont nuls pour $p+q < t+p-s_\xi(\pi_{v,-1})$ et sans torsion pour $p+q = t+p-s_\xi(\pi_{v,-1})$. Par ailleurs comme $X^{=tg_{-1}}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ est affine, les E_∞^{p+q} sont nuls pour $p+q<0$, de sorte que les $E_1^{0,q}$ sont nuls pour $q < t-s_\xi(\pi_{v,-1})$ et $E_1^{0,t-s_\xi(\pi_{v,-1})}$ est sans torsion, d'où le résultat.

□

Ainsi en utilisant que, d'après la proposition 2.2.2, les $\mathrm{gr}_!^{-p}(\pi_v,\Pi_t)$ sont autoduaux en tant que faisceaux pervers, on en déduit que, pour $1 \leq p \leq s_{-1}-t$ fixé, les termes $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale 2.2.5 sont nuls pour $p+q \geq s_\xi(\pi_{v,-1})-t-p$ et donc E_∞^{p+q} est nul pour tout $p+q > s_\xi(\pi_{v,-1})-t$ d'où le résultat. □

Remarque : l'énoncé d'annulation pour $i > s_\xi(\pi_{v,-1})-t$ est encore valable à niveau fini et pour la non annulation pour $i = s_\xi(\pi_{v,-1})-t$, il suffit de prendre un niveau suffisamment petit de sorte que la non annulation soit vérifiée sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$.

2.2.7. Corollaire. — *Le nombre $s_\xi(\pi_{v,-1})$ ne dépend que de ϱ, on le notera alors $s_\xi(\varrho)$.*

Démonstration. — Rappelons que pour P un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-faisceau pervers sans torsion, on a

$$0 \to H^i(X,P) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l \longrightarrow H^i(X, P \otimes^{\mathbb{L}}_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l) \longrightarrow H^{i+1}(X,P)[l] \to 0, \qquad (2.2.8)$$

de sorte que $s_\xi(\pi_{v,-1})$ est le plus grand entier i tel que $H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, \mathbb{F}j^{=g_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_1))$ est non nul, ce qui, comme $\mathbb{F}j^{=g_{-1}}_! = j^{=g_{-1}}_!\mathbb{F}$, ne dépend donc que de la réduction modulo l de $\pi_{v,-1}$. □

2.2.9. Proposition. — *Pour $1 \leq t \leq \lfloor \frac{d}{g_{-1}} \rfloor$ et $h = tg_{-1}$, la torsion de*

$$H^{s_\xi(\varrho)-t}(X^{\geq tg_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t))$$

est non nulle si et seulement si celle de

$$H^1(X^{\geq (s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{\geq (s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}))$$

est non nulle, quelle que soit la représentation $\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}$ de $P_{h,(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}(F_v)$ considérée.

Remarque : l'énoncé précédent est indépendant de la représentation infinitésimale Π_t, on pourrait faire une formulation plus légère avec les $\mathcal{F}(\pi_{v,-1},t)$ mais comme la démonstration fait intervenir naturellement ces parties infinitésimales, on a préféré les laisser apparaître.

Démonstration. — Notons tout d'abord que d'après ce qui précède pour $t > s_\xi(\varrho)$ (resp. $t = s_\xi(\varrho)$) tous les groupes de cohomologie de $j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)$ et de ${}^p j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)$ sont nuls (resp. sauf pour $i=0$ auquel cas il est sans torsion). Il découle de la suite spectrale (2.2.5) et du lemme 2.2.6, que

$$H^{s_\xi(\varrho)-t}(X^{\geq tg_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)) \simeq H^{s_\xi(\varrho)-t}(X^{\geq tg_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, {}^p j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)).$$

Ainsi par dualité et d'après la proposition 2.2.2, on est amené à étudier la torsion de $H^{t-s_\xi(\varrho)+1}(X^{\geq tg_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}, {}^p j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t))$. Le résultat découle alors trivialement du lemme suivant. □

2.2.10. Lemme. — *Pour tout $t \geq s_\xi(\varrho)-1$, on a l'équivalence*

$$H^0_{tor}(X^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}, {}^p j^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})) \neq (0)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$H^{t-s_\xi(\varrho)+1}_{tor}(X^{\geq tg_{-1}}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}, {}^p j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)) \neq (0).$$

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que le membre de gauche de l'équivalence précédente soit vérifié. Considérons alors la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Fil}^{-2}_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}) \longrightarrow j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}) \longrightarrow \mathrm{Fil}^0_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})/\,\mathrm{Fil}^{-2}_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}) \to 0,$$

de sorte que pour tout i, on a

$$H^i(X^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}, j^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})) \simeq H^i(X^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}, \mathrm{Fil}^0_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})/\,\mathrm{Fil}^{-2}_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})).$$

De la suite exacte courte

$$0 \to {}^p j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)}) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathrm{Fil}^0_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})/\,\mathrm{Fil}^{-2}_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}) \longrightarrow {}^p j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}) \to 0$$

où

$$\Pi_{s_\xi(\varrho)} := \mathrm{ind}_{P_{h,s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},s_\xi(\varrho)g_{-1}}(F_v)}^{P_{h,s_\xi(\varrho)g_{-1}}(F_v)} \Big(\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}\{\frac{g-1}{2}\} \otimes \pi_{v,-1}\{(1-s_\xi(\varrho))\frac{g-1}{2}\}\Big).$$

En utilisant

— d'une part que les groupes de cohomologie de ${}^p j^{s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)})$ sont tous nuls sauf en degré 0 auquel cas la torsion est nulle,

— et que d'autre part, $X^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ est affine de sorte que la cohomologie de $j^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})$ et donc de $\mathrm{Fil}^0_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})/\,\mathrm{Fil}^{-2}_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})$ est nul en degré <0 et sans torsion en degré 0,

on en déduit que le morphisme

$$H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)})) \longrightarrow H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathrm{Fil}^0_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})/\,\mathrm{Fil}^{-2}_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}))$$

n'est pas strict, i.e. la torsion du conoyau est non nulle.
Remarque : Notons que pour $h=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}$, la représentation $\Pi_{s_\xi(\varrho)}$ est irréductible pourvu que $\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}$ le soit elle même. Pour $h<(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}$, la suite exacte courte

précédente est une somme directe indexée par les composantes $X^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$ contenue dans $X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ de sorte que pour tout $(0) \neq \widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}} \hookrightarrow \Pi_{s_\xi(\varrho)}$, le morphisme composé

$$\begin{tikzcd} H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}})) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)})) \arrow[r] & H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathrm{Fil}^0_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})/\,\mathrm{Fil}^{-2}_!(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1})) \end{tikzcd}$$

n'est pas strict.

Considérons à présent le groupe de cohomologie d'indice $t-s_\xi(\varrho)+1$ de ${}^p j^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)$. On part des suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \hookrightarrow & j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t) & \twoheadrightarrow & {}^p j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t) \\ P_2 & \hookrightarrow & j^{=(t+1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!} j^{=(t+1)g_{-1},*}_{\overline{1_h}} P_1 & \twoheadrightarrow & P_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{s_\xi(\varrho)-t} & \hookrightarrow & j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!} j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*}_{\overline{1_h}} P_{s_\xi(\varrho)-t-1} & \twoheadrightarrow & P_{s_\xi(\varrho)-t-1}. \end{array}$$

Rappelons que ces suites sont construites sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ dans [**3**] et que leur version entière est le résultat principal de [**5**]. Comme en outre les $X^{=tg_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ sont affines, on en déduit que

$$H^{t-s_\xi(\varrho)+1}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)) \simeq \\ H^{t-s_\xi(\varrho)+2}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_1) \simeq \cdots \simeq H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-t-1}).$$

On peut en outre continuer le processus précédent de sorte que $P_{s_\xi(\varrho)-t}$ s'inscrit dans une suite exacte courte

$$0 \to Q \longrightarrow P_{s_\xi(\varrho)-t} \longrightarrow {}^p j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}}) \to 0,$$

où on a posé

$$\widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}} := \Pi_t\{(s_\xi(\varrho)-t)\frac{g-1}{2}\} \otimes \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-t}(\pi_{v,-1}\{-t\frac{g-1}{2}\})$$

et où les constituants irréductibles de $Q \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ sont de la forme ${}^p j^{=(s_\xi(\varrho)+\delta)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi'_\delta)$ et n'ont donc pas de cohomologie. On obtient ainsi la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \to H^{-1}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-t-1}) \longrightarrow \\ H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-t}) \longrightarrow H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!} j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*}_{\overline{1_h}} P_{s_\xi(\varrho)-t-1}) \\ \longrightarrow H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-t-1}) \to 0,$$

avec $H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-t}) \simeq H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}}))$. Posons

$$j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*}_{\overline{1_h}} P_{s_\xi(\varrho)-t-1} \simeq HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-t-1})$$

avec
$$\Pi_{s_\xi(\varrho)-t-1} := \Pi_t\{(s_\xi(\varrho)-t-1)\frac{g-1}{2}\} \otimes \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-t-1}(\pi_{v,-1}\{-t\frac{g-1}{2}\}).$$
On a alors
$$0 \to A \longrightarrow j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!} j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*}_{\overline{1_h}} P_{s_\xi(\varrho)-t-1} \longrightarrow {}^p j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*}_{\overline{1_h}} P_{s_\xi(\varrho)-t-1} \to 0$$
avec
$$\begin{tikzcd} P_{s_\xi(\varrho)-t} \arrow[r, hook] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ {}^p j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}}) \arrow[r, hook] & {}^p j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)}) \end{tikzcd}$$
avec
$$\Pi_{s_\xi(\varrho)} \simeq \Pi_t\{(s_\xi(\varrho)-t)\frac{g-1}{2}\}\otimes\Big(\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-t-1}(\pi_{v,-1}\{-\frac{1}{2}\})\times\pi_{v,-1}\{\frac{s_\xi(\varrho)-t-2}{2}\}\Big)\{-t\frac{g-1}{2}\},$$
et où l'inclusion de la ligne du bas est donnée par
$$\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-t}(\pi_{v,-1}) \hookrightarrow \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-t-1}(\pi_{v,-1}\{-\frac{1}{2}\}) \times \pi_v\{\frac{s_\xi(\varrho)-t-2}{2}\}.$$
Rappelons par ailleurs que la cohomologie de $P_{s_\xi(\varrho)-t}$ (resp. de A) est isomorphe à celle de ${}^p j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}})$ (resp. à celle de ${}^p j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)})$). D'après la remarque précédente, on en déduit alors que la flèche
$$H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-t}) \longrightarrow H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!} j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*}_{\overline{1_h}} P_{s_\xi(\varrho)-t-1})$$
n'est pas stricte et que donc la torsion de
$$H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-t-1}) \simeq H^{t-s_\xi(\varrho)+1}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{=tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t))$$
n'est pas nulle.

□

Supposons à présent qu'il existe une représentation irréductible cuspidale $\pi_{v,0}$ de ϱ-type 0 telle que
$$0 \leq s_\xi(\pi_{v,0}) - 1 < s_\xi(\varrho) - m(\varrho).$$

2.2.11. Proposition. — *Sous les hypothèses précédentes et pour un niveau I assez profond, la torsion de*
$$H^{m(\varrho)-s_\xi(\pi_{v,-1})-1}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^{p+}j^{=m(\varrho)g_{-1}}_{!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,0},\Pi_1))$$
est non nulle.

Démonstration. — Par dualité, on est ramené à prouver que la torsion de
$$H^{s_\xi(\pi_{v,-1})-m(\varrho)}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{=g_0}_{!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,0},\Pi_1)) \qquad (2.2.12)$$
est non nulle, où on a posé $g_0 = m(\varrho)g_{-1}$ de sorte que $\pi_{v,0}$ est une représentation de $GL_{g_0}(F_v)$. Comme par hypothèse $s_\xi(\pi_{v,0})-1 < s_\xi(\pi_{v,-1})-m(\varrho)$ il résulte de la proposition

2.1.4 que la partie libre de (2.2.12) est nulle et on est donc ramené à montrer que (2.2.12) est non nul.

2.2.13. Lemme. — *Soient $u \geq 0$ et $\pi_{v,u}$ une représentation irréductible cuspidale de ϱ-type u. Pour tout $1 \leq t \leq s_u := \lfloor \frac{d}{g_u} \rfloor$ et pour tout $i > s_\xi(\varrho) - tg_u$,*

$$H^i(X_{I,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{=tg_u} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,u}, \Pi_t))$$

est nul.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur t de s_u à 1. Pour $t = s_u$, on a ${}^p j_{!*}^{=s_u g_u} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,u}, \Pi_{s_u}) \simeq j_!^{=s_u g_u} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,u}, \Pi_{s_u})$ avec, d'après la proposition 1.1.8, dans le groupe de Grothendieck des $\mathbb{F}_l$-faisceaux pervers

$$\mathbb{F}\Big(j_!^{=s_u g_u} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,u}, \Pi_{s_u})\Big) = g_u \mathbb{F}\Big(j_!^{=s_u m(\varrho) l^u g_{-1}} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,-1}, \Pi_{s_u})\Big).$$

Le résultat découle du corollaire 2.2.3 en utilisant la suite exacte courte (2.2.8).

Supposons à présent le résultat acquis jusqu'au rang $t+1 \geq 2$. Le même raisonnement que dans le cas $t = s_u$, donne la nullité des $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, j_!^{=tg_u} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,u}, \Pi_t))$ pour tout $i > s_\xi(\pi_{v,-1}) - tg_u$. On utilise alors la suite spectrale (2.2.5) avec $\pi_v = \pi_{v,u}$: d'après l'hypothèse de récurrence, tous les $E_1^{p,q}$ sont nuls pour $p > 0$ et $p + q > s_\xi(\varrho) - tg_u$, ainsi donc que les E_∞^{p+q}, de sorte qu'il en est de même des $E_1^{0,q}$ pour $q > s_\xi(\varrho) - tg_u$, d'où le résultat. □

Reprenons la preuve du lemme ci-dessus pour $u = 0$ et $t = 1$: on a encore la nullité des $H^i((X_{I,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{=g_0} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,0}, \Pi_1))$ pour tout $i > s_\xi(\varrho) - m(\varrho)$ en revanche pour $i = s_\xi(\varrho) - m(\varrho)$, comme d'après la proposition 2.1.4, la partie libre de

$$H^{s_\xi(\varrho)-m(\varrho)}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, j_!^{=m(\varrho)g_{-1}} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,-1}, \Pi_{m(\varrho)}))$$

est non nulle, on en déduit que, pour un niveau I assez profond,

$$H^{s_\xi(\varrho)-m(\varrho)}(X_{I,\bar{s}_v}, \mathbb{F} j_!^{=m(\varrho)g_{-1}} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,-1}, \Pi_{m(\varrho)}))$$

et donc

$$H^{s_\xi(\varrho)-m(\varrho)}(X_{I,\bar{s}_v}, \mathbb{F} j_!^{=g_0} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,0}, \Pi_{m(\varrho)}))$$

est aussi non nul. Or comme par hypothèse $s_\xi(\pi_{v,0}) - 1 < s_\xi(\varrho) - m(\varrho)$, il découle de la proposition 2.1.4, que la partie libre de

$$H^{s_\xi(\varrho)-m(\varrho)}(X_{I,\bar{s}_v}, j_!^{=g_0} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,0}, \Pi_{m(\varrho)}))$$

est nulle, le résultat découle alors de (2.2.8). □

Remarque : on notera que la preuve précédente montre l'inégalité $s_\xi(\pi_{v,0}) - 1 \leq s_\xi(\varrho) - m(\varrho)$ ainsi que le fait que $s_\xi(\pi_{v,0})$ ne dépend que de ϱ. En ce qui concerne le niveau fini I, il suffit qu'il soit suffisamment profond de sorte que la partie libre de $H^{s_\xi(\varrho)-m(\varrho)}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, j_!^{=m(\varrho)g_{-1}} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v,-1}, \Pi_{m(\varrho)}))$ soit non nulle, i.e. telle qu'il existe Π automorphe ξ-cohomologique avec

— Π_v de la forme $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)}(\pi_{v,-1}) \times ?$ pour $\pi_{v,-1}$ de réduction modulo l isomorphe à ϱ, et

— ayant des vecteurs invariants non nuls sous I.

2.3. Rappels sur les filtrations de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$. — Afin de filtrer efficacement $\Psi_{\mathcal{I}}$, il est plus commode de commencer par découper $\Psi_{\mathcal{I}}$ selon ses ϱ-facteurs directs, cf. [**8**] proposition 2.2.1 :

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{1 \leq g \leq d} \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Scusp}_{F_v}(g)} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$$

où pour tout $\varrho \in \mathrm{Scusp}_{F_v}(g)$, le facteur direct $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ est libre et regroupe, après tensorisation par $\overline{\mathbb{Q}}_l$, tous les faisceaux pervers d'Harris-Taylor associés à une représentation irréductible cuspidale π_v de ϱ-type u pour $u \geq -1$, au sens de la définition 1.1.6.

Rappelons alors la construction de la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ introduite dans [**6**]. Pour $1 \leq h < d$, on note $X^{1 \leq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v} := X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v} - X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$ et

$$j^{1 \leq h} : X^{1 \leq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v} \hookrightarrow X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}.$$

On définit alors

$$\mathrm{Fil}^r_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) := \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}\Big({}^{p+}j^{1 \leq r}_! j^{1 \leq r,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \Big),$$

où l'image est prise dans la catégorie des faisceaux pervers libres

$$\mathcal{F} = {}^{p}\mathcal{C}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \cap {}^{p+}\mathcal{C}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \overline{\mathbb{Z}}_l),$$

définie comme l'intersection des faisceaux qui sont pervers pour les deux t-structures p et $p+$. Dans [**5**], on montre

— d'une part que les $\mathrm{Fil}^r_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ sont en fait l'image dans la catégorie des p-faisceaux pervers et

— chacun des gradués $\mathrm{gr}^r_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ admet une filtration construite comme suit : on filtre le faisceau localement constant $j^{=r,*}\mathrm{gr}^r_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ de façon à ce que les gradués soient des systèmes locaux d'Harris-Taylor, puis on applique à cette filtration le foncteur $j^{=r}_!$ et on prend les images successives dans la catégorie des faisceaux p-pervers. Le résultat principal de [**5**] est alors que les gradués obtenus sont sans torsion et sont des p-faisceaux pervers d'Harris-Taylor.

Dualement, cf. [**6**] 2.2.6, on peut définir

$$\mathrm{Fil}^{-r}_*(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) = \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}\Big(\Psi_{\mathcal{I},\varrho} \longrightarrow {}^{p}j^{1 \leq r}_* j^{1 \leq r,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \Big).$$

On obtient ainsi une filtration

$$0 = \mathrm{Fil}^{-d}_*(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \subset \mathrm{Fil}^{1-d}_*(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^0_*(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) = \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$$

telle que, d'après [**5**] par application de la dualité de Grothendieck-Verdier,

— les $\mathrm{Fil}^{-r}_*(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ sont obtenus comme les noyaux dans la catégorie des $p+$-faisceaux pervers et

— chacun des gradués $\mathrm{gr}^{-r}_*(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ est libre et muni d'une filtration dont les gradués sont des $p+$-faisceaux pervers d'Harris-Taylor.

2.4. Torsion dans la cohomologie de $\Psi_{I,\varrho}$. — Dans la suite on fixe

— ϱ tel que $m(\varrho)=2$ et

— une représentation irréductible cuspidale π_v de ϱ-type -1 avec $s_\xi(\varrho)\geq 4$ maximal i.e. égal à $\lfloor \frac{d}{g_{-1}} \rfloor$.

— Pour Π une représentation automorphe irréductible ξ-cohomologique dont la composante locale en v est de la forme $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)}(\pi_v)\times ?$, on fixe un niveau fini I tel que Π possède des vecteurs invariants sous I.

Remarque : comme $s_\xi(\varrho)\geq 3$ est maximal, la proposition 2.2.11 s'applique. On notera aussi que pour ϱ le caractère trivial et ξ la représentation triviale, les hypothèses précédentes sont vérifiées.

Comme précédemment on note $\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}:=\Psi_{\mathcal{I},\varrho}\otimes V_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}$.

2.4.1. Théorème. — *Sous les hypothèses précédentes et pour un niveau I assez profond, pour un au moins des indices $i\in\{2-s_\xi(\varrho),3-s_\xi(\varrho)\}$, la torsion de $H^i(X_{I,\bar{s}_v},\Psi_{I,\varrho,\xi})$ est non nulle.*

Remarque : en ce qui concerne le niveau fini I de l'énoncé, il faut qu'il soit tel qu'il existe Π automorphe ξ-cohomologique avec

— Π_v de la forme $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)}(\pi_{v,-1})\times ?$ pour $\pi_{v,-1}$ de réduction modulo l isomorphe à ϱ, et

— ayant des vecteurs invariants non nuls sous I.

Démonstration. — Supposons dans un premier temps qu'il existe une représentation irréductible cuspidale $\pi_{v,-1}$ de ϱ-type -1 telle que la torsion de

$$H^0(X^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}},{}^pj^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*}HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_{s_\xi(\varrho)-1}))$$

est non nulle. Rappelons que

$$\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l)\simeq\bigoplus_{\pi_{v,-1}\in\mathrm{Cusp}(\varrho,-1)}\mathrm{Fil}^1_{!,\pi_{v,-1}}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l)$$

avec $j^{=g_{-1}}_!HT_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_{v,-1},\pi_{v,-1})\twoheadrightarrow\mathrm{Fil}^1_{!,\pi_{v,-1}}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l)$.

Reprenons alors, ligne à ligne, la preuve du lemme 2.2.10 en remplaçant ${}^pj^{\geq tg_{-1}}_{\overline{1_h},!*}HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_{v,-1},\Pi_t)$ par $\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi})$. D'après [**5**], on a encore une série de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccc}
P_1 & \hookrightarrow & j^{=g_{-1}}_!j^{=g_{-1},*}\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \\
P_2 & \hookrightarrow & j^{=2g_{-1}}_!j^{=2g_{-1},*}P_1 & \twoheadrightarrow & P_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
P_{s_\xi(\varrho)-1} & \hookrightarrow & j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_!j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*}P_{s_\xi(\varrho)-2} & \twoheadrightarrow & P_{s_\xi(\varrho)-2}.
\end{array}$$

Les strates $X^{=tg_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$ étant affines, on a toujours

$$H^{2-s_\xi(\varrho)}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v},\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}))\simeq H^{3-s_\xi(\varrho)}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v},P_1)\simeq\cdots\simeq H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v},P_{s_\xi(\varrho)-2}).$$

De la suite exacte courte

$$0 \to Q \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \longrightarrow P_{s_\xi(\varrho)-1} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \longrightarrow \bigoplus_{\pi_{v,-1} \in \mathrm{Cusp}(\varrho,-1)} {}^p j_{!*}^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}}) \to 0,$$

avec $\widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}} := \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)}(\pi_{v,-1})$ et où les constituants irréductibles de $Q \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ n'ont comme précédemment pas de cohomologie, on en déduit la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} &0 \to H^{-1}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-2}) \longrightarrow \\ &H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}} j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1},*} P_{s_\xi(\varrho)-1} \longrightarrow H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, j_!^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}} j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*} P_{s_\xi(\varrho)-2}) \\ &\qquad\qquad \longrightarrow H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-2}) \to 0, \end{aligned}$$

où

$$\Big(j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*} P_{s_\xi(\varrho)-2}\Big) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_{v,-1} \in \mathrm{Cusp}(\varrho,-1)} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-1}(\pi_{v,-1})).$$

On a alors

$$0 \to A \longrightarrow j_!^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}} j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*} P_{s_\xi(\varrho)-2} \longrightarrow {}^p j_{!*}^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}} j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*} P_{s_\xi(\varrho)-2} \to 0$$

avec

$$\begin{tikzcd} P_{s_\xi(\varrho)-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads] \\ B \arrow[r, hook] & C \end{tikzcd}$$

et où

$$B \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_{v,-1} \in \mathrm{Cusp}(\varrho,-1)} {}^p j_{\overline{1_h},!*}^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}})$$

et

$$C \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_{v,-1} \in \mathrm{Cusp}(\varrho,-1)} {}^p j_{!*}^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \Pi_{s_\xi(\varrho)}),$$

avec

$$\Pi_{s_\xi(\varrho)} \simeq \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-t-1}(\pi_{v,-1}\{-\frac{1}{2}\}) \times \pi_{v,-1}\{\frac{s_\xi(\varrho)-t-2}{2}\}.$$

On se retrouve alors dans la même configuration de la fin de la preuve du lemme 2.2.10 où la flèche

$$H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \widetilde{\Pi_{s_\xi(\varrho)}})) \longrightarrow H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, j_!^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}} j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*} P_{s_\xi(\varrho)-2})$$

n'est pas stricte et où donc la torsion de

$$H^{2-s_\xi(\varrho)}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathrm{Fil}^1_{!,\pi_{v,-1}}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})) \simeq H^0(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_{s_\xi(\varrho)-2})$$

est non nulle. Par ailleurs sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, les constituants irréductibles de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}/\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi})$ sont des faisceaux pervers d'Harris-Taylor de la forme $\mathcal{P}(t,\pi'_v)(n)$ avec

— soit π'_v est de ϱ-type ≥ 0,

— et sinon $t > 1$.

Il résulte alors du corollaire 2.2.3 et du fait que pour toute représentation $\pi_{v,0}$ de ϱ-type 0, on ait $s_\xi(\pi_{v,0}) < s_\xi(\varrho) - 1$ que les $H^i(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \Psi_{\mathcal{I},\varrho}/\operatorname{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}))$ sont nuls pour $i < 2 - s_\xi(\varrho)$ et sans torsion pour $i = 2 - s_\xi(\varrho)$, de sorte que la torsion de $H^{2-s_\xi(\varrho)}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \Psi_{\mathcal{I},\varrho})$, est non nulle.

On suppose à présent que pour tout $\pi_{v,-1} \in \operatorname{Cusp}(\varrho,-1)$, la torsion de

$$H^0(X^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}, {}^p j^{\geq(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi,\overline{1_h}}(\pi_v, \Pi_{s_\xi(\varrho)-1}))$$

est nulle de sorte que d'après la proposition 2.2.9, il en est de même pour tous les

$$H^0(X^{\geq tg_{-1}}_{I,\bar{s}_v}, {}^p j^{\geq tg_{-1}}_{!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_v, \Pi_t)).$$

2.4.2. Lemme. — *La torsion de* $H^{s_\xi(\varrho)-1}(X^{\geq 1}_{I,\bar{s}_v}, \operatorname{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}))$ *est nulle.*

Démonstration. — On reprend les suites exactes courtes de la preuve du théorème 2.4.1 que l'on écrit sous la forme de triangles distingués comme suit

$$j^{=g_{-1}}_! j^{=g_{-1},*} \operatorname{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \longrightarrow \operatorname{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \longrightarrow P_1[1] \rightsquigarrow$$

$$j^{=2g_{-1}}_! j^{=2g_{-1},*} P_1[1] \longrightarrow P_1[1] \longrightarrow P_2[2] \rightsquigarrow$$

$$\cdots\cdots$$

$$j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1}}_! j^{=(s_\xi(\varrho)-1)g_{-1},*} P_{s_\xi(\varrho)-2}[s_\xi(\varrho)-2] \longrightarrow P_{s_\xi(\varrho)-2}[s_\xi(\varrho)-2] \longrightarrow P_{s_\xi(\varrho)-1}[s_\xi(\varrho)-1] \rightsquigarrow$$

On obtient alors une suite spectrale

$$E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \operatorname{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}))$$

où en posant $P_0 = j^{=g_{-1}}_! j^{=g_{-1},*} \operatorname{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi})$ et en notant que la cohomologie de $P_{s_\xi(\varrho)-1}[s_\xi(\varrho)-1]$ est, d'après 2.2.3, égale à celle de $j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1}}_! j^{=s_\xi(\varrho)g_{-1},*} P_{s_\xi(\varrho)-1}[s_\xi(\varrho)-1]$, les $E_2^{p,q}$ sont nuls sauf si $0 \leq q \leq s_\xi(\varrho) - 1$ auquel cas on a

$$E_2^{p,q} = H^{p+2q}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, j^{=(q+1)g_{-1}}_! j^{=(q+1)g_{-1},*} P_q).$$

Par hypothèse et en utilisant le lemme 2.2.10, la torsion de

$$H^{2-s_\xi(\varrho)}(X^{\geq g_{-1}}_{I,\bar{s}_v}, {}^p j^{\geq g_{-1}}_{!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_v, \pi_v))$$

est nulle alors par dualité la torsion de $H^{s_\xi(\varrho)-1}(X^{\geq g_{-1}}_{I,\bar{s}_v}, {}^p j^{\geq g_{-1}}_{!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_v, \pi_v))$ est nulle de sorte, qu'en utilisant le début de la preuve de la proposition 2.2.9, la torsion de $H^{s_\xi(\varrho)-1}(X^{\geq g_{-1}}_{I,\bar{s}_v}, j^{\geq g_{-1}}_! HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_v, \pi_v))$ est nulle, et donc puisque

$$\Big(j^{=g_{-1},*} P_0 = j^{=g_{-1},*} \operatorname{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi})\Big) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_{v,-1} \in \operatorname{Cusp}(\varrho,-1)} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \pi_{v,-1}),$$

$E_2^{s_\xi(\varrho)-1,0}$ est libre. On conclut en notant que, d'après le corollaire 2.2.3, les $E_2^{p,q}$ pour $q \geq 1$ et $p + q = s_\xi(\varrho) - 2$ sont nuls.

□

2.4.3. Lemme. — *Pour tout sous-$GL_d(F_v)$-module Π_v de $H^{s_\xi(\varrho)-2}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}))$, le support supercuspidal de sa réduction modulo l ne contient aucun segment de Zelevinsky de longueur $s_\xi(\varrho)$ relativement à ϱ.*

Démonstration. — Rappelons que sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on a une surjection

$$\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \twoheadrightarrow \bigoplus_{\pi_{v,-1} \in \mathrm{Cusp}(\varrho,-1)} {}^p j^{=g_{-1}}_{!*} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \pi_{v,-1})$$

où tous les constituants du noyau sont des faisceaux pervers d'Harris-Taylor de la forme $HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \mathrm{St}_t(\pi_{v,-1})) \otimes \Xi^{\frac{t-1}{2}}$ avec $t \geq 1$. Ainsi d'après le lemme 2.2.6, $H^{s_\xi(\varrho)-2}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}))$ admet une filtration dont les gradués sont de la forme $H^{s_\xi(\varrho)-2}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{=g_{-1}}_{!*} HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \pi_{v,-1}))$. En particulier, il découle de l'hypothèse faite plus haut, que la torsion de $H^{s_\xi(\varrho)-2}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}))$ est nulle de sorte que la propriété se lit sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Or sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, $H^{s_\xi(\varrho)-2}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, {}^p j^{=g_{-1}}_{!*} HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l,\xi}(\pi_{v,-1}, \pi_{v,-1}))$ est de la forme $\Pi^{\infty,v} \otimes \Big(\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-1}(\pi_{v,-1}) \times ?\Big)$. Le résultat découle alors de la maximalité de $s_\xi(\varrho)$ et du fait que le support cuspidal de $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-1}(\varrho)$ est disjoint de celui de $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)}(\varrho)$. □

Rappelons que $\Psi_{\mathcal{I},\varrho} / \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi})$ est à support dans $X^{\geq 2g_{-1}}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$ et que puisque $m(\varrho) = 2$,

$$\Big(j^{=2g_{-1},*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi} / \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi})\Big) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_{v,-1} \in \mathrm{Cusp}(\varrho,-1)} HT(\pi_{v,-1}, \mathrm{St}_2(\pi_{v,-1})) \otimes \Xi^{-1/2} \oplus \bigoplus_{\pi_{v,0} \in \mathrm{Cusp}(\varrho,0)} HT(\pi_{v,0}, \pi_{v,0}).$$

On considère alors une filtration entière

$$A_0 \hookrightarrow j^{=2g_{-1},*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi} / \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \twoheadrightarrow A_{-1}$$

avec A_0 et A_{-1} libres et tels que

$$A_0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_{v,0} \in \mathrm{Cusp}(\varrho,0)} HT(\pi_{v,0}, \pi_{v,0}),$$

et on note P_0 l'image de

$$j^{=2g_{-1}}_! A_0 \hookrightarrow j^{=2g_{-1}}_! j^{=2g_{-1},*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi} / \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi} / \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}).$$

D'après [**5**],

$$0 \to P_0 \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi} / \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \longrightarrow P \to 0$$

est une suite exacte courte de faisceaux pervers libres. D'après la proposition 2.2.11, la torsion de $H^{s_\xi(\varrho)-2}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, P_0)$ est non nulle et sa réduction modulo l est de la forme $\varrho_0 \times \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-2}(\varrho) \times ?$ et contient donc un segment de Zelevinsky de longueur $s_\xi(\varrho)$ relativement à ϱ. Il résulte alors des deux lemmes précédents que cette torsion est encore un sous-module de torsion de $H^{s_\xi(\varrho)-2}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v},Q)$ où Q est défini comme le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, dashed, hook] & P_0 \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \arrow[r, hook] & \Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}/\,\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}) \arrow[d, two heads] \\
 & P \arrow[r, equal] & P
\end{tikzcd}$$

En ce qui concerne P, il admet une filtration de stratification dont les constituants irréductibles, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, sont ceux de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi}$ auxquels on enlève en particulier ceux de la forme ${}^pj^g_{!*}HT(\pi_v,\pi_v))$ pour $\pi_v \in \mathrm{Cusp}(\varrho,-1) \cup \mathrm{Cusp}(\varrho,0)$. On s'intéresse alors à $H^{s_\xi(\varrho)-3}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v},P)$. Commençons par son quotient libre que l'on peut écrire sous la forme

$$H^{s_\xi(\varrho)-3}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v},P) = \bigoplus_{\Pi} H[\Pi]$$

où Π décrit les classes d'équivalences des représentations automorphes cohomologiques pour ξ et où $H[\Pi]$ désigne la composante isotypique correspondante. La composante locale en v d'une telle représentation automorphe est de la forme $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$ avec π_v une représentation tempérée, i.e. de la forme $\mathrm{St}_{t_1}(\pi_{v,1}) \times \cdots \times \mathrm{St}_{t_r}(\pi_{v,r})$ avec pour $i=1,\cdots,r$, $\pi_{v,i}$ irréductible cuspidale et où on rappelle que $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$ correspond, via la correspondance de Langlands locale à la somme directe $\sigma(\frac{1-s}{2}) \oplus \cdots \oplus \sigma(\frac{s-1}{2})$ où σ correspond à π_v. Pour que $H[\Pi]$ soit non nulle il faut, d'après [**4**], que $s \geq s_\xi(\varrho)-2$. Par ailleurs comme rappelé au lemme 2.2.6, ne contribuent à $H[\Pi]$ que la cohomologie de

(i) $HT(\pi_{v,-1},\mathrm{St}_3(\pi_{v,-1}))$ pour Π tel que $\Pi_v \simeq \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)}(\pi_v)$ et $\pi_v \simeq \pi_{v,-1}\times ?$ avec $\pi_{v,-1} \in \mathrm{Cusp}(\varrho,-1)$;

(ii) $HT(\pi_{v,-1},\mathrm{St}_2(\pi_{v,-1}))$ pour $s=s_\xi(\varrho)-1$.

Or pour les contributions de (i) disparaissent dans $H[\Pi]$ alors que celles de (ii) ont, après réduction modulo l, un support supercuspidal disjoint de celui de $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)}(\varrho)$ et ne nous intéressent pas.

Enfin en ce qui concerne la torsion de $H^{s_\xi(\varrho)-3}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v},P)$, d'après ce qui précède, elle admet une filtration dont tous les gradués sont des quotients issus des contributions (i) précédentes, i.e. en tant que $GL_d(F_v)$-module, ce sont des quotients de $[\overrightarrow{s_\xi(\varrho)-3},\overleftarrow{2}]_{\pi_{v,-1}}\times ?$. D'après le lemme suivant, la réduction modulo l de ces gradués ne contient jamais $\varrho_0 \times \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-2}(\varrho)\times ?$ de sorte que la torsion de $H^{s_\xi(\varrho)-2}(X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v},\Psi_{\mathcal{I},\varrho,\xi})$ est bien non nulle.

□

2.4.4. Lemme. — *Pour tout $s \geq 4$, la réduction modulo l de $[\overrightarrow{s_\xi(\varrho)-4},\overleftarrow{3}]_{\pi_{v,-1}}$ n'admet pas comme sous-quotient* $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-2}(\varrho)\times\varrho_0$.

Démonstration. — Rappelons que par hypohtèse $\varrho \not\simeq \varrho\{1\}$ et $\varrho \simeq \varrho\{2\}$. Notons $\varrho' := \varrho\{\frac{s_\xi(\varrho)-1}{2}\}$. Comme $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-2}(\varrho)\times\varrho_0$ est aussi irréductible et donc isomorphe à la même

induite mais relativement au sous-groupe de Levi opposé, de la réciprocité de Frobenius, on en déduit une surjection
$$J_{P^{op}_{(s_\xi(\varrho)-2)g_{-1},s_x(\varrho)g_{-1}}(F_v)}(\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-2}(\varrho)\times\varrho_0)\twoheadrightarrow \mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-2}(\varrho)\otimes\varrho_0,$$
et donc en composant avec $J_{P^{op}_{g_{-1},(s_\xi(\varrho)-2)g_{-1},s_\xi(\varrho)g_{-1}}(F_v)}$, il existe une représentation irréductible $\tilde\varrho$ que l'on ne souhaite pas préciser, telle que $\varrho'\otimes\tilde\varrho$ est un constituant de $J_{P^{op}_{g_{-1},s_\xi(\varrho)g_{-1}}(F_v)}(\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-2}(\varrho)\times\varrho_0)$.

En revanche tous les constituants irréductibles de $J_{P^{op}_{g_{-1},s_\xi(\varrho)g_{-1}}(F_v)}([\overrightarrow{s_\xi(\varrho)-4},\overleftarrow{3}]_{\pi_{v,-1}})$ sont de la forme $\pi_{v,-1}\{\frac{s_\xi(\varrho)-1}{2}-3\}$ et donc, par compatibilité de la réduction modulo l avec les foncteurs de Jacquet, et comme $\varrho'\not\simeq\varrho'\{1\}=r_l(\pi_{v,-1}\{\frac{s_\xi(\varrho)-1}{2}-3\})$, on en déduit bien que $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)-2}(\varrho)\times\varrho_0$ n'est pas un sous-quotient de la réduction modulo l de $[\overrightarrow{s_\xi(\varrho)-4},\overleftarrow{3}]_{\pi_{v,-1}}$. □

3. Congruences automorphes

Dans ce paragraphe, le niveau fini I considéré sera supposé maximal à la place v.

3.1. Algèbres de Hecke. —

3.1. Notation. — *Pour $I\in\mathcal{I}$ un niveau fini, soit*
$$\mathbb{T}_I:=\overline{\mathbb{Z}}_l\Big[T_{w,i}:\ w\in\mathrm{Spl}(I)\ \textit{et}\ i=1,\cdots,d\Big],$$
l'algèbre de Hecke associée à $\mathrm{Spl}(I)$, où $T_{w,i}$ est la fonction caractéristique de
$$GL_d(\mathcal{O}_w)\,\mathrm{diag}(\overbrace{\varpi_w,\cdots,\varpi_w}^{i},\overbrace{1,\cdots,1}^{d-i})GL_d(\mathcal{O}_w)\subset GL_d(F_w).$$

Pour tout $w\in\mathrm{Spl}(I)$, on note
$$P_{\mathfrak{m},w}(X):=\sum_{i=0}^d(-1)^iq_w^{\frac{i(i-1)}{2}}\overline{T_{w,i}}X^{d-i}\in\overline{\mathbb{F}}_l[X]$$
le polynôme de Hecke associé à $\mathfrak{m}$ et
$$S_{\mathfrak{m}}(w):=\Big\{\lambda\in\mathbb{T}_I/\mathfrak{m}\simeq\overline{\mathbb{F}}_l \text{ tel que } P_{\mathfrak{m},w}(\lambda)=0\Big\},$$
le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo l en w associés à $\mathfrak{m}$. Avec les notations précédentes, l'image $\overline{T_{w,i}}$ de $T_{w,i}$ dans $\mathbb{T}_I/\mathfrak{m}$ s'écrit
$$\overline{T_{w,i}}=q_w^{\frac{i(1-i)}{2}}\sigma_i(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)$$
où $S_{\mathfrak{m}}(w)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_d\}$ et σ_i désigne la i-ème fonction symétrique élémentaire.

3.2. Notation. — *On notera alors $\mathfrak{m}^\vee$ l'idéal maximal de $\mathbb{T}_I$ défini par*
$$T_{w,i}\in\mathbb{T}_I\mapsto q_w^{\frac{i(1-i)}{2}}\sigma_i(\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_d^{-1})\in\overline{\mathbb{F}}_l.$$

On reprend à présent les arguments de [**9**].

3.3. Définition. — On dira d'un $\mathbb{T}_I$-module M qu'il vérifie la propriété **(P)**, s'il admet une filtration finie

$$(0) = \mathrm{Fil}^0(M) \subset \mathrm{Fil}^1(M) \cdots \subset \mathrm{Fil}^r(M) = M$$

telle que pour tout $k = 1, \cdots, r$, il existe

— une représentation automorphe Π_k irréductible et entière de $G(\mathbb{A})$, apparaissant dans la cohomologie de $X_{\mathcal{I},\bar{\eta}_v}$ à coefficients dans $V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l}$, et telle que la composante locale $\Pi_{k,v}$ de Π_k est ramifiée, i.e. $(\Pi_{k,v})^{GL_d(\mathcal{O}_v)} = (0)$;

— une représentation irréductible entière et non ramifiée $\widetilde{\Pi}_{k,v}$ de même support cuspidal que $\Pi_{k,v}$

— et un $\mathbb{T}_I$-réseau stable Γ de $(\Pi_k^{\infty,v})^{I^v} \otimes \widetilde{\Pi}_{k,v}^{GL_d(\mathcal{O}_v)}$ tel que

— soit $\mathrm{gr}^k(M)$ est libre et isomorphe à Γ,

— soit $\mathrm{gr}^k(M)$ est de torsion et un sous-quotient de Γ/Γ' pour $\Gamma' \subset \Gamma$ un deuxième $\mathbb{T}_I$-réseau stable.

Le gradué $\mathrm{gr}^k(M)$ sera dit de type i si en outre $\Pi_{k,v}$ est de la forme

$$\mathrm{St}_i(\chi) \times \chi_1 \times \cdots \times \chi_{d-i}$$

où $\chi, \chi_1, \cdots, \chi_{d-i}$ sont des caractères non ramifiés.

Remarque : La propriété **(P)** est clairement stable par extensions, par sous-quotients et, en remplaçant la condition ξ-cohomologique par $\xi^\vee$-cohomologique, par dualité.

3.4. Lemme. — *Soient $h \geq 1$ et M un sous-quotient irréductible de $H_c^{d-h}(X_{I,\bar{s}_v}^{=h}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l})$ (resp. de $H^{d-h}(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l})$). Alors*

*— soit M vérifie la propriété **(P)** et est alors de type h ou $h+1$ (resp. de type h)*

— soit M n'est pas un sous-quotient de $H^{d-h-1}(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l})$.

Démonstration. — Le résultat découle des calculs explicites de ces $\overline{\mathbb{Q}}_l$-groupes de cohomologie en niveau infini donnés dans [**4**] et on renvoie le lecteur à la présentation qui en est faite au §3.3 (resp. au §3.2) de [**7**]. Précisément d'après loc. cit., pour Π^∞ une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}^\infty)$, la composante isotypique $H_c^{d-h}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}^{=h}, V_\xi \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l)\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nulle si Π^∞ n'est pas la composante hors de ∞ d'une représentation automorphe ξ-cohomologique Π. Sinon, on distingue trois situations pour la composante locale en v de Π :

(i) soit $\Pi_v \simeq \mathrm{St}_r(\chi_v) \times \pi'_v$ avec $h \leq r \leq d$,

(ii) soit $\Pi_v \simeq \mathrm{Speh}_r(\chi_v) \times \pi'_v$ avec $h \leq r \leq d$,

(iii) soit Π_v n'est pas d'une des deux formes précédentes,

où dans ce qui précède, χ_v est un caractère non ramifié de $F_v^\times$ et π'_v une représentation irréductible admissible de $GL_{d-h}(F_v)$. Alors cette composante isotypique, en tant que représentation de $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$, est de la forme

— dans le cas (i), à $\Big(\mathrm{Speh}_h(\chi\{\frac{h-r}{2}\}) \times \mathrm{St}_{r-h}(\chi\{\frac{h}{2}\})\Big) \times \pi'_v \otimes \Xi^{\frac{r-h}{2}}$ (resp. nulle si $r \neq h$ et isomorphe à $\mathrm{St}_h(\chi_v)$ sinon) ;

— nulle dans le cas (ii) si $r \neq h$ et sinon isomorphe à $\mathrm{Speh}_h(\chi_v) \times \pi'_v$.

— Enfin, dans le cas (iii), la représentation de $GL_d(F_v)$ obtenue n'aura pas d'invariants sous $GL_d(\mathcal{O}_v)$.

Ainsi en prenant les invariants sous I, dans le cas (i) on obtient un $\mathbb{T}_I$-module vérifiant la propriété **(P)** et qui est de type h ou $h+1$. Dans le cas (ii), le $\mathbb{T}_I$-module obtenu n'est pas un sous-quotient de $H^{d-h-1}(X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\mathbb{Q}_l})$ et le cas (iii) ne fournit rien.

$\square$

3.2. Torsion dans la cohomologie et congruences automorphes. — Supposons à présent qu'il existe i tel que la torsion de $H^i(X_{I,\bar{\eta}_v}, V_\xi)$ est non nulle. Soit alors $1 \leq h \leq d$ maximal tel qu'il existe i pour lequel le sous-espace de torsion $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)_{tor}$ de $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)$ est non nul. Notons que

— comme $X^{\geq d}_{I,\bar{s}_v}$ est de dimension nulle, alors $h < d$;

— d'après le changement de base lisse, $H^i(X_{I,\bar{\eta}_v}, V_\xi) \simeq H^i(X^{\geq 1}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)$ de sorte que $h \geq 1$.

3.1. Lemme. — *Avec les notations ci-dessus, le plus petit indice i tel que la torsion de $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)$ est non nulle est $i=0$ et alors tout sous-module irréductible de $H^0(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)_{tor}$ vérifie la propriété **(P)** en étant de type $h+1$.*

Remarque : le lemme et le suivant découlent du lemme 2.2.10 ; nous allons cependant en donner une preuve directe dans le cas de bonne réduction.

Démonstration. — Considérons la suite exacte courte de faisceaux pervers

$$0 \to i_{h+1,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}}[d-h-1] \longrightarrow j^{\geq h}_! j^{\geq h,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h] \longrightarrow V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h] \to 0. \tag{3.2}$$

Les strates $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}$ étant lisses et $j^{\geq h}$ étant affine, les trois termes de la suite exacte sont pervers et sont libres au sens de la théorie de torsion naturelle issue de la structure $\overline{\mathbb{Z}}_l$-linéaire, cf. [**6**] §1.1-1.3. Par ailleurs il résulte du théorème d'Artin, cf. par exemple le théorème 4.1.1 de [**1**] et, donc, de l'affinité des strates $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$, que les $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, j^{\geq h}_! j^{\geq h,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h])$ sont nuls pour $i<0$ et sans torsion pour $i=0$, de sorte que pour $i>0$, on a

$$0 \to H^{-i-1}(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \longrightarrow H^{-i}(X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1]) \to 0, \tag{3.3}$$

et pour $i=0$,

$$\begin{aligned} 0 \to H^{-1}(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \longrightarrow H^0(X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1]) \longrightarrow \\ H^0(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, j^{\geq h}_! j^{\geq h,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \longrightarrow H^0(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \to \cdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ainsi si la torsion de $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)$ est non nulle alors $i \geq 0$ et, en utilisant la dualité de Grothendieck-Verdier, le plus petit tel indice est nécessairement $i=0$. Par ailleurs la torsion de $H^0(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)$ se relève à la fois dans $H^0_c(X^{=h}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)$ et $H^0(X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)$, lesquels sont libres. Ainsi d'après le lemme précédent, la torsion de $H^0(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)$ vérifie la propriété **(P)** en étant de type $h+1$. $\square$

3.5. Lemme. — *Avec les notations précédentes, pour tout* $1 \leq h' \leq h$*, l'indice* $h-h'$ *est le plus grand* i *tel que la torsion de* $H^{-i}(X^{\geq h'}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)_{tor}$ *est non nulle. En outre celle-ci vérifie la propriété* ***(P)*** *en étant de type* $h+1$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur h' de h à 1. Le cas $h'=h$ est traité dans le lemme précédant, supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $h'+1$ et traitons le cas de h'. On reprend alors les suites exactes (3.2) avec h'. Le résultat découle alors de (3.3) et de l'hypothèse de récurrence. □

Le cas $h'=1$ du lemme précédent, en utilisant le théorème de changement de base lisse, fournit alors l'énoncé suivant.

3.6. Proposition. — *Soit* i *maximal, s'il existe, tel que la torsion de* $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}_v}, V_\xi)$ *est non nul. Il vérifie alors la propriété* ***(P)*** *en étant de type* $i+2$.

3.7. Corollaire. — *Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal de* $\mathbb{T}_I$ *et* i *maximal s'il existe, tel que la torsion de* $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}}, V_\xi)_\mathfrak{m}$ *est non nulle. Il existe alors une collection* $\Pi(w)$ *indexée par les places* w *de* F *divisant une place fixée* u *de* E *au dessus d'un premier* $p \in \mathrm{Spl}(I)$*, de représentations irréductibles automorphes* ξ*-cohomologiques telles que :*
— *pour tout* $q \in \mathrm{Spl}(I)$ *distinct de* p *(resp.* $q=p$*), la composante locale en* q *de* $\Pi(w)$ *est non ramifiée, ses paramètres de Satake aux places* v *au dessus de* q *(resp et distinctes de* w*) étant donnés par* $S_\mathfrak{m}(v)$ *;*
— *la représentation* $\Pi(w)_w$ *est de la forme* $\mathrm{St}_{i+2}(\chi_{w,0}) \times \chi_{w,1} \times \cdots \times \chi_{w,d-i-2}$*, où* $\chi_{w,0}, \cdots, \chi_{w,d-i-2}$ *sont des caractères non ramifiés de* F_w.

Démonstration. — Considérons un sous-$\mathbb{T}_I$-module irréductible M de $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}}, V_\xi)_{\mathfrak{m},tor}$. Pour toute place $w \in \mathrm{Spl}(I)$, d'après le changement de base lisse, on a $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}}, V_\xi)_\mathfrak{m} \simeq H^{-i}(X^{\geq 1}_{I,\bar{s}_v}, V_\xi)_\mathfrak{m}$. D'après la proposition précédente ce module M vérifie la propriété **(P)** en étant de type $i+2$ de sorte qu'il existe une représentation automorphe irréductible ξ-cohomologique $\Pi(w)$ telle que :
— sa composante locale en w est de la forme $\mathrm{St}_{i+2}(\chi_{w,0}) \times \chi_{w,1} \times \cdots \times \chi_{w,d-i-2}$, où $\chi_{w,0}, \cdots, \chi_{w,d-i-2}$ sont des caractères non ramifiés de F_w ;
— M est un sous-quotient de la réduction modulo l de $\Pi(w)$ et donc en particulier pour toute place v différente de w, au dessus d'un $p \in \mathrm{Spl}(I)$, sa composante locale en v est non ramifiée avec pour paramètres de Satake les éléments de $S_\mathfrak{m}(v)$.

□

3.3. Synthèse. — Fixons
— une représentation irréductible algébrique ξ de G de dimension finie,
— une place $v \in \mathrm{Spl}$ et une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation supercuspidale ϱ de $GL_{g_{-1}}(F_v)$ pour $1 \leq g_{-1} \leq d$ telle que
  — $s_\xi(\varrho) = \lfloor \frac{d}{g_{-1}} \rfloor \geq 4$ et
  — $m(\varrho) = 2$.

— On choisit alors un niveau fini I tel qu'il existe une représentation automorphe irréductible ξ-cohomologique Π ayant des vecteurs non nuls invariants sous I et dont la composante locale en v est de la forme $\mathrm{Speh}_{s_\xi(\varrho)}(\pi_v)\times ?$ où π_v est de ϱ-type -1.

Soit alors $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathbb{T}_I$ défini par Π de sorte que, d'après le théorème 2.4.1, il existe un indice i pour lequel la torsion de $H^i(X_{I,\bar\eta}, V_\xi)_{\mathfrak{m}}$ est non nulle. Il découle alors du corollaire 3.7 qu'il existe une collection $\Pi(w)$ indexée par les places w de F divisant une place fixée au dessus d'un premier $p \in \mathrm{Spl}(I)$, de représentations irréductibles automorphes ξ-cohomologiques deux à deux non isomorphes entre elles et telles que :

— pour tout $q \in \mathrm{Spl}(I)$ distinct de p (resp. $q = p$), la composante locale en q de $\Pi(w)$ est non ramifiée, ses paramètres de Satake aux places v' au dessus de q (resp. et distinctes de w) étant donnés par $S_{\mathfrak{m}}(v')$;

— la représentation $\Pi(w)_w$ est de la forme $\mathrm{St}_{i+2}(\chi_{w,0}) \times \chi_{w,1} \times \cdots \times \chi_{w,d-i-2}$, où $\chi_{w,0}, \cdots, \chi_{w,d-i-2}$ sont des caractères non ramifiés de F_w.

Références

[1] J. Bernstein, A.A. Beilinson, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Asterisque 100*, 1982.

[2] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3) :573–629, 1999.

[3] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.

[4] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.

[5] P. Boyer. La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre. *soumis*, 2013.

[6] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.

[7] P. Boyer. Congruences automorphes et torsion dans la cohomologie d'un système local d'Harris-Taylor. *Annales de l'Institut Fourier*, 65 nř4 :1669–1710, 2015.

[8] P. Boyer. Faisceaux pervers entiers d'harris-taylor. *preprint*, 2015.

[9] P. Boyer. Sur la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor. *preprint*, 2015.

[10] A. Caraiani and P. Scholze. On the generic part of the cohomology of compact unitary shimura varieties. *Preprint*, 2015.

[11] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo *l*. *Proc. London Math. Soc. 104*, pages 690–727, 2012.

[12] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[13] T. Ito. Hasse invariants for somme unitary Shimura varieties. *Math. Forsch. Oberwolfach report 28/2005*, pages 1565–1568, 2005.

[14] K.-W. Lan and J. Suh. Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on compact PEL-type Shimura varieties. *Duke Math.*, 161(6) :951–1170, 2012.

[15] M.-F. Vignéras. Induced R-representations of p-adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.

[16] M.-F. Vignéras. Correspondance de Langlands semi-simple pour $\mathrm{GL}(n, F)$ modulo $l \neq p$. *Invent. Math.*, 144(1) :177–223, 2001.

[17] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.

Boyer Pascal • *E-mail :* boyer@math.univ-paris13.fr, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25