
CONGRUENCES AUTOMORPHES ET TORSION DANS LA COHOMOLOGIE D'UN SYSTÈME LOCAL D'HARRIS-TAYLOR

par

Boyer Pascal

Résumé. — Cet article fait partie d'une série de papiers de l'auteur visant à comprendre la cohomologie à coefficients dans $\bar{\mathbb{Z}}_l$ de certaines variétés de Shimura unitaires simples. On utilise les résultats de [5] sur le calcul de la $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie et ceux de [7] sur une version entière des résultats de [4] sur des filtrations du faisceau pervers des cycles proches, pour produire d'une part des classes de cohomologie de torsion dans les termes initiaux d'une suite spectrale calculant la cohomologie de la variété de Shimura, et d'autre part des congruences entre représentations automorphes.

Abstract (Automorphic congruences and torsion in the cohomology of Harris-Taylor local systems)

This paper is a part of a sequence of works of the author to understand the $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -cohomology of some simple unitary Shimura varieties. We use the results of [5] on the description of the $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -cohomology groups, and those of [7] about a $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -version of the results of [4] on filtrations of the perverse sheaf of nearby cycles, to produce on one part torsion classes in some of the initial terms of a spectral sequence which calculate the cohomology groups of the Shimura variety and, on a another part, some automorphic congruences.

Introduction

Dans [10], les auteurs étudient la cohomologie d'une classe de variétés de Shimura unitaires X de dimension $d - 1$ sur son corps reflex F , attachées à un groupe de similitudes G/\mathbb{Q} . La description de la cohomologie d'une telle variété de Shimura est donnée via la cohomologie de la fibre spéciale \bar{X}_v de X en une place v de F , à coefficients dans le complexe des cycles évanescents. Dans [10], pour tout $1 \leq h \leq d$, la restriction des faisceaux des cycles évanescents à la strate de Newton de la fibre spéciale \bar{X}_v de dimension $d - h$, est décrite à l'aide de certains systèmes locaux, dits d'Harris-Taylor dans [4], associés à

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, représentations automorphes, congruences.

des représentations du groupe des inversibles $D_{v,h}^\times$ d'une algèbre à division centrale sur le corps local F_v et d'invariant $1/h$.

En ce qui concerne la torsion, contrairement à [10], on ne peut pas se contenter d'arguments sur la somme alternée des groupes de cohomologie car cette somme ne voit pas la torsion. Afin d'étudier chacun de ces groupes de cohomologie, on commence par filtrer le faisceau pervers défini par le complexe des cycles évanescents, et on étudie la suite spectrale associée. Dans [7] on construit des filtrations « entières » du faisceau pervers des cycles évanescents qui généralisent celles de [4] de sorte qu'on est dans un premier temps amené à étudier la cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor. Pour ce qui concerne leurs quotients libres, ils sont explicités dans [5] et le premier objectif de ce papier est la construction §4.5 de classes de cohomologie de torsion. Une version simplifiée de la proposition 4.5.1 peut s'exprimer comme suit.

Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ dont la réduction modulo l , a pour support supercuspidal un segment de Zelevinsky relatif à une supercuspidale de $GL_{\bar{g}}(F_v)$ avec \bar{g} un diviseur strict de g . Pour tout $t \geq 1$ tel que $tg + \bar{g} \leq d$, la torsion de la cohomologie à support compact du système local d'Harris-Taylor associé, par la correspondance de Jacquet-Langlands, à la représentation de Steinberg généralisée $St_t(\pi_v)$, est non nulle.

Ainsi nous disposons d'une suite spectrale calculant la cohomologie entière d'une variété de Shimura, dans laquelle nous savons construire des classes de cohomologie de torsion dans ses termes initiaux $E_1^{p,q}$; reste alors à comprendre, soit comment cette torsion disparaît dans l'aboutissement, soit pourquoi elle y apparaît, problématique sur laquelle nous espérons revenir.

La construction de ces classes de torsion repose sur l'étude de représentations automorphes congruentes. Grossièrement la problématique est la suivante : étant donné

- une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation automorphe entière Π ;
- un $\bar{\mathbb{F}}_l$ -constituant irréductible τ_v de la réduction modulo l de la composante locale Π_v de Π en une place v ;
- une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible locale entière Π'_v , telle que τ_v est un constituant de sa réduction modulo l ,

existe-t-il une représentation automorphe Π' de composante locale en v isomorphe à Π'_v et « congruente » à Π en un sens à préciser ? Bien évidemment nous ne traitons pas cette question dans cette généralité mais seulement quelques cas particuliers dont le plus utile correspond, cf. le corollaire 4.4.2, au cas où Π'_v est non dégénérée et Π_v est de la forme $\text{Speh}_s(\pi_v)$ avec π_v non dégénérée. Du côté galoisien, on peut voir ce résultat comme « une augmentation de l'irréductibilité » au sens où partant d'une représentation galoisienne σ on en construit une autre σ' qui lui est « congruente » et dont la restriction σ'_v au groupe de décomposition en v consiste à changer un des facteurs de σ_v d'une des deux façons décrites ci-dessous :

- un facteur indécomposable de σ_v est « transformé » en un facteur irréductible de σ'_v ;
- un facteur semi-simple de σ_v devient un facteur indécomposable de σ'_v .

Une version simplifiée de la proposition 4.3.1 dans le cas trivial à l’infini, illustrant le premier de ces cas, peut s’exprimer comme suit.

Proposition —

Soit π'_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_d(F_v)$ dont la réduction modulo l a pour support supercuspidal un segment de Zelevinsky de longueur $s > 1$ relativement à une supercuspidale $\bar{\pi}_v$ de $GL_g(F_v)$ avec $d = sg$ où $\bar{\pi}_v$ est la réduction modulo l d’une représentation irréductible cuspidale π_v .

Alors étant donnée une représentation irréductible automorphe Π de $G(\mathbb{A})$, triviale à l’infini, dont la composante locale en v est $\Pi_v \simeq \text{St}_s(\pi_v)$, il existe une représentation irréductible automorphe Π' de $G(\mathbb{A})$, triviale à l’infini, avec $\Pi'_v \simeq \pi'_v$, qui est congruente à Π_v au sens de la définition 4.1.2, i.e. il existe un ensemble fini S de nombre premiers tel que pour tout premier $w \notin S$, les représentations Π_w et Π'_w sont non ramifiées et leurs caractères de Satake sont congruents modulo l .

En ce qui concerne le passage d’un facteur semi-simple à un facteur indécomposable, l’énoncé donné au corollaire 4.4.2 s’exprime comme ci-dessus avec $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$. Le lecteur notera que, contrairement au cas de GL_2 traité en toute généralité dans [3], nous ne nous autorisons ni à augmenter le niveau ni le poids.

Enfin au §5, motivé par la construction de représentations automorphes fortement congruentes, cf. §5.3 les cas ramifiés de la conjecture 5.2.1 et le lemme 5.4.2, nous proposons la conjecture 5.4.3 sur la torsion des systèmes locaux d’Harris-Taylor, dont la réduction modulo l ne devrait dépendre que de la réduction modulo l dudit système local.

L’auteur tient à remercier chaleureusement le rapporteur anonyme pour ses nombreuses corrections et améliorations.

Table des matières

Introduction.....	1
1. Rappels sur les représentations.....	4
1.1. Représentations entières de $GL_n(K)$ et leurs réduction modulo l ...	4
1.2. Représentations de $D_{K,d}^\times$	8
1.3. Représentations automorphes cohomologiques de $G(\mathbb{A})$	8
2. Rappels sur les systèmes locaux d’Harris-Taylor.....	10
2.1. Variétés de Shimura unitaires simples.....	10
2.2. Systèmes locaux d’Harris-Taylor.....	11
2.3. Filtrations de stratification entières.....	11
3. Compléments sur la cohomologie.....	13
3.1. Notations dans les groupes de Grothendieck.....	13
3.2. Cohomologie des faisceaux pervers d’Harris-Taylor.....	14
3.3. Cohomologie des systèmes locaux d’Harris-Taylor.....	20
4. Augmentation de l’irréductibilité.....	24
4.1. Congruences faibles entre représentations automorphes.....	24
4.2. Changement de cuspidalité.....	26

4.3. Le cas non dégénéré.....	27
4.4. Augmentation de l'irréductibilité globale.....	27
4.5. Torsion dans la cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor..	29
5. Représentations automorphes fortement congruentes.....	29
5.1. Définition de la notion de congruence au sens fort.....	29
5.2. Énoncé de la conjecture automorphe.....	30
5.3. Cas très ramifiés.....	32
5.4. Une conjecture sur la torsion.....	34
Références.....	36

1. Rappels sur les représentations

Dans ce qui suit l et p désignent deux nombres premiers distincts. Pour q une puissance de p , on note $e_l(q)$ l'ordre de q dans \mathbb{F}_l^\times . Dans la suite K désigne une extension finie de \mathbb{Q}_p , d'anneau des entiers \mathcal{O}_K et de corps résiduel κ de cardinal q . On dit que l est *banal* pour $GL_d(K)$ si $e_l(q) > d$. On fixe une racine carrée de q dans $\bar{\mathbb{Z}}_l$ et on note

$$\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l^\times$$

le caractère défini par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$.

1.1. Représentations entières de $GL_n(K)$ et leurs réduction modulo l . — On note $|-|$ la valeur absolue de K .

1.1.1. Définition. — Deux représentations π et π' de $GL_n(K)$ sont dites inertiuellement équivalentes et on note $\pi \sim^i \pi'$, s'il existe un caractère $\xi : \mathbb{Z} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que

$$\pi \simeq \pi' \otimes \xi \circ \text{val} \circ \det.$$

On note e_π le cardinal de l'ensemble des caractères $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l^\times$, tels que $\pi \otimes \chi \circ \text{val}(\det) \simeq \pi$ et on pose

$$\pi\{n\} := \pi \otimes q^{-n \text{val} \circ \det}.$$

Pour une suite $\underline{r} = (0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k = d)$, on note $P_{\underline{r}}$ le sous-groupe parabolique de GL_d standard associé au sous-groupe de Levi

$$GL_{r_1}(K) \times GL_{r_2-r_1}(K) \times \dots \times GL_{r_k-r_{k-1}}(K)$$

et $N_{\underline{r}}$ son radical unipotent. Le parabolique opposé à $P_{\underline{r}}$ sera noté $P_{\underline{r}}^{op}$.

1.1.2. Notation. — Pour π_1 et π_2 des $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, $\pi_1 \times \pi_2$ désigne l'induite parabolique normalisée

$$\pi_1 \times \pi_2 := \text{ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}.$$

Dans le cas où π_1 et π_2 sont des représentations de $GL_{t_1g}(K)$ et $GL_{t_2g}(K)$, on notera $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ l'induite parabolique $\pi_1\{-t_2/2\} \times \pi_2\{t_1/2\}$, l'entier g étant sous-entendu.

Remarque : les symboles \times et $\overrightarrow{\times}$ sont associatifs, le deuxième étant introduit afin de minimiser l'écriture des torsions.

1.1.3. Notation. — Pour $P = MN$ un parabolique de GL_d de Lévi M et de radical unipotent N , l'espace des vecteurs $N(K)$ -coinvariants d'une représentation admissible π de $GL_d(K)$, est stable sous l'action de $M(K) \simeq P(K)/N(K)$. On notera $J_P(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}$: c'est un foncteur exact dit foncteur de Jacquet.

Rappelons qu'une représentation ϱ de $GL_d(K)$ est dite *cuspidale* si pour tout parabolique propre P , $J_P(\varrho)$ est nul. Elle est dite *supercuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre. Une représentation supercuspidale est cuspidale, la réciproque étant valable pour les $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentations.

1.1.4. Notations. — (cf. [18] §9 et [5] §1.4) - Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$. L'induite

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\} = \pi \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} \pi$$

possède un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible noté habituellement $St_s(\pi)$ (resp. $Speh_s(\pi)$); c'est une représentation de Steinberg (resp. de $Speh$) généralisée.

- Plus généralement, l'induite

$$St_t\left(\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\}\right) \times \cdots \times St_t\left(\pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}\right)$$

admet un unique sous-espace irréductible que l'on note $Speh_s(St_t(\pi))$.

- Enfin, une représentation générique Π de $GL_d(K)$ s'écrit comme une induite irréductible

$$St_{t_1}(\pi_1) \times \cdots \times St_{t_r}(\pi_r)$$

où pour $i = 1, \dots, r$, les π_i sont des représentations irréductibles cuspidales de $GL_{g_i}(K)$ et les $t_i \geq 1$ tels que $\sum_{i=1}^r t_i g_i = d$. Alors la représentation

$$Speh_s(St_{t_1}(\pi_1)) \times \cdots \times Speh_s(St_{t_r}(\pi_r))$$

est irréductible, on la note $Speh_s(\Pi)$.

Remarque : dans [6], la représentation $St_s(\pi)$ (resp. $Speh_s(\pi)$) est notée $\overleftarrow{[s-1]}_\pi$ (resp. $\overrightarrow{[s-1]}_\pi$). Toute représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $GL_d(K)$ est de la forme $St_s(\pi)$ pour π irréductible cuspidale de $GL_g(K)$ avec $d = sg$.

Soient $\psi : \mathcal{O}_K \longrightarrow R^\times$ un caractère et $\underline{\lambda} = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0)$ une partition de n ; on définit alors un caractère $\psi_{\underline{\lambda}}$ sur le radical unipotent U du Borel standard de $GL_n(K)$, par la formule

$$\psi_{\underline{\lambda}}(u) := \psi\left(\sum_i u_{i,i+1}\right)$$

où la somme porte sur les indices $1 \leq i < n$ tels que $i \neq \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots$.

1.1.5. Proposition-Définition. — [14] III.1.8

Soit π une R -représentation irréductible de $GL_n(K)$; il existe alors une unique partition $\underline{\lambda}_\pi$ maximale pour l'ordre de Bruhat, telle que le nombre fini

$$m(\pi, \underline{\lambda}) := \dim_R \operatorname{Hom}_{RU}(\pi|_U, \psi_{\underline{\lambda}})$$

est non nul. On désigne cette partition comme le niveau de Whittaker de π .

1.1.6. Définition. — Une représentation irréductible π telle que $\underline{\lambda}_\pi = (n)$, est dite *non dégénérée*; on a alors $m(\pi, (n)) = 1$.

Remarque : toute $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation non dégénérée s'écrit comme une induite irréductible de la forme

$$\operatorname{St}_{t_1}(\pi_1) \times \dots \times \operatorname{St}_{t_r}(\pi_r)$$

où les π_i sont des représentations irréductibles cuspidales.

1.1.7. Définition. — Une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation lisse de longueur finie π de $GL_d(K)$ est dite *entière* s'il existe une extension finie E/\mathbb{Q}_l contenue dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, d'anneau des entiers \mathcal{O}_E et une \mathcal{O}_E -représentation L de $GL_d(K)$, qui est un \mathcal{O}_E -module libre, telle que $\bar{\mathbb{Q}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L \simeq \pi$ et tel que L est un $\mathcal{O}_E GL_n(K)$ -module de type fini. Soit κ_E le corps résiduel de \mathcal{O}_E , on dit que $\bar{\mathbb{F}}_l \otimes_{\kappa_E} \kappa_E \otimes_{\mathcal{O}_E} L$ est la réduction modulo l de L .

Remarque : le principe de Brauer-Nesbitt affirme que la semi-simplifiée de $\bar{\mathbb{F}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L$ est une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation de $GL_d(K)$ de longueur finie qui ne dépend pas du choix de L . Son image dans le groupe de Grothendieck sera notée $r_l(\pi)$ et dite *la réduction modulo l de π* .

Exemples :

- d'après [15] V.9.2 ou [9] §2.2.3, la réduction modulo l de $\operatorname{Speh}_s(\pi)$ est irréductible de sorte qu'à isomorphisme près, $\operatorname{Speh}_s(\pi)$ possède un unique réseau stable, cf. par exemple [2] proposition 3.3.2 et la remarque qui suit.
- En ce qui concerne $\operatorname{St}_s(\pi)$, la situation est en général plus complexe; signalons par exemple que dans [6], nous en avons construit différents réseaux non isomorphes dits d'induction.

1.1.8. Notation. — Pour ϱ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation cuspidale irréductible, on note $\epsilon(\varrho)$ le cardinal de la droite de Zelevinsky de ϱ , i.e. de l'ensemble $\{\varrho\{i\} \mid i \in \mathbb{Z}\}$. On pose comme

dans [15] p.51,

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho) & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1 \\ l & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : $\epsilon(\varrho)$ un diviseur de $e_l(q)$.

1.1.9. Proposition. — ([15] III.5.14) Soit ϱ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$. L'induite parabolique

$$\varrho \bar{\times} \cdots \bar{\times} \varrho = \varrho \left\{ \frac{1-s}{2} \right\} \times \cdots \times \varrho \left\{ \frac{s-1}{2} \right\}$$

admet un unique sous-quotient non dégénéré que l'on note $St_s(\varrho)$. La représentation $St_s(\varrho)$ est cuspidale si et seulement si

$$s = 1, m(\varrho), m(\varrho)l, \dots, m(\varrho)l^u, \dots$$

La réunion de ces dernières avec les supercuspidales forment l'ensemble des représentations cuspidales.

Remarque : en général, pour π une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation cuspidale telle que $r_l(\pi) = \varrho$, la réduction modulo l de $St_s(\pi)$ est strictement plus grande $St_s(\varrho)$, cf. [6] §3; en revanche, comme cas particulier de la proposition suivante, la multiplicité de $St_s(\varrho)$ y est égale à 1.

1.1.10. Proposition. — (cf. [15] V.9.2)

Soit π une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière de $GL_d(K)$ de niveau de Whittaker $\underline{\lambda}$. Parmi les constituants irréductible de la réduction modulo l de π , il y en a exactement un de niveau de Whittaker $\underline{\lambda}$, tous les autres étant de niveau strictement inférieur.

Remarque : ainsi tout sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de $\text{Speh}_s(\pi)$ avec π non dégénérée est de longueur de Whittaker supérieure ou égale à s .

1.1.11. Notation. — Pour ϱ une représentation irréductible supercuspidales, on notera pour tout $u \geq 0$, ϱ_u la représentation cuspidale $St_{m(\varrho)l^u}(\varrho)$ de la proposition précédente et on pose $\varrho_{-1} := \varrho$.

1.1.12. Proposition. — (cf. [14] III.5.10)

Soit ϱ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$; il existe alors un relèvement π irréductible cuspidal de ϱ , i.e. tel que $r_l(\pi) = \varrho$.

Donnons quelques précisions sur l'ensemble des relèvements d'une cuspidale donnée. Rappelons, cf. [8] §5.5, que toute $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale est bijectivement « attachée » à la donnée d'une extension sauvagement ramifiée $E \subset P$ et à une orbite régulière de $\Delta \backslash X_1(E)$ où :

- E est une extension modérément ramifiée de K de degré $\leq d$;
- $X_1(E)$ est l'ensemble des caractères modérément ramifiés de E^\times ;

— Δ est le groupe de Galois de E/K .

Si χ_E est un représentant d'une telle orbite associé à un relèvement cuspidal ϱ alors les autres relèvements cuspidaux, à torsion par un caractère non ramifié près, seront associés à $\chi_E \otimes \zeta_l$ où ζ_l est un caractère de E^\times d'ordre une puissance de l .

Remarque : en particulier si l est *banal* pour $GL_d(K)$, toute $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible cuspidale admet, à torsion près, un unique relèvement sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$.

1.2. Représentations de $D_{K,d}^\times$. —

1.2.1. Définition. — Soit $D_{K,d}$ l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$ et d'ordre maximal $\mathcal{D}_{K,d}$. On identifiera

$$D_{K,h}^\times / \mathcal{D}_{K,h}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$$

au moyen de l'opposé de la valuation de la norme réduite rn .

On rappelle que la correspondance de Jacquet-Langlands locale est une bijection JL entre les représentations irréductibles admissibles de $D_{K,h}^\times$ et les représentations irréductibles admissibles essentiellement de carré intégrable de $GL_h(K)$.

1.2.2. Définition. — Pour π une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$ et $t \geq 1$, $\pi[t]_D$ désignera la représentation $\text{JL}^{-1}(\text{St}_t(\pi))^\vee$ de $D_{K,tg}^\times$.

Soit $\tau = \pi[s]_D$ une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible l -entière de $D_{K,d}^\times$; avec les notations de 1.1.11, la réduction modulo l de π est de la forme $\text{St}_{m(\tau)}(\varrho)$ pour ϱ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_e(K)$. On note alors ι l'image de $\text{Speh}_s(\varrho^\vee)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands modulaire définie par J.-F. Dat au §1.2.4 de [9]. Autrement dit si π_ϱ est un relèvement cuspidal de ϱ , i.e. une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière irréductible cuspidale de $GL_e(K)$ dont la réduction modulo l est égale à ϱ , alors $\iota = r_l(\pi_\varrho[s]_D)$.

1.2.3. Proposition. — (cf. [9] proposition 2.3.3) La réduction modulo l de τ est avec les notations précédentes de la forme

$$\iota\left\{-\frac{m(\tau)-1}{2}\right\} \oplus \iota\left\{-\frac{m(\tau)-3}{2}\right\} \oplus \cdots \oplus \iota\left\{\frac{m(\tau)-1}{2}\right\}$$

où $\iota\{n\}$ désigne $\iota \otimes q^{-n \text{ val} \circ \text{Nrd}}$.

1.3. Représentations automorphes cohomologiques de $G(\mathbb{A})$. — Soient E/\mathbb{Q} une extension quadratique imaginaire pure, F^+/\mathbb{Q} une extension totalement réelle dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$; on pose $F = F^+E$ le corps CM associé. Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F , B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*|_F$ est la conjugaison complexe c . Pour $\beta \in B^{*-1}$, on note \sharp_β

l'involution $x \mapsto x^{\sharp\beta} = \beta x^* \beta^{-1}$ et G/\mathbb{Q} le groupe de similitudes, noté G_τ dans [10], défini pour toute \mathbb{Q} -algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^{\sharp\beta} = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$. Si x est une place de \mathbb{Q} décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où $x = \prod_i z_i$ dans F^+ .

1.3.1. Notation. — Pour x une place de \mathbb{Q} décomposée dans E et z une place de F^+ au dessus de x , on notera $G(F_z)$ le facteur $(B_z^{op})^\times$ de $G(\mathbb{Q}_x)$ et $G(\mathbb{A}^z)$ pour $G(\mathbb{A})$ auquel on ôte le facteur $(B_z^{op})^\times$. De même pour T un ensemble de places de \mathbb{Q} et $x \in T$, on notera $T - \{z\}$ pour désigner la réunion des places de T distinctes de x avec les places de F , autres que z , au dessus de x .

Remarque : pour $x = yy^c$ décomposé dans E , les places de F^+ au dessus de x s'identifie avec les places de F au dessus de y .

Dans [10], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :

— si x est une place de \mathbb{Q} qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;

— les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

On suppose aussi que p est décomposée $p = uu^c$ dans E et on note, cf. la remarque ci-dessus, $v = v_1, v_2, \dots, v_r$, les places de F au dessus de u avec $(B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v)$. Pour de coupables raisons de commodité, on fixe un isomorphisme $\iota_l : \mathbb{Q}_l \simeq \mathbb{C}$.

1.3.2. Définition. — Soit ξ une \mathbb{C} -représentation irréductible algébrique de dimension finie de G . Une \mathbb{C} -représentation irréductible Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ est dite ξ -cohomologique s'il existe un entier i tel que

$$H^i((\text{Lie}G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes \xi^\vee) \neq (0)$$

où U_τ est un sous-groupe compact modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, maximal, cf. [10] p.92. On notera $d_\xi^i(\Pi_\infty)$ la dimension de ce groupe de cohomologie.

1.3.3. Définition. — Soit ξ une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible algébrique de dimension finie de G . Une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible Π^∞ de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sera dit automorphe ξ -cohomologique s'il existe une \mathbb{C} -représentation cohomologique Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ telle que $\iota_l(\Pi^\infty) \otimes \Pi_\infty$ est une \mathbb{C} -représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$.

1.3.4. Définition. — (cf. [16] appendice A)

Une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation π^∞ de $G(\mathbb{A}^\infty)$ est dite *entière* s'il existe un $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -module projectif Λ

muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty)$ tel que $\Lambda \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \pi^\infty$ et Λ^K est de type fini pour tout sous-groupe compact ouvert K de $G(\mathbb{A}^\infty)$.

Remarque : d'après [16] §3.3, pour toute représentation automorphe π de $G(\mathbb{A})$ triviale à l'infini, sa partie finie π^∞ est entière.

2. Rappels sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor

2.1. Variétés de Shimura unitaires simples. — Pour tout sous-groupe compact assez petit U^p au sens du bas de la page 90 de [10], de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times) \quad (2.1.1)$$

et on note \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts assez petits de la forme $U^p(m)$. À la donnée de G et \mathcal{I} , on associe un **schéma de Hecke** $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$ au sens de [4] et on note $\bar{X}_{\mathcal{I}}$ sa fibre spéciale géométrique sur $\bar{\mathbb{F}}_p$.

Avec les notations de [4], pour tout $1 \leq h \leq d$, on dispose de sous- $\bar{\mathbb{F}}_p$ -schémas de Hecke pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$, fermés (resp. localement fermés) notés $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$ (resp. $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h}$) de pure dimension $d - h$ et on note

$$i_{\mathcal{I}}^h : \bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h} \hookrightarrow \bar{X}_{\mathcal{I}} = \bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq 1}, \quad j_{\mathcal{I}}^{\geq h} : \bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h} \hookrightarrow \bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}.$$

Remarque : afin de ne pas multiplier les notations, on notera aussi i^h pour l'inclusion fermée $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h} \hookrightarrow \bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h+1}$.

Pour tout $1 \leq h < d$, les strates $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h}$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique $P_{h,d}(F_v)$ au sens où il existe un sous-schéma fermé $\bar{X}_{\mathcal{I},1}^{=h}$ de Hecke pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d}(F_v)$ tel que :

$$\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=h} \simeq \bar{X}_{\mathcal{I},1}^{=h} \times^{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v)$$

On note $\bar{X}_{\mathcal{I},1}^{\geq h}$ l'adhérence de $\bar{X}_{\mathcal{I},1}^{=h}$ dans $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{\geq h}$. On rappelle que $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d}(F_v)$ agit à travers son quotient $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v)$ donné par l'application $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$. Par ailleurs l'action d'un élément $w_v \in W_v$ est donnée par l'action de $-\deg(w_v)$.

Remarque : les points géométriques du $\bar{\mathbb{F}}_p$ -schéma de Hecke $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{=d}$ de dimension nulle sont dits supersinguliers.

2.1.2. Définition. — Soit H_0/\mathbb{Q} le groupe algébrique forme intérieure de G telle que $H_0(\mathbb{R})$ est compact et $H_0(\mathbb{A}^\infty) \simeq G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times D_{v,d}^\times \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$.

2.2. Systèmes locaux d’Harris-Taylor. — Afin de décrire les restrictions aux strates de Newton $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{\bar{h}}$ du complexe des cycles évanescents sur $\bar{X}_{\mathcal{I}}$, les auteurs de [10] ont construit des systèmes locaux sur ces strates dont nous rappelons les notations suivant [4]. À toute représentation irréductible admissible τ_v de $D_{v,h}^{\times}$, Harris et Taylor associent un système local de Hecke $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1}$ sur $\bar{X}_{\mathcal{I}, 1}^{\bar{h}}$ avec une action de $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^{\times} \times P_{h,d}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^{\times} \times \mathbb{Z}$ qui d’après [10] p.136, se factorise par $G^{(h)}(\mathbb{A}^{\infty})/\mathcal{D}_{F_v, h}^{\times}$ via

$$(g^{\infty, p}, g_{p,0}, c, g_v, g_{v_i}, k) \mapsto (g^{p, \infty}, g_{p,0} q^{k-v(\det g_v^c)}, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta). \quad (2.2.1)$$

où $G^{(h)}(\mathbb{A}^{\infty}) := G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^{\times} \times GL_{d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^{\times} \times D_{F_v, h}^{\times}$, $g_v = \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix}$ et $\delta \in D_{v,h}^{\times}$ est tel que $v(\text{rn}(\delta)) = k + v(\det g_v^c)$. On note $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}}$ le faisceau sur $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{\bar{h}}$ induit associé :

$$\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}} := \mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et t un entier strictement positif tel que $tg \leq d$, on introduit suivant [4] la notation $\mathcal{F}(\pi_v, t)_1$ (resp. $\mathcal{F}(\pi_v, t)$) pour désigner le faisceau de Hecke sur $\bar{X}_{\mathcal{I}, 1}^{\bar{t}g}$ (resp. $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{\bar{t}g}$) précédemment noté $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D, \mathcal{I}, 1}$ (resp. $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D, \mathcal{I}}$). On utilisera ponctuellement la notation $HT(\pi_v, \Pi_t)$ pour désigner le W_v -faisceau pervers de Hecke sur $\bar{X}_{\mathcal{I}}^{\bar{t}g}$ pour $G(\mathbb{A}^{\infty})$ défini par

$$HT(\pi_v, \Pi_t) := \left(\mathcal{F}(\pi_v, t)_1[d - tg] \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \otimes \Pi_t \right) \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$ et où on renvoie à [4] pour une description explicite des opérateurs de Hecke.

2.2.2. Notation. — On écrira $HT_{\bar{\mathbb{Z}}_l}$ pour désigner un $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -réseau du système local d’Harris-Taylor associé, que l’on ne souhaite pas préciser. Dans la suite, on supposera un réseau stable de $\pi_v[t]_D$ fixé et pour Γ un réseau stable de Π_t , on notera, $HT_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)$ le $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -réseau du système local d’Harris-Taylor associé au réseau produit tensoriel stable de $\pi_v[t]_D \otimes \Pi_t$.

2.3. Filtrations de stratification entières. — Rappelons, cf. [11] §1.3.1, qu’une théorie de torsion sur une catégorie abélienne \mathcal{A} est un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de sous-catégories pleines tel que :

— pour tout objet T dans \mathcal{T} et F dans \mathcal{F} , on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0;$$

— pour tout objet A de \mathcal{A} , il existe des objets $A_{\mathcal{T}}$ et $A_{\mathcal{F}}$ de respectivement \mathcal{T} et \mathcal{F} , ainsi qu’une suite exacte courte

$$0 \rightarrow A_{\mathcal{T}} \rightarrow A \rightarrow A_{\mathcal{F}} \rightarrow 0.$$

Pour \mathbb{O} un anneau de valuation discrète et ϖ une uniformisante, dans une catégorie abélienne \mathcal{A} qui est \mathbb{O} -linéaire, un objet A de \mathcal{A} est dit *de torsion* (resp. *libre*, resp. *divisible*) si $\varpi^N 1_A$ est nul pour un certain entier N (resp. $\varpi \cdot 1_A$ est un monomorphisme, resp. un épimorphisme). On note alors \mathcal{T} (resp. \mathcal{F} , resp. \mathcal{Q}) la sous-catégorie pleine des objets de torsion (resp. libres, resp. divisibles) de \mathcal{A} . Si \mathcal{A} est noethérienne (resp. artinienne) alors $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ (resp. $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$) est une théorie de torsion sur \mathcal{A} .

Pour X un \mathbb{F}_q -schéma de type fini, la catégorie dérivée $D_c^b(X, \mathbb{O})$ est munie de sa t -structure perverse p définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^p D^{\leq 0}(X, \mathbb{O}) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p D^{\geq 0}(X, \mathbb{O}) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$. On note ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$ le cœur de cette t -structure et ${}^p h$ les foncteurs cohomologiques : c'est une catégorie abélienne noethérienne et \mathbb{O} -linéaire munie de la théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ avec les notations précédentes. On munit alors $D_c^b(X, \mathbb{O})$ d'une nouvelle t -structure notée $p+$ et définie par, cf. [7] corollaire 1.1.4 et §1.4.2 :

$$\begin{aligned} A \in {}^{p+} D^{\leq 0}(X, \mathbb{O}) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^* A = 0, & \forall i > -\dim \overline{\{x\}} + 1 \\ h^{-\dim \overline{\{x\}} + 1} i_x^* A & \text{de torsion} \end{cases} \\ A \in {}^{p+} D^{\geq 0}(X, \mathbb{O}) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^! A = 0, & \forall i < -\dim \overline{\{x\}} \\ h^{-\dim \overline{\{x\}}} i_x^! A & \text{libre} \end{cases} \end{aligned}$$

dont on notera ${}^{p+} \text{FP}(X, \mathbb{O})$ le cœur et ${}^{p+} h^i$ les foncteurs cohomologiques. C'est une catégorie abélienne artinienne et \mathbb{O} -linéaire. Ces constructions passent à la limite sur l'anneau $\bar{\mathbb{Z}}_l$.

Remarque : les objets libres de ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$, qui est une catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire, sont exactement ceux de ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+} \text{FP}(X, \mathbb{O})$: ils sont appelés des faisceaux pervers sans torsion.

Pour une immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$, on dispose alors de deux notions de prolongements intermédiaires ${}^p j_{!*}$ et ${}^{p+} j_{!*}$.

2.3.1. Lemme. — (cf. [7] proposition 1.4.4) *Si $j : U \hookrightarrow X$ est affine alors pour tout faisceau pervers P sans torsion,*

$$j_* P = {}^p j_* P = {}^{p+} j_* P \text{ et } j_! P = {}^p j_! P = {}^{p+} j_! P$$

sont des faisceaux pervers sans torsion.

Remarque : du triangle distingué (cf. [11] 2.42)

$${}^p j_! P \longrightarrow {}^{p+} j_! P \longrightarrow {}^p i_* {}^p h_{\text{tors}}^{-1} i^* j_* P[1] \rightsquigarrow$$

où pour A un faisceau pervers, A_{tors} désigne son sous-faisceau pervers de torsion, on en déduit que, pour j affine, ${}^p i_* {}^p h_{\text{tors}}^{-1} i^* j_* P$ est nul.

Dans [7], en utilisant la stratification de Newton, nous donnons l'analogie entier de 4.3.1 et 5.4.1 de [4] qui s'exprime comme suit.

On note $\mathbb{F}(-)$ le foncteur de réduction modulaire $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} (-)$; ce dernier ne commute pas aux foncteurs de troncations. Ainsi d'après [11] 2.51, pour P un faisceau pervers sans torsion, on a les triangles distingués suivants

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^p j_!^{\geq tg} P &\rightarrow {}^p j_!^{\geq tg} \mathbb{F}P \rightarrow {}^p h^{-1} \mathbb{F}^p i_*^{tg+1} {}^p h_{tors}^{-1} i^{tg+1,*} j_*^{\geq tg} P[2] \rightsquigarrow \\ {}^p j_!^{\geq tg} \mathbb{F}P &\rightarrow \mathbb{F}^{p+} j_!^{\geq tg} P \rightarrow {}^p h^0 \mathbb{F}^p i_*^{tg+1} {}^p h_{tors}^{-1} i^{tg+1,*} j_*^{\geq tg} P[1] \rightsquigarrow \end{aligned}$$

de sorte que $j^{\geq tg}$ étant affine, ${}^p h_{tors}^{-1} i^{tg+1,*} j_*^{\geq tg} P$ est nul et donc

$$\mathbb{F}^p j_!^{\geq tg} P \simeq {}^p j_!^{\geq tg} \mathbb{F}P \simeq \mathbb{F}^{p+} j_!^{\geq tg} P. \quad (2.3.2)$$

En ce qui concerne les extensions intermédiaires, d'après loc. cit. on a

$$\mathbb{F}^p j_{!*}^{\geq tg} P \rightarrow {}^p j_{!*}^{\geq tg} \mathbb{F}P \rightarrow {}^p h^{-1} \mathbb{F}^p i_*^{tg+1} {}^p h_{tors}^0 i^{tg+1,*} j_*^{\geq tg} P[1] \rightsquigarrow \quad (2.3.3)$$

$${}^p j_{!*}^{\geq tg} \mathbb{F}P \rightarrow \mathbb{F}^{p+} j_{!*}^{\geq tg} P \rightarrow {}^p h^0 \mathbb{F}^p i_*^{tg+1} {}^p h_{tors}^0 i^{tg+1,*} j_*^{\geq tg} P \rightsquigarrow \quad (2.3.4)$$

3. Compléments sur la cohomologie

3.1. Notations dans les groupes de Grothendieck. — Dans la suite on fixe une représentation complexe irréductible ξ de dimension finie de G ce qui d'après [10] p.96, fournit un système local \mathcal{L}_ξ .

3.1.1. Définition. — Étant donné un faisceau \mathcal{F} sur $\bar{X}_{\mathcal{I}}$, on notera \mathcal{F}_ξ le faisceau $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\xi$.

Remarque : d'après [10] p.98 et p.150, \mathcal{L}_ξ est un W_v -faisceau de Hecke pour $G(\mathbb{A}^\infty)$ où g^∞ agit par $\xi(g_l)$ et $\sigma \in W_v$ par $\Xi^{-w(\xi)/2}$.

Pour un W_v -faisceau pervers de Hecke P sur $\bar{X}_{\mathcal{I}}$, $[H^*(P_\xi)]$ désignera l'image de $\sum_i (-1)^i H^i(\bar{X}_{\mathcal{I}}, P \otimes \mathcal{L}_\xi)$ dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$. Pour Groth le groupe de Grothendieck d'un groupe de la forme $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \tilde{G}$, on notera $\text{Groth}\{\Pi^{\infty,v}\}$ le sous-groupe facteur direct de Groth engendré par les irréductibles de la forme $\Pi^{\infty,v} \otimes \sigma$ où σ est une représentation irréductible quelconque de \tilde{G} . On notera alors

$$[H^*(P_\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$$

la projection de $[H^*(P_\xi)]$ sur ce facteur direct.

Remarque : on rappelle que $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times GL_d(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$. Pour Π une représentation de $G(\mathbb{A})$, sa composante pour le facteur de similitude \mathbb{Q}_p^\times , sera notée comme dans [10], $\Pi_{p,0}$. Comme tous les compacts de \mathcal{I} contiennent le facteur \mathbb{Z}_p^\times , les représentations Π qui vont intervenir par la suite, dans les différents groupes de cohomologie, devront toutes vérifier que $(\Pi_{p,0})|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1$.

3.2. Cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. — Soient

- Π une représentation irréductible admissible de $G(\mathbb{A})$, $m(\Pi)$ sa multiplicité dans l'espace des formes automorphes et
- π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$.

Nous allons rappeler d'après [5], quels sont les couples (r, i) tels que

$$[H^i({}^p j_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)_1)]\{\Pi^{\infty, v}\} \neq (0).$$

On pourrait calculer explicitement l'image correspondante dans le groupe de Grothendieck des $GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ -représentations mais nous nous contenterons d'une description très sommaire. Rappelons que d'après [5] §3.6, cette description ne dépend que de $m(\Pi)$, Π_∞ et de la composante locale Π_v de Π en v .

Remarque : rappelons que l'action de $\sigma \in W_v$ sur $[H^i({}^p j_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)_1)]\{\Pi^{\infty, v}\}$ est donnée par celle de $\deg \sigma \in \mathbb{Z}$ composée avec celle de $\Pi_{p,0}(\text{Art}^{-1}(\sigma))$ où $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin et \deg , l'application composée de Art^{-1} avec la valuation.

3.2.1. Lemme. — *Soit x une place de \mathbb{Q} décomposée $x = yy^c$ dans E et soit z une place de F au dessus de y telle que, avec la notation 1.3.1, $G(F_z) := (B_z^{op})^\times \simeq GL_d(F_z)$. Pour Π une représentation automorphe irréductible admissible cohomologique de $G(\mathbb{A})$, sa composante locale Π_z , au sens de 1.3.1, est de la forme $\text{Speh}_s(\pi_z)$ pour π_z une représentation irréductible non dégénérée et s un entier ≥ 1 qui ne dépend que de Π et non de la place z comme ci-dessus.*

Démonstration. — D'après [10] théorème VI.2.1, une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ est obtenue par changement de base à partir d'une représentation automorphe de B^\times , laquelle d'après la correspondance de Langlands globale, cf. [1] pour le cas général, est associée à une série discrète de $GL_d(\mathbb{A}_F)$. D'après la classification des séries discrètes de $GL_d(\mathbb{A}_F)$ de [12], une telle série discrète est

$$\text{Speh}_s(\pi) := \pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \boxplus \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \boxplus \cdots \boxplus \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

pour π une représentation irréductible admissible cuspidale de $GL_{d/s}(\mathbb{A}_F)$ et où la notation \boxplus correspond du côté galoisien à la somme directe. La composante locale d'une telle représentation automorphe en une place z est alors

$$\text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,z})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,z})) \simeq \text{Speh}_s\left(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,z}) \times \cdots \times \text{St}_{t_u}(\pi_{u,z})\right)$$

où les $\pi_{i,z}$ sont irréductibles cuspidales. □

3.2.2. Corollaire.

- (cf. [17]) Soient
- x une place de \mathbb{Q} décomposée $x = yy^c$ dans E et z une place au dessus-de y telle que $G(F_z) \simeq GL_d(F_z)$ et

- Π une représentation irréductible automorphe admissible de $G(\mathbb{A})$ telle que sa composante locale Π_z en z soit de la forme $\text{Speh}_s(\pi_z)$ pour π_z une représentation irréductible non dégénérée.

Alors les $d_\xi^i(\Pi_\infty)$ sont nuls pour $|i| \geq s$ ou pour $i \equiv s \pmod{2}$ et sinon ils sont tous égaux.

3.2.3. Notation. — Dans la suite nous noterons simplement $d_\xi(\Pi_\infty)$ pour la valeur commune non nulle des $d_\xi^i(\Pi_\infty)$.

3.2.4. Définition. — Pour $1 \leq h \leq d$ et τ_v une représentation irréductible admissible de $D_{v,h}^\times$, on introduit d'après [10] V.5,

$$\begin{aligned} R_{\tau_v} : \text{Groth}\left(GL_h(F_v)\right) &\longrightarrow \text{Groth}\left(F_v^\times\right) \\ \alpha &\longmapsto \text{vol}(D_{v,tg}^\times/F_v^\times)^{-1} \sum_\psi \text{Tr } \alpha(\varphi_{\tau_v \otimes \psi^\vee})\psi, \end{aligned}$$

où ψ décrit les caractères de F_v^\times et $\varphi_{\pi_v[t]_D}$ est, d'après Deligne, Kazhdan et Vignéras, un pseudo-coefficient pour $\text{St}_t(\pi_v)$, ainsi que

$$\text{red}_{\tau_v} : \text{Groth}\left(GL_d(F_v)\right) \longrightarrow \text{Groth}\left(F_v^\times \times GL_{d-h}(F_v)\right)$$

défini comme la composée de

$$\begin{aligned} \text{Groth}\left(GL_d(F_v)\right) &\longrightarrow \text{Groth}\left(GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)\right) \\ [\Pi] &\longmapsto [J_{F_{h,d}^{op}}(\Pi) \otimes \delta_{F_{h,d}}^{1/2}] \end{aligned}$$

avec $R_{\tau_v} \otimes \text{Id}$.

Remarque : pour $\tau_v = \pi_v[t]_D$, chacun des $\text{vol}(D_{v,tg}^\times/F_v^\times)^{-1} \text{Tr } \alpha(\varphi_{\tau_v \otimes \psi^\vee})$ est nul si α n'est pas un sous-quotient irréductible de $\pi'_v \left\{ \frac{1-t}{2} \right\} \times \cdots \times \pi'_v \left\{ \frac{t-1}{2} \right\}$ avec $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes \psi \circ \det$. En ce qui concerne les sous-quotients irréductibles de cette induite, ils sont d'après Zelevinsky en bijection avec les orientations du graphe linéaire dont les sommets sont les entiers de 1 à t , les sommets reliant k à $k+1$ pour tout $k = 1, \dots, t-1$. Pour un tel sous-quotient α , $\text{vol}(D_{v,tg}^\times/F_v^\times)^{-1} \text{Tr } \alpha(\varphi_{\tau_v \otimes \psi^\vee})$ est un signe qui ne dépend que du graphe et pas de π'_v , cf. par exemple la formule donnée avant (1.5.3) dans [5].

3.2.5. Proposition. — Soit $\Pi^{\infty,v}$ une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}^{\infty,v})$, pour tout (r, i) , dans le groupe de Grothendieck des représentations de $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_{d-rg}(F_v) \times \mathbb{Z}$, $[H^i(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)_1[d-rg])]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est égal à

$$e_{\pi_v} \left(\frac{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)}{d} \sum_{\Pi' \in \mathcal{U}_G(\Pi^{\infty,v})} m(\Pi') d_\xi(\Pi'_\infty) \right) R_{\pi_v}(r, i)(\Pi_v)$$

où

- $\mathcal{U}_G(\Pi^{\infty,v})$ désigne l'ensemble des représentations irréductibles automorphes Π' de $G(\mathbb{A})$ telles que $(\Pi')^{\infty,v} \simeq \Pi^{\infty,v}$;

- Π_v est la composante locale commune à tous les $\Pi' \in \mathcal{U}_G(\Pi^{\infty,v})$ tels que $d_\xi(\Pi'_\infty) \neq 0$, cf. le corollaire VI.2.2 de [10] ;
- $R_{\pi_v}(r, i)(\Pi_v)$ est une somme de représentations de $GL_{d-rg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ définie, pour $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$, où les $\pi_{i,v}$ sont des représentations irréductibles cuspidales de $GL_{g_i}(F_v)$, par la formule

$$R_{\pi_v}(r, i)(\Pi_v) = \sum_{k: \pi_{k,v} \sim_i \pi_v} m_{s,t_k}(r, i) R_{\pi_v}(s, t_k)(r, i)(\Pi_v, k) \otimes \left(\xi_k \otimes \Xi^{i/2} \right)$$

où :

- les ξ_k sont tels que $\pi_{k,v} \simeq \pi_v \otimes \xi_k \circ \text{val} \circ \det$;
- $R_{\pi_v}(s, t_k)(r, i)(\Pi_v, k)$ s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} R_{\pi_v}(s, t_k)(r, i)(\Pi_v, k) &:= \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_{k-1}}(\pi_{k-1,v})) \\ &\quad \times R_{\pi_{k,v}}(s, t_k)(r, i) \times \\ &\quad \text{Speh}_s(\text{St}_{t_{k+1}}(\pi_{k+1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v})). \end{aligned}$$

- $R_{\pi_{k,v}}(s, t_k)(r, i)$ est une représentation de $GL_{d-rg}(F_v)$ qui s'obtient comme expliqué ci-après.
- $m_{s,t}(r, i) \in \{0, 1\}$ est défini ci-après.

La représentation $R_{\pi_{k,v}}(s, t_k)(r, i)$ est calculée comme suit : on applique le foncteur de Jacquet $J_{P_{rg,d}^{op}}$ à $\text{Speh}_s(\text{St}_{t_k}(\pi_{k,v}))$ qui s'écrit, à la Zelevinsky, comme une somme

$$\sum \langle a_1 \rangle \otimes \langle a_2 \rangle$$

où a_1, a_2 sont des multisegments dans la droite de Zelevinsky de π_v ; le calcul explicite est donné au corollaire 1.5.6 de [5] avec la notation 1.5.7. On considère alors la somme

$$\sum R_{\pi_v[r]_D} \left(\langle a_1 \rangle \right) a_2 = \sum_{\psi} \epsilon_{\psi} \psi \otimes \Pi_{\psi} \in \text{Groth} \left(F_v^{\times} \times GL_{(st-r)g}(F_v) \right)$$

où ψ décrit les caractères de F_v^{\times} et $\epsilon_{\psi} \in \{-1, 1\}$.

Remarque : dans la formule précédente, où $\tau_v = \pi_v[r]_D$, les ψ tels que Π_{ψ} sont non nuls, sont de la forme $|-|^{k/2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'après [10] théorème V.6.1, cette formule permet de calculer la somme alternée des $[H^i({}^p j_{\bar{1}}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\bar{Q}_i, \xi}(\pi_v, r)_1[d-rg])]\{\Pi^{\infty,v}\}$. Partant de l'égalité, cf. [5] 2.6.3

$$i_{\bar{1},*}^{tg} j_{\bar{1},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{r=0}^{s-t} (-1)^r i_{\bar{1},*}^{(t+r)g} j_{\bar{1},!}^{\geq (t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{r-1}]_{\pi_v})(r/2) \quad (3.2.7)$$

par pureté, le calcul de chacun des $H^i(j_{\bar{1},!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ se déduit du calcul de la somme alternée des groupes de cohomologie de tous les $j_{\bar{1},!}^{\geq (t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{r-1}]_{\pi_v})(r/2)$.

D'après le lemme 1.5.5 de [5], les applications red_{τ_v} sont multiplicatives au sens où

$$\text{red}_{\tau_v} \left(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r \right) = \sum_{i=1}^r \pi_1 \times \cdots \times \pi_{i-1} \times (\text{red}_{\tau_v} \pi_i) \times \pi_{i+1} \times \cdots \times \pi_r.$$

Ainsi, par « superposition », d'après la proposition 3.6.1 de [5], on a

$$R_{\pi_{k,v}}(s, t_k)(r, i) = \Pi_{|-i/2}.$$

Les conditions sur i dans la proposition 3.6.1 de [5] sont intégrées dans les coefficients $m_{s,t}(r, i)$ décrits ci-après.

Remarque : notons que pour π_v irréductible cuspidale entière, il résulte de la description précédente que $R_{\pi_v}(s, t)(r, i)$ est entière et sa réduction modulo l ne dépend que (s, t, r, i) et de $r_l(\pi_v)$. En effet considérons deux représentations entières irréductibles cuspidales π_v et π'_v de même réduction modulo l . Le foncteur de Jacquet $J_{P_{r,g,d}^{op}}$ appliqué à $R_{\pi_v}(s, t)(r, i)$ s'écrit comme précédemment $\sum \langle a_1 \rangle \otimes \langle a_2 \rangle$ où a_1, a_2 sont des multisegments dans la droite de Zelevinsky de π_v . Si dans chacun de ces multisegments, on remplace les $\pi_v \{ \cdots \}$ par les $\pi'_v \{ \cdots \}$, le résultat obtenu est

$$\sum \langle a'_1 \rangle \otimes \langle a'_2 \rangle = J_{P_{r,g,d}^{op}} \left(R_{\pi'_v}(s, t)(r, i) \right).$$

Le résultat découle alors de la description explicite de $R_{\pi_v[r]_D}(\langle a_1 \rangle) = \pm | - |^{k/2}$ où, d'après la remarque précédant la proposition 3.2.5, le signe et l'entier k ne dépendent que du graphe associé au multisegment a_1 et pas de π_v .

3.2.8. Définition. — Les points de coordonnées (r, i) tels que $m_{s,t}(r, i) = 1$ sont contenus dans l'enveloppe convexe du polygone de sommets $(s + t - 1, 0)$, $(t, \pm(s - 1))$ et $(1, \pm(s - t))$ si $s \geq t$ (resp. $(t - s + 1, 0)$ si $t \geq s$); à l'intérieur de celui-ci pour r fixé, les i concernés partent du bord en vont de 2 en 2, i.e. $m_{s,t}(r, i) = 1$ si et seulement si :

- $\max \{1, s + t - 1 - 2(s - 1)\} \leq r \leq s + t - 1$;
- si $t \leq r \leq s + t - 1$ alors $0 \leq |i| \leq s + t - 1 - r$ et $i \equiv s + t - 1 - r \pmod{2}$;
- si $\max \{1, s + t - 1 - 2(s - 1)\} \leq r \leq t$ alors $0 \leq |i| \leq s - 1 - (t - r)$ et $i \equiv s - t - 1 + r \pmod{2}$.

Le lecteur trouvera des illustrations de cette définition aux figures 1 et 2.

Remarque : pour

$$\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$$

l'ensemble des couples (r, i) tels que $[H^i(p_j^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_l, \xi}(\pi_v, r)[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$ est obtenu en superposant les u diagrammes précédents comme sur la figure 3; pour (r, i) donné la contribution du diagramme d'indice k s'obtient en remontant à la source, i.e. à $(s + t_k - 1, 0)$ et en remplaçant $\text{Speh}_s(\text{St}_{t_k}(\pi_{k,v}))$ par $R_{\pi_k}(s, t_k)(r, i)$. Ainsi :

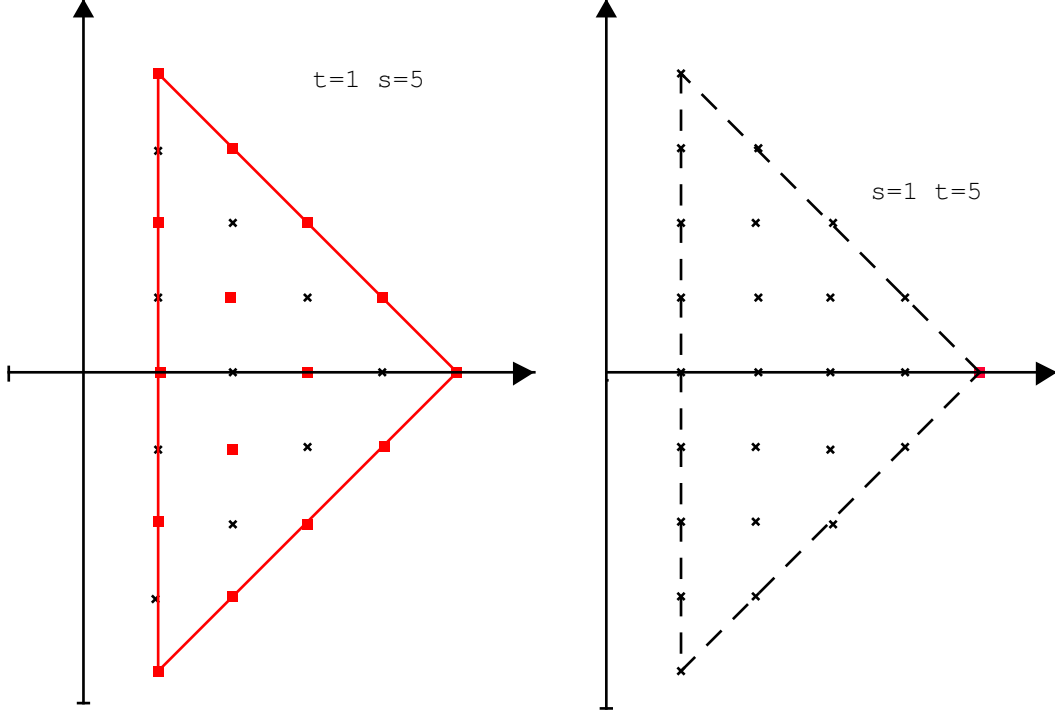


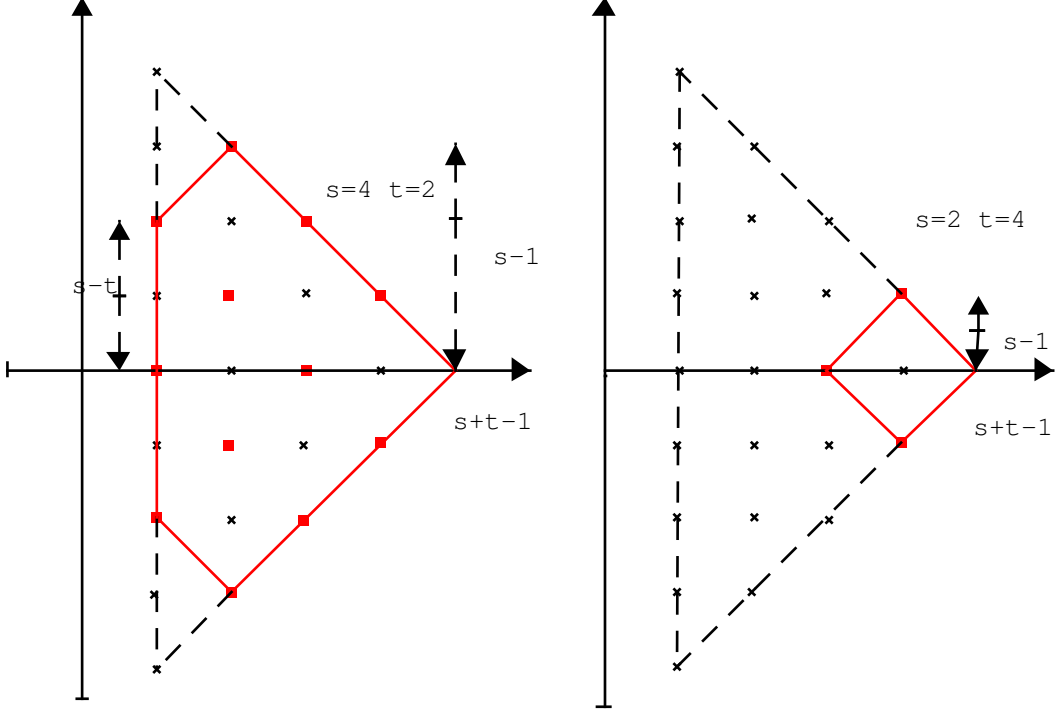
FIGURE 1. Les carrés rouges donnent les coordonnées (r, i) des $m_{s,t}(r, i) = 1$ dans le cas d'une Speh ($t = 1$) à gauche et d'une Steinberg ($s = 1$) à droite

- pour tout $i \neq 0$ et pour tout r tel que $[H^i(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Q}}_l, \xi}(\pi_v, r)_1[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$ est non nulle alors il existe $r' > r$ tel que $[H^0(pj_{!*}^{\geq r'g} \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Q}}_l, \xi}(\pi_v, r')_1[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$ est non nulle. Plus précisément tout $R_{\pi_k}(s, t_k)(r, i)(\Pi'_v) \otimes (\xi_k \otimes \Xi^{i/2})$ de $[H^i(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Q}}_l, \xi}(\pi_v, r)_1[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$, est associé à un $R_{\pi_k}(s+t_k, 0)(r', 0)(\Pi'_v) \otimes (\xi_k \otimes \Xi^0)$ de $[H^0(pj_{!*}^{\geq (s+t_k)g} \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Q}}_l, \xi}(\pi_v, s+t_k)_1[d - (s+t_k)g])]\{\Pi^{\infty, v}\}$.
- pour $i = 0$, certains des constituants de $[H^0(pj_{!*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Q}}_l, \xi}(\pi_v, r)_1[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\} \ll$ proviennent \gg des $r' > r$ comme dans le cas précédent et d'autres non.

Illustration sur la figure 3 pour $r = 4$:

- $\text{Speh}_4(\pi_v) \times \text{Speh}_4(\text{St}_3(\pi_v)) \times R_{\pi_v}(4, 5)(4, 0)$ provient de $(8, 0)$;
- $\text{Speh}_4(\pi_v) \times R_{\pi_v}(4, 3)(4, 0) \times \text{Speh}_4(\text{St}_5(\pi_v))$ provient de $(6, 0)$;
- $R_{\pi_v}(4, 1)(4, 0) \times \text{Speh}_4(\text{St}_3(\pi_v)) \times \text{Speh}_4(\text{St}_5(\pi_v))$ ne provient pas d'un $(r', 0)$ pour $r' > 4$.

3.2.9. Notation. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on note $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$ l'ensemble des représentations irréductibles automorphes de $G(\mathbb{A})$ ξ -cohomologique telles que :


 FIGURE 2. Position des $m_{s,t}(r, i) = 1$ dans le cas $s \geq t$ à gauche et $t \geq s$ à droite

- $(\Pi_{p,0})|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1$,
- sa composante locale en v soit de la forme $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi'_v)) \times ?$ avec $r = s + t - 1$, $\pi'_v \sim^i \pi_v$ et $?$ une représentation quelconque de $GL_{d-stg}(F_v)$.

Remarque : ainsi une représentation irréductible automorphe de $G(\mathbb{A})$ ξ -cohomologique dont la composante locale est de la forme

$$\text{Speh}_s\left(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v}) \times \cdots \times \text{St}_{t_u}(\pi_{u,v})\right) = \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$$

appartient à $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v, i}(s + t_i - 1, s)$ pour $i = 1, \dots, u$. En particulier ces ensembles $\mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$ ne sont pas disjoints.

3.2.10. Corollaire. — Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$; pour tout $1 \leq r \leq d/g$, on a

$$[H^i(p; j_{l_*}^{\geq rg} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}, \xi}(\pi_v, r)_1[d - rg])] = \frac{e_{\pi_v} \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)}{d} \sum_{\substack{(s,t) \\ m_{s,t}(r,i)=1}} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s+t-1, s)} m(\Pi) d_\xi(\Pi_\infty) \left(\Pi^{\infty, v} \otimes R_{\pi_v}(s, t)(r, i)(\Pi_v) \right)$$

En utilisant l'égalité suivante, cf. [4] corollaire 5.4.1

$$i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I}}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = i_*^{tg} j_{\mathcal{I}}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) + \sum_{i=1}^{s-t} i_*^{(t+i)g} j_{\mathcal{I}}^{\geq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \xrightarrow{\times} \text{St}_i(\pi_v))(i/2) \quad (3.3.1)$$

on en déduit le calcul de chacun des $H^i(j_{\mathcal{I},*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$. Comme précédemment on traite tout d'abord le cas de $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_v))$.

3.3.2. Proposition. — (cf. [5] §5)

Dans le cas où il existe $\Pi' \in \mathcal{U}_G(\Pi^{\infty,v})$ avec $d_\xi(\Pi'_\infty) \neq 0$ et $\Pi'_v \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_v))$ avec π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, alors pour tout (r, i) , $[H^i(pj_{\mathcal{I}}^{\geq rg'} \mathcal{F}_{\mathbb{Q},\xi}(\pi'_v, r)_1)]\{\Pi^{\infty,v}\}$ est nul si $g' \neq g$ et π'_v n'est pas dans la classe inertielle de π_v et sinon égal à

$$n_{s,t}(r, i) e_{\pi_v} \left(\frac{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)}{d} \sum_{\Pi' \in \mathcal{U}_G(\Pi^{\infty,v})} m(\Pi') d_\xi(\Pi'_\infty) \right) S_{\pi_v}(s, t)(r, i) \otimes \left(\xi \otimes \Xi^{\frac{2i+r-s-t+1}{2}} \right),$$

où $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes \xi \circ \text{val} \circ \det$ et $S_{\pi_v}(s, t)(r, i)$ est une représentation de $GL_{d-tg}(F_v)$ qui s'obtient combinatoirement à partir de $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_v))$ et $n_{s,t}(r, i) \in \{0, 1\}$ est défini ci-après.

3.3.3. Définition. — Les points de coordonnées (r, i) tels que $n_{s,t}(r, i) = 1$ sont tous ceux contenus dans l'enveloppe convexe du polygone de sommets $(s+t-1, 0)$, $(s, 0)$, $(1, s-1)$ et $(t, s-1)$.

Remarque : on trouvera des illustrations de cette définition aux figures 4 et 5.

Remarque : à vrai dire dans [5] on traite seulement les cas $s = 1$ ou $t = 1$. Le calcul procède par analyse de la suite spectrale associée à la filtration de stratification de $j_{\mathcal{I},*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ dont les gradués sont les termes du membre de droite de (3.3.1). La nullité des $n_{s,t}(r, i)$ pour (r, i) n'appartenant pas à l'intérieur du quadrilatère de sommets $(1, 0)$, $(1, s-1)$, $(t, s-1)$ et $(s+t-1, 0)$ est alors immédiate (en utilisant la nullité pour $i < 0$). De même on obtient $n_{s,t}(r, i)$ pour (r, i) appartenant à la ligne polygonale joignant $(1, s-1)$, $(t, s-1)$ et $(s+t-1, 0)$ et que ceux qui sont non nuls sont tels que i a la même parité que le (r, i') sur cette ligne polygonale. Le seul argument combinatoire réside alors dans l'étude de la nullité pour (r, i) appartenant à l'intérieur de $(1, s-1)$, $(s, 0)$, et $(1, 0)$. Dans la suite nous utiliserons simplement le fait que $S_{\pi_v}(s, t)(s+t-1, 0) = R_{\pi_v}(s, t)(s+t-1, 0)$ qui découle directement de ce que nous venons d'explicitier.

Comme dans le paragraphe précédent la multiplicativité de red , cf. le lemme 1.5.5 de [5], permet d'obtenir le cas général.

3.3.4. Proposition. — Soit $\Pi^{\infty,v}$ une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}^{\infty,v})$, pour tout (r, i) , dans le groupe de Grothendieck des représentations de $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_{d-rg}(F_v) \times \mathbb{Z}$,

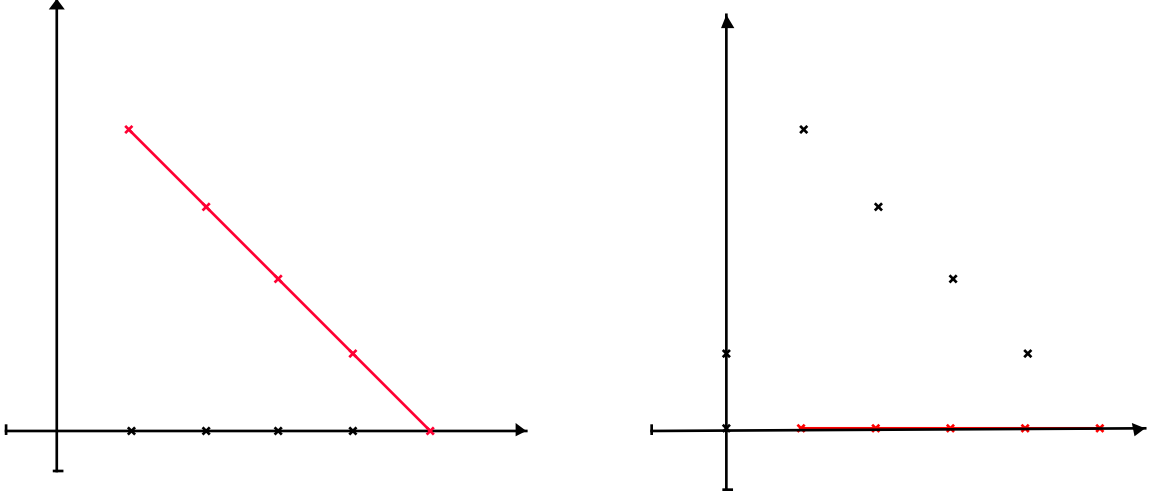


FIGURE 4. Position des $n_{s,t}(r, i) = 1$ dans le cas d'une Speh à gauche et d'une Steinberg à droite

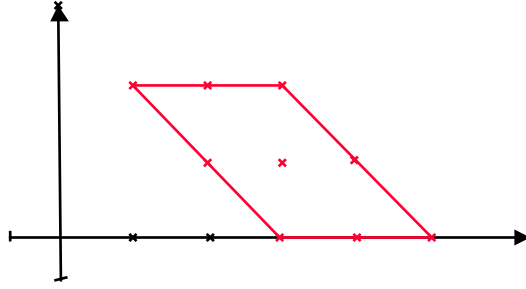


FIGURE 5. Position des $n_{s,t}(r, i) = 1$ pour $\text{Speh}_3(\text{St}_3(\pi_v))$

$[H^i(p_j \overset{\geq rg}{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}, \xi}(\pi_v, r)_1[d - rg])]\{\Pi^{\infty, v}\}$ est égal à

$$n_{s,t}(r, i)e_{\pi_v} \left(\frac{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)}{d} \sum_{\Pi' \in \mathcal{U}_G(\Pi^{\infty, v})} m(\Pi') d_{\xi}(\Pi'_{\infty}) \right) S_{\pi_v}(r, i)(\Pi_v)$$

où

- Π_v est la composante locale commune à tous les $\Pi' \in \mathcal{U}_G(\Pi^{\infty, v})$ tels que $d_{\xi}(\Pi'_{\infty}) \neq 0$, cf. le corollaire VI.2.2 de [10] ;
- $S_{\pi_v}(r, i)(\Pi_v)$ est une somme de représentations de $GL_{d-rg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ définie, pour $\Pi'_v \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$, où les $\pi_{i,v}$ sont des représentations irréductibles cuspidales de $GL_{g_i}(F_v)$ par la formule

$$S_{\pi_v}(r, i)(\Pi_v) = \sum_{k: \pi_{k,v} \sim_i \pi_v} n_{s,t_k}(r, i) S_{\pi_v}(s, t_k)(r, i)(\Pi_v, k) \otimes \left(\xi_k \otimes \Xi^{\frac{2i+r-s-t+1}{2}} \right)$$

où :

- les ξ_k sont tels que $\pi_{k,v} \simeq \pi_v \otimes \xi_k \circ \text{val} \circ \text{det}$;
- $S_{\pi_v}(s, t_k)(r, i)(\Pi_v, k)$ s'écrit comme suit

$$S_{\pi_v}(s, t_k)(r, i)(\Pi_v, k) := \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_{k-1}}(\pi_{k-1,v})) \\ \times S_{\pi_{k,v}}(s, t_k)(r, i) \times \\ \text{Speh}_s(\text{St}_{t_{k+1}}(\pi_{k+1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v})).$$

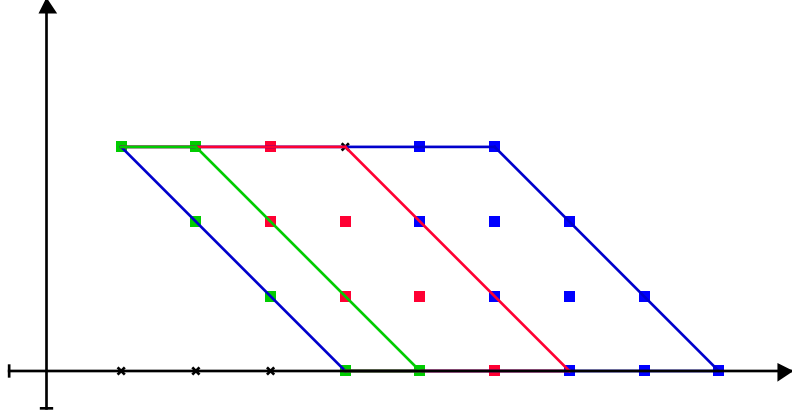


FIGURE 6. Superposition des diagrammes pour le calcul des $n(r, i)$ dans le cas où $\Pi_v \simeq \text{Speh}_4(\pi_v) \times \text{Speh}_4(\text{St}_3(\pi_v)) \times \text{Speh}_4(\text{St}_5(\pi_v))$

3.3.6. Corollaire. — Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$; pour tout $1 \leq r \leq d/g$, on a

$$[H^i(pj!^{\geq rg} \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Q}}, \xi}(\pi_v, r)_1[d - rg])] = \frac{e_{\pi_v} \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)}{d} \\ \sum_{\substack{(s,t) \\ n_{s,t}(r,i)=1}} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s+t-1, s)} m(\Pi) d_{\xi}(\Pi_{\infty}) \left(\Pi^{\infty, v} \otimes S_{\pi_v}(s, t)(r, i)(\Pi_v) \right)$$

où avec les notations précédentes, $S_{\pi_v}(s, t)(r, i)(\Pi_v)$ est donné pour $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_{t_1}(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_{t_u}(\pi_{u,v}))$, par la formule

$$\sum_{\substack{k: \pi_{k,v} \sim_i \pi_v \\ t_k=t}} S_{\pi_v}(s, t)(r, i)(\Pi_v, k) \otimes \left(\xi_k \otimes \Xi^{\frac{2i+r-s-t+1}{2}} \right),$$

avec $\pi_{k,v} \simeq \pi_v \otimes \xi_k \circ \text{val} \circ \text{det}$.

4. Augmentation de l'irréductibilité

4.1. Congruences faibles entre représentations automorphes. — Commençons par rappeler la notion classique de congruence faible entre représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$ comme le lecteur pourra le trouver dans le §3 de [16]. Pour un corps local non archimédien K d'anneau des entiers \mathcal{O}_K , et un groupe réductif G connexe non ramifié sur K tel que $G(\mathcal{O}_K)$ est défini, égal à un sous-groupe ouvert compact maximal spécial de $G(K)$, la \mathbb{Z} -algèbre de Hecke sphérique \mathcal{H}_K de $G(K)$ par rapport à $G(\mathcal{O}_K)$ est commutative.

Pour π_K une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible non ramifiée entière sur l'anneau des entiers \mathcal{O} d'une extension finie de \mathbb{Q}_l contenue dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, l'action de \mathcal{H}_K sur l'espace vectoriel de dimension 1, $\pi_K^{G(\mathcal{O}_K)}$, est donnée par le caractère de Satake

$$\lambda_{\pi_K} : \mathcal{H}_K \longrightarrow \mathcal{O}.$$

4.1.1. Définition. — Deux $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations π_K et π'_K , irréductibles, \mathcal{O} -entières et non ramifiées de $G(K)$ sont dites *congruentes modulo l* si leurs caractères de Satake λ_{π_K} et $\lambda_{\pi'_K}$ ont la même réduction modulo l .

Dans le cas global, soient \mathcal{P} l'ensemble des places finies de \mathbb{Q} et $T \subset \mathcal{P}$ de complémentaire fini tel que pour tout $w \in T$, $G(\mathbb{Q}_w)$ est non ramifié et $G(\mathbb{Z}_w)$ est défini égal à un sous-groupe compact ouvert spécial de $G(\mathbb{Q}_w)$. Pour Π une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible \mathcal{O} -entière de $G(\mathbb{A})$ non ramifiée en toute place de T , la \mathbb{Z} -algèbre de Hecke sphérique \mathcal{H}_T de $G(\mathbb{Q}_T) := \prod_{w \in T} G(\mathbb{Q}_w)$ relativement à $G(\mathbb{Z}_T) := \prod_{w \in T} G(\mathbb{Z}_w)$, agit sur la droite $\pi_T^{G(\mathbb{Z}_T)}$ via le caractère de Satake de Π_T :

$$\lambda_{T,\Pi} : \mathcal{H}_T \longrightarrow \mathcal{O}.$$

4.1.2. Définition. — Deux $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations Π et Π' , irréductibles, \mathcal{O} -entières et non ramifiées de $G(\mathbb{A})$ sont dites *T -congruentes modulo l* si leurs caractères de Satake $\lambda_{T,\pi}$ et $\lambda_{T,\pi'}$ ont la même réduction modulo l . Elles sont dites *faiblement congruentes*, s'il existe un tel ensemble de places T telles qu'elles soient T -congruentes.

Remarque : Π et Π' sont T -congruentes modulo l si et seulement si Π_w et Π'_w sont congruentes pour toute place w de T .

Pour tout ensemble T comme ci-avant et pour toute représentation irréductible Π de $G(\mathbb{A})$ non ramifiée en T , on considère $\Pi_T^{G(\mathbb{Z}_T)}$ comme un \mathcal{H}_T -module et $\Pi^{T,\infty}$ comme une représentation de $\prod_{w \notin T \cup \{\infty\}} G(\mathbb{Q}_w)$.

4.1.3. Notation. — Pour tout ensemble T de places finies w de \mathbb{Q} comme précédemment, avec $p \notin T$, on notera $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbb{Q}}_l,T}(v, h)$ le groupe de Grothendieck des $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations de longueur finie de $\prod_{w \notin T \cup \{\infty, p\}} G(\mathbb{Q}_w) \times \prod_{i=2}^r G(F_{v_i}) \times GL_h(F_v) \times \mathbb{Z}$ munies d'une action de \mathcal{H}_T . Pour $\Pi_T \in \mathfrak{S}_{\bar{\mathbb{Q}}_l,T}(v, h)$ et $T' \subset T$, $\Pi_T^{G(\mathbb{Z}_{T-T'})}$ est un objet de $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbb{Q}}_l,T'}(v, h)$ et on note $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbb{Q}}_l}(v, h)$ la limite projective associée.

Remarque : si $\Pi^{\infty,v} \otimes \Pi'_v \otimes \chi$ est une représentation entière de $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_h(F_v) \times \mathbb{Z}$, alors, cf. l'appendice A de [16], ses caractères de Satake et chacune de ses composantes Π_w sont aussi entiers.

On voit la réduction modulo l de $\Pi_T^{G(\mathbb{Z}_T)} \otimes \Pi^{T,\infty} \otimes \Pi'_v \otimes \chi$ comme un objet du groupe de Grothendieck $\mathfrak{G}_{\mathbb{F}_l,T}(v, h)$ des \mathbb{F}_l -représentations de longueur finie de $GL_h(F_v) \times \mathbb{Z} \times \prod_{w \notin T \cup \{\infty, v\}} G(\mathbb{Q}_w)$ munies d'une action de \mathcal{H}_T .

4.1.4. Définition. — On dira que deux objets « entiers » A et B de $\mathfrak{G}_{\mathbb{Q}_l}(v, h)$ ont même réduction modulo l , et on écrira $r_l(A) = r_l(B)$ si pour tout T comme ci-avant, les images de A_T et B_T dans $\mathfrak{G}_{\mathbb{F}_l,T}(v, h)$ par réduction modulo l sont égales. On dira que A_T est la réduction modulo l de niveau T de A .

Remarque : l'ensemble des réductions modulo l de l'objet de $\mathfrak{G}_{\mathbb{Q}_l}(v, h)$ associées à $\Pi^{\infty,v} \otimes \Pi'_v \otimes \chi$ n'est pas un objet de $\mathfrak{G}_{\mathbb{F}_l}(v, h) = \lim_{\leftarrow T} \mathfrak{G}_{\mathbb{F}_l,T}(v, h)$ car la réduction modulo l ne commute pas en général avec le foncteur des invariants sous $G(\mathbb{Z}_w)$.

4.1.5. Lemme. — *Le foncteur $r_l : \text{Groth}_{\mathbb{Q}_l}(GL_n(\mathbb{Q}_p)) \rightarrow \text{Groth}_{\mathbb{F}_l}(GL_n(\mathbb{Q}_p))$ de réduction modulo l du groupe de Grothendieck des \mathbb{Q}_l -représentations entières de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ dans celui des \mathbb{F}_l -représentations de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ est tel que*

$$r_l\left(\sum_i (-1)^i H^i(X, \mathbb{Q}_l)\right) \simeq \sum_i (-1)^i H^i(X, \mathbb{F}_l).$$

Démonstration. — On choisit une résolution équivariante plate P^\bullet (i.e. sans l -torsion) de la \mathbb{Z}_l cohomologie de sorte que la cohomologie de $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ (resp. $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l$) calcule les $H^\bullet(X, \mathbb{Q}_l)$ (resp. $H^\bullet(X, \mathbb{F}_l)$). On rappelle alors le résultat connu suivant (cf. par exemple [7] proposition 7.1.3) :

4.1.6. Lemme. — *Soit $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ une catégorie dérivée munie d'une t -structure non dégénérée : on note \mathcal{C} son coeur qui est alors une catégorie abélienne de groupe de Grothendieck $\text{Groth}(\mathcal{C})$. L'application qui à un objet \mathcal{F} de \mathcal{D} associe*

$$\sum_i (-1)^i [{}^p h^i \mathcal{F}] \in \text{Groth}(\mathcal{C})$$

induit un isomorphisme du groupe de Grothendieck $K(\mathcal{D})$ de la catégorie triangulée \mathcal{D} , sur $\text{Groth}(\mathcal{C})$, où l'on rappelle qu'étant donnée une catégorie triangulée A localement petite, son groupe de Grothendieck $K(A)$ est défini comme le groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes d'objets de A quotienté, par les relations : $A[1] = -A$ et $A = B + C$ pour tout triangle distingué $B \rightarrow A \rightarrow C \xrightarrow{+1}$.

En considérant les t -structures triviales on en déduit alors que l'image de la somme alternée de la cohomologie de $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ (resp. de $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l$) est égale dans le groupe de Grothendieck correspondant à $\sum_i (-1)^i H^i(X, \mathbb{Q}_l)$ (resp. $\sum_i (-1)^i H^i(X, \mathbb{F}_l)$). Ainsi le résultat découle du fait évident que l'image par le morphisme de réduction modulo l de

la classe de $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ dans $K(D^b(\text{Spec } \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_l))$ est égale à la classe de $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l$ dans $K(D^b(\text{Spec } \mathbb{F}_p, \mathbb{F}_l))$. \square

4.2. Changement de cuspidalité. — Rappelons les notations de 1.1.11 :

- ϱ_{-1} est une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation supercuspidale de $GL_{g_{-1}}(F_v)$;
- pour $u \geq -1$ (resp. $u' \geq u$), on choisit $\pi_{v,u}$ (resp. $\pi_{v,u'}$) une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ (resp. $GL_{g'}(F_v)$) telle que, avec les notations de 1.1.11, on ait $r_l(\pi_{v,u}) = \varrho_u$ (resp. $r_l(\pi_{v,u'}) = \varrho_{u'}$). En particulier on a $g = g_u = g_{-1}m(\varrho)l^u$ (resp. $g' = g_{u'} = g_{-1}m(\varrho)l^{u'}$).

Remarque : dans la suite on écrira $l^{u'-u}$ alors que pour $u = -1$ on devrait écrire $m(\varrho)l^{u'}$; on espère gagner en clarté ce que l'on perdra en rigueur.

On choisit alors r et r' tels que $rg_u = r'g_{u'}$ de sorte que d'après 1.2.3, on a

$$l^{u'-u} \left[\mathbb{F} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v,u}) \right] = \left[\mathbb{F} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v,u'}) \right]. \quad (4.2.1)$$

En revanche comme dans notre situation ${}^p j_{i*}$ ne commute pas avec \mathbb{F} , cf. [7] §5, nous allons utiliser le foncteur j_i et donc l'égalité

$$\begin{aligned} l^{u'-u} \mathbb{F} \left[j_i^{\geq rg} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v,u}) \right] &= l^{u'-u} j_i^{\geq rg} \left[\mathbb{F} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v,u}) \right] \\ &= j_i^{\geq r'g'} \left[\mathbb{F} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v,u'}) \right] = \mathbb{F} \left[j_i^{\geq r'g'} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v,u'}) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

4.2.3. Proposition. — *Avec les notations précédentes et au sens de la définition 4.1.4, on a l'égalité*

$$\begin{aligned} l^{u'-u} \sum_i (-1)^i \sum_{\substack{(s,t) \\ n_{s,t}(r,i)=1}} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s+t-1, s)} m(\Pi) d_\xi(\Pi_\infty) r_l \left(\Pi^{\infty, v} \otimes S_{\pi_{v,u}}(s, t)(r, i)(\Pi_v) \right) \\ = \\ \sum_i (-1)^i \sum_{\substack{(s',t') \\ n_{s',t'}(r',i)=1}} \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s'+t'-1, s')} m(\Pi') d(\Pi'_\infty) r_l \left(\Pi'^{\infty, v} \otimes S_{\pi_{v,u'}}(s', t')(r', i)(\Pi'_v) \right). \end{aligned}$$

Démonstration. — Le résultat découle de la description explicite du corollaire 3.3.6 et du lemme 4.1.5. \square

Remarque : en écrivant l'égalité précédente qu'avec des signes positifs, on voit qu'à un sous-quotient de niveau T d'un $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s+t-1, s)$ correspond un sous-quotient de niveau T d'un Π'

- (i) soit de $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s'+t'-1, s')$ pour un couple (s', t') à déterminer
- (ii) soit de $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s'+t'-1, s')$, et dans ce cas on n'est pas parvenu à changer de cuspidale.

Dans le cas (ii), si $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s+t-1, s)$ est associé à un élément de $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s_1+t_1-1, s_1)$ avec $s_1+t_1 > s+t$, en raisonnant par récurrence on lui associe alors une représentation $\mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s'+t'-1, s')$ comme dans le cas (i) ci dessus ; autrement dit on parvient toujours à changer de cuspidale. Du côté galoisien cela revient à « augmenter l'irréductibilité locale » i.e. en notant $\sigma(\Pi)$ et $\sigma(\Pi')$ les représentations galoisiennes associées respectivement à Π et Π' par la correspondance de Langlands globale, $\sigma(\Pi')$ est congruente à $\sigma(\Pi)$ mais sa composante locale $\sigma(\Pi'_v)$ est « moins réductible » que $\sigma(\Pi_v)$ puisque certains de ses facteurs indécomposables sont devenus irréductibles. Dans les paragraphes suivants nous allons étudier les situations les plus simples de cette égalité.

4.3. Le cas non dégénéré. — On reprend les notations du paragraphe précédent.

4.3.1. Proposition. — Soit $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(t', 1)$ une représentation irréductible automorphe. Il existe alors une représentation irréductible automorphe $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(t, 1)$ avec $tg = t'g'$, qui est congruente avec Π' .

Démonstration. — Soit T' l'ensemble des places finies w de F telles que $G(\mathbb{Q}_w)$ est non ramifié, $G(\mathbb{Z}_w)$ est un sous-groupe compact ouvert maximal de $G(\mathbb{Q}_w)$ et Π'_w est non ramifiée. Fixons $w_0 \in T'$ décomposée dans E et v_0 une place de F au dessus de w_0 telle que, avec la notation 1.3.1, $G(F_{v_0}) \simeq GL_d(F_{v_0})$; on note $T = T' - \{v_0\}$. Notons λ_T le caractère de Satake de Π'_T et soit $\overline{\lambda}_T \otimes \rho^{T, \infty, v} \otimes \varrho_v \otimes \chi$ un constituant irréductible de niveau T de $r_l \left(\Pi'^{\infty, v} \otimes S_{\pi_{v,u'}}(s', t')(r', i)(\Pi'_v) \right)$ avec $\rho_{v_0}^{T, \infty, v}$ une représentation non dégénérée de $GL_d(F_{v_0})$. Pour toute représentation irréductible cuspidale $\tilde{\pi}_v$ de $GL_{\tilde{g}}(F_v)$ et pour tout $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \tilde{\pi}_v}(r, s)$ avec $s > 1$ et r quelconques, $\rho_{v_0}^{T, \infty, v}$ n'est pas un constituant de $r_l(\Pi_{v_0})$, de sorte qu'en particulier pour tout $i \neq 0$, la réduction modulo l de $H^i(\mathcal{F}_{\xi, \tilde{\mathbb{Z}}_l}(r, \tilde{\pi}_v)_1[d - r\tilde{g}])$ ne contient pas $\overline{\lambda}_T \otimes \rho^{T, \infty, v} \otimes \varrho_v \otimes \chi$.

Ainsi dans l'égalité de la proposition 4.2.3 pour $r' = t'$, $\overline{\lambda}_T \otimes \rho^{T, \infty, v} \otimes \varrho_v \otimes \chi$ apparait avec un signe strictement positif dans le membre de droite et donc dans le membre de gauche de sorte qu'il existe Π dont la réduction modulo l de niveau T est supérieure ou égale à $\overline{\lambda}_T \otimes \rho^{T, \infty, v} \otimes \varrho_v \otimes \chi$. \square

4.4. Augmentation de l'irréductibilité globale. — Dans le cas où les faisceaux pervers dont la cohomologie donne l'égalité de 4.2.3, sont à support dans les points supersinguliers, i.e. $rg_u = r'g_{u'} = d$, cette égalité s'écrit comme suit.

4.4.1. Corollaire. — Pour $(r, r') = (s, s')$ tels que $sg_u = s'g_{u'} = d$, 4.2.3 s'écrit

$$\begin{aligned} l^{u'-u} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s,1) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u}}(s,s)} m(\Pi) d_{\xi}(\Pi_{\infty}) r_l(\Pi^{\infty, v}) \\ = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s',1) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi_{v,u'}}(s',s')} m(\Pi') d_{\xi}(\Pi'_{\infty}) r_l(\Pi'^{\infty, v}). \end{aligned}$$

Remarque : l'égalité est aussi valable dans le cas $d < (s + 1)g$.

4.4.2. Corollaire. — *Supposons que dans le corollaire précédent on ait $s' = 1$ et soit $\overline{\lambda}_T \otimes \rho^{T,\infty} \otimes \chi$ un sous-quotient irréductible de niveau T de la réduction modulo l de Π où $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s, s)$. Il existe alors une représentation irréductible $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u'}}(1, 1)$ dont la réduction modulo l de niveau T est supérieure ou égale à $\overline{\lambda}_T \otimes \rho^{T,\infty,v} \otimes \chi$.*

Remarque : le théorème 2 de [13] établit des congruences entre une représentation Π non ramifiée en v telle son paramètre de Satake est congruent à celui de la triviale, et des représentations Π' ramifiées en v , par exemple une Steinberg. Le corollaire précédent pour $g = 1$ et $\pi_{v,u} = 1_v$ construit une telle congruence sauf que nécessairement dans notre situation, la représentation Π est un caractère. Notre technique ne permet pas passer d'un $\Pi_v \simeq \chi_1 \times \chi_2$ à une Steinberg; en revanche elle sait traiter d'autres cas que celui des paramètres de Satake congruent à celui de la triviale.

Remarque : on peut voir le corollaire précédent comme *une augmentation de l'irréductibilité globale* du côté galoisien puisque, via la correspondance de Langlands globale, à $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s, s)$ (resp. à $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u'}}(1, 1)$ tel qu'en une place w quelconque Π'_w est cuspidale) correspond une représentation galoisienne qui est la somme directe de $\frac{d}{s}$ représentations (resp. irréductible). De ce point de vue l'égalité de la proposition 4.2.3 peut sûrement fournir d'autres résultats intéressants. Par exemple pour $r = s - 1$ et $r' = s'$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
& l^{u'-u} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s,1)} m(\Pi) d_{\xi}(\Pi_{\infty}) r_l \left(\Pi^{\infty,v} \otimes \tilde{\pi}_{v,u} \left\{ \frac{1-s}{2} \right\} \right) \\
& + l^{u'-u} \sum_{\pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s-1,s-1)} m(\pi) d_{\xi}(\pi_{\infty}) r_l \left(\Pi^{\infty,v} \otimes S_{\pi_{v,u}}(s-1, s-1)(s-1, 0)(\Pi_v) \right) \\
& + l^{u'-u} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s-1,1)} m(\Pi) d_{\xi}(\Pi_{\infty}) r_l \left(\Pi^{\infty,v} \otimes S_{\pi_{v,u}}(s-1, s-1)(s-1, 0)(\Pi_v) \right) \\
& = \\
& \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u'}}(s',1)} m(\Pi') d_{\xi}(\Pi'_{\infty}) r_l \left(\Pi'^{\infty,v} \otimes S_{\pi_{v,u'}}(s', 1)(s', 0)(\Pi'^{\infty,v}) \right) \\
& + \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u'}}(s',s')} m(\Pi') d_{\xi}(\Pi'_{\infty}) r_l \left(\Pi'^{\infty,v} \otimes S_{\pi_{v,u'}}(s', 1)(s', 0)(\Pi'^{\infty,v}) \right) \\
& + l^{u'-u} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s,s)} m(\Pi) d_{\xi}(\Pi_{\infty}) r_l \left(\Pi^{\infty,v} \otimes \tilde{\pi}_{v,u} \left\{ \frac{s-1}{2} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi les sous-quotients de niveau T de la réduction modulo l des représentations de $\mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s, s)$ doivent aussi apparaître dans le membre de gauche de l'égalité précédente. En regardant en v , comme $\pi_{v,u}$ est cuspidale il ne peut pas être un sous-quotient de la réduction modulo l d'une représentation de la forme $\text{Speh}_{s-1}(\pi')$. Ainsi on obtient des congruences automorphes entre les $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s, s)$ et les $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s, 1) \cup \mathcal{A}_{\xi,\pi_{v,u}}(s-1, 1)$ ce qui s'interprète à nouveau en termes *d'augmentation de l'irréductibilité globale* du côté galoisien

4.5. Torsion dans la cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. —

Nous reprenons les notations précédentes avec $u' > u = -1$.

4.5.1. Proposition. — *Pour tout $r' \geq 1$ tel que $r'g_{u'} \leq d - g_{-1}$, la cohomologie de $j_!^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v, u'})[d - r'g_{u'}]$ et de $j_*^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v, u'})[d - r'g_{u'}]$ a de la torsion.*

Démonstration. — Rappelons que pour un \mathbb{F}_q -schéma X quelconque et un \mathbb{Z}_l -faisceau pervers sans torsion \mathcal{P} , on a la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow H^n(X, \mathcal{P}) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l \longrightarrow H^n(X, \mathbb{F}\mathcal{P}) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{P})[l] \rightarrow 0. \quad (4.5.2)$$

On note r tel que $rg_{-1} = r'g_{u'}$ et soit $s = \lfloor \frac{d}{g_{-1}} \rfloor$. D'après le cas $t = 1$ de la proposition 3.3.2, la partie libre de $H^{s-r}(j_!^{\geq rg_{-1}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v, -1})[d - rg_{-1}])$ est non nulle. Soit alors $i_0 \geq s - r$ l'entier i maximal tel que $H^i(j_!^{\geq rg_{-1}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v, -1})[d - rg_{-1}])$ est non nul; de la suite exacte (4.5.2) on en déduit que i_0 est aussi l'entier le plus grand tel que $H^i(j_!^{\geq rg_{-1}} \mathbb{F}\mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v, -1})[d - rg_{-1}])$ est non nul.

- De (4.2.1), on déduit une filtration de $\mathbb{F}(j_!^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v, u'}))$ par des $j_!^{\geq rg_{-1}} \mathbb{F}\mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v, -1})$.
- De la suite spectrale associée qui calcule les

$$H^i\left(\mathbb{F}\left(j_!^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v, u'})[d - r'g_{u'}]\right)\right),$$

on en déduit que i_0 est aussi le plus grand entier tel que ce groupe de cohomologie est non nul.

D'après 3.3.2, pour $s' = \lfloor \frac{d}{g_{u'}} \rfloor$, le quotient libre de $H^i(j_!^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v, u'})[d - r'g_{u'}])$ est nul, dès que $i > s' - r'$. Or comme par hypothèse $rg_{-1} + g_{-1} \leq d$, on a $i_0 \geq s - r > s' - r'$ et donc d'après (4.5.2) la torsion de $H^{i_0}(j_!^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v, u'})[d - r'g_{u'}])$ est non nulle. Par dualité on en déduit que $H^{-i_0+1}(j_*^{\geq r'g_{u'}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r', \pi_{v, u'})[d - r'g_{u'}])$ a aussi de la torsion. \square

Remarque : avec les notations de la preuve précédente, si $i_0 > s - r$ alors $j_!^{\geq rg_{-1}} \mathcal{F}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}(r, \pi_{v, -1})[d - rg_{-1}]$ a aussi de la torsion dans sa cohomologie.

5. Représentations automorphes fortement congruentes

5.1. Définition de la notion de congruence au sens fort. —

5.1.1. Définition. — Deux $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations irréductibles entières Π et Π' de $GL_d(\mathbb{A}_F)$ sont dites *fortement congruentes modulo l* si pour toute place finie w de F telle que Π_w et Π'_w sont non ramifiées, les réductions modulo l de Π_w et Π'_w sont égales.

Remarque : si pour une place w où Π et Π' sont non ramifiées, $r_l(\Pi_w)$ et $r_l(\Pi'_w)$ sont égales alors la réduction modulo l de leurs caractères de Satake aussi, de sorte que deux représentations fortement congruentes sont aussi faiblement congruentes au sens du §4.1. En ce qui concerne la réciproque remarquons que :

- si Π_w et Π'_w sont irréductibles non ramifiées et non dégénérées alors $r_l(\Pi_w) = r_l(\Pi'_w)$ si et seulement si leurs caractères de Satake sont congrus modulo l .
- Plus généralement si Π_w et Π'_w sont irréductibles non ramifiées, respectivement de la forme $\text{Speh}_s(\pi_w)$ et $\text{Speh}_s(\pi'_w)$ avec π_w et π'_w non dégénérées, alors $r_l(\Pi_w) = r_l(\Pi'_w)$ si et seulement si leurs caractères de Satake sont congrus modulo l .
- Par contre $\Pi_w \simeq \chi_1 \times \cdots \times \chi_d$ irréductible non ramifiée et non dégénérée peut très bien avoir un caractère de Satake congru modulo l à celui de la triviale.

5.1.2. Définition. — Deux $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations irréductibles entières Π et Π' de $G(\mathbb{A})$ sont dites *fortement congruentes modulo l* si les représentations Π_{GL} et Π'_{GL} de $GL_d(\mathbb{A}_F)$ obtenues, à partir de respectivement Π et Π' , par la correspondance de Jacquet-Langlands de leur changement de base, cf. le §VI de [10], sont fortement congruentes au sens de la définition précédente.

Remarque : il résulte des remarques précédentes, que si Π et Π' sont fortement congruentes alors elles sont faiblement congruentes au sens du §4.1.

5.1.3. Proposition. — Soient Π et Π' des $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentations irréductibles automorphes de $G(\mathbb{A})$, entières et ξ -cohomologiques. On note T l'ensemble des places finies de \mathbb{Q} où Π et Π' sont non ramifiées et on suppose que

- les caractères de Hecke $\lambda_{T,\Pi}$ et $\lambda_{T,\Pi'}$ sont congrus modulo l ;
- qu'il existe une place w_0 de T décomposée $w_0 = u_0 u_0^c$ dans E ainsi qu'une place v_0 de F au dessus de u_0 telle qu'avec la notation 1.3.1, $G(F_{v_0}) \simeq GL_d(F_{v_0})$ avec

$$\Pi_{w_0} \simeq \text{Speh}_s(\pi_{w_0}) \text{ et } \Pi'_{w_0} \simeq \text{Speh}_s(\pi'_{w_0})$$

où π_{w_0} et π'_{w_0} sont des représentations irréductibles non dégénérées.

Alors Π et Π' sont fortement congruentes.

Démonstration. — Il découle du deuxième tiret de la remarque précédant la définition 5.1.2, qu'en toute place w de F pour laquelle Π_{GL} et Π'_{GL} sont non ramifiées, les réductions modulo l de $\Pi_{GL,w}$ et $\Pi'_{GL,w}$ sont égales. \square

5.2. Énoncé de la conjecture automorphe. — Désormais π_v et π'_v seront deux représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ ayant la même réduction modulo l . On se propose de montrer l'existence de couples $(\Pi, \Pi') \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s) \times \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)$ de représentations fortement congruentes où $r_l(\pi_v) = r_l(\pi'_v)$, cf. la notation 3.2.9. Afin d'alléger les notations, pour $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$ et pour tout (r', i) tels que $m(r', i) = 1$, on notera $t_{r', i}^{r, s}(\Pi) = \Pi^{\infty, v} \otimes \left(S_{\pi_v}(s, r - s + 1)(r', i)(\Pi_v) \right)$.

5.2.1. Conjecture. — Pour tout $r \geq s$, au sens de 4.1.4, on a

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)} m(\Pi) d_\xi(\Pi_\infty) r_l \left(t_{r,0}^{r,s}(\Pi) \right) = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)} m(\Pi') d_\xi(\Pi'_\infty) r_l \left(t_{r,0}^{r,s}(\Pi') \right).$$

Remarque : pour $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty, v} \otimes \varrho_v \otimes \chi$ un irréductible de $G_{\overline{\mathbb{F}}_l, T}(v, h)$, on choisit pour tout $z \notin T \cup \{\infty\}$ un sous-groupe compact ouvert K_z de $G(\mathbb{Q}_z)$ tel que $\rho_z^{T, \infty}$ a des vecteurs invariants sous K_z . Toute représentation Π de $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times GL_h(F_v)$ dont la réduction modulo l de niveau T contient $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi$, admet, par définition, des vecteurs invariants sous $K^\infty := G(\mathbb{Q}_T) \times \prod_{z \notin T \cup \{\infty\}} K_z$. En particulier il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$ telles que $r_l(t_{r,0}^{r,s}(\Pi))$ contiennent $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi$.

5.2.2. Définition. — La multiplicité de $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes (\chi \otimes \Xi^{\frac{2i+r'-r}{2}})$ dans $\sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)} m(\Pi) d_\xi(\Pi_\infty) r_l(t_{r',i}^{r,s}(\Pi))$ est finie, on la notera $n_{(r',i), \pi_v}^{(r,s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi)$.

Remarque : le lecteur notera que pour $\varrho_v \otimes \chi$ et $\varrho'_v \otimes \chi'$ deux constituants irréductibles de $r_l(S_{\pi_v}(s, r-s+1)(r', i))$ de multiplicité respectives n et n' , on a l'égalité

$$n' \cdot n_{(r',i), \pi_v}^{(r,s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) = n \cdot n_{(r',i), \pi_v}^{(r,s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho'_v \otimes \chi').$$

La conjecture 5.2.1 s'écrit alors comme une famille d'égalités

$$n_{(r,0), \pi_v}^{(r,s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) = n_{(r,0), \pi'_v}^{(r,s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi), \quad (5.2.3)$$

indexée par les $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi$. Ces égalités sont à interpréter en termes de congruences fortes entre représentations automorphes. Précisément pour $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi$ un irréductible de $\mathfrak{G}_{\overline{\mathbb{F}}_l, T}(v, d - rg)$ tel que $n_{(r,0), \pi_v}^{(r,s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) \neq 0$, il existe $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(r, s)$, et donc $\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(r, s)$, dont les réductions modulo l de niveau T de $t_{r,0}^{r,s}(\Pi)$ et $t_{r,0}^{r,s}(\Pi')$ contiennent $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi$. Alors d'après la proposition 5.1.3, Π et Π' sont *fortement congruentes*. En outre pour toute place w , les réductions modulo l de Π_w et Π'_w ne sont pas disjointes : c'est clair pour toutes les places $p' \neq p$ de \mathbb{Z} puisqu'elles contiennent $\rho_{p'}^{T, \infty}$. Pour la place p , c'est à nouveau clair pour les places $v_i \neq v$ et reste alors à traiter le cas de la place v . Écrivons $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_{k,v})) \times ?$ où les $\pi_{i,v} \simeq \pi_v \otimes \xi_i \circ \text{val} \circ \det$ pour $i = 1, \dots, k$ sont inertiuellement équivalents à π_v et

$$\begin{aligned} t_{r,0}^{r,s}(\Pi) &= \Pi^{\infty, v} \otimes \sum_{i=1}^k \left(\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_{1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_{i-1,v})) \right. \\ &\quad \times S_{\pi_{i,v}}(s, r-s+1)(r, 0) \times \\ &\quad \left. \text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_{i+1,v})) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_{k,v})) \times ? \right) \otimes \xi_i. \end{aligned}$$

Notons i un indice pour lequel $\varrho_v \otimes \chi$ est un constituant de la réduction modulo l de $A_v := \left(\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_{1,v})) \times \cdots \times S_{\pi_{i,v}}(s, r-s+1)(r, 0) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_{k,v})) \times ? \right) \otimes \xi_i$. Du

côté de Π' , $\varrho_v \otimes \chi$ est un constituant de la réduction modulo l de $A'_v := \left(\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi'_{1,v})) \times \cdots \times S_{\pi'_{i',v}}(s, r-s+1)(r, 0) \times \cdots \times \text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi'_{k',v})) \times ? \right) \otimes \xi'_{i'}$. Ainsi la réduction modulo l de ξ_i et $\xi'_{i'}$ sont égales et donc, comme $r_l(\pi_v) = r_l(\pi'_v)$, les réductions modulo l de $\pi_{i,v}$ et $\pi'_{i',v}$ sont égales. On en déduit que les réductions modulo l de $S_{\pi_{i,v}}(s, r-s+1)(r, 0)$ et $S_{\pi'_{i',v}}(s, r-s+1)(r, 0)$ sont égales et comme celles de $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi_{i,v}))$ et $\text{Speh}_s(\text{St}_t(\pi'_{i',v}))$ sont aussi égales, du fait que $r_l(A_v)$ et $r_l(A'_v)$ ont un constituant en commun, on en déduit qu'il en est de même pour les réductions modulo l de Π_v et Π'_v .

5.3. Cas très ramifiés. — Nous nous proposons d'étudier dans ce paragraphe le cas très simple où $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall \pi_v, \forall \varrho_v \otimes \chi, \quad n_{(r',i),\pi_v}^{(r,s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) \neq 0 \Leftrightarrow s = 1 \text{ et } i = 0. \quad (5.3.1)$$

Citons comme cas particuliers :

- celui où la représentation ξ est très ramifiée de sorte que, la cohomologie de la variété de Shimura étant concentrée en degré médian, d'après [5] §4, pour tout $s > 1$ les $\mathcal{A}_{\xi,\pi_v}(r, s)$ sont vides.
- celui où il existe une place $x \notin T \cup \{\infty\}$ décomposée $x = yy^c$ dans E et une place z de F au dessus de y telle que, au sens de la notation 1.3.1, $G(F_z) \simeq GL_d(F_z)$ et $\rho_z^{T,\infty}$ est non dégénérée.

Pour un $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty}$ vérifiant la propriété (5.3.1), nous allons prouver les égalités (5.2.3) par récurrence sur r de $s_g := \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ à 1. Pour $r = s_g$, les couples (s, t) tel qu'il existe i pour lequel $m_{s,t}(s_g, i) \neq 0$ sont $(s_g, 1)$ et $(1, s_g)$ ce qui correspond aux représentations

- $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_v}(s_g, s_g)$ et donc $\Pi_v \simeq \text{Speh}_{s_g}(\pi_v) \times ?$,
- $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_v}(s_g, 1)$ et donc $\Pi_v \simeq \text{St}_{s_g}(\pi_v) \times ?$,

avec ? une représentation de $GL_k(F_v)$ avec $k < g$. Rappelons que les extensions intermédiaires et par zéro de $\mathcal{F}_\xi(s_g, \pi_v)[d - s_g g]$ sont égales et qu'alors la $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie est concentrée en degré médian. D'après le corollaire 3.3.6, $\frac{d}{e_{\pi_v} \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)} [H^0(j_!^{\geq s_g g} \mathcal{F}_\xi(s_g, \pi_v)_1[d - s_g g])]$ est égal à

$$\begin{aligned} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_v}(s_g, s_g)} m(\Pi) d_\xi(\Pi_\infty) \Pi^{\infty, v} \otimes S_{\pi_v}(s_g, s_g)(s_g, 0)(\Pi_v) \\ + \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi,\pi_v}(s_g, 1)} m(\Pi) d_\xi(\Pi_\infty) \Pi^{\infty, v} \otimes S_{\pi_v}(s_g, 1)(s_g, 0)(\Pi_v). \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Le cas de $n_{(s_g, 0), \pi_v}^{(s_g, 1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi)$ découle alors de la proposition suivante en utilisant la nullité de $n_{(s_g, 0), \pi_v}^{(s_g, s_g)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi)$ et $n_{(s_g, 0), \pi'_v}^{(s_g, 0)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi)$.

5.3.3. Proposition. — *Au sens de la définition 4.1.4, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, s_g) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)} m(\Pi) d_{\xi}(\Pi_{\infty}) r_l(\Pi^{\infty}) \\ = \sum_{\Pi' \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, s_g) \cup \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, 1)} m(\Pi') d_{\xi}(\Pi'_{\infty}) r_l(\Pi'^{\infty}). \end{aligned}$$

Démonstration. — Notons que l'on a $\mathbb{F}\mathcal{F}_{\xi}(s_g, \pi_v) = \mathbb{F}\mathcal{F}_{\xi}(s_g, \pi'_v)$ et que le foncteur \mathbb{F} commute avec $j_!^{\geq s_g g}$. On en déduit alors que, pour tout sous-groupe compact ouvert $I = G(\mathbb{Z}_T) \times I^{T, \infty}$ de $G(\mathbb{A}^{\infty})$, on a

$$\mathbb{F}H^*(\overline{X}_I, j_!^{\geq s_g g} \mathcal{F}_{\xi}(s_g, \pi_v)_1[d - s_g g]) = H^*\left(\overline{X}_I, \mathbb{F}j_!^{\geq s_g g} \mathcal{F}_{\xi}(s_g, \pi_v)_1[d - s_g g]\right).$$

D'après (5.3.2), on a la formule pour $\Pi^{\infty, v} \otimes S_{\pi_v}(s_g, s_g)(s_g, 0)(\Pi_v)$ (resp. $\Pi^{\infty, v} \otimes S_{\pi_v}(s_g, 1)(s_g, 0)(\Pi_v)$) à la place de Π^{∞} pour $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, s_g)$ (resp. pour $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)$). Pour passer de $S_{\pi_v}(s_g, s_g)(s_g, 0)(\Pi_v)$ (resp. de $S_{\pi_v}(s_g, 1)(s_g, 0)(\Pi_v)$) à Π_v , on raisonne comme précédemment en utilisant que la réduction modulo l de $\text{Speh}_{s_g}(\pi_v)$ (resp. $\text{St}_{s_g}(\pi_v)$) ne dépend que de celle de π_v et de s_g . \square

5.3.4. Lemme. — *Soit $\varrho_v \otimes \chi$ un constituant irréductible de $S_{\pi_v}(s, r - s + 1)(r, 0)(\Pi_v)$, si*

$$n_{(r, 0), \pi_v}^{(r, s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) = n_{(r, 0), \pi'_v}^{(r, s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi)$$

alors pour tout (r', i) et pour toute représentation $\varrho'_v \otimes \chi'$ de $GL_{d-r'g}(F_v) \times \mathbb{Z}$, on a

$$n_{(r', i), \pi_v}^{(r, s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho'_v \otimes \chi') = n_{(r', i), \pi'_v}^{(r, s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho'_v \otimes \chi').$$

Démonstration. — Si $m_{r, s}(r', i) = 0$ c'est bien entendu évident. Sinon le résultat découle du fait que la réduction modulo l de $S_{\pi_v}(s, t)(r', i)$ est égale à celle de $S_{\pi'_v}(s, t)(r', i)$. \square

On suppose à présent, par récurrence, que pour tout $r' > r$ et pour tout s , on a

$$n_{(r', 0), \pi_v}^{(r', s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) = n_{(r', 0), \pi'_v}^{(r', s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi).$$

Du lemme suivant et de la nullité, d'après la propriété (5.3.1), des $n_{(r, 0), \pi_v}^{(r, s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi)$ pour tout $s \geq 2$, on obtient l'égalité ci-dessus pour r ce qui termine la preuve de l'induction de la récurrence.

5.3.5. Lemme. — *L'égalité suivante est vérifiée*

$$\sum_s n_{(r, 0), \pi_v}^{(r, s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) = \sum_s n_{(r, 0), \pi'_v}^{(r, s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi). \quad (5.3.6)$$

Démonstration. — D'après la proposition 3.2.5, le corollaire précédent et le corollaire 3.2.2, pour tout $i \neq 0$, les multiplicités de $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi$ dans la réduction modulo l des parties libres de $H^i(pj_!^{\geq rg} \mathcal{F}_{\xi}(\pi_v, r)[d - rg])$ et $H^i(pj_!^{\geq rg} \mathcal{F}_{\xi}(\pi'_v, r)[d - rg])$ sont égales. Par

ailleurs d'après le lemme 4.1.5, la somme alternée de la réduction modulo l des groupes de cohomologie ne dépend que des parties libres, de sorte que l'égalité

$$\sum_i (-1)^i r_l \left(H^i(pj_1^{\geq rg} \mathcal{F}_\xi(\pi_v, r)_1[d - rg]) \right) = \sum_i (-1)^i r_l \left(H^i(pj_1^{\geq rg} \mathcal{F}_\xi(\pi'_v, r)_1[d - rg]) \right)$$

et ce qui précède, nous donne que les multiplicités de $\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi$ dans la réduction modulo l des parties libres de $H^0(pj_1^{\geq rg} \mathcal{F}_\xi(\pi_v, r)_1[d - rg])$ et de $H^0(pj_1^{\geq rg} \mathcal{F}_\xi(\pi'_v, r)_1[d - rg])$ sont égales, ce qui d'après 3.2.5 donne le résultat annoncé. \square

5.4. Une conjecture sur la torsion. — Comme on peut le voir dans le paragraphe précédent, la propriété (5.3.1), nous sert à séparer les contributions des différents s dans (5.3.6). Donnons une motivation pour croire à 5.2.1 en étudiant le cas $r = s_g$ de la proposition 5.3.3. Supposons alors par l'absurde que

$$n_{(s_g, 0), \pi_v}^{(s_g, 1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) > n_{(s_g, 0), \pi'_v}^{(s_g, 1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi). \quad (5.4.1)$$

5.4.2. Lemme. — Soit T_1 l'ensemble infini des places w de F au dessus d'une place x de T décomposée $x = yy^c$ dans E , telles qu'au sens de la notation 1.3.1, $G(F_w) \simeq GL_d(F_w)$. Alors pour tout sous-ensemble fini $S_1 \subset T_1$ de cardinal pair (resp. impair), il existe une représentation $\Pi_{S_1} \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)$ (resp. $\Pi'_{S_1} \in \mathcal{A}_{\xi, \pi'_v}(s_g, 1)$) ramifiée en toutes les places de T_1 , de sorte que toutes les représentations Π_{S_1} et Π'_{S_1} ainsi construites sont fortement congruentes entre elles.

Démonstration. — Pour $w \in T_1$ et Π_w une représentation de $GL_d(F_w)$ non ramifiée et non dégénérée dont la réduction modulo l du caractère de Satake est $\overline{\lambda}_w$, $r_l(\Pi_w)$ qui ne dépend que de $\overline{\lambda}_w$, contient une unique représentation non dégénérée que l'on note π_w . On regarde la multiplicité de $\overline{\lambda}_{T^w} \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \pi_w \otimes \varrho_v \otimes \chi$ dans l'égalité de 5.3.3 au niveau $T^w = T - \{w\}$ en distinguant les contributions des $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)$ qui sont ou non ramifiées en w , en notant que pour tout $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, s_g)$, π_w n'est pas un constituant de $r_l(\Pi_w)$:

$$\begin{aligned} n_{(s_g, 0), \pi_v}^{(s_g, 1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) + m_w(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) \\ = n_{(s_g, 0), \pi'_v}^{(s_g, 1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) + m'_w(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) \end{aligned}$$

où $m_w(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi)$ correspond donc à la multiplicité de $\overline{\lambda}_{T^w} \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \pi_w \otimes \varrho_v \otimes \chi$ dans la réduction modulo l de niveau T^w des $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)$ qui sont ramifiées en w et non ramifiées en T^w . De l'inégalité (5.4.1), on en déduit que $m'_w(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) > 0$ ce qui prouve le cas où S_1 est de cardinal 1.

Pour tout S_1 , on note $m_{S_1}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi)$ la multiplicité de $\overline{\lambda}_{T-S_1} \otimes \varrho^{T, \infty} \otimes (\prod_{w \in S_1} \pi_w) \otimes \varrho_v \otimes \chi$ dans la réduction modulo l de niveau $T - S_1$ des $\Pi \in \mathcal{A}_{\xi, \pi_v}(s_g, 1)$ qui sont ramifiées en S_1 et non ramifiées en $T - S_1$. On raisonne alors par récurrence sur le cardinal de S_1 en

supposant que pour tout S'_1 de cardinal $\leq r$

$$\begin{aligned} n_{(s_g,0),\pi_v}^{(s_g,1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) &+ (-1)^{\#S'_1} m_{S'_1}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) \\ &= n_{(s_g,0),\pi'_v}^{(s_g,1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) + (-1)^{\#S'_1} m'_{S'_1}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) \end{aligned}$$

L'égalité de la proposition (5.3.3) en niveau $T - S_1$ donne alors :

$$\begin{aligned} n_{(s_g,0),\pi_v}^{(s_g,1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) &+ \sum_{S \subsetneq S_1} m_S(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) + m_{S_1}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) = \\ n_{(s_g,0),\pi'_v}^{(s_g,1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) &+ \sum_{S \subsetneq S_1} m'_S(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) + m'_{S_1}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) \end{aligned}$$

ce qui, par la bien connue formule du binôme $(1 - 1)^r = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} = 0$, fournit

$$\begin{aligned} n_{(s_g,0),\pi_v}^{(s_g,1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) &- n_{(s_g,0),\pi'_v}^{(s_g,1)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) = \\ &(-1)^{\#S_1} \left(m'_{S_1}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) - m_{S_1}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) \right) \end{aligned}$$

□

Comme il est peu probable de construire aussi aisément de telles congruences automorphes, et encore n'avons nous pas poussé de telles constructions au maximum, nous proposons la conjecture suivante équivalente à 5.2.1.

5.4.3. Conjecture. — *Pour tout π_v , pour tout $1 \leq r \leq s_g$ et pour tout i , la réduction modulo l de la torsion de $H_c^i(\mathcal{F}_\xi(\pi_v, r))$, ne dépend dans les $\mathfrak{G}_{\mathbb{F}_l, T}(v, d - rg)$ que de T, i, ξ et $r_l(\pi_v)$.*

Remarque : la torsion construite au §4.5 vérifie bien cette propriété

La conjecture 5.4.3 est équivalente à demander la même propriété pour la réduction modulo l des parties libres des $H_c^i(\mathcal{F}_\xi(\pi_v, r))$, étant entendu que la partie libre d'un \mathbb{Z}_l -module est le quotient par son sous-module de torsion.

Pour montrer l'équivalence entre les deux conjectures 5.2.1 et 5.4.3, on raisonne comme dans le paragraphe précédent et il s'agit de séparer les contributions des différents s dans la formule (5.3.6). Pour ce faire on utilise les parties libres des $H_c^i(\mathcal{F}_\xi(r', \pi_v)[d - r'g])$ pour des $r' < r$ et $i > 0$. En effet comme les diagrammes des $n(r', i)$ du §3.3, ne sont pas les mêmes pour différents s , on procède comme suit. Pour r fixé, on raisonne par récurrence descendante sur s en supposant que pour tout $s > s_0$

$$n_{(r,0),\pi_v}^{(r,s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) = n_{(r,0),\pi'_v}^{(r,s)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi).$$

On regarde alors la réduction modulo l des parties libres de $H_c^{s_0-1}(\mathcal{F}_\xi(\pi_v, r - s_0 + 1)[d - (r - s_0 + 1)g])$ et $H_c^{s_0-1}(\mathcal{F}_\xi(\pi'_v, r - s_0 + 1)[d - (r - s_0 + 1)g])$. Une fois enlevée les contributions des

des (r', s) pour $r' > r$ et celles des (r, s) pour $s \geq s_0$, à l'aide de l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$n_{(r,0),\pi_v}^{(r,s_0)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi) = n_{(r,0),\pi'_v}^{(r,s_0)}(\overline{\lambda}_T \otimes \varrho^{T,\infty} \otimes \varrho_v \otimes \chi).$$

Références

- [1] A. I. Badulescu. Correspondance de Jacquet-Langlands pour les corps locaux de caractéristique non nulle. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(5) :695–747, 2002.
- [2] J. Bellaïche. À propos d'un lemme de Ribet. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 109 :45–62, 2003.
- [3] Menares R. Billerey N. On the modularity of reducible mod l galois representations. *preprint*, 2013.
- [4] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [5] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [6] P. Boyer. Réseaux d'induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate. *Journal of Algebra*, 336 :28–52, 2011.
- [7] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de Shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 2014.
- [8] C. Bushnell and G. Henniart. A congruence property of the Langlands correspondence. *à paraître*, 2011.
- [9] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands locale modulo l . *Proc. London Math. Soc.*, 2012.
- [10] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [11] D. Juteau. Modular Springer correspondence and decomposition matrices. *Thèse de l'Université Paris 7*, 2007.
- [12] Colette Moeglin and Jean-Loup Waldspurger. *Spectral decomposition and Eisenstein series. (Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein. Une paraphrase de l'écriture.)*. Progress in Mathematics (Boston, Mass.). 113. Basel : Birkhäuser Verlag. xxix, 341 p. DM 148.00 ; öS 1154.40 ; sFr. 128.00 , 1994.
- [13] C. M. Sorensen. A generalization of level-raising congruences for algebraic modular forms. *Ann. Inst. Fourier*, 56, no 6 :1735–1766, 2006.
- [14] M.-F. Vignéras. *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [15] M.-F. Vignéras. Induced R -representations of p -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.
- [16] M.-F. Vignéras. Correspondance de Langlands semi-simple pour $GL(n, F)$ modulo $l \neq p$. *Invent. Math.*, 144(1) :177–223, 2001.

- [17] David A. Vogan, Jr. and Gregg J. Zuckerman. Unitary representations with nonzero cohomology. *Compositio Math.*, 53(1) :51–90, 1984.
- [18] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.

BOYER PASCAL • *E-mail* : boyer@math.univ-paris13.fr,