

---

# FILTRATIONS DE STRATIFICATION DE QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA SIMPLES

*par*

Boyer Pascal

---

**Résumé.** — Nous définissons et étudions de nouvelles filtrations dites de stratification d'un faisceau pervers sur un schéma ; contrairement au cas de la filtration par les poids, ou de monodromie, ces filtrations sont valables quel que soit l'anneau  $\Lambda$  de coefficients. Pour  $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$ , nous illustrons ces constructions dans le contexte des variétés de Shimura unitaires simples de [7] pour les faisceaux pervers d'Harris-Taylor et le complexe des cycles évanescents introduits et étudiés dans [3]. Nous montrons aussi comment utiliser ces filtrations afin de simplifier l'étape principale de [3]. Les cas de  $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$  et  $\bar{\mathbb{F}}_l$  seront étudiés dans un prochain article.

**Abstract (Filtration of stratification of some simple Shimura varieties)**

We define and study new filtrations called of stratification of a perverse sheaf on a scheme ; beside the cases of the weight or monodromy filtrations, these filtrations are available whatever are the ring of coefficients. For  $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$ , we illustrate these constructions in the geometric situation of the simple unitary Shimura varieties of [7] for the perverse sheaves of Harris-Taylor and the complex of vanishing cycles introduced and studied in [3]. We also show how to use these filtrations to simplify the principal step of [3]. The cases of  $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$  and  $\bar{\mathbb{F}}_l$  will be studied in another paper.

## Introduction

Pour  $l \neq p$  deux nombres premiers distincts, dans [3] nous avons explicité le faisceau pervers des cycles évanescents à coefficients dans  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ , d'une certaine classe de variétés de Shimura unitaires  $X$  qualifiée de « simple » dans [7], en une place de caractéristique résiduelle  $p$ . Rappelons que cette description ne repose pas sur une étude géométrique de ces variétés qui consisterait à se ramener à une situation semi-stable ; pour l'essentiel les arguments se ramènent à de la combinatoire sur les représentations admissibles des

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

**Mots clefs.** — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, conjecture de monodromie-poids.

groupes linéaires sur un corps local et automorphes d'un groupe symplectique sur un corps de nombres. Au cœur de ces arguments, on trouve la formule des traces de Selberg qui calcule la somme alternée des groupes de cohomologie de certains systèmes locaux dits d'Harris-Taylor, introduits dans [7], et définis sur certaines strates de la fibre spéciale de ces variétés de Shimura. L'apport principal de [3] est l'étude des prolongements de ces systèmes locaux à toute la fibre spéciale. Pour l'essentiel la preuve consiste

- à décrire, dans un certain groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke, les images des extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor puis d'en déduire celle du faisceau pervers  $\Psi_{\mathcal{I}}$  des cycles évanescents.
- Ensuite on étudie la suite spectrale associée à la filtration par les poids de  $\Psi_{\mathcal{I}}$ , calculant ses faisceaux de cohomologie.

Un fait remarquable est que, pour des raisons combinatoires, cette suite spectrale dégénère nécessairement en  $E_2$  et l'étape la plus complexe consiste à montrer que, lorsque ce n'est pas trivialement faux, les  $d_1^{p,q}$  sont non nulles. Pour ce faire, on utilise

- soit, cf. [3], une propriété d'autodualité à la Zelevinsky sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate qui passe par un théorème difficile de comparaison avec l'espace de Drinfeld dû à Faltings et développé par Fargues dans [6];
- soit, cf. [4], des arguments combinatoires complexes reposant sur le théorème de Lefschetz difficile, à propos la cohomologie de la variété de Shimura

Une autre façon de voir ces calculs est de considérer la filtration par les noyaux itérés de la monodromie auquel cas la suite spectrale associée, calculant les faisceaux de cohomologie  $h^i\Psi_{\mathcal{I}}$ , dégénère en  $E_1$ . Cette observation nous suggère une stratégie pour montrer que ces  $h^i\Psi_{\mathcal{I}}$  sont sans torsion : il suffirait

- de construire une filtration entière de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  qui coïnciderait sur  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  avec celle par les noyaux itérés de la monodromie puis
- de montrer que les faisceaux de cohomologie de ces gradués sont sans torsion.

Le point de départ de ce travail est donc de construire une telle filtration entière, l'étude de la torsion des  $h^i\Psi_{\mathcal{I}}$  étant repoussée à un prochain article.

L'idée la plus naturelle pour qu'une telle filtration existe quels que soient les coefficients, est de lui trouver une nature géométrique et donc d'utiliser des stratifications de l'espace. Ainsi pour un faisceau pervers  $P$  sur un schéma muni d'une stratification quelconque, on le filtre au moyen des morphismes d'adjonction  $j_!j^*P \rightarrow P$  et  $P \rightarrow j_*j^*P$ , cf. le §2. Pour  $\Lambda = \mathbb{Z}_l$ , on travaille dans la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres », cf. le §1.3 au sens où étant donné un faisceau pervers « libre », on lui associe une filtration dont les gradués sont « libres ». Pour ce faire on est amené à prendre les coimages, et non les images, des morphismes d'adjonction. Nous verrons dans un prochain papier que ce phénomène qu'il est naturel de nommer « saturation », est directement lié à la torsion. On étudie, §2.3, plus particulièrement deux de ces constructions, la première dite filtration exhaustive de stratification et la deuxième qui lui est duale, la cofiltration exhaustive de stratification.

Au §3, on explicite ces constructions pour les extensions par zéro des  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -systèmes locaux d'Harris-Taylor, §3.3, puis §3.4 pour le  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau pervers des cycles évanescents  $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$ .

En particulier on vérifie que la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$  est égale à celle par les noyaux de la monodromie, alors que la cofiltration coïncide à celle par les images.

Rappelons que l’un des intérêts de cet article est de fournir l’ingrédient théorique pour contrôler la torsion des faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}}$ . Nous montrerons dans un prochain travail que cette torsion est toujours nulle ce qui, par le théorème de Berkovich couplé à l’analogie du théorème de Serre-Tate, montre que la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, cf. [3], est sans torsion et non divisible. Afin d’illustrer les techniques qui seront développées dans ce prochain papier, nous montrons en appendice, comment d’une part obtenir la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  à partir seulement des arguments de somme alternée de [3], puis comment en déduire les  $h^i \Psi_{\mathcal{I}}$ .

La lisibilité du texte doit beaucoup à la relecture précise et aux suggestions de J.-F. Dat qui, en particulier, m’a incité à utiliser le langage des catégories quasi-abéliennes ; je l’en remercie vivement. Merci enfin à D. Juteau pour m’avoir expliqué son travail sur les faisceaux pervers à coefficients entiers.

### Table des matières

Introduction.....	1
1. Faisceaux pervers entiers et théories de torsion.....	3
1.1. Théories de torsion.....	4
1.2. Recollement.....	5
1.3. La catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers libres.....	6
1.4. $t$ -structures perverses.....	10
2. Filtrations de stratification d’un faisceau pervers sans torsion.....	13
2.1. Cas d’une situation de recollement.....	13
2.2. Filtration et cofiltration de stratification.....	16
2.3. Filtrations exhaustives de stratification.....	18
3. Faisceaux pervers sur les variétés de Shimura simples.....	20
3.1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$ .....	20
3.2. Variétés de Shimura unitaires simples.....	21
3.3. Systèmes locaux d’Harris-Taylor.....	22
3.4. Faisceau pervers de Hecke des cycles proches.....	24
Appendice A. Retour sur les résultats faisceautiques de [3].....	29
A.1. Rappels cohomologiques de [7].....	29
A.2. Retour sur la filtration de stratification des $j_i^{\geq tq} HT(\pi_v, \Pi_t)$ .....	30
A.3. Retour sur les filtrations de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ .....	32
Références.....	33

### 1. Faisceaux pervers entiers et théories de torsion

Dans tout le texte,  $\mathbb{K}$  désignera une extension finie de  $\mathbb{Q}_l$  ou  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ , d’anneau des entiers  $\mathbb{O}$  et de corps résiduel  $\mathbb{F} = \mathbb{O}/(\varpi)$ . La lettre  $\Lambda$  désignera une des trois lettres  $\mathbb{K}, \mathbb{O}$  ou  $\mathbb{F}$ .

**1.1. Théories de torsion.** — Une théorie de torsion, cf.[10] 1.3.1, sur une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  est un couple  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  de sous-catégories pleines tel que :

- pour tout objet  $T$  dans  $\mathcal{T}$  et  $L$  dans  $\mathcal{F}$ , on a  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, L) = 0$ ;
- pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , il existe des objets  $A_{\mathcal{T}}$  et  $A_{\mathcal{F}}$  de respectivement  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{F}$ , ainsi qu’une suite exacte courte  $0 \rightarrow A_{\mathcal{T}} \rightarrow A \rightarrow A_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$ .

*Remarque :*  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{F}$ ) est stable par quotients et extensions (resp. sous-objets et extensions). On dira de  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  est une théorie de torsion *héréditaire* (resp. *co-héréditaire*) si  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{F}$ ) est stable par sous-objets (resp. par quotients).

Dans une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  qui est  $\mathbb{O}$ -linéaire, un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  est dit de  $\varpi$ -torsion (resp.  $\varpi$ -libre, resp.  $\varpi$ -divisible) si  $\varpi^N 1_A$  est nul pour un certain entier  $N$  (resp.  $\varpi \cdot 1_A$  est un monomorphisme, resp. un épimorphisme).

**1.1.1. Proposition.** — (cf. [10] 1.3.5) Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne  $\mathbb{O}$ -linéaire; on note  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{F}$ , resp.  $\mathcal{Q}$ ) la sous-catégorie pleine des objets de  $\varpi$ -torsion (resp.  $\varpi$ -libres, resp.  $\varpi$ -divisibles) de  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  est noethérienne (resp. artinienne) alors  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  (resp.  $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ ) est une théorie de torsion héréditaire (resp. co-héréditaire) sur  $\mathcal{A}$ .

*Remarque :* dans une catégorie abélienne  $\mathbb{O}$ -linéaire noethérienne (resp. artinienne) tout  $A$  admet un plus grand sous-objet de  $\varpi$ -torsion  $A_{tor}$  (resp.  $\varpi$ -divisible  $A_{div}$ ) :  $A/A_{tor}$  (resp.  $A/A_{div}$ ) est sans  $\varpi$ -torsion (resp. de  $\varpi$ -torsion) et  $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}(A/A_{tor})$  (resp.  $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}A_{div}$ ).

**1.1.2. Notations.** — Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie triangulée munie d’une  $t$ -structure  $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$  au sens de [2] définition 1.3.1; on notera  $\mathcal{C}$  son cœur,  $\tau_{\leq n}$  et  $\tau_{\geq n}$ , les foncteurs de troncation ainsi que  $h^n := \tau_{\leq n} \tau_{\geq n} = \tau_{\geq n} \tau_{\leq n}$ . Pour  $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$  un foncteur triangulé, on note  ${}^pT$  pour  $h^0 \circ T \circ \epsilon_1$ , où  $\epsilon_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$  est l’inclusion du cœur.

*Remarque :* on rappelle qu’un foncteur triangulé  $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$  est dit  $t$ -exact à droite (resp. à gauche), si  $T(\mathcal{D}_1^{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\leq 0}$  (resp.  $T(\mathcal{D}_1^{\geq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\geq 0}$ ) et  $t$ -exact s’il l’est à droite et à gauche. Si  $(T^*, T_*)$  est une paire de foncteurs triangulés adjoints, alors  $T^*$  est  $t$ -exact à droite si et seulement si  $T_*$  est  $t$ -exact à gauche et alors  $({}^pT^*, {}^pT_*)$  est une paire de foncteurs adjoints de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

**1.1.3. Corollaire.** — (cf. [10] 1.3.6) Si  $\mathcal{C}$  est munie d’une théorie de torsion  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$

$$\begin{aligned} {}^+\mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1} : h^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^+\mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0} : h^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

définissent une nouvelle  $t$ -structure sur  $\mathcal{D}$  dont on note  ${}^+\mathcal{C}$  le cœur lequel est en outre munie d’une théorie de torsion  $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$ .

*Remarque :* on retrouve la  $t$ -structure  $p$  à partir de  $p+$  via les formules :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{A \in {}^+\mathcal{D}^{\leq 0} : {}^+h^0(A) \in \mathcal{F}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{A \in {}^+\mathcal{D}^{\geq -1} : {}^+h^{-1}(A) \in \mathcal{T}\} \end{aligned}$$

de sorte que  ${}^{++}\mathcal{C} = \mathcal{C}[-1]$ . En particulier pour  $A \in \mathcal{C}$  (resp.  $A \in {}^+\mathcal{C}$ ), on a

$$A_{\mathcal{T}} = {}^+h^{-1}A \text{ et } A_{\mathcal{F}} = {}^+h^0A. \quad (\text{resp. } A_{\mathcal{F}} = h^0A \text{ et } A_{\mathcal{T}[-1]} = h^1A).$$

**1.2. Recollement.** — On suppose données trois catégories triangulées  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_U$  et  $\mathcal{D}_F$  ainsi que des foncteurs triangulés  $i_* : \mathcal{D}_F \rightarrow \mathcal{D}$  et  $j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_U$ , vérifiant les conditions de recollement de [2] §1.4.3

1.  $i_*$  possède un adjoint à gauche noté  $i^*$  et un adjoint à droite  $i^!$ ;
2.  $j^*$  possède un adjoint à gauche  $j_!$  et un adjoint à droite  $j_*$ ;
3. on a  $j^*i_* = 0$  et donc par adjonction  $i^*j_! = 0$  et  $i^!j_* = 0$ ; pour  $A \in \mathcal{D}_F$  et  $B \in \mathcal{D}_U$

$$\text{Hom}(j_!B, i_*A) = 0 \text{ et } \text{Hom}(i_*, j_*B) = 0;$$

4. pour tout  $K \in \mathcal{D}$ , il existe  $d : i_*i^*K \rightarrow j_!j^*K[1]$  (resp.  $d : j_*j^*K \rightarrow i_*i^!K[1]$ ), nécessairement unique, tel que le triangle suivant est distingué

$$j_!j^*K \rightarrow K \rightarrow i_*i^*K \rightsquigarrow^d \quad (\text{resp. } i_*i^!K \rightarrow K \rightarrow j_*j^*K \rightsquigarrow^d);$$

5. les foncteurs  $i_*$ ,  $j_!$  et  $j_*$  sont pleinement fidèles : les morphismes d'adjonction  $i^*i_* \rightarrow \text{Id} \rightarrow i^!i_*$  et  $j^*j_* \rightarrow \text{Id} \rightarrow j^*j_!$  sont des isomorphismes.

Étant données des  $t$ -structures  $(\mathcal{D}_U^{\leq 0}, \mathcal{D}_U^{\geq 0})$  sur  $\mathcal{D}_U$  et  $(\mathcal{D}_F^{\leq 0}, \mathcal{D}_F^{\geq 0})$  sur  $\mathcal{D}_F$ , on définit une  $t$ -structure sur  $\mathcal{D}$  par recollement :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i^*K \in \mathcal{D}_F^{\leq 0}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i^!K \in \mathcal{D}_F^{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

**1.2.1. Proposition.** — ([10] proposition 2.30) Supposons  $\mathcal{C}_F$  et  $\mathcal{C}_U$  munies de théorie de torsion  $(\mathcal{T}_F, \mathcal{F}_F)$  et  $(\mathcal{T}_U, \mathcal{F}_U)$ . On définit alors une théorie de torsion sur  $\mathcal{C}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{P \in \mathcal{C} : {}^pi^*P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{T}_U\} \\ \mathcal{F} &:= \{P \in \mathcal{C} : {}^pi^!P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{F}_U\} \end{aligned}$$

**1.2.2. Corollaire.** — ([10] lemme 2.32) On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} {}^pi_*(\mathcal{T}_F) \subset \mathcal{T} \quad {}^pj_!(\mathcal{T}_U) \subset \mathcal{T} \quad {}^pj_{!*}(\mathcal{T}_U) \subset \mathcal{T} \\ {}^pi_*(\mathcal{F}_F) \subset \mathcal{F} \quad {}^pj_*(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F} \quad {}^pj_{!*}(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F} \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Le résultat découle de la nullité de  ${}^pi^*{}^pj_{!*}$ ,  ${}^pi^!{}^pj_{!*}$  ainsi que celle, cf. [2] proposition 1.4.17 (i), des composés  ${}^pj_* \circ {}^pi_*$ ,  ${}^pi^* \circ {}^pj_!$  et  ${}^pi^! \circ {}^pj_*$ .  $\square$

*Remarque :* la  $t$ -structure  $({}^+\mathcal{D}^{\leq 0}, {}^+\mathcal{D}^{\geq 0})$  du corollaire 1.1.3 s'obtient par recollement, i.e.

$${}^+\mathcal{D}^{\leq 0} := \{K \in \mathcal{D}^{\leq 1} : h^1(K) \in \mathcal{T}\} = \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in {}^+\mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i^*K \in {}^+\mathcal{D}_F^{\leq 0}\}$$

$${}^+\mathcal{D}^{\geq 0} := \{K \in \mathcal{D}^{\geq 0} : h^0(K) \in \mathcal{F}\} = \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in {}^+\mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i^!K \in {}^+\mathcal{D}_F^{\geq 0}\}.$$

En effet pour  $K \in \mathcal{D}^{\leq 1}$  avec  $h^1(K) \in \mathcal{T}$ , du triangle distingué  $\tau_{\leq 0}K \rightarrow K \rightarrow h^1(K) \rightsquigarrow$ , par application de  $j^*$  (resp.  $i^*$ ), on en déduit, comme  $j^*(\mathcal{D}^{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_U^{\leq 0}$  (resp.  $i^*(\mathcal{D}^{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_F^{\leq 0}$ ),

que  $h^1(j^*K) = j^*h^1(K)$  (resp.  $h^1(i^*K) = i^*h^1(K)$ ) est de torsion et donc  $j^*K \in {}^+\mathcal{D}_U^{\leq 0}$  (resp.  $i^*K \in {}^+\mathcal{D}_F^{\leq 0}$ ). Réciproquement si  $j^*K \in {}^+\mathcal{D}_U^{\leq 0}$  et  $i^*K \in {}^+\mathcal{D}_F^{\leq 0}$  alors  $K \in \mathcal{D}^{\leq 1}$  avec  $j^*h^1(K) \in \mathcal{T}_U$  et  $i^*h^1(K) \in \mathcal{T}_F$ , soit  $h^1(K) \in \mathcal{T}$ . Le cas de  ${}^+\mathcal{D}^{\geq 0}$  se traite de même.

**1.3. La catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers libres.** — Notons tout d'abord qu'il découle du corollaire 1.1.3 et de la remarque qui le suit que

$$\mathcal{F} := \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+\mathcal{D}^{\geq 0} = \mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$$

est la sous-catégorie pleine des objets libres (resp. divisibles) de  $\mathcal{C}$  (resp. de  ${}^+\mathcal{C}$ ). Les catégories  $\mathcal{C}$  et  ${}^+\mathcal{C}$  étant abéliennes, elles possèdent des noyaux, images, conoyaux et coimages; cependant ces notions peuvent être distinctes selon qu'on considère  $\mathcal{C}$  ou  ${}^+\mathcal{C}$ , i.e. elles ne fournissent pas nécessairement des objets de  $\mathcal{F}$ .

**1.3.1. Lemme.** — *La catégorie  $\mathcal{F}$  admet des noyaux et des conoyaux. Plus précisément pour  $L, L' \in \mathcal{F}$  et  $f : L \rightarrow L'$ , le noyau  $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f$  (resp. le conoyau  $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f$ ) de  $f$  dans  $\mathcal{F}$  est égal à celui  $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f$  (resp.  $\text{Coker}_{+C} f$ ) de  $f$  dans  $\mathcal{C}$  (resp.  ${}^+\mathcal{C}$ ).*

*Démonstration.* — Le noyau  $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f$  (resp.  $\text{Coker}_{+C} f$ ) est un objet de  $\mathcal{F}$  et  $\text{Ker}_{\mathcal{C}} \rightarrow L \rightarrow L'$  (resp.  $L \rightarrow L' \rightarrow \text{Coker}_{+C} f$ ) est l'application nulle. Si  $X \rightarrow L$  (resp.  $L' \rightarrow X$ ) est un morphisme de  $\mathcal{F}$  dont le composé avec  $L \rightarrow L'$  est nul alors,  $X$  étant un objet de  $\mathcal{C}$  (resp. de  ${}^+\mathcal{C}$ ), la propriété universelle de  $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f$  (resp. de  $\text{Coker}_{+C} f$ ), nous fournit une flèche  $\text{Ker}_{\mathcal{C}} \rightarrow L$  (resp. par  $L' \rightarrow \text{Coker}_{+C} f$ ) qui factorise  $X \rightarrow L$  (resp.  $L' \rightarrow X$ ). Ainsi  $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f$  (resp.  $\text{Coker}_{+C} f$ ) est un noyau (resp. conoyau) de  $f$  dans  $\mathcal{F}$ .  $\square$

*Remarque :* d'après la remarque suivant 1.1.3,  ${}^+h^0 \text{Coker}_{\mathcal{C}} f$  est le quotient libre de  $\text{Coker}_{\mathcal{C}} f$ . Si  $L' \rightarrow X$  est un morphisme de  $\mathcal{F}$  dont le composé avec  $L \rightarrow L'$  est nul, alors  $X$  étant un objet de  $\mathcal{C}$ , on a une flèche  $\text{Coker}_{\mathcal{C}} f \rightarrow X$  telle que le composé  $(\text{Coker}_{\mathcal{C}} f)_{\text{tor}} \hookrightarrow \text{Coker}_{\mathcal{C}} f \rightarrow X$  est nul, i.e.  $L' \rightarrow X$  se factorise par  ${}^+h^0 \text{Coker}_{\mathcal{C}} f$ . Ce dernier est donc égal à  $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f = \text{Coker}_{+C} f$ . De la même façon on a  $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f = h^0 \text{Ker}_{+C} f$ .

**1.3.2. Définition.** — Pour  $L, L' \in \mathcal{F}$  et  $f : L \rightarrow L'$ , on rappelle que l'image  $\text{Im}_{\mathcal{F}} f$  (resp. la coimage  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f$ ) de  $f$  dans  $\mathcal{F}$  est  $\text{Ker}_{\mathcal{F}}(L' \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{F}} f)$  (resp.  $\text{Coker}_{\mathcal{F}}(\text{Ker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L)$ ).

**1.3.3. Lemme.** — *Pour  $f$  un morphisme de  $\mathcal{F}$ , on a  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f = \text{Coim}_{\mathcal{C}} f = \text{Im}_{\mathcal{C}} f$  et  $\text{Im}_{\mathcal{F}} f = \text{Im}_{+C} f = \text{Coim}_{+C} f$ . En outre  $f$  induit une flèche canonique  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$ .*

*Démonstration.* — On procède comme dans la preuve du lemme précédent en notant que dans  $\mathcal{C}$  on a  $\text{Im}_{\mathcal{C}} f \hookrightarrow L'$  et donc  $\text{Im}_{\mathcal{C}} f$  est un objet de  $\mathcal{F}$ . De même dans  ${}^+\mathcal{C}$ , on a  $L \twoheadrightarrow \text{Coim}_{+C} f$  et donc  $\text{Coim}_{+C} f$  est un objet de  $\mathcal{F}$ .

En outre  $f : L \rightarrow L'$  se factorise par  $\text{Im}_{\mathcal{F}} f$  et comme le composé  $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$  est nul, il induit un morphisme canonique  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$ .  $\square$

**1.3.4. Définition.** — (cf. [11] §1.1.3) La flèche  $f$  est dite *stricte* si le morphisme canonique  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$  est un isomorphisme ; on notera alors  $f : L \dashrightarrow L'$ . Une suite  $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow 0$  sera dite *strictement exacte* si  $L_1$  est un noyau de  $L_2 \rightarrow L_3$  et  $L_3$  un conoyau de  $L_1 \rightarrow L_2$ .

*Remarque :* ( $f : L \rightarrow L'$ ) est un monomorphisme strict et on note  $L \dashrightarrow L'$  (resp. un épimorphisme strict et on note  $L \dashrightarrow L'$ ) si et seulement si son conoyau dans  $\mathcal{C}$  (resp. son noyau dans  ${}^+\mathcal{C}$ ) est un objet de  $\mathcal{F}$ . Dans ce cas  $0 \rightarrow L \rightarrow L' \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow 0$  (resp.  $0 \rightarrow \text{Ker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L \rightarrow L' \rightarrow 0$ ) est strictement exacte.

*Remarque :* la composée de deux monomorphismes (resp. épimorphismes) stricts est strict ; réciproquement si  $u \circ v$  est un monomorphisme (resp. épimorphisme) strict alors  $v$  (resp.  $u$ ) est strict. <sup>(1)</sup>

**1.3.5. Proposition.** — La catégorie  $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$  des objets libres (resp. divisibles) de  $\mathcal{C}$  (resp. de  ${}^+\mathcal{C}$ ) est quasi-abélienne au sens de la définition 1.1.3 de [11].

*Démonstration.* — Nous avons déjà vu que  $\mathcal{F}$  possédait des noyaux et conoyaux. Soit alors  $f : L_1 \dashrightarrow L_2$  un épimorphisme strict et

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ L'_1 & \longrightarrow & L'_2 \end{array}$$

un diagramme cartésien. Notons  $L = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(L_1 \rightarrow L_2)$  de sorte que  $0 \rightarrow L \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow 0$  est une suite exacte courte de  $\mathcal{C}$ . Soit alors  $\tilde{L}_1$  le tiré en arrière dans  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_2 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \tilde{L}_1 & \dashrightarrow & L'_2 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Comme  $L$  et  $L'_2$  sont libres dans  $\mathcal{C}$  alors  $\tilde{L}_1$  est un objet de  $\mathcal{F}$  et l'épimorphisme strict  $\tilde{L}_1 \dashrightarrow L'_2$  se factorise par  $L'_1$  de sorte que  $L'_1 \dashrightarrow L'_2$  est strict d'après la remarque précédente. Dualement pour  $L_1 \rightarrow L_2$  un monomorphisme strict et un diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} L'_1 & \longrightarrow & L'_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ L_1 & \longrightarrow & L_2, \end{array}$$

1. Ces propriétés sont générales dans les catégories quasi- abéliennes cf. la proposition 1.1.8 de [11].

le conoyau  $L$  dans  $\mathcal{C}$  de  $L_1 \dashrightarrow L_2$  est libre. On note  $\tilde{L}_2$  le poussé en avant dans  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L'_1 & \dashrightarrow & \tilde{L}_2 & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L \longrightarrow 0. \end{array}$$

Comme précédemment  $\tilde{L}_2$  est un objet de  $\mathcal{F}$  et le monomorphisme strict  $L'_1 \dashrightarrow \tilde{L}_2$  se factorise par  $L'_2$  de sorte que d'après la remarque précédente,  $L'_1 \dashrightarrow L'_2$  est strict. Ainsi les conditions (QA) et (QA\*) de [11] sont vérifiées et  $\mathcal{F}$  est quasi-abélienne.  $\square$

**1.3.6. Notation.** — Un morphisme  $f : L \rightarrow L'$  qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme sera noté  $f : L \dashrightarrow L'$ ; on dit aussi que  $f$  est un bimorphisme.

*Remarque :* la flèche canonique  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$  est un exemple de bimorphisme. Avec ces notations la factorisation canonique d'une flèche dans une catégorie quasi-abélienne s'écrit comme suit.

**1.3.7. Proposition.** — Tout  $f : L \rightarrow L'$  admet une factorisation canonique

$$L \dashrightarrow \text{Coim}_{\mathcal{F}} f \dashrightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f \dashrightarrow L'.$$

**1.3.8. Définition.** — Pour  $f$  un monomorphisme,  $\text{Im}_{\mathcal{F}}$  est appelé le saturé de  $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f$ .

**1.3.9. Lemme.** — Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est  $\mathbb{O}$ -linéaire, un morphisme  $f$  de  $\mathcal{F}$  est un bimorphisme si et seulement si  $f \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$  est un isomorphisme. Dans ce cas pour tout entier  $n$  assez grand, il existe  $g : L' \dashrightarrow L$  tel que  $g \circ f = \varpi^n \text{Id}$ .

*Démonstration.* — Si  $f : L \rightarrow L'$  est un monomorphisme de  $\mathcal{F}$  alors comme  $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f = \text{Ker}_{\mathcal{C}} f$ , c'est aussi un monomorphisme de  $\mathcal{C}$ . Comme  $f$  est un épimorphisme,  $\text{Coker}_{\mathcal{C}} f$  est de torsion, autrement dit,  $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f = \text{Coker}_{+\mathcal{C}} f = {}^+h^0 \text{Coker}_{\mathcal{C}} f$  est nul puisque  ${}^+h^0 \text{Coker}_{\mathcal{C}} f$  est le quotient libre de  $\text{Coker}_{\mathcal{C}} f$ .

À  $L \dashrightarrow L'$  est associée une suite exacte courte dans  $\mathcal{C}$ ,  $0 \rightarrow L \rightarrow L' \rightarrow T \rightarrow 0$  où  $T$  est un objet de  $\varpi^n$  torsion de  $\mathcal{C}$  pour  $n$  assez grand. Soit alors

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L_0 & \dashrightarrow & T \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \times \varpi^n \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \times \varpi^n & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L & \dashrightarrow & L_0 & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \end{array}$$

où  $L_0 \simeq L \oplus T$ . La composée  $L' \rightarrow L_0 \rightarrow L$  est alors un monomorphisme de  $\mathcal{C}$  dont le conoyau est de torsion, i.e.  $L' \dashrightarrow L$ .  $\square$

*Remarque :* la relation  $L \dashrightarrow L'$  est d'équivalence sur  $\mathcal{F}$ .



**1.3.10. Définition.** — Pour  $L$  un objet de  $\mathcal{F}$ , on dira que

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_e = L$$

est une  $\mathcal{F}$ -filtration si pour tout  $1 \leq i \leq e - 1$ , le monomorphisme  $L_i \hookrightarrow L_{i+1}$  est strict. Dualement  $L = L_{-e} \twoheadrightarrow L_{-e-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow L_{-1}$  est une  $\mathcal{F}$ -cofiltration si pour tout  $1 \leq i \leq e - 1$ , l'épimorphisme  $L_{-i-1} \twoheadrightarrow L_{-i}$  est strict.

Considérons à nouveau une situation de recollement comme dans le paragraphe précédent. Selon la notation 1.1.2, considérons les foncteurs  ${}^p j_!$ ,  ${}^{p+} j_!$ ,  ${}^p j_*$ ,  ${}^{p+} j_*$  ainsi que les foncteurs extensions intermédiaires  ${}^p j_{!*}$  et  ${}^{p+} j_{!*}$ . D'après [10] 2.42-2.46, on a les triangles distingués :

$$\begin{aligned} {}^p j_! &\rightarrow {}^{p+} j_! \rightarrow {}^p i_* h_{tors}^{-1} i^* j_*[1] \rightsquigarrow \\ {}^{p+} j_! &\rightarrow {}^p j_{!*} \rightarrow {}^p i_* h_{libre}^{-1} i^* j_*[1] \rightsquigarrow \\ {}^p j_{!*} &\rightarrow {}^{p+} j_{!*} \rightarrow {}^p i_* h_{tors}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ {}^{p+} j_{!*} &\rightarrow {}^p j_* \rightarrow {}^p i_* h_{libre}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ {}^p j_* &\rightarrow {}^{p+} j_* \rightarrow {}^p i_* h_{tors}^1 i^* j_*[-1] \rightsquigarrow \end{aligned}$$

**1.3.11. Lemme.** — Soit  $L \in \mathcal{F}_U$  alors  ${}^{p+} j_! L$ ,  ${}^p j_{!*} L$ ,  ${}^{p+} j_{!*} L$  et  ${}^p j_* L$  sont des objets de  $\mathcal{F}$ .

**1.3.12. Notation.** — Pour  $L, L' \in \mathcal{F}$ , on notera  $f : L \hookrightarrow_+ L'$  une flèche  $f : L \hookrightarrow L'$  au sens de la notation 1.3.6, dont le conoyau dans  $\mathcal{C}$  est dans l'image essentielle de  $\mathcal{C}_F$ .

*Remarques :* a) pour tout  $L \in \mathcal{F}_U$ , on voit que  ${}^{p+} j_! L \rightarrow {}^p j_{!*} L$  (resp.  ${}^{p+} j_{!*} L \rightarrow {}^p j_* L$ ) est un épimorphisme (resp. un monomorphisme) strict, et que

$${}^{p+} j_! L \dashrightarrow {}^p j_{!*} L \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L \dashrightarrow {}^p j_* L$$

est la factorisation canonique du morphisme  ${}^{p+} j_! L \rightarrow {}^p j_* L$  au sens de 1.3.7.

b) La construction de la preuve du lemme 1.3.9, fournit  ${}^{p+} j_{!*} L \hookrightarrow {}^p j_{!*} L$  dont le conoyau dans  $\mathcal{C}$  est  $j_{!*}(L/l^n L)$ .

**1.3.13. Lemme.** — Soient  $L \in \mathcal{F}_U$ ,  $M \in \mathcal{F}_X$  et  $f : {}^p j_{!*} L \hookrightarrow_+ M$ . Alors il existe  $g : M \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L$  tel que  $g \circ f : {}^p j_{!*} L \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L$  est le morphisme canonique.

*Démonstration.* — Soit  $M \rightarrow {}^p j_* j^* M$  le morphisme d'adjonction et notons  $Q$  le conoyau dans  $\mathcal{F}$  de  ${}^{p+} j_{!*} j^* M \dashrightarrow {}^p j_* j^* M$ . De la nullité de  $\text{Hom}({}^p j_{!*} L, Q)$ , on en déduit, via l'épimorphisme  ${}^p j_{!*} L \twoheadrightarrow M$  que  $M \rightarrow Q$  est nulle ce qui fournit, en utilisant  $j^* M \simeq L$ , une flèche  $M \rightarrow {}^{p+} j_{!*} L$  qui factorise  ${}^p j_{!*} L \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L$  et donc  $M \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L$ .  $\square$

*Remarque :* dualement si  $f : M \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*} L$  est telle que  $\text{Coker}_{\mathcal{C}} f$  est dans l'image essentielle de  $\mathcal{C}_F$  alors  $f : M \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L$  factorise  ${}^p j_{!*} L \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*} L$ . En particulier on notera que  $f : M \hookrightarrow_+ {}^p j_{!*} L$  (resp.  $f : {}^{p+} j_{!*} L \hookrightarrow_+ M$ ) est nécessairement un isomorphisme.

**1.3.14. Proposition.** — On suppose que  $j_*$  (resp.  $j_!$ ) est  $t$ -exact pour  $\mathcal{C}$  (resp.  ${}^+ \mathcal{C}$ ) alors  $j_*(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$  (resp.  $j_!(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$ ).

*Démonstration.* — Soit  $L \in \mathcal{F}_U$ ; comme  ${}^p j_* = j_*$ ,  $j_* L \in \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+ \mathcal{D}^{\geq 0} = \mathcal{F}$ . Le cas de  $j_!$  est dual : comme  ${}^+ j_! = j_!$ , alors  $j_! L \in \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+ \mathcal{D}^{\geq 0}$  d'où le résultat.  $\square$

**1.4.  $t$ -structures perverses.** — Dans la suite  $S$  désigne le spectre soit d'un corps, soit d'un anneau de valuation discrète hensélien  $A$ , ou celui du normalisé  $\bar{A}$  de  $A$  dans une clôture algébrique du corps des fractions de  $A$ . On rappelle en outre que  $\Lambda$  désigne une des trois lettres  $\mathbb{K}, \mathbb{O}$  ou  $\mathbb{F}$  introduites plus haut. Soit alors  $X$  un schéma de type fini sur  $S$ . On note  $\mathcal{D} := D_c^b(X, \Lambda)$  la sous-catégorie pleine de  $D(X, \Lambda)$  formée des complexes à cohomologie bornée constructible.

**1.4.1. Notation.** — Dans la suite du texte,  $h^i$  désignera le foncteur cohomologique associée à la  $t$ -structure naturelle sur la catégorie dérivée considérée.

(a) **Cas où  $S$  est le spectre d'un corps** : on considérera dans cette situation la  $t$ -structure perverse  $p$  définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^p D^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p D^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où  $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$ . On note alors  ${}^p \text{FP}(X, \Lambda)$  le cœur de cette  $t$ -structure : c'est une catégorie abélienne noethérienne et  $\Lambda$ -linéaire.

*Remarque* : un objet  $A$  de  $D_c^b(X, \mathbb{O})$  est dans  ${}^p D^{\leq 0}(X, \mathbb{O})$  si et seulement si  $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}$  est un objet de  ${}^p D^{\leq 0}(X, \mathbb{F})$ .

**1.4.2. Notation.** — Les foncteurs cohomologiques associés à la  $t$ -structure perverse ci-avant seront notés  ${}^p h^i$ .

Dans le cas où  $\Lambda = \mathbb{O}$ , en tant que catégorie abélienne  $\mathbb{O}$ -linéaire, on obtient comme précédemment une autre  $t$ -structure  $p+$

$$\begin{aligned} A \in {}^{p+} D^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^* A = 0, & \forall i > -\dim \overline{\{x\}} + 1 \\ h^{-\dim \overline{\{x\}} + 1} i_x^* A \text{ de torsion} \end{cases} \\ A \in {}^{p+} D^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^! A = 0, & \forall i < -\dim \overline{\{x\}} \\ h^{-\dim \overline{\{x\}}} i_x^! A \text{ libre} \end{cases} \end{aligned}$$

dont on notera  ${}^{p+} \text{FP}(X, \mathbb{O})$  le cœur et  ${}^{p+} h^i$  les foncteurs cohomologiques. C'est une catégorie abélienne artinienne et  $\mathbb{O}$ -linéaire.

*Remarque* :  $A$  est un objet de  ${}^{p+} D^{\geq 0}$  si et seulement si  $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}$  est un objet de  ${}^p D^{\geq 0}(X, \mathbb{F})$ .

**1.4.3. Notation.** — Nous noterons  $\text{FPL}(X, \mathbb{O}) := {}^{p+} \text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$  la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres ».

*Remarque* : un objet  $A$  de  ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$  est libre si et seulement si  $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{O}/(\varpi)$  est pervers.

*Remarque* : la dualité de Grothendieck échange les deux  $t$ -structures perverses  $p$  et  $p+$  de sorte que si  $f$  est un foncteur exact à droite pour la  $t$ -structure  $p$  et commute à la dualité de Grothendieck alors il préserve la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers libres.

**1.4.4. Proposition.** — Pour  $j : U \hookrightarrow X$  affine et  $P \in \text{FPL}(U, \mathbb{O})$  on a

$$j_*P = {}^p j_*P = {}^{p+} j_*P, \quad j_!P = {}^p j_!P = {}^{p+} j_!P,$$

et donc  $j_*P$  et  $j_!P$  sont des objets de  $\text{FPL}(X, \mathbb{O})$ .

*Démonstration.* — Comme  $j$  est affine,  $j_*$  (resp.  $j_!$ ) est  $t$ -exact pour  $p$  (resp.  $p+$ ) et le résultat découle de la proposition 1.3.14.  $\square$

(b) **Cas où  $S = \text{Spec } A$**  : on note

- $f : X \rightarrow S$  le morphisme structural ;
- $s = \text{Spec } k$  (resp.  $\eta = \text{Spec } K$ ) le point fermé (resp. générique) de  $S$  ;
- $X_s$  (resp.  $X_\eta$ ) la fibre spéciale (resp. générique) de  $X$  ;
- $i : X_s \hookrightarrow X$  (resp.  $j : X_\eta \hookrightarrow X$ ) l'inclusion fermée (resp. ouverte).

Le complexe  $f^! \Lambda_S[2](1)$  est dualisant sur  $X$  d'après [5] Th. finitude §4. On considère alors la  $t$ -structure sur  $X$  obtenue par recollement de la perversité autoduale  $p$  sur la fibre spéciale  $X_s$  de  $X$  et de la  $t$ -structure  $({}^p D^{\leq -1}(X_\eta, \Lambda), {}^p D^{\geq -1}(X_\eta, \Lambda))$ , notée  $p[1]$ , où  $p$  est la perversité autoduale sur la fibre générique  $X_\eta$  de  $X$ . Autrement dit, en posant, d'après [1] XIV 2.2, pour  $x$  un point de  $X$  d'image  $y$  dans  $S$ ,  $\delta(x) = \deg \text{Tr } \kappa(x)/\kappa(y) + \dim \overline{\{y\}}$ , on a

$$\begin{aligned} A \in {}^p D^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^q(i_x^* A) = 0, \forall q > -\delta(x) \\ A \in {}^p D^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^q(i_x^! A) = 0, \forall q < -\delta(x) \end{aligned}$$

On définit de même la  $t$ -structure  $p+$  sur  $X$  de sorte que le foncteur dualisant  $D_X = R \text{Hom}(-, K_X)$  échange  ${}^p D^{\leq 0}(X, \Lambda)$  (resp.  ${}^{p+} D^{\leq 0}(X, \Lambda)$ ) et  ${}^{p+} D^{\geq 0}(X, \Lambda)$  (resp.  ${}^p D^{\geq 0}(X, \Lambda)$ ).

**1.4.5. Proposition.** — Le foncteur  $j_*$  (resp.  $j_!$ ) est  $t$ -exact pour  $X_\eta$  muni de la  $t$ -structure  $p[1]$  (resp.  $p + [1]$ ) et  $X$  de la  $t$ -structure  $p$  (resp.  $p+$ ) définie ci-dessus.

*Démonstration.* — Pour  $j_*$ , cf. par exemple [8] bas de la page 48 ; le cas de  $j_!$  est dual.  $\square$

On note alors  ${}^{p[1]} \text{FPL}(X_\eta, \mathbb{O}) := {}^p D^{\leq -1}(X_\eta, \mathbb{O}) \cap {}^{p+} D^{\geq -1}(X_\eta, \mathbb{O})$  la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres ».

**1.4.6. Corollaire.** — (cf. la proposition 1.3.14) Si  $L_\mathbb{O} \in {}^{p[1]} \text{FPL}(X_\eta, \mathbb{O})$  alors  $j_! L_\mathbb{O}$ ,  $j_* L_\mathbb{O}$ ,  ${}^p j_! L_\mathbb{O}$  et  ${}^{p+} j_! L_\mathbb{O}$  appartiennent à  $\text{FPL}(X, \mathbb{O})$ , i.e. sont aussi « libres ».

(c) **Cas où  $S = \text{Spec } \bar{A}$**  : on note

- $\bar{s} = \text{Spec } \bar{k}$  (resp.  $\bar{\eta} = \text{Spec } K$ ) le point fermé (resp. générique) de  $S$  ;
- $X_{\bar{s}}$  (resp.  $X_{\bar{\eta}}$ ) la fibre spéciale (resp. générique) de  $X$  ;
- $\bar{i} : X_{\bar{s}} \hookrightarrow X$  (resp.  $\bar{j} : X_{\bar{\eta}} \hookrightarrow X$ ) l'inclusion fermée (resp. ouverte).

*Remarque* : dans cette situation, il n'y a plus de complexe dualisant.

On considère alors les  $t$ -structures suivantes :

- $p(1)$  en recollant  $({}^pD^{\leq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$  et  $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda))$  ;
- $p(0)$  en recollant  $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$  et  $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda))$ .

*Remarque* : on notera  $p(1)+$  et  $p(0)+$  les  $t$ -structures obtenues en recollant comme ci-dessus à partir des versions  $p+$  sur  $X_{\bar{\eta}}$  et  $X_{\bar{s}}$ .

**1.4.7. Proposition.** — (i) Pour  $X_{\bar{\eta}}$  et  $X$  munis des  $t$ -structures  $p[1]$  et  $p(1)$  (resp.  $p[1]+$  et  $p(1)+$ ), les foncteurs  $\bar{j}_*$  et  $\bar{j}_!$  sont  $t$ -exacts. Pour  $L_{\mathbb{O}} \in {}^{p[1]}\text{FPL}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{O})$ , on a

$$\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} = {}^{p(1)}\bar{j}_!L_{\mathbb{O}} = {}^{p(1)+}\bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \in {}^{p(1)}\text{FPL}(X, \mathbb{O})$$

et on a la suite exacte courte dans  ${}^{p(1)}\text{FPL}(X, \mathbb{O})$  :

$$0 \rightarrow \bar{i}_*\bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow \bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \rightarrow \bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0.$$

(ii) Pour  $X_{\bar{\eta}}$  et  $X$  munis des  $t$ -structures  $p$  et  $p(0)$  (resp.  $p+$  et  $p(0)+$ ), les foncteurs  $\bar{j}_*$  et  $\bar{j}_!$  sont  $t$ -exacts. Pour  $L_{\mathbb{O}} \in {}^p\text{FPL}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{O})$ , on a

$$\bar{j}_!L_{\mathbb{O}} = {}^{p(0)}\bar{j}_!L_{\mathbb{O}} = {}^{p(0)+}\bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \in {}^{p(0)}\text{FPL}(X, \mathbb{O})$$

et on a la suite exacte courte dans  ${}^{p(0)}\text{FPL}(X, \mathbb{O})$  :

$$0 \rightarrow \bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \rightarrow \bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow \bar{i}_*\bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0.$$

*Remarque* : le complexe  $\bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}}$  est le complexe des cycles proches notés  $\Psi_{\eta}(L_{\mathbb{O}})$  que l'on considère muni de son action du groupe de Galois.

*Démonstration.* — (i) Le foncteur  $\bar{j}_*$  (resp.  $\bar{j}_!$ ) est  $t$ -exact à gauche (resp. à droite) pour  $p$  et  $p+$ . Par ailleurs comme d'après [8] §4,  $\bar{i}^*\bar{j}_*$  est  $t$ -exact relativement à  $p$  sur  $X_{\bar{\eta}}$  et  $p$  sur  $X_{\bar{s}}$ , on en déduit que  $\bar{j}_*$  est  $t$ -exact relativement à  $p[1]$  sur  $X_{\bar{\eta}}$  et  $p(1)$  sur  $X$ . En ce qui concerne  $\bar{j}_!$ , considérons le triangle distingué  $\bar{j}_!\bar{j}^*K \rightarrow K \rightarrow \bar{i}_*\bar{i}^*K \rightsquigarrow$  pour  $K = \bar{j}_*L_{\mathbb{O}}$  avec  $L_{\mathbb{O}}$  qui est  $p[1]$  pervers. La suite exacte longue de  $p(1)$ -cohomologie et le fait que  ${}^p h^r \bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}}$  est nul pour tout  $r \neq -1$ , donnent la nullité des  ${}^{p(1)} h^r \bar{j}_!\bar{j}^*K$  pour tout  $r \neq 0$  ainsi que la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \bar{i}_*{}^{p(1)} h^{-1} \bar{i}^*K \rightarrow \bar{j}_!\bar{j}^*K \rightarrow K \rightarrow 0$$

avec  ${}^{p(1)} h^{-1} \bar{i}^*K = \Psi_{\eta}(L_{\mathbb{O}})$  qui est  $p$ -pervers. On en déduit alors que  $\bar{j}_!$  est  $t$ -exact relativement à  $p[1]$  et  $p(1)$  ainsi que  $\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} = {}^{p(1)}\bar{j}_!L_{\mathbb{O}}$ .

Soit alors  $L_{\mathbb{O}}$  qui est  $p[1]+$  pervers et soit  ${}^{p[1]} h^0 L_{\mathbb{O}} \rightarrow L_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_{\mathbb{O}} \rightsquigarrow$  le triangle distingué associé où  ${}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_{\mathbb{O}}[1]$  est  $p[1]$  pervers de torsion et  ${}^{p[1]} h^0 L_{\mathbb{O}}$  est libre. Après application du foncteur exact  $\bar{j}_*$  on obtient  $\bar{j}_*{}^{p[1]} h^0 L_{\mathbb{O}} \rightarrow \bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow \bar{j}_*{}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_{\mathbb{O}} \rightsquigarrow$  où  $\bar{j}_*{}^{p[1]} h^0 L_{\mathbb{O}}$  et  $\bar{j}_*{}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_{\mathbb{O}}[1]$  sont  $p(1)$ -pervers. Par ailleurs comme pour tout  $M$  qui est  $p[1]$ -pervers,  $\bar{j}_*M = {}^{p(1)}\bar{j}_!M$ , il découle du corollaire 1.2.2 que  $\bar{j}_*{}^{p[1]} h^0 L_{\mathbb{O}}$  (resp.  $\bar{j}_*{}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_{\mathbb{O}}[1]$ ) est libre (resp. de torsion). On en déduit alors que  $\bar{j}_*$  est  $t$ -exact à gauche relativement à  $p[1]+$  et



épimorphisme  $f : {}^p j_{!*} j^* L \rightarrow \mathrm{gr}_{U,!}^0(L)$ . Or ce dernier étant un isomorphisme sur  $U$ ,  $\mathrm{Ker}_{\mathcal{F}} f$  est de la forme  $i_* L'$  avec  $L' \in \mathrm{FPL}(F, \Lambda)$ ; comme  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(i_* L', {}^p j_{!*} j^* L)$  est nul on en déduit que  $L'$  est nul et donc que  $f$  est un monomorphisme de  $\mathrm{FPL}(X, \Lambda)$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque* : d'après le lemme 1.3.13, il existe une flèche  $\mathrm{Fil}_{U,!}^0(L)/\mathrm{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} j^* L$  dont la composée avec celle de l'énoncé est la flèche canonique  ${}^p j_{!*} j^* L \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} j^* L$ .

$$\begin{array}{ccc} {}^p j_{!*} j^* L & \xrightarrow{+} & \mathrm{Fil}_{U,!}^0(L)/\mathrm{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \\ & \searrow + & \downarrow + \\ & & {}^{p+} j_{!*} j^* L \end{array}$$

On résume les constructions précédentes par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} {}^p j_{!*} j^* L & \xrightarrow{+} & \mathrm{gr}_{U,!}^0(L) & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ {}^{p+} j_{!*} j^* L & \xrightarrow{+} & \mathrm{Fil}_{U,!}^0(L) & \hookrightarrow_+ & L \xrightarrow{+} i_* {}^{p+} j^* L \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ {}^p h_{\mathrm{libre}}^{-1} i_* j_* j^* L & \xrightarrow{=} & P_L & \xrightarrow{+} & \mathrm{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \end{array}$$

*Remarque* : en utilisant le morphisme  $\mathrm{can}_{*,L}$  du diagramme du début de ce paragraphe, le lecteur vérifiera aisément que  $\mathrm{Fil}_{U,!}^{-1}(L) = \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}\left((\mathrm{can}_{*,L})|_{\mathrm{Im}_{\mathcal{F}}(\mathrm{can}_{!,L})}\right)$  et  $\mathrm{gr}_{U,!}^0(L) = \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}\left((\mathrm{can}_{*,L})|_{\mathrm{Im}_{\mathcal{F}}(\mathrm{can}_{!,L})}\right)$  lequel est bien « coincé » entre

$${}^p j_{!*} j^* L = \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}}\left((\mathrm{can}_{*,L})|_{\mathrm{Coim}_{\mathcal{F}}(\mathrm{can}_{!,F})}\right) \text{ et } {}^{p+} j_{!*} j^* L = \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}\left((\mathrm{can}_{*,L})|_{\mathrm{Im}_{\mathcal{F}}(\mathrm{can}_{!,F})}\right).$$

**2.1.3. Définition.** — La filtration  $\mathrm{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \subset \mathrm{Fil}_{U,!}^0(L) \subset L$  est dite saturée si  $\mathrm{can}_{!,L}$  est strict i.e. si  $\mathrm{Fil}_{U,!}^0(L) = \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}}(\mathrm{can}_{!,L})$ .

*Remarque* : si  $\mathrm{Fil}_{U,!}^0(L) = \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}}(\mathrm{can}_{!,L})$  alors la composée  $P_L \hookrightarrow j_{!*} j^* L \dashrightarrow \mathrm{Fil}_{U,!}^0(L)$  est stricte i.e.  $\mathrm{Fil}_{U,!}^{-1}(L) = \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}}\left((\mathrm{can}_{!,L})|_{P_L}\right)$ . De même l'épimorphisme  ${}^p j_{!*} j^* L \dashrightarrow \mathrm{Fil}_{U,!}^0(L) \dashrightarrow \mathrm{gr}_{U,!}^0(L)$  est strict de sorte que ce dernier est un isomorphisme.

*Remarque* : la dualité  $D$  de Grothendieck-Verdier stabilise  $\mathrm{FPL}(X, \Lambda)$ , échange les monomorphismes (resp. stricts) avec les épimorphismes (resp. stricts). En utilisant  $D(\mathrm{Im}_{\mathcal{F}} f) = \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}}(Df)$  et  $D(\mathrm{can}_{!,L}) = \mathrm{can}_{*,D(L)}$ , on peut dualiser les constructions précédentes, ce qui donne des cofiltrations définies comme suit.

**2.1.4. Définition.** — On note  $Q_L = i_*^p h_{libre}^0 i^* j_* j^* L = \text{Coker}_{\mathcal{F}} \left( p^+ j_{!*} j^* L \rightarrow p j_* j^* L \right)$  et  $p_L$  l'épimorphisme  $p_L : p^+ j_{!*} j^* L \rightarrow Q_L$ . On définit alors

$$\text{CoFil}_{U,*,0}(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{*,L}) \quad \text{et} \quad \text{CoFil}_{U,*,1}(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}}(p_L \circ \text{can}_{*,L}).$$

On obtient ainsi une  $\mathcal{F}$ -cofiltration,  $L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,0}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,1}(L)$  dont le noyau  $\text{gr}_{U,*,1}(L)$  de  $\text{CoFil}_{U,*,0}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,1}(L)$  s'inscrit dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} p j_{!*} j^* L & \xrightarrow{\quad + \quad} & \text{gr}_{U,*,1}(L) \\ & \searrow + & \downarrow + \\ & & p^+ j_{!*} j^* L. \end{array}$$

En ce qui concerne le noyau de  $L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,0}(L)$ , en vertu de la suite exacte dans  $\mathcal{C}$  :

$$0 \rightarrow i_*^p i^! L \rightarrow L \rightarrow p j_* j^* L \rightarrow i_*^p h^1 i^! L \rightarrow 0,$$

on en déduit qu'il est isomorphe à  $i_*^p i^! L$ . On résume cette construction par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{gr}_{U,*,1}(L) & \xrightarrow{\quad + \quad} & p^+ j_{!*} j^* L & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ i_*^p i^! L & \xrightarrow{\quad + \quad} & L & \xrightarrow{\quad + \quad} & \text{CoFil}_{U,*,0}(L) & \xrightarrow{\quad + \quad} & p j_* j^* L \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & \text{CoFil}_{U,*,1}(L) & \xrightarrow{\quad + \quad} & Q_L & \xlongequal{\quad} & p h_{libre}^0 i^* j_* j^* L \end{array}$$

avec  $\text{CoFil}_{U,*,0}(L) \simeq D\left(\text{Fil}_{U,!}^0(D(L))\right)$  et  $\text{CoFil}_{U,*,1}(L) \simeq D\left(\text{Fil}_{U,!}^{-1}(D(L))\right)$ .

**2.1.5. Définition.** — La cofiltration  $L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,0}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,1}(L)$  est dite saturée si  $\text{can}_{*,L}$  est strict, i.e. si les coimages de la définition 2.1.4 sont égales aux images.

*Remarque :* le lecteur notera que  $p_L$  étant strict si  $\text{can}_{*,L}$  est strict alors  $p_L \circ \text{can}_{*,L}$  aussi. L'auteur préférant les filtrations aux cofiltrations, on utilisera la définition suivante.

**2.1.6. Définition.** — Pour  $\delta = 0, 1$ , on note  $\text{Fil}_{U,*}^\delta(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,\delta}(L))$ , i.e.

$$\text{Fil}_{U,*}^0(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{*,L}) \quad \text{et} \quad \text{Fil}_{U,*}^1(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(p_L \circ \text{can}_{*,L}).$$

On obtient ainsi une  $\mathcal{F}$ -filtration  $\text{Fil}_{U,*}^0(L) \hookrightarrow \text{Fil}_{U,*}^1(L) \hookrightarrow L$ .

*Remarque :* de la même façon la filtration  $\text{Fil}_U^{-1}(L) \subset \text{Fil}_U^0(L) \subset L$  définit une  $\mathcal{F}$ -cofiltration

$$L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,!,-1}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,! ,0}(L)$$

avec  $\text{CoFil}_{U,!,-1}(L) := L/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L)$  et  $\text{Fil}_{U,!0}(L) := L/\text{Fil}_{U,!}^0(L)$ . La dualité de Verdier-Grothendieck échange ces notions, i.e. pour  $\delta = 0, 1$  on a  $\text{Fil}_{U,*}^\delta(L) \simeq D\left(\text{CoFil}_{U,!,-\delta}(D(L))\right)$  et  $\text{Fil}_{U,!}^{-\delta}(L) \simeq D\left(\text{CoFil}_{U,*,\delta}(D(L))\right)$ .

**2.2. Filtration et cofiltration de stratification.** — Traitons à présent le cas général où la stratification  $\mathfrak{S}$  admet éventuellement plus de deux strates, i.e.  $e \geq 2$ . Pour tout  $1 \leq h < e$ , on notera  $X^{1 \leq h} := X^{\geq 1} - X^{\geq h+1}$  et  $j^{1 \leq h} : X^{1 \leq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$  l'inclusion correspondante.

**2.2.1. Définition.** — Pour  $L$  un objet de  $\mathcal{F}$  et  $1 \leq r \leq e - 1$ , soit

$$\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) := \text{Im}_{\mathcal{F}}\left({}^{p+}j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L\right).$$

**2.2.2. Proposition.** — La définition précédente munit fonctoriellement tout objet  $L$  de  $\mathcal{F}$  d'une  $\mathcal{F}$ -filtration, au sens de 1.3.10, dite de  $\mathfrak{S}$ -stratification

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^1(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^2(L) \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{e-1}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^e(L) = L.$$

*Démonstration.* — Par construction les  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$  et  $L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$  sont des objets de  $\mathcal{F}$ . En outre comme  $j^{1 \leq r-1,*} \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) \simeq j^{1 \leq r-1,*} L$ , le morphisme d'adjonction  ${}^{p+}j_!^{1 \leq r-1} j^{1 \leq r-1,*} L \longrightarrow L$  se factorise par  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) \\ & \swarrow & \downarrow \\ \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) & \hookrightarrow & L \end{array}$$

de sorte que  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) \longrightarrow \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$  est un monomorphisme strict.  $\square$

**2.2.3. Définition.** — On dira que  $L$  est  $\mathfrak{S}_!$ -saturé si pour tout  $1 \leq r \leq e - 1$ , le morphisme d'adjonction  ${}^{p+}j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L$  est strict, i.e. si  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}}\left({}^{p+}j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L\right)$ . Autrement dit si pour tout  $1 \leq r \leq e - 1$ ,  ${}^p i_{r+1}^* L$  est un objet de  $\mathcal{F}$ .

*Remarque :*  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)$  étant construit, on peut aussi obtenir  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$  comme suit. Le quotient  $L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)$  est à support dans  $X^{\geq r}$  et on considère  $i_{r,*} \text{Fil}_{X=r,!}^0\left(L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)\right)$  au sens de la définition 2.1.1 pour  $U = X^=r \hookrightarrow X^{\geq r}$ . Soit alors  $\widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$  le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) & \hookrightarrow & L & \twoheadrightarrow & L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) & \hookrightarrow & \widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L) & \dashrightarrow & i_{r,*} \text{Fil}_{X=r,!}^0\left(L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)\right) \end{array}$$



Par construction  ${}^{p+h^0}i_r^* \left( \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) \right)$  est nul et donc  ${}^{p+h^0}i_{r+1}^* \left( \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) \right)$  aussi. Ainsi la nullité de  ${}^{p+h^0}i_{r+1}^* \left( i_{r,*} \text{Fil}_{X=r,!}^0 \left( L / \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) \right) \right)$  implique celle de  ${}^{p+h^0}i_{r+1}^* \widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$  de sorte que  $\widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$  est la coimage du morphisme d'adjonction  ${}^{p+j_!^{\geq r}}j^{\geq r,*} \left( \widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L) \right) \rightarrow \widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ . En prenant le  $j^{1 \leq r,*}$  du diagramme précédent, on en déduit que  $j^{1 \leq r,*}L \simeq j^{1 \leq r,*} \widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$  de sorte que  $\widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L) \simeq \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ .

**2.2.4. Définition.** — Pour  $L$  un objet de  $\mathcal{F}$  et  $1 \leq r \leq e-1$ , soit

$$\text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}} \left( L \rightarrow {}^p j_*^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \right).$$

**2.2.5. Proposition.** — La définition précédente munit functoriellement tout objet  $L$  de  $\mathcal{F}$  d'une  $\mathcal{F}$ -cofiltration dite de  $\mathfrak{S}$ -stratification

$$L = \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,e}(L) \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,e-1}(L) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,1}(L) \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,0}(L) = 0.$$

*Remarque :* comme précédemment, on peut construire cette cofiltration de manière itérative. Supposons construit  $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r-1}(L)$  et notons  $K_r = \text{Ker}_{\mathcal{F}} \left( L \dashrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r-1}(L) \right)$  à support dans  $X^{\geq r}$ . Soient alors  $K_r \dashrightarrow i_{r,*} \text{CoFil}_{X=r,*,0}(K_r)$  et le poussé en avant

$$\begin{array}{ccccc} K_r & \hookrightarrow & L & \twoheadrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r-1}(L) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ i_{r,*} \text{CoFil}_{X=r,*,0}(K_r) & \hookrightarrow & \widetilde{\text{CoFil}}_{\mathfrak{S},*,r}(L) & \twoheadrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r-1}(L). \end{array}$$

Comme précédemment on montre que  $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L) \simeq \widetilde{\text{CoFil}}_{\mathfrak{S},*,r}(L)$ .

**2.2.6. Définition.** — Pour tout  $0 \leq r \leq e$ , on note

$$\text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L) := \text{Ker}_{\mathcal{F}} \left( L \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L) \right),$$

i.e.  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}} \left( \text{can}_{*,L} : L \rightarrow {}^p j_*^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \right)$ . On obtient ainsi une  $\mathcal{F}$ -filtration

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-e}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{1-e}(L) \subset \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^0(L) = L$$

dont on note  $\text{gr}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L)$  les gradués. On dit que  $L$  est  $\mathfrak{S}_*$ -saturé si pour tout  $1 \leq r \leq e-1$ , l'épimorphisme  $L \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L)$  est strict.

*Remarque :* on peut aussi définir la cofiltration  $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},!,-r}(L) := L / \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ . Comme précédemment la dualité de Verdier échange ces notions, i.e.  $D \left( \text{CoFil}_{\mathfrak{S},!,-r}(L) \right) \simeq \text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(D(L))$ , et  $D \left( \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L) \right) \simeq \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(D(L))$ .

**2.3. Filtrations exhaustives de stratification.** — Dans ce paragraphe on cherche à raffiner les filtrations du paragraphe précédent de façon à obtenir la filtration la plus fine possible « adaptée » à la stratification  $\mathfrak{S}$  au sens suivant.

**2.3.1. Définition.** — Un faisceau pervers  $L \in \text{FPL}(X, \Lambda)$  est dit adapté à la stratification  $\mathfrak{S}$  s'il existe  $1 \leq h \leq e$  tel que  $L \simeq i_{h,*} i_h^* L$  et que le morphisme d'adjonction  $j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} (i_h^* L) \rightarrow i_h^* L$  induit un bimorphisme

$$i_{h,*} {}^p j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} (i_h^* L) \xrightarrow{+} L.$$

Une  $\mathcal{F}$ -filtration sera dite adaptée à  $\mathfrak{S}$  si tous ses gradués le sont.

*Remarque :* les filtrations  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^\bullet$  et  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^\bullet$  du paragraphe précédent ne sont, en général, pas adaptées à  $\mathfrak{S}$ . Une façon d'y remédier serait de les combiner en considérant les  $\text{gr}_{\mathfrak{S},*}^{i_1} \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^{j_1} \cdots \text{gr}_{\mathfrak{S},*}^{i_e} \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^{j_e}(L)$ . Une autre, plus simple, consiste à utiliser les  $\text{Fil}_{U,!}^{-1}$  du §2.1.

**2.3.2. Notation.** — Pour  $e \geq 2$  et  $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , on note  $v_{2,e}(r)$  la valuation 2-adique de  $r$  i.e.  $r = 2^{v_{2,e}(r)} m$  avec  $m$  impair et on pose  $v_{2,e}(0) = e - 1$ .

**2.3.3. Proposition.** — Étant donnée une stratification  $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supseteq \cdots \supseteq X^{\geq e}\}$  de  $X$ , tout objet  $L$  de  $\text{FPL}(X, \Lambda)$  est muni fonctoriellement d'une  $\mathcal{F}$ -filtration dite exhaustive de  $\mathfrak{S}$ -stratification

$$0 = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}}(L) \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}+1}(L) \subset \cdots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \cdots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-1}-1}(L) = L,$$

telle que pour tout  $|r| < 2^{e-1}$ , il existe  $P_r \in \text{FPL}(X^{=e-v_2(r)}, \Lambda)$  tel que  $\text{grr}_{\mathfrak{S},!}^r(L) := \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^r(L) / \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)$  s'inscrive dans un diagramme commutatif de bimorphismes

$$\begin{array}{ccc} i_{e-v_2(r),*} {}^p j_!^{\geq e-v_2(r)} P_r & \xrightarrow{+} & i_{e-v_2(r),*} {}^{p+} j_!^{\geq e-v_2(r)} P_r \\ & \searrow + & \nearrow + \\ & \text{grr}_{\mathfrak{S},!}^r(L) & \end{array}$$

*Démonstration.* — On va montrer le résultat par récurrence sur  $e$ , le cas  $e = 2$  étant donné par la construction  $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \xrightarrow{+} \text{Fil}_{U,!}^0(L) \xrightarrow{+} \text{Fil}_{U,!}^1(L) := L$  du §2.1. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang  $e - 1$  et traitons le cas de  $e$ . Partant d'un objet  $L$  de  $\text{FPL}(X, \Lambda)$ , on note  $\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) := \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^1(L) = \text{Fil}_{X=1}^0(L)$  et  $\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L) = \text{Fil}_{X=1}^{-1}(L)$  où le gradué  $\text{grr}_{\mathfrak{S},!}^0(L) := \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) / \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)$  « factorise » le morphisme canonique  ${}^p j_!^{\geq 1} (j^{\geq 1,*} L) \xrightarrow{+} {}^{p+} j_!^{\geq 1} (j^{\geq 1,*} L)$ , i.e.

$$\begin{array}{ccc} {}^p j_!^{\geq 1} (j^{\geq 1,*} L) & \xrightarrow{+} & {}^{p+} j_!^{\geq 1} (j^{\geq 1,*} L) \\ & \searrow + & \nearrow + \\ & \text{grr}_{\mathfrak{S},!}^0(L) & \end{array}$$

Comme  $\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)$  (resp.  $L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)$ ) est à support dans  $X^{\geq 2}$ , muni de la stratification  $\mathfrak{S}^1 := \{X^{\geq 2} \supseteq \cdots \supseteq X^{\geq e}\}$ , il est, d'après l'hypothèse de récurrence, muni d'une filtration

$$0 = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-2}}\left(\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)\right) \subset \cdots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0\left(\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)\right) \subset \cdots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-2}-1}\left(\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)\right) = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L),$$

$$\left(\text{resp. } 0 = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-2}}\left(L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)\right) \subset \cdots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-2}-1}\left(L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)\right) = L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L).\right)$$

Pour tout  $|r| < 2^{e-2}$ , on pose  $\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-2}+r}(L) = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^r\left(\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)\right)$  ainsi que le tiré en arrière :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) & \longrightarrow & \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-2}+r}(L) & \dashrightarrow & \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^r\left(L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)\right) \longrightarrow 0. \end{array}$$

En notant que pour  $|r| < 2^{e-2}$ ,  $v_{2,e}(r) = v_{2,e}(\pm 2^{e-2} + r)$ , on voit que la propriété sur les gradués est clairement vérifiée.  $\square$

**2.3.4. Définition.** — On dira que  $L$  est exhaustivement  $\mathfrak{S}_!$ -saturé si dans la construction précédente tous les morphismes d'adjonction considérés  $\text{can}_{!,P_r}$  sont stricts, cf. 2.1.3.

*Remarque :* comme précédemment, en utilisant les  $L' \rightarrow \text{CoFil}_{U,*,0}(L') \rightarrow \text{CoFil}_{U,*,1}(L')$ , on construit une cofiltration exhaustive de  $\mathfrak{S}$ -stratification

$$L = \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,2^{e-1}}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,2^{e-1}-1}(L) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,-2^{e-1}}(L) = 0$$

vérifiant des propriétés analogues à celles de la proposition précédente.

**2.3.5. Définition.** — Avec les notations précédentes, pour tout  $|r| < 2^{e-1}$ ,

$$\text{Fill}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}}\left(L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L)\right)$$

définit une  $\mathcal{F}$ -filtration dont on note  $\text{gr}_{\mathfrak{S},*}^r(L)$  les gradués. Cette filtration sera dite  $\mathfrak{S}_*$ -saturée si les épimorphismes  $L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L)$  sont stricts.

*Remarque :* comme précédemment la dualité de Verdier échange filtrations et cofiltrations, i.e.  $D\left(\text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L)\right) \simeq \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^r(D(L))$  et  $D\left(\text{CoFil}_{\mathfrak{S},!,r}(L)\right) \simeq \text{Fill}_{\mathfrak{S},*}^r(D(L))$ . En particulier si  $L \simeq D(L)$  est autodual, alors il est  $\mathfrak{S}_!$ -saturé si et seulement s'il est  $\mathfrak{S}_*$ -saturé.

*Remarque :* pour  $\mathbb{O}$  un anneau de coefficients, soit  $L_0 \hookrightarrow L_1$  un monomorphisme strict de  $\text{FPL}(X, \mathbb{O})$  dont le conoyau est de la forme  $\bar{i}_*^p j_{!*} P \hookrightarrow L_1/L_0 \hookrightarrow \bar{i}_*^{p+} j_{!*} P$  où  $j : U \hookrightarrow \bar{U}$  est une inclusion ouverte et  $i : \bar{U} \hookrightarrow X$  est une immersion fermée. On suppose donné  $G \in \text{FPL}(X, \mathbb{O})$  tel que  $\bar{i}_*^p j_{!*} P \hookrightarrow G \hookrightarrow \bar{i}_*^{p+} j_{!*} P$ . Comme d'après le lemme 1.3.9,  $\hookrightarrow$

est une relation d'équivalence et que  $L_1/L_0$  et  $G$  sont équivalents à  $\bar{i}_*^p j_{!*} P$ , il existe une flèche  $G \hookrightarrow L_1/L_0$  de sorte que le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \hookrightarrow & L'_1 & \dashrightarrow & G \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ L_0 & \longrightarrow & L_1 & \twoheadrightarrow & L_1/L_0 \end{array}$$

fournit un objet  $L'_1 \hookrightarrow L_1$  munit d'une  $\mathcal{F}$ -filtration  $L_0 \subset L'_1$  dont on a modifié « la position » du gradué  $L'_1/L_0$  par rapport à celle de  $L_1/L_0$ . Plus généralement le lecteur se convaincra qu'étant donnés :

- un objet  $L$  de  $\mathcal{F}$  dont la filtration de  $\mathfrak{S}$ -stratification exhaustive fournit pour tout  $r \in \mathbb{Z}$  tel que  $|r| < 2^{e-1}$  des faisceaux pervers  $P_r$  sur  $X^{=e-v_2(r)}$  et  $i_{e-v_2(r),*}^p j_{!*}^{\geq e-v_2(r)} P_r \hookrightarrow \mathrm{gr}_\mathfrak{S}^r(L) \hookrightarrow i_{e-v_2(r),*}^p j_{!*}^{\geq e-v_2(r)} P_r$ ,
  - pour tout  $|r| < 2^{e-1}$  des  $i_{e-v_2(r),*}^p j_{!*}^{\geq e-v_2(r)} P_r \hookrightarrow G_r \hookrightarrow i_{e-v_2(r),*}^p j_{!*}^{\geq e-v_2(r)} P_r$ ,
- on peut construire  $L'$  dont les gradués de la filtration exhaustive sont les  $G_r$ .

### 3. Faisceaux pervers sur les variétés de Shimura simples

Désormais nous nous placerons dans le cas  $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$ ; le but de ce paragraphe est d'expliciter les constructions précédentes sur le faisceaux pervers des cycles évanescents des variétés de Shimura simples de [7].

**3.1. Rappels sur les représentations de  $GL_n(K)$ .** — Dans la suite  $K$  désigne un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal  $q$  une puissance de  $p$  et on rappelle quelques notations de [3] sur les représentations admissibles de  $GL_n(K)$  à coefficients dans  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  où  $l$  un nombre premier distinct de  $p$ .

**3.1.1. Notation.** — Une racine carrée  $q^{\frac{1}{2}}$  de  $q$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  étant fixée, pour  $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , nous noterons  $\pi\{k\}$  la représentation tordue de  $\pi$  de sorte que l'action d'un élément  $g \in GL_n(K)$  est donnée par  $\pi(g)\nu(g)^k$  avec  $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\mathrm{val}(\det g)}$ .

**3.1.2. Définition.** — Pour  $(\pi_1, V_1)$  et  $(\pi_2, V_2)$  des  $R$ -représentations de respectivement  $GL_{n_1}(K)$  et  $GL_{n_2}(K)$ , et  $P_{n_1, n_2}$  le parabolique standard de  $GL_{n_1+n_2}$  de Levi  $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ , on notera

$$\pi_1 \times \pi_2 := \mathrm{ind}_{P(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}.$$

On rappelle qu'une représentation irréductible admissible  $\pi$  de  $GL_n(K)$  est dite *cuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre. Pour  $g$  un diviseur de  $d = sg$  et  $\pi$  une représentation cuspidale irréductible de  $GL_g(K)$ , l'induite parabolique

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

possède un unique quotient (une unique sous-représentation) irréductible noté  $\text{St}_s(\pi)$  (resp.  $\text{Speh}_s(\pi)$ ). D'après [13] 2.10, l'induite parabolique  $\text{St}_{s-t}(\pi\{-\frac{t}{2}\}) \times \text{Speh}_t(\pi\{\frac{s-t}{2}\})$  admet une unique sous-représentation irréductible que l'on note  $LT_\pi(s, t)$ . Afin d'éviter d'avoir à écrire systématiquement toutes ces torsions, on introduit la notation suivante.

**3.1.3. Notation.** — Un entier  $g \geq 1$  étant fixé, pour  $\pi_1$  et  $\pi_2$  des représentations de respectivement  $GL_{t_1g}(K)$  et  $GL_{t_2g}(K)$ , on notera

$$\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 = \pi_1\{-\frac{t_2}{2}\} \times \pi_2\{\frac{t_1}{2}\}.$$

**3.2. Variétés de Shimura unitaires simples.** — Soit  $F = F^+E$  un corps CM avec  $E/\mathbb{Q}$  quadratique imaginaire pure, dont on fixe un plongement réel  $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ . Dans [7], les auteurs justifient l'existence d'un groupe unitaire  $G_\tau$  vérifiant les points suivants :

- $G_\tau(\mathbb{R}) \simeq U(1, d-1) \times U(0, d)^{r-1}$  ;
- $G_\tau(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p)^\times \times \prod_{i=1}^r (B_{v_i}^{op})^\times$  où  $v = v_1, v_2, \dots, v_r$  sont les places de  $F$  au dessus de la place  $u$  de  $E$  telle que  $p = u^c u$  et où  $B$  est une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  vérifiant certaines propriétés, cf. [7], dont en particulier d'être soit décomposée soit une algèbre à division en toute place et décomposée à la place  $v$ .

Pour tout sous-groupe compact  $U^p$  de  $G_\tau(\mathbb{A}^{\infty, p})$  et  $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ , on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times)$$

**3.2.1. Définition.** — Pour  $U^p$  « assez petit »<sup>(2)</sup> soit  $X_{U^p(m)}$  « la variété de Shimura associée à  $G$  » construite dans [7]. On notera  $\mathcal{I}$  l'ensemble de ces  $U^p$ .

On note  $\mathcal{I}$  l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de  $\mathbb{G}$ , de la forme  $U^p(m)$  et donc muni d'une application  $m_1 : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}$ .

Pour tout  $I \in \mathcal{I}$ ,  $X_I$  est un schéma projectif sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_v$  ; les  $(X_I)_{I \in \mathcal{I}}$  forment un système projectif noté simplement  $X_{\mathcal{I}}$  muni d'une action par correspondance de  $G_\tau(\mathbb{A}^\infty)$ , où les morphismes de restriction du niveau  $g_{J,I}$  sont finis et plats et même étale si  $m_1(I) = m_1(J)$ .

**3.2.2. Définition.** — (cf. [3] §1.3) Pour tout  $1 \leq h \leq d$ ,  $X_{I, \bar{s}}^{\geq h}$  (resp.  $X_{I, \bar{s}}^{=h}$ ) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur  $h$  de la fibre spéciale géométrique  $X_{I, \bar{s}}$  de  $X_I$ , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang  $\geq h$  (resp. égal à  $h$ ).

**3.2.3. Proposition.** — (cf. [9]) Les  $X_{I, \bar{s}}^{=h}$  sont affines de pure dimension  $d - h$ .

*Remarque :* ces  $X_{I, \bar{s}}^{\geq h}$  munissent  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}$  d'une stratification  $\mathfrak{S}$  dite de Newton qui sera la seule considérée de sorte que l'on fera disparaître le symbole  $\mathfrak{S}$  de toutes les notations.

2. tel qu'il existe une place  $x$  pour laquelle la projection de  $U^p$  sur  $G(\mathbb{Q}_x)$  ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [7] bas de la page 90

**3.2.4. Proposition.** — (cf. [7] p.116) Pour tout  $1 \leq h < d$ , les strates  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}$  sont géométriquement induites sous l'action du parabolique  $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$ , au sens où il existe un sous-schéma fermé  $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h}$  tel que :

$$X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h} \simeq X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h} \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/v^{m_1(I)})} GL_d(\mathcal{O}_v/v^{m_1(I)}).$$

**3.2.5. Notation.** — On notera  $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\geq h}$  l'adhérence de  $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h}$  dans  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$ .

*Remarque :* l'action de  $P_{h,d-h}(F_v)$  sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h}$  se factorise par l'application  $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$ . En outre l'action d'un élément  $w_v \in W_v$  est donnée par celle de  $-\deg(w_v)$  sur le facteur  $\mathbb{Z}$  ci-dessus, où  $\deg$  est la composée du caractère non ramifié de  $W_v$ , qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes, avec la valuation  $v$  de  $F_v$ .

**3.2.6. Notation.** — On notera

$$i_h : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}} = X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}, \quad j_1^{\geq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\geq h}.$$

**3.3. Systèmes locaux d'Harris-Taylor.** — Soit  $D_{v,d}$  l'algèbre à division centrale sur  $F_v$  d'invariant  $1/d$  et d'ordre maximal  $\mathcal{D}_{v,d}$ . À toute représentation irréductible admissible  $\tau_v$  de  $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ , Harris et Taylor associent un système local  $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I},1}$  sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h}$  muni d'une action de  $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times P_{h,d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times \mathbb{Z}$  qui d'après [7] p.136, se factorise par  $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{F_v,h}^\times$  via

$$(g^{\infty,p}, g_{p,0}, c, g_v, g_{v_i}, k) \mapsto (g^{p,\infty}, g_{p,0} q^{k-v(\det g_v^c)}, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta). \quad (3.3.1)$$

où  $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) := G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D_{F_v,h}^\times$ , et où  $g_v = \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix}$  et  $\delta \in D_{v,h}^\times$  sont tels que  $v(\text{rn}(\delta)) = k + v(\det g_v^c)$ . On note  $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I}}$  le faisceau sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}$  induit

$$\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I}} := \mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{I},1} \times_{P_{h,d-h}(F_v)} GL_d(F_v).$$

**3.3.2. Notation.** — Toute représentation irréductible  $\tau_v$  de  $D_{v,h}^\times$  est l'image par la correspondance de Jacquet-Langlands locale d'une représentation de la forme  $\text{St}_t(\pi_v)$  où  $\pi_v$  est une représentation irréductible admissible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  avec  $h = tg$ . On la notera  $\pi_v[t]_D$  et pour  $(\pi_v[t]_D)|_{\mathcal{D}_{v,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \rho_{v,i}$  avec  $\rho_{v,i}$  irréductible, soient

$$\mathcal{F}(\pi_v, t)_1 = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \mathcal{F}_{\rho_{v,i},\mathcal{I},1} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\pi_v, t) := \mathcal{F}(\pi_v, t)_1 \times_{P_{tg,d-tg}(F_v)} GL_d(F_v)$$

le faisceau sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq tg}$  et sa version induite sur  $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq tg}$ .

**3.3.3. Définition.** — (Systèmes locaux dits d’Harris-Taylor) Pour  $\Pi_t$  une représentation de  $GL_{tg}(F_v)$ , on note  $HT(\pi_v, \Pi_t) := \mathcal{F}(\pi_v, t)[d - tg] \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \otimes \Pi_t$ , où l’action se déduit par induction par celle de  $(g^p, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, g_v^c, \sigma)$  dans

$$G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-tg}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times GL_{tg}(F_v) \times W_v$$

sur le faisceau non induit, où le radical unipotent de  $P_{tg, d}(F_v)$  agit trivialement,  $g_v^c$  agit sur  $\Pi_t$  et pour  $\gamma \in D_{v, tg}^\times / \mathcal{D}_{v, tg}^\times$  tel que  $v(\text{rn}\gamma) = v(\det g_v^c) - \deg \sigma$ ,

$$(g^p, g_{p,0} q^{-c+v(\det g_v^c) - \deg \sigma}, \gamma, g^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^\infty) / \mathcal{D}_{v, tg}^\times$$

agit sur  $\mathcal{F}(t, \pi_v)$ .

**3.3.4. Théorème.** — (cf. [3] théorème 2.2.5) La fibre en un point supersingulier de  $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  est nulle sauf pour  $i = t - s$  où, dans le groupe de Grothendieck des représentations de  $GL_d(F_v)$ , elle est un multiple de  $\Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t}(\pi_v)$ . Elle est en outre pure de poids  $t - s$ .

Soit alors  $\pi_v$  une représentation irréductible admissible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et on note  $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ . Pour tout  $1 \leq t \leq s$ , considérons la filtration de stratification du §2.2

$$0 = \text{Fil}_*^{-d}(\pi_v, \Pi_t) \subset \text{Fil}_*^{1-d}(\pi_v, \Pi_t) \subset \cdots \subset \text{Fil}_*^0(\pi_v, \Pi_t) = i_{tg, * j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t).$$

**3.3.5. Proposition.** — Les gradués  $\text{gr}_*^{-r}(\pi_v, \Pi_t) := \text{Fil}_*^{-r}(\pi_v, \Pi_t) / \text{Fil}_*^{-r-1}(\pi_v, \Pi_t)$  sont tous nuls sauf pour  $r = 1 - kg$  pour  $t \leq k \leq s$  auquel cas

$$\text{gr}_*^{1-kg}(\pi_v, \Pi_t) \simeq i_{kg, * j_!^{\geq kg} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{k-t}(\pi_v)) \otimes \Xi^{(t-k)/2}.$$

*Démonstration.* — On rappelle que d’après [3] proposition 4.3.1 et corollaire 5.4.1, pour tout  $1 \leq t \leq s$ , les constituants simples de  $i_{tg, * j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  sont les

$$P_k := i_{kg, * j_!^{\geq kg} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{k-t}(\pi_v)) \otimes \Xi^{(t-k)/2},$$

pour  $t \leq k \leq s$ . Pour tout  $1 \leq r \leq d$ , l’image  $\text{CoFil}_{\mathfrak{S}, *, r}(\pi_v, \Pi_t)$  du morphisme d’adjonction

$$i_{tg, * j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow {}^p j_*^{1 \leq r} j^{1 \leq r, *} \left( i_{tg, * j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \right)$$

est  $j_{!*}^{1 \leq r} j^{1 \leq r, *} \left( i_{tg, * j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \right)$ . L’image de ce dernier dans le groupe de Grothendieck est supérieure à  $\sum_{k: kg \geq r} P_k$  et l’énoncé consiste à montrer l’égalité. Le résultat est évident pour  $r \leq tg$ , supposons alors le résultat acquis jusqu’au rang  $r - 1 > tg$  et traitons le cas de  $r$ . Soit  $k_0$  maximal tel que  $k_0 g \leq r$ ; d’après l’hypothèse de récurrence  $j^{1 \leq r, *} P_{k_0}$  est un sous-objet de  $j^{1 \leq r, *} \left( i_{tg, * j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \right)$  de sorte que  $P_{k_0}$  est un sous-objet de  $j_{!*}^{1 \leq r} j^{1 \leq r, *} \left( i_{tg, * j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \right)$ . Supposons par l’absurde qu’il existe  $k_1 > k_0$  tel que  $P_{k_1}$  et  $j_{!*}^{1 \leq r} j^{1 \leq r, *} \left( i_{tg, * j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \right)$  aient un constituant  $Z$  en commun. On note  $z$  un point

générique du support de  $Z$ ,  $\dim z = d - k_1 g$ . Considérons alors une filtration quelconque de  $\left( j_{!*}^{1 \leq r} j^{1 \leq r, *} \left( i_{t_g, *} j_!^{\geq t_g} HT(\pi_v, \Pi_t) \right) \right) / P_{k_0}$ , laquelle fournit une suite spectrale

$$E_1^{i,j} \Rightarrow h^{i+j} \left( j_{!*}^{1 \leq r} j^{1 \leq r, *} \left( i_{t_g, *} j_!^{\geq t_g} HT(\pi_v, \Pi_t) \right) / S(r) \right).$$

D'après le théorème précédent, on observe que pour tout  $i + j = -\dim z - 1$  les  $(E_1^{i,j})_z$  sont tous nuls alors qu'il existe un indice  $j$ , celui correspondant à  $Z$ , tel que  $(E_1^{-\dim z - j, j})_z$  est non nul. Ainsi  $(E_\infty^{-\dim z})_z$  est non nul et donc aussi  $h^{-\dim z} \left( j_{!*}^{1 \leq r} j^{1 \leq r, *} \left( i_{t_g, *} j_!^{\geq t_g} HT(\pi_v, \Pi_t) \right) \right)_z$  ce qui contredit la définition d'extension intermédiaire, d'où la contradiction.  $\square$

*Remarque :* dans la figure 1 de [3], on décrit la suite spectrale associée à la filtration par les poids, calculant les faisceaux de cohomologie de  $i_{t_g, *} j_!^{\geq t_g} HT_{\mathbb{Q}_l}(\pi_v, \Pi_t)$ . La démonstration précédente consiste à déduire de celle-ci que l'ordre d'apparition des  $P_k$  est nécessairement donnée par les poids. En ce qui concerne la filtration exhaustive de stratification

$$0 = \text{Fill}_!^{2^{d-1}}(\pi_v, \Pi_t) \subset \cdots \subset \text{Fill}_!^0(\pi_v, \Pi_t) \subset \cdots \subset \text{Fill}_!^{2^{d-1}}(\pi_v, \Pi_t) = i_{t_g, *} j_!^{\geq t_g} HT(\pi_v, \Pi_t),$$

l'ordre d'apparition des  $P_k$  est donc aussi donné par les poids. Les indices précis des gradués non triviaux étant plus complexes nous aurons besoin des notations suivantes.

**3.3.6. Notation.** — Pour tout  $h \geq 2$  on note  $r_h = 2^{d-2} + \cdots + 2^{d-h}$  et on pose  $r_1 = 0$ . Pour  $k \geq 1$  on note  $\delta_k(g) = \sum_{i=1}^k 2^{-ig}$  et on pose  $\delta_0 = 0$ .

**3.3.7. Corollaire.** — Les gradués  $\text{grr}_!^r(\pi_v, \Pi_t) := \text{Fill}_!^r(\pi_v, \Pi_t) / \text{Fill}_!^{r-1}(\pi_v, \Pi_t)$  sont tous nuls sauf ceux de la forme  $r = r_{t_g} - 2^{d-t} \delta_k(g)$  pour  $k = 0, \dots, s-1$  auquel cas

$$\text{grr}_!^{r_{t_g} - 2^{d-t} \delta_k(g)}(\pi_v, \Pi_t) \simeq i_{(t+k)g, *} j_!^{\geq (t+k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{-k/2}.$$

*Remarque :* on notera aussi que pour tout  $i_{t_g} - 2^{d-t} \delta_k(g) \leq r < i_{t_g} - 2^{d-t} \delta_{k-1}(g)$ , le morphisme d'adjonction  $j_!^{\geq (t+k)g} j^{\geq (t+k)g, *} \text{Fill}_!^r(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow \text{Fill}_!^r(\pi_v, \Pi_t)$  est surjectif. Dans un prochain papier nous verrons que cette propriété est aussi valide sur  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ .

### 3.4. Faisceau pervers de Hecke des cycles proches. —

**3.4.1. Définition.** — Pour tout  $J \in \mathcal{I}$ , les faisceaux pervers des cycles évanescents  $R\Psi_{\bar{\eta}_v, J}(\overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1](\frac{d-1}{2})$  sur  $X_{J, \bar{s}}$  définissent un  $W_v$ -faisceau pervers de Hecke, au sens de la définition 1.3.6 de [3], que l'on note  $\Psi_{\mathcal{I}}$ .

*Remarque :* dans [3] §2.2, on utilise l'action de la monodromie pour découper  $\Psi_{\mathcal{I}}$

$$\Psi_{\mathcal{I}} = \bigoplus_{\substack{1 \leq g \leq d \\ \pi_v \in \text{Cusp}_v(g)}} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$



où  $\text{Cusp}_v(g)$  désigne l'ensemble des classes d'équivalence inertielles, cf. définition 1.1.3 de [3], des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_g(F_v)$  avec  $1 \leq g \leq d$ .

**3.4.2. Définition.** — (**Faisceau pervers dits d'Harris-Taylor**) On note  $P(t, \pi_v)$  le  $W_v$ -faisceau pervers de Hecke sur  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq 1}$  de support  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq h}$  et de poids zéro défini par

$$i_{tg, * } j_{! * }^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathfrak{L}(\pi_v),$$

où  $\mathfrak{L}^\vee$  est la correspondance de Langlands, cf. [7] et où l'action de  $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$  sur  $P(t, \pi_v)$  se définit par induction en faisant agir

$$(g^p, g_{p,0}, g_v^c, g_v^{et}, g_{v_i}, \sigma) \in G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times W_v$$

via l'action de :

- $(g^p, g_{p,0} q^{-\deg \sigma}, \gamma, g_v^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^\infty) / \mathcal{D}_{v, tg}^\times$  sur  $\mathcal{F}(t, \pi_v)$  où  $\gamma \in D_{v, tg}^\times$  est tel que  $v(\text{rd} \delta) = v(\det g_v^c) - \deg \sigma$  ;
- $(g_v^c, \sigma)$  sur  $\text{St}_t(\pi_v) \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)$ .

*Remarque :* on notera que  $P(t, \pi_v)$  ne dépend, en tant que  $W_v$ -faisceau pervers de Hecke, que de la classe d'équivalence inertielle de  $\pi_v$ . D'après la remarque qui suit le théorème 2.4.4 de [3], les faisceaux pervers d'Harris-Taylor  $P(t, \pi_v)$  sont de la forme  $e_{\pi_v} \mathcal{P}(t, \pi_v)$  où  $\mathcal{P}(t, \pi_v)$  est un faisceau pervers simple, où  $e_{\pi_v}$  est le cardinal de la classe d'équivalence inertielle de  $\pi_v$ , cf. loc. cit. définition 1.1.3. Pour ce qui concerne les groupes de Grothendieck de faisceaux pervers dits de Hecke, on renvoie le lecteur au §7 de [3].

**3.4.3. Proposition.** — *Soit*

$$0 = \text{Fil}_!^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \text{Fil}_!^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_!^d(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  de la proposition 2.2.2. Pour tout  $r$  non divisible par  $g$ , le gradué  $\text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  est nul et pour  $r = tg$  avec  $1 \leq t \leq s$ , il est à support dans  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq tg}$  où  $j^{\geq tg, * } \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \simeq HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{1-t}{2})$ . La surjection

$$i_{tg, * } j_{! * }^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{1-t}{2}) \twoheadrightarrow \text{Fil}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) / \text{Fil}_!^{tg-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}),$$

a pour image dans le groupe de Grothendieck  $\sum_{i=t}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(\frac{t-i}{2})$ .

*Démonstration.* — D'après [3] corollaire 5.4.2, dans le groupe de Grothendieck on a

$$[\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}] = \sum_{k=1-s}^{s-1} \sum_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(t, \pi_v)(-\frac{k}{2}).$$

Ainsi  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  est à support dans  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq g}$  avec  $j^{\geq g, * } \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} \simeq HT(\pi_v, \pi_v) \otimes L_g(\pi_v)$  et donc, par construction, les  $\text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  sont nuls pour  $r < g$  et  $\text{Fil}_!^g(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  qui est l'image de

$$i_{g, * } j_{! * }^{\geq g} HT(\pi_v, \pi_v) \otimes L_g(\pi_v) \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}, \quad (3.4.4)$$

a une image nécessairement inférieure à  $\sum_{i=1}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(i/2)$  puisque ce sont les seuls constituants communs à  $i_{g,*}j_!^{\geq g} HT(\pi_v, \pi_v) \otimes L_g(\pi_v)$  et  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ . Si cette image est strictement inférieure, soit  $i_0$  l'indice  $i$  minimal tel que  $\mathcal{P}(i, \pi_v)(i/2)$  ne soit pas un constituant de l'image. Comme dans la preuve de la proposition 3.3.5, regardons la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = h^{p+q} gr^{-p}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \Rightarrow h^{p+q} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v},$$

et plus particulièrement sa fibre en un point supersingulier  $z$ . D'après 3.3.4,  $LT_{\pi_v}(s, s - i_0) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{s-1}{2})$  est un constituant de  $h^{i_0-s} \mathcal{P}(i_0, \pi_v)(i_0/2)$  et de  $h^{i_0-s-1} \mathcal{P}(i_0 - 1, \pi_v)(\frac{i_0-1}{2})$  et pour tout autre constituant  $P$  de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ , il n'est pas un constituant de  $h^i P$  quel que soit  $i$ . Ainsi si  $\mathcal{P}(i_0, \pi_v)(i_0/2)$  n'est pas un constituant de  $\text{Fil}_!^g(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ , il résulte de la suite spectrale précédente que  $LT_{\pi_v}(s, s - i_0) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{s-1}{2})$  est un constituant de  $h^i \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  pour  $i = i_0 - s$  et  $i_0 - s - 1$  ce qui n'est pas d'après le corollaire 2.2.10 de [3].

On raisonne alors par récurrence sur  $r$  en supposant les  $\text{Fil}_!^k(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  pour  $k \leq r$  tels que décrits par l'énoncé. Posons  $t$  tel que  $(t-1)g \leq r < tg$ ; d'après l'hypothèse de récurrence  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} / \text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  est à support dans  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq tg}$  et donc par construction  $\text{Fil}_!^{(t-1)g}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \dots = \text{Fil}_!^{tg-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$  et  $j^{\geq tg,*}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} / \text{Fil}_!^{(t-1)g}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})) \simeq HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{1-t}{2})$ . Comme précédemment l'image du morphisme d'adjonction

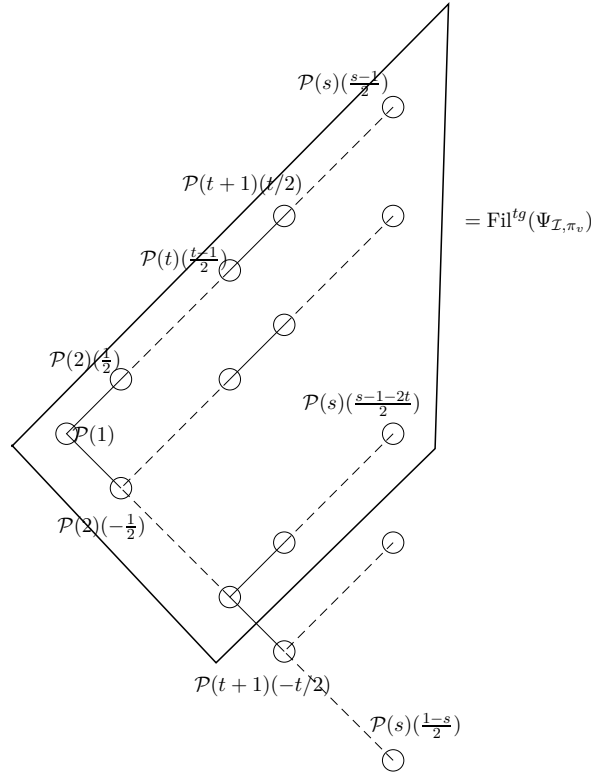
$$i_{tg,*}j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{1-t}{2}) \rightarrow \text{Fil}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) / \text{Fil}_!^{tg-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$$

est inférieure à  $\sum_{i=t}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(\frac{i+1-2t}{2})$ . L'égalité se montre comme précédemment en utilisant 3.3.4 et le corollaire 2.2.10 de [3].  $\square$

*Remarque :* la figure 1 illustre la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  où chaque cercle représente un faisceau pervers d'Harris-Taylor  $\mathcal{P}(t, \pi_v)(\frac{1-t}{2} + k)$ . L'utilisation de 3.3.4 et le corollaire 2.2.10 dans la preuve précédente revient à dire que pour tout  $1 \leq t \leq s-1$  et pour tout  $0 \leq k \leq s-t-1$ , dans toute filtration croissante de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  l'indice  $k_1$  du gradué contenant  $\mathcal{P}(t-k, \pi_v)(\frac{t-k-1}{2})$  est inférieur ou égale à l'indice  $k_2$  du gradué contenant  $\mathcal{P}(t-k+1, \pi_v)(\frac{t-k-2}{2})$ . Le lecteur pourra trouver une illustration graphique de ces contraintes à la figure 2 où lorsque deux cercles sont reliés il faut que l'indice de celui qui est le plus bas soit supérieur ou égal à l'autre.

*Remarque :* le lecteur notera qu'en supprimant les gradués nuls de  $\text{Fil}_!^\bullet(\Psi_{\mathcal{I}})$ , la filtration obtenue coïncide avec la filtration par les noyaux itérés de la monodromie. Par dualité, la filtration  $\text{Fil}_*^\bullet(\Psi_{\mathcal{I}})$  à laquelle on supprime les gradués nuls, coïncide avec celle par les images itérées de la monodromie. Ainsi la bifiltration de monodromie s'obtient en considérant les  $\text{Fil}_*^i(\text{Fil}_!^j(\Psi_{\mathcal{I}}))$ . Précisément, en couplant les propositions 3.3.5 et 3.4.3, on obtient la description suivante.

**3.4.5. Corollaire.** — Avec les notations précédentes les bigradués  $\text{gr}_*^i(\text{gr}_!^j(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}))$  (resp.  $\text{gr}_!^i(\text{gr}_*^j(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}))$ ) de la bifiltration  $\text{Fil}_*^i(\text{Fil}_!^j(\Psi_{\mathcal{I}}))$  (resp. de  $\text{Fil}_!^i(\text{Fil}_*^j(\Psi_{\mathcal{I}}))$ ) sont nuls sauf


 FIGURE 1. Illustration de la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ .

pour  $(i, j)$  de la forme  $(t'g, tg)$  avec  $1 \leq t \leq t' \leq s$  auquel cas

$$\mathrm{gr}_*^{t'g} \left( \mathrm{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \right) \simeq \mathcal{P}(t', \pi_v) \left( \frac{1 - 2t + t'}{2} \right), \quad \left( \text{resp. } \mathrm{gr}_!^{t'g} \left( \mathrm{gr}_*^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \right) \simeq \mathcal{P}(t', \pi_v) \left( \frac{2t - 1 - t'}{2} \right) \right).$$

En ce qui concerne la filtration exhaustive de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ , avec les notations de 3.3.6, la chasse aux indices fournit le corollaire suivant.

**3.4.6. Corollaire.** — Les gradués de la filtration exhaustive de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$

$$0 = \mathrm{Fill}_!^{2^{d-1}}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}_!^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}_!^{2^{d-1}}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

sont nuls pour  $r$  qui n'est pas de la forme  $i_{tg} - 2^{d-t} \delta_k(g)$  pour  $1 \leq t + k \leq s$  avec  $t \geq 1$  et  $k \geq 0$ , et sinon isomorphe à  $\mathrm{gr}_!^{i_{tg} - 2^{d-t} \delta_k(g)}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \simeq \mathcal{P}(t + k, \pi_v) \left( \frac{k+1-2t}{2} \right)$ .

*Remarque :* le faisceau pervers  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$  étant autodual, sa cofiltration exhaustive

$$\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} = \mathrm{CoFill}_{2^{d-1}, * }(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \rightarrow \mathrm{CoFil}_{2^{d-1}-1, * }(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{CoFil}_{-2^{d-1}, * }(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = 0$$

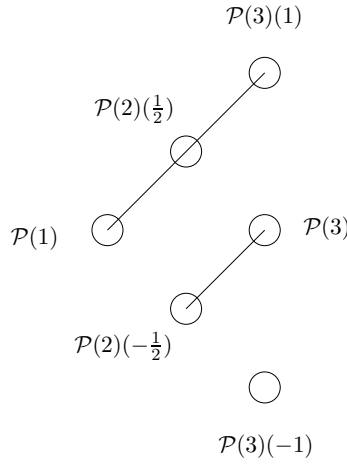


FIGURE 2. Illustration des contraintes d'une filtration de  $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$  avec  $s = 3$ .

s'obtient par dualité  $D\left(\text{CoFill}_{r,*}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})\right) \simeq \text{Fill}_!^r(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$ , ce qui permet de calculer sa filtration  $\text{Fill}_*^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$ . Pour  $s = 3$  et  $g = 1$ , le lecteur trouvera à la figure 3 une illustration des filtration et cofiltration exhaustives de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ .

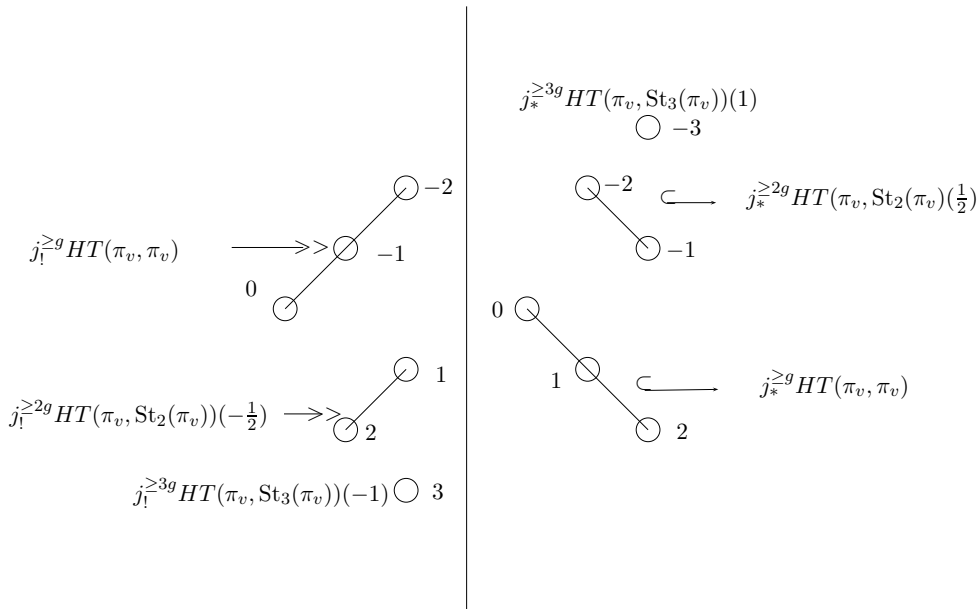


FIGURE 3. Illustration de la filtration (fig. à gauche) et de la cofiltration (fig. à droite) de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$  avec  $s = 3$ .

## Appendice A

### Retour sur les résultats faisceautiques de [3]

L'objectif de cet appendice est de revenir sur la preuve des principaux résultats de [3] en utilisant les filtrations de stratification, l'intérêt étant de simplifier les arguments et de dégager une future stratégie d'étude sur  $\bar{Z}_l$ . Rappelons tout d'abord la stratégie de loc. cit.

*Étape 1* : on utilise tout d'abord le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues afin de relier les germes des faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents à la cohomologie des espaces de Lubin-Tate.

*Étape 2* : dans [7], les auteurs donnent une « recette » afin de calculer la somme alternée des groupes de cohomologie des  $j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  avec les notations précédentes. Ainsi au terme du §5.4 de [3], on connaît les constituants simples de  $j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  et  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ .

*Étape 3* : il s'agit alors de calculer les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor ainsi que ceux du complexe des cycles évanescents. Pour ce faire :

- dans [3], on utilise une propriété d'autodualité à la Zelevinski sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, prouvée par Fargues ;
- une deuxième solution est proposée dans [4] et repose sur le théorème de Lefschetz difficile et sur des calculs fastidieux de groupes de cohomologie.

Le but de cette section est de donner une preuve alternative de l'étape 3 en utilisant les filtrations de stratification ; en particulier nous n'utilisons plus 3.3.4 et en proposons même une nouvelle démonstration.

**A.1. Rappels cohomologiques de [7].** — Dans ce paragraphe nous allons rappeler, en utilisant les étapes 1 et 2 ci-avant, lesquels des résultats de [4] nous utiliserons. Notons qu'à ce stade seuls des arguments de somme alternée sont utilisés.

On note  $H_{\bar{\eta}}^i$  le  $i$ -ème groupe de cohomologie de la variété de Shimura  $X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}}$ . Pour  $\Pi^\infty$  une représentation irréductible de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , on note  $[H_{\bar{\eta}}^i] \{ \Pi^{\infty, v} \}$  la composante  $\Pi^{\infty, v}$ -isotypique de  $H_{\bar{\eta}}^i$  dans le groupe de Grothendieck des  $GL_d(F_v) \times W_v$ -représentations. Rappelons que si celle-ci est non nulle alors  $\Pi^{\infty, v}$  est la composante hors  $\infty, v$  d'une représentation automorphe cohomologique  $\Pi$ . On fixe alors une telle représentation automorphe telle que sa composante locale  $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$  pour  $\pi_v$  une représentation irréductible admissible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  avec  $d = sg$ .

**A.1.1. Lemme.** — (cf. la proposition 3.5.1 de [4]) Pour tout  $1 \leq t \leq s$ , en tant que représentation de  $GL_d(F_v)$ ,  $[H^{t-s}(j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty, v} \}$  est égale à un multiple de  $\Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t}(\pi_v)$ .

**A.1.2. Proposition.** — Dans la suite spectrale des cycles évanescents  $E_2^{i,j} = H^i(h^j \Psi_{\mathcal{I}}) \Rightarrow H_{\bar{\eta}}^{i+j}$  si  $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{k}{2})$  est un sous-quotient de  $[E_2^{i,j}] \{ \Pi^{\infty, v} \}$  avec  $i + j > 0$  alors  $i + j = 1$ ,  $j = -g$  et  $k = s - 1$ .

*Démonstration.* — Commençons par noter qu'on se ramène à regarder  $H^i(h^j\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})$  ce qui impose de considérer les  $j$  de la forme  $(t-s)g-r$  avec  $1 \leq t \leq s$  et  $0 \leq r \leq t-1$ . Comme on regarde  $i+j > 0$  le cas  $t = s$  est exclu puisqu'alors  $h^{-r}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$  serait à support dans les points supersinguliers. Dans le cas où  $g > 1$  on a  $h^{(t-s)g-r}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v} \simeq j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t, r))[tg-d]$  ce qui nous amène à regarder, pour  $r = 0$ ,  $[H^{i-(s-t)g}(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, St_t(\pi_v)))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ . Rappelons que  $[H^*(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, St_t(\pi_v)))]\{\Pi^{\infty,v}\}$  est calculée dans [7]. En utilisant la pureté et l'égalité de [4] proposition 2.6.1 ou [3] corollaire 5.4.1

$$i_{tg,*}j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, St_t(\pi_v)) = \sum_{r=0}^{s-t} (-1)^r i_{(t+r)g,*} j_!^{\geq (t+r)g} HT\left(\pi_v, St_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_r(\pi_v)\right)(r/2).$$

on calcule dans [4], par récurrence, chacune des images des  $[H^i(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, St_t(\pi_v)))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ . L'égalité précédente s'inverse en

$$i_{tg,*}j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, St_t(\pi_v)) = \sum_{k=0}^{s-t} i_{(t+k)g,*} j_!^{\geq (t+k)g} HT(\pi_v, St_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} St_k(\pi_v))(k/2)$$

ce qui nous ramène à regarder chacun des  $[H^i(j_!^{\geq (t+k)g} HT(\pi_v, St_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} St_k(\pi_v)))]\{\Pi^{\infty,v}\}$ . Le résultat découle alors de la proposition 3.5.1 de [4].  $\square$

**A.2. Retour sur la filtration de stratification des  $j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ .** — Dans ce paragraphe, on fixe une représentation admissible irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$  et pour  $1 \leq t \leq s := \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ , on se propose tout d'abord de prouver la proposition 3.3.5 sans utiliser le théorème 3.3.4. Pour ce faire on raisonne par récurrence sur  $t$  de  $s$  à 1. Les cas  $t = s$  et  $s-1$  étant évidents, supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang  $t+1$  et traitons le cas de  $t$ . On pose  $P := i_{tg+1,*} {}^p h_{\text{libre}}^{-1} i_{tg+1}^* j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  de sorte que l'on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow P \rightarrow i_{tg,*} j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow i_{tg,*} j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0.$$

La proposition 3.3.5 découle, par fonctorialité, du lemme suivant.

**A.2.1. Lemme.** — *Le morphisme d'adjonction  $j_!^{\geq (t+1)g} j^{\geq (t+1)g,*} P \rightarrow P$  est surjectif.*

*Démonstration.* — Notons  $P_0$  l'image de ce morphisme. De la connaissance des constituants irréductibles de  $P$  et, d'après l'hypothèse de récurrence, des quotients de  $j_!^{\geq (t+1)g} j^{\geq (t+1)g,*} P$ , l'image de  $P_0$  dans le groupe de Grothendieck est, en utilisant que les strates non supersingulières sont géométriquement induites, de la forme

$$[P_0] = \sum_{i=1}^{s-t-k} i_{(t+i)g,*} j_!^{\geq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} St_i(\pi_v))(i/2)$$

pour un entier  $0 \leq k \leq s-t-1$ . Par ailleurs la filtration par les poids de  $P$  fournit un quotient  $P \twoheadrightarrow P'_0$  où  $[P'_0] = [P_0]$  dans le groupe de Grothendieck de sorte que le composé  $P_0 \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P'_0$  est un isomorphisme. On obtient ainsi que  $P_0$  est un facteur direct de

$P \simeq P_0 \oplus Q_0$  et il nous faut alors prouver que  $Q_0$  est nul. Pour ce faire nous allons raisonner sur la cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor, l'idée étant de montrer qu'il existe un indice  $i \leq -k$  tel que  $H^i(j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$  est non nul de sorte que comme  $j^{\geq tg}$  est affine et donc que tous les  $H^i(j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$  sont nuls pour  $i < 0$ , on doit nécessairement avoir  $k = 0$  et donc  $Q_0$  est nul. Soit  $A$  le poussé en avant

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P_0 \oplus Q_0 & \longrightarrow & j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) & \longrightarrow & j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & P_0 & \dashrightarrow & A & \longrightarrow & j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

de sorte que l'on a la suite exacte courte  $0 \rightarrow Q_0 \rightarrow j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow A \rightarrow 0$  où la flèche  $A \rightarrow Q_0[1]$  se factorise par  $j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow Q_0[1]$ . Pour  $k$  non nul, par pureté on en déduit alors que les flèches  $H^i(A) \rightarrow H^{1+i}(Q_0)$  sont nulles et donc  $H^i(j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)) \simeq H^i(A) \oplus H^i(Q_0)$ . Il suffit alors de prouver que  $H^{-k}(A)$  est non nul. Soit alors une représentation automorphe irréductible cohomologique  $\Pi$  de  $G(\mathbb{A})$  telle que  $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ . D'après le lemme A.1.1,  $[H^{t-s}(j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))] \{ \Pi^{\infty, v} \}$  est pure de poids  $t-s$  et  $GL_d(F_v)$ -isotypiques de la forme  $\Pi_t \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}$ . Considérons alors la filtration par les poids de  $A$  et la suite spectrale associée calculant la cohomologie de  $A$ . On note alors que  $\Pi_t \overrightarrow{\times} LT_{\pi_v}(s-t, k-1) \otimes \Xi^{\frac{s-t}{2}}$  est un constituant de  $[H^{-k}(j_{!*}^{\geq (s-k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t-k}(\pi_v))(\frac{s-t-k}{2}))] \{ \Pi^{\infty, v} \}$  mais qu'il n'est pas un constituant d'un autre des termes initiaux de cette suite spectrale, ce qui prouve la non nullité de  $H^{-k}(A)[\Pi^{\infty, v}]$ .  $\square$

*Remarque :* la preuve du théorème 3.3.4 dans [3] procède par récurrence sur  $t$  de  $s$  à 1 comme suit. La suite spectrale  $E_1^{p,q} = h^{p+q} \text{gr}^{-p}(P) \Rightarrow h^{p+q} P$  associée à la filtration par les poids de  $P$  dégénère en  $E_1$  et le gros du travail consiste à montrer que pour tout  $0 \leq p \leq s-t-3$ , la flèche  $d_1^{p, t+1-s}$  induit un morphisme non nul

$$\left( \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v \right) \overrightarrow{\times} \text{St}_p(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t-p-1}(\pi_v) \longrightarrow \left( \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v \right) \overrightarrow{\times} \text{St}_{p+1}(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t-p-2}(\pi_v).$$

Avec les notations précédentes, la surjection  $j_1^{\geq (t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \otimes \Xi^{-1/2} \rightarrow P$  fournit par functorialité un morphisme entre leurs filtrations exhaustives de stratification et donc un morphisme de leurs suites spectrales associées que l'on note  $(E_r^{p,q}(!), d_r^{p,q}(!)) \rightarrow (E_r^{p,q}(P), d_r^{p,q}(P))$ . En particulier pour  $r = 1$  on obtient des carrés commutatifs, cf. la figure 4,

$$\begin{array}{ccc}
 E_1^{p,q}(!) & \xrightarrow{d_1^{p,q}(!)} & E_1^{p+1,q}(!) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E_1^{p,q}(P) & \xrightarrow{d_1^{p,q}(P)} & E_1^{p+1,q}(P).
 \end{array}$$

Il s'agit alors de montrer que pour  $(p, q) = (\delta, t + 1 - s)$  avec  $0 \leq \delta < s - t - 1$ , les flèches  $d_1^{\delta, t+1-s}(P)$  sont non nulles. Cette propriété est démontrée dans [3] §5 en utilisant l'involution de Zelevinsky alors qu'à présent il suffit de montrer que les  $d_1^{\delta, t+1-s}(!)$  sont non nulles ce qui est facile puisque les  $E_\infty^{t+1-s+\delta}(!)$  sont nuls.

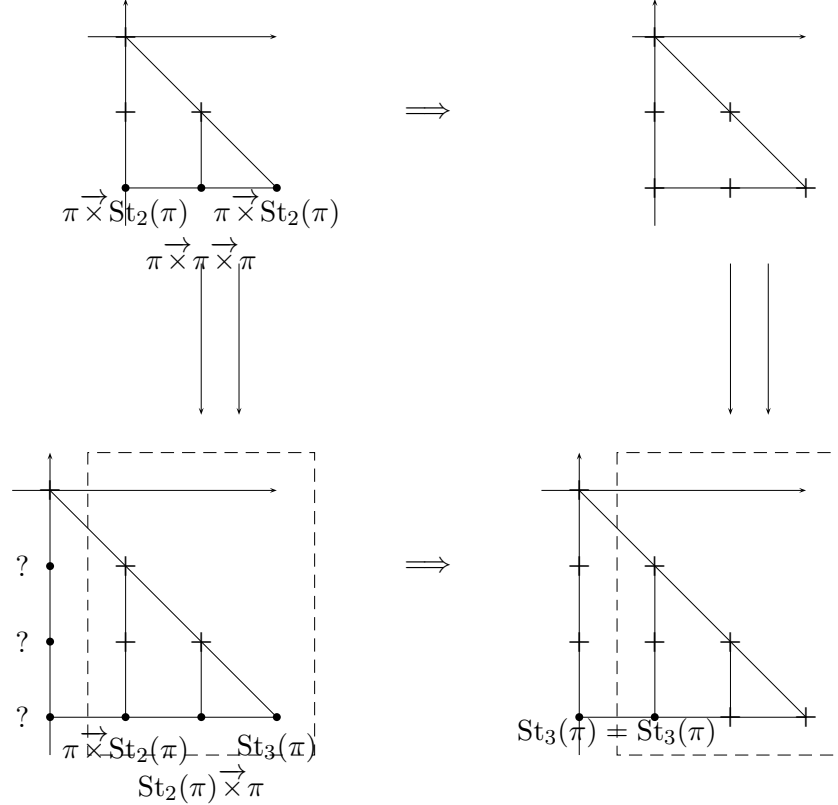


FIGURE 4. Germes en un point supersingulier spectrales  $E_1^{p,q}(!) \rightarrow E_1^{p,q}(P)$ ; on explicite simplement l'action du groupe linéaire en « factorisant » par  $\Pi_t \overrightarrow{\times}$ , i.e. quand on écrit  $\pi \overrightarrow{\times} \text{St}_2(\pi)$  il faut lire  $\Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v \overrightarrow{\times} \text{St}_2(\pi_v)$ .

**A.3. Retour sur les filtrations de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ .** — Il s'agit donc de prouver la proposition 3.4.3. D'après la proposition 3.3.5 il existe un indice  $r_k \leq s - k$  tel que

$$j_1^{\geq kg} HT(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes L_g(\pi_v) \left( \frac{1-k}{2} \right) \longrightarrow \text{Fil}_S^k(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) / \text{Fil}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \quad (1.3.1)$$

a une image dans le groupe de Grothendieck égale à  $\sum_{i=k}^{k+r_k} \mathcal{P}(i, \pi_v) \left( -\frac{2k-1-i}{2} \right)$ . On considère alors, par l'absurde,  $i$  minimal tel qu'il existe  $1 \leq k \leq s - 1$  pour lequel  $\mathcal{P}(i, \pi_v) \left( -\frac{2k-1-i}{2} \right)$



n'appartienne pas à l'image de (1.3.1). On en déduit alors que  $HT(\pi_v, \text{St}_i(\pi_v))(-\frac{2k-1-i}{2})$  est un quotient de  $j^{\geq ig,*}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$  et donc que le germe en un point géométrique de  $X_{\mathcal{I}}^{\text{ig}}$  admet un constituant de poids  $2k-1-i$ . Comme dans [3], on raisonne par récurrence sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, ce qui nous permet d'utiliser 3.3.4 en dehors des points singuliers et donc en particulier obtenir que nécessairement  $i = s$ .

Ainsi soit  $k$  minimal tel que  $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$  n'appartienne pas à l'image de (1.3.1). Comme précédemment on en déduit que  $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$ , tout comme  $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{s-1}{2})$ , est un quotient de  $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ . En particulier pour  $\Pi$  irréductible automorphe cohomologique avec  $\Pi_v \simeq \text{St}_s(\pi_v)$ , la monodromie sur  $H_{\eta_v,\xi}^0[\Pi^\infty]$  serait d'ordre  $\leq s-1$  ce qui contredit le résultat principal de [12].

Si on ne veut pas utiliser [12], soit  $\Pi$  une représentation automorphe irréductible cohomologique dont la composante locale  $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$ . Notons tout d'abord que la fibre en un point supersingulier de  $h^0\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$  admet  $\pi_v[s]_D \otimes \text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$  comme quotient de sorte que  $[H^0(h^0\Psi_{\mathcal{I}})]\{\Pi^{\infty,v}\}$  admet  $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$  comme sous-quotient. D'après la proposition A.1.2, pour tout  $i > 0$ ,  $[H^i(h^{1-i}\Psi_{\mathcal{I}})]\{\Pi^{\infty,v}\}$  n'admet pas  $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$  comme sous-quotient de sorte que  $[H_\eta^0]\{\Pi^{\infty,v}\}$  admet  $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$  comme sous-quotient, ce qui contredit le fait que  $[H_\eta^0]\{\Pi^\infty\}$  est non nul si et seulement si  $\Pi$  est une représentation automorphe.

Enfin le calcul des fibres des faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$  de [3] procède comme suit. On considère la suite spectrale  $E_1^{p,q} = h^{p+q}gr_{\pi_v}^{-p} \Rightarrow h^{p+q}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ , laquelle d'après le calcul du paragraphe précédent, des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, et donc des  $E_1^{p,q}$ , dégénère en  $E_1$ . Le gros du travail de [3] consiste à montrer qu'en un point supersingulier  $z$ , pour tout  $0 \leq \delta < s-1$  et  $-\delta \leq p \leq s-1-2\delta$ , la flèche  $d_1^{p,1-s+2\delta}$  induit un morphisme non nul

$$\text{St}_{p+2\delta+1}(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-p-2\delta}(\pi_v) \longrightarrow \text{St}_{p+2\delta+2}(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-p-2\delta-1}(\pi_v).$$

Désormais la non nullité de cette flèche découle, comme dans le paragraphe précédent, du morphisme de suites spectrales induit par la surjection de (1.3.1).

## Références

- [1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. 1973. (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [2] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [3] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.

- [4] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [5] P. Deligne. Théorèmes de finitude en cohomologie  $\ell$  adique. In *SGA 4 $\frac{1}{2}$* .
- [6] L. Fargues, A. Genestier, and V. Lafforgue. *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*. Progress in Mathematics 262. Basel : Birkhäuser, 2008.
- [7] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [8] L. Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. In *Périodes  $p$ -adiques*, number 223 in Astérisque, 1994.
- [9] T. Ito. Hasse invariants for somme unitary Shimura varieties. *Math. Forsch. Oberwolfach report 28/2005*, pages 1565–1568, 2005.
- [10] D. Juteau. Modular Springer correspondence and decomposition matrices. *Thèse de l'Université Paris 7*, 2007.
- [11] J.-P. Schneiders. Quasi-abelian categories and sheaves. *Mémoires de la SMF 2e série, tome 76*, 1999.
- [12] R. Taylor and T. Yoshida. Compatibility of local and global Langlands correspondences. *J.A.M.S.*, 20 :467–493, 2007.
- [13] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. II. On irreducible representations of  $GL(n)$ . *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.