
FILTRATIONS DE STRATIFICATION DE QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA SIMPLES

par

Boyer Pascal

Résumé. — Nous définissons et étudions de nouvelles filtrations dites de stratification d'un faisceau pervers sur un schéma ; contrairement au cas de la filtration par les poids, ou de monodromie, ces filtrations sont valables quel que soit l'anneau Λ de coefficients. Nous illustrons ces constructions dans le contexte des variétés de Shimura unitaires simples de [10] pour les faisceaux pervers d'Harris-Taylor et le complexe des cycles évanescents introduits et étudiés dans [5]. Pour $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$, nous montrons comment utiliser ces filtrations afin de simplifier l'étape principale de [5] ; les cas de $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$ et $\bar{\mathbb{F}}_l$ seront étudiés dans un prochain article.

Abstract (Filtration of stratification of some simple Shimura varieties)

We define and study new filtrations called of stratification of a perverse sheaf on a scheme ; beside the cases of the weight or monodromy filtrations, these filtrations are available whatever are the ring of coefficients. We illustrate these constructions in the geometric situation of the simple unitary Shimura varieties of [10] for the perverse sheaves of Harris-Taylor and the complex of vanishing cycles introduced and studied in [5]. For $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$ we show how to use these filtrations to simplify the principal step of [5] ; the cases of $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$ and $\bar{\mathbb{F}}_l$ will be studied in another paper.

Introduction

Pour $l \neq p$ deux nombres premiers distincts, dans [5], nous avons explicité le faisceau pervers des cycles évanescents à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, d'une certaine classe de variétés de Shimura unitaires X qualifiée de « simple » dans [10], en une place de caractéristique résiduelle p . Rappelons que cette description ne repose pas sur une étude géométrique sûrement illusoire de ces variétés qui consisterait à se ramener à une situation semi-stable ; pour l'essentiel les arguments se ramènent, via la cohomologie de ces variétés, à de la combinatoire sur les représentations

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, conjecture de monodromie-poids.

- admissibles des groupes linéaires sur un corps local et
- automorphes d'un groupe symplectique sur un corps de nombres.

Au cœur de ces arguments, on trouve la formule des traces de Selberg qui calcule la somme alternée des groupes de cohomologie de certains systèmes locaux dits d'Harris-Taylor, introduits dans [10], et définies sur certaines strates de la fibre spéciale de ces variétés de Shimura. L'apport principal de [5], est l'étude des prolongements de ces systèmes locaux à toute la fibre spéciale. Pour l'essentiel l'argument se déroule en trois temps :

- dans un certain groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke, on décrit les images des extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor et on en déduit celle du faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{I}}$ des cycles évanescents.
- On considère ensuite la filtration par les poids de $\Psi_{\mathcal{I}}$ et la suite spectrale associée calculant ses faisceaux de cohomologie. L'étape la plus complexe consiste alors à étudier cette suite spectrale, à expliciter ses termes initiaux et enfin à décrire ses flèches. Pour cela, on utilise soit :
 - une propriété d'autodualité à la Zelevinsky sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate qui passe par un théorème difficile de comparaison avec l'espace de Drinfeld dû à Faltings et développé par Fargues dans [8] ;
 - des arguments combinatoires complexes, cf. [6], sur la cohomologie de la variété de Shimura reposant sur le théorème de Lefschetz difficile.

Au final chacune de ces stratégies utilisaient que, pour π_v une représentation irréductible cuspidale, l'induite parabolique normalisée $\pi_v\{-1/2\} \times \pi_v\{1/2\}$ n'est pas autoduale.

Le point de départ de ce travail était de trouver une explication aux coïncidences combinatoires dans la description donnée dans [5], des suites spectrales calculant les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor et du faisceau pervers des cycles évanescents. Une telle explication pour être pleinement satisfaisante se devrait, en particulier, d'être valable quel que soit l'anneau de coefficients considéré ce qui suggère en premier lieu de trouver une alternative à la filtration de monodromie-poids, laquelle a priori n'est valable que pour $\bar{\mathbb{Q}}_l$. Pour ce faire nous attaquons le problème général de filtrer un faisceau pervers quel que soit son anneau de coefficients Λ , à l'aide d'une stratification de l'espace sous-jacent. Étant donné un faisceau pervers P sur un schéma muni d'une stratification quelconque, on le filtre au moyen des morphismes d'adjonction $j_!j^*P \rightarrow P$ et $P \rightarrow j_*j^*P$, cf. le §2. Pour $\Lambda = \mathbb{Z}_l$ et P sans torsion, si la stratification est « adaptée » à P , on obtient alors des systèmes locaux tels que les gradués sont certaines extensions « coincées » entre les complexes d'intersection relativement aux t -structures p et $p+$, cf. le §2. La « position » de ces faisceaux pervers ainsi que la classe d'équivalence de ces réseaux stables, dépendent a priori de la filtration considérée. On étudie, §2.7, plus particulièrement deux de ces constructions, la première dite filtration exhaustive de stratification et la deuxième qui lui est duale, la cofiltration exhaustive de stratification. Ainsi la filtration obtenue sur $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$ correspond à celle par les noyaux de la monodromie, alors que la cofiltration est celle par les images ce qui explique que la monodromie est nulle sur les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$.

L'avantage de ces filtrations, outre qu'elles soient définies quel que soit l'anneau de coefficients, est qu'elles découpent le faisceau pervers P étudié en sous-faisceaux pervers P_i dont les suites spectrales associées sont obtenues à partir des suites spectrales associées à des extensions par zéros de certains systèmes locaux, lesquelles peuvent être facilement contrôlées car les aboutissements sont nuls, cf. le corollaire 5.2.1 par exemple. Il reste alors à comprendre la suite spectrale des faisceaux de cohomologie associée à ce découpage de P en les P_i . Une des coïncidences combinatoires de [5] est que, dans le cas de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$, cette dernière suite spectrale dégénère en E_1 car pour toutes les flèches $d_1^{i,j}$, soit le terme de départ soit celui d'arrivée est nul; cette propriété a une interprétation en termes de filtration de stratification, cf. le corollaire 5.3.2.

En ce qui concerne le cas où l'anneau de coefficients est $\bar{\mathbb{Z}}_l$, dans la construction de la filtration de stratification d'un faisceau pervers sans torsion, afin d'obtenir des gradués sans torsion on est amené à saturer, cf. §2.3; chaque fois que ce processus est nécessaire, il engendre de la torsion notamment dans les fibres des faisceaux de cohomologie étudiés. Ainsi l'absence de torsion dans les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$, laquelle est d'après le théorème de comparaison de Berkovich équivalente à l'absence de torsion dans la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, cf. §5.1, est directement liée à ce phénomène qui sera étudié dans un prochain papier. Nous espérons que cette étude permettra d'aborder le calcul de la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura.

Décrivons succinctement le contenu des différents paragraphes. Le premier est pour l'essentiel un résumé de la première moitié de [13]; on y rappelle les théories de torsion sur une catégorie abélienne §1.1, leur compatibilité au recollement §1.2 et à la réduction modulaire §1.3. La situation qui nous intéresse est celle des faisceaux pervers sur un schéma §1.4 et plus particulièrement celle des faisceaux pervers de Hecke §1.5.

Les constructions des filtrations de stratification sont données au §2. Après quelques généralités sur les pushout, pullback §2.1 et sur les stratifications d'un schéma §2.2, on introduit §2.3 le phénomène de saturation qui permet à partir d'une filtration d'un objet libre d'en construire une autre dont les gradués sont libres. On définit alors §2.4 dans une situation de recollement, des filtrations et cofiltrations d'un objet libre et on applique §2.6 et §2.7, cette construction par récurrence pour un faisceau pervers sur un schéma muni d'une stratification; en général la stratification considérée est celle adaptée au faisceau pervers étudié. Lorsque la filtration est la plus fine possible, les gradués obtenus sont des faisceaux pervers « coïncés » entre les versions p et $p+$ d'extensions intermédiaires de systèmes locaux. Au §2.9, nous montrons comment modifier un faisceau pervers donné pour les gradués prennent une position quelconque définie à l'avance entre ces deux extensions intermédiaires.

Au §3, on introduit quelques classes de faisceaux pervers. Reprenant la problématique du §2.9, on commence, §3.1, par la notion d'extension minimale et maximale analogue à celle de point indivisible d'un \mathbb{Z}_l -module : les extensions par zéros et les images directes fournissent de tels exemples. On étudie ensuite §3.2, les faisceaux pervers dits saturés, ceux dont la construction de la filtration de stratification ne nécessite pas de saturation; c'est

dans cette classe que se trouveront ceux dont les germes des faisceaux de cohomologie sont sans torsion. À la proposition 3.2.3, on étudie la réciproque i.e. sachant que les germes des faisceaux de cohomologie d'un faisceau pervers sont sans torsion alors il est saturé ; ce résultat sera utilisé pour le complexe des cycles proches où par récurrence sur le modèle local via le théorème de comparaison de Berkovich, on saura que les germes des faisceaux de cohomologie sont sans torsion.

Le paragraphe finit §3.3 par les notions de système local récurrent et récursif lesquels ont la propriété remarquable de permettre le calcul de leurs faisceaux de cohomologie par récurrence : cette propriété était utilisée indirectement dans [5].

Après les généralités des paragraphes précédents, on reprend §4, notre objet d'étude que sont les variétés de Shimura unitaires simples étudiées dans [10], [5] et [6]. On rappelle §4.1 quelques notations sur les représentations du groupe linéaire sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$, puis §4.3 sur la stratification de Newton des fibres spéciales des variétés de Shimura étudiées §4.2.

Ensuite §4.4, à partir des résultats de [5] sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor, on décrit les filtrations de stratification des extensions par zéros des systèmes locaux d'Harris-Taylor, cf. le corollaire 4.4.9, et du complexe des cycles évanescents, cf. le corollaire 4.5.7, dans le cas où l'anneau des coefficients est $\bar{\mathbb{Q}}_l$.

Enfin §5, nous montrons comment les filtrations de stratification permettent de simplifier l'étape la plus complexe de [5] et d'en interpréter les résultats. Ainsi au §5.2, on prouve, sans utiliser les résultats du §4.4 bien entendu, que le calcul dans [5] des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, se déduit du fait que les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont récurrents et du morphisme de suite spectrale associée, cf. le §??. Au §5.3, on procède de même pour le faisceau pervers des cycles évanescents.

Table des matières

Introduction.....	1
1. Faisceaux pervers entiers et théories de torsion.....	5
1.1. Théories de torsion.....	5
1.2. Recollement.....	8
1.3. Réduction modulaire.....	10
1.4. t -structures perverses.....	11
1.5. Cas d'un schéma de Hecke.....	15
2. Filtrations de stratification d'un faisceau pervers sans torsion.....	16
2.1. Rappels sur les pushout et pullback dans une catégorie abélienne...	16
2.2. Stratifications d'un schéma.....	19
2.3. Saturation.....	20
2.4. Cas d'une situation de recollement.....	22
2.5. Recollement d'une t -structure perverse.....	26
2.6. Filtration et cofiltration de stratification.....	26
2.7. Filtration et cofiltration \mathfrak{S} -exhaustives.....	30
2.8. Cas d'un schéma de Hecke.....	32
2.9. Modifications d'un faisceau pervers sans torsion.....	32

3. Sur quelques classes de faisceaux pervers sans torsion.....	35
3.1. Minimalité et maximalité.....	35
3.2. Faisceaux pervers saturés.....	37
3.3. Systèmes locaux récurrents et récursifs.....	40
4. Faisceaux pervers sur les variétés de Shimura simples.....	42
4.1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$	42
4.2. Variétés de Shimura unitaires simples.....	43
4.3. Stratification de Newton.....	44
4.4. Systèmes locaux d’Harris-Taylor.....	45
4.5. Faisceau pervers de Hecke des cycles proches.....	49
5. Retour sur les résultats faisceautiques de [5].....	54
5.1. Espaces de Lubin-Tate.....	56
5.2. Les systèmes locaux d’Harris-Taylor sont récurrents.....	57
5.3. Faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{T}}$	59
Références.....	61

1. Faisceaux pervers entiers et théories de torsion

Dans tout le texte, \mathbb{K} désignera une extension finie de \mathbb{Q}_l ou $\bar{\mathbb{Q}}_l$, d’anneau des entiers \mathbb{O} et de corps résiduel $\mathbb{F} = \mathbb{O}/(\varpi)$. La lettre Λ désignera alors une des trois lettres \mathbb{K}, \mathbb{O} ou \mathbb{F} .

1.1. Théories de torsion. — Une théorie de torsion, cf.[13] 1.3.1, sur une catégorie abélienne \mathcal{A} est un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de sous-catégories pleines tel que :

- pour tout objet T dans \mathcal{T} et F dans \mathcal{F} , on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0;$$

- pour tout objet A de \mathcal{A} , il existe des objets $A_{\mathcal{T}}$ et $A_{\mathcal{F}}$ de respectivement \mathcal{T} et \mathcal{F} , ainsi qu’une suite exacte courte

$$0 \rightarrow A_{\mathcal{T}} \rightarrow A \rightarrow A_{\mathcal{F}} \rightarrow 0.$$

Remarque : \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est stable par quotients et extensions (resp. sous-objets et extensions). On dira de $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion *héréditaire* (resp. *co-héréditaire*) si \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est stable par sous-objets (resp. par quotients).

Dans une catégorie abélienne \mathcal{A} qui est \mathbb{O} -linéaire, un objet A de \mathcal{A} est dit de torsion (resp. libre, resp. divisible) si $\varpi^N 1_A$ est nul pour un certain entier N (resp. $\varpi \cdot 1_A$ est un monomorphisme, resp. un épimorphisme).

1.1.1. Proposition. — (cf. [13] 1.3.5) Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire; on note \mathcal{T} (resp. \mathcal{F} , resp. \mathcal{Q}) la sous-catégorie pleine des objets de torsion (resp. libres, resp.

divisibles) de \mathcal{A} . Si \mathcal{A} est noethérienne (resp. artinienne) alors $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ (resp. $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$) est une théorie de torsion héréditaire (resp. co-héréditaire) sur \mathcal{A} .

Remarque : ainsi dans une catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire noethérienne (resp. artinienne) tout objet A admet un plus grand sous-objet de torsion A_{tor} (resp. divisible A_{div}) de sorte que A/A_{tor} (resp. A/A_{div}) est sans torsion (resp. de torsion) et $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}(A/A_{tor})$ (resp. $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}A_{div}$).

1.1.2. Notations. — Soit \mathcal{D} une catégorie triangulée munie d'une t -structure $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ au sens de [2] définition 1.3.1; on notera :

- \mathcal{C} le cœur;
- $\tau_{\leq n}$ et $\tau_{\geq n}$, les foncteurs de troncation;
- $h^n := \tau_{\leq n}\tau_{\geq n} = \tau_{\geq n}\tau_{\leq n}$.

On rappelle qu'un foncteur triangulé $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ est dit t -exact à droite (resp. à gauche), si $T(\mathcal{D}_1^{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\leq 0}$ (resp. $T(\mathcal{D}_1^{\geq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\geq 0}$) et t -exact s'il est t -exact à droite et à gauche.

1.1.3. Notation. — Pour $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ un foncteur triangulé, on note pT pour $h^0 \circ T \circ \epsilon_1$, où $\epsilon_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ est l'inclusion du cœur.

Remarque : la situation que nous utiliserons essentiellement sera celle des faisceaux pervers sur un schéma d'où l'exposant p dans la notation même si pour l'instant il n'y a pas de t -structure perverse.

On rappelle que si (T^*, T_*) est une paire de foncteurs triangulés adjoints, alors T^* est t -exact à droite si et seulement si T_* est t -exact à gauche et alors $({}^pT^*, {}^pT_*)$ est une paire de foncteurs adjoints de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

1.1.4. Corollaire. — (cf. [13] 1.3.6) Si \mathcal{C} est munie d'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ alors

$$\begin{aligned} {}^+\mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1} : h^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^+\mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0} : h^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

définissent une nouvelle t -structure sur \mathcal{D} dont on note ${}^+\mathcal{C}$ le cœur lequel est en outre munie d'une théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$.

Remarque : on retrouve la t -structure p à partir de $p+$ via les formules :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{A \in {}^+\mathcal{D}^{\leq 0} : {}^+h^0(A) \in \mathcal{F}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{A \in {}^+\mathcal{D}^{\geq -1} : {}^+h^{-1}(A) \in \mathcal{T}\} \end{aligned}$$

de sorte que ${}^{++}\mathcal{C} = \mathcal{C}[-1]$.

1.1.5. Lemme. — Pour $A \in \mathcal{C}$ muni d'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, on a

$$A_{\mathcal{T}} = {}^+h^{-1}A \text{ et } A_{\mathcal{F}} = {}^+h^0A.$$

Pour $A \in {}^+\mathcal{C}$ munie de la théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$, on a

$$A_{\mathcal{F}} = h^0A \text{ et } A_{\mathcal{T}[-1]} = h^1A.$$

1.1.6. Notation. — Pour $T : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ un foncteur triangulé, on notera ${}^{p+}h^0T$ pour ${}^+h^0 \circ T \circ \epsilon_1$.

Remarque : comme précédemment l'exposant p ne fait pas encore mention à une quelconque t -structure perverse.

Exemple : reprenons l'exemple d'une catégorie linéaire \mathbb{O} -linéaire et supposons \mathcal{C} noethérienne munie de la théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ où \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est la sous-catégorie pleine des objets de torsion (resp. libres) de \mathcal{C} . Pour $L \in \mathcal{F}$, ϖ_{1L} est un monomorphisme dans \mathcal{C} et on a la suite exacte courte dans \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\varpi_{1L}} L \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L} \rightarrow 0.$$

Comme \mathcal{C} est une sous-catégorie abélienne admissible de \mathcal{D} , cette suite exacte provient d'un triangle distingué dans \mathcal{D}

$$L \xrightarrow{\varpi_{1L}} L \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L} \rightsquigarrow$$

qui après rotation

$$\text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L}[-1] \rightarrow L \xrightarrow{\varpi_{1L}} L \rightsquigarrow$$

devient un triangle distingué dont les objets sont dans ${}^+\mathcal{C}$, ce qui donne une suite exacte courte dans ${}^+\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L}[-1] \rightarrow L \xrightarrow{\varpi_{1L}} L \rightarrow 0$$

de sorte que ϖ_{1L} est désormais un épimorphisme dans ${}^+\mathcal{C}$ de noyau

$$\text{Ker}_{p\mathcal{C}} \varpi_{1L} = \text{Coker}_{\mathcal{C}} \varpi_{1L}[-1].$$

1.1.7. Corollaire. — Soit $A \in \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}$ alors $A \in \mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$.

Démonstration. — Cela découle directement des liens entre les deux t -structures considérées. \square

1.1.8. Notation. — Pour $A, B \in \mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$, on notera

$$A \hookrightarrow B$$

une flèche $A \rightarrow B$ injective dans \mathcal{C} dont le conoyau est de torsion; c'est alors une flèche surjective de ${}^+\mathcal{C}$ dont le noyau est de torsion.

1.2. Recollement. — On suppose données trois catégories triangulées \mathcal{D} , \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F ainsi que des foncteurs triangulés

$$i_* : \mathcal{D}_F \rightarrow \mathcal{D}, \quad j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_U$$

vérifiant les conditions de recollement de [2] §1.4.3

1. i_* possède un adjoint à gauche noté i^* et un adjoint à droite $i^!$;
2. j^* possède un adjoint à gauche $j_!$ et un adjoint à droite j_* ;
3. on a $j^*i_* = 0$ et donc par adjonction $i^*j_! = 0$ et $i^!j_* = 0$; en outre pour $A \in \mathcal{D}_F$ et $B \in \mathcal{D}_U$

$$\mathrm{Hom}(j_!B, i_*A) = 0 \text{ et } \mathrm{Hom}(i_*, j_*B) = 0;$$

4. pour tout $K \in \mathcal{D}$, il existe $d : i_*i^*K \rightarrow j_!j^*K[1]$ (resp. $d : j_*j^*K \rightarrow i_*i^!K[1]$), nécessairement unique, tel que le triangle

$$j_!j^*K \rightarrow K \rightarrow i_*i^*K \rightsquigarrow^d \quad (\text{resp. } i_*i^!K \rightarrow K \rightarrow j_*j^*K \rightsquigarrow^d)$$

soit distingué ;

5. les foncteurs i_* , $j_!$ et j_* sont pleinement fidèles : les morphismes d'adjonction

$$i^*i_* \rightarrow \mathrm{Id} \rightarrow i^!i_* \text{ et } j^*j_* \rightarrow \mathrm{Id} \rightarrow j^*j_!$$

sont des isomorphismes.

Remarque : on résume les propriétés précédentes en un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{i^!} & \xleftarrow{j_*} \\ \mathcal{D}_F & \xrightarrow{i_*} \mathcal{D} & \xrightarrow{j^*} \mathcal{D}_U \\ & \xleftarrow{i^*} & \xleftarrow{j_!} \end{array}$$

que l'on qualifie de *situation de recollement*.

Remarque : en considérant les catégories opposées triangulées via $[-1]$, en échangeant les rôles de i^* et $i^!$ (resp. $j_!$ et j_*), la situation

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{i^*} & \xleftarrow{j^!} \\ \mathcal{D}_F^{op} & \xrightarrow{i_*} \mathcal{D}^{op} & \xrightarrow{j^*} \mathcal{D}_U^{op} \\ & \xleftarrow{i^!} & \xleftarrow{j_*} \end{array}$$

est encore de recollement. Elle est dite formellement duale de la précédente.

Étant donnée des t -structures $(\mathcal{D}_U^{\leq 0}, \mathcal{D}_U^{\geq 0})$ sur \mathcal{D}_U et $(\mathcal{D}_F^{\leq 0}, \mathcal{D}_F^{\geq 0})$ sur \mathcal{D}_F , on définit une t -structure sur \mathcal{D} par recollement :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i^*K \in \mathcal{D}_F^{\leq 0}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i^!K \in \mathcal{D}_F^{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

Remarque : en recollant la t -structure de \mathcal{D}_F (resp. \mathcal{D}_U) avec la t -structure dégénérée $(\mathcal{D}_U, 0)$ de \mathcal{D}_U (resp. $(\mathcal{D}_F, 0)$ de \mathcal{D}_F), on obtient des foncteurs de troncation notés $\tau_{\leq n}^F$

(resp. $\tau_{\leq n}^U$) dont les foncteurs cohomologiques sont $i_*h_F^n i^*$ (resp. $j_*h_U^n j^*$). Dualemeent pour la t -structure dégénérée $(0, \mathcal{D}_U)$ (resp. $(0, \mathcal{D}_F)$), on obtient $\tau_{\geq n}^F$ (resp. $\tau_{\geq n}^U$) dont les foncteurs cohomologiques sont $i_*h_F^n i^!$ (resp. $j_*h_U^n j^*$). On a alors

$$\tau_{\leq n} = \tau_{\leq n}^F \tau_{\leq n}^U \text{ et } \tau_{\geq n} = \tau_{\geq n}^F \tau_{\geq n}^U.$$

1.2.1. Proposition. — ([13] proposition 2.30) Soient \mathcal{C}_F et \mathcal{C}_U munis de théorie de torsion $(\mathcal{T}_F, \mathcal{F}_F)$ et $(\mathcal{T}_U, \mathcal{F}_U)$, on définit une théorie de torsion sur \mathcal{C} par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{P \in \mathcal{C} : p_i^* P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{T}_U\} \\ \mathcal{F} &:= \{P \in \mathcal{C} : p_i^! P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{F}_U\} \end{aligned}$$

1.2.2. Corollaire. — ([13] lemme 2.32) On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} p_{i_*}(\mathcal{T}_F) \subset \mathcal{T} \quad p_{j!}(\mathcal{T}_U) \subset \mathcal{T} \quad p_{j!_*}(\mathcal{T}_U) \subset \mathcal{T} \\ p_{i_*}(\mathcal{F}_F) \subset \mathcal{F} \quad p_{j_*}(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F} \quad p_{j!_*}(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F} \end{aligned}$$

Démonstration. — Cela découle directement

- de la définition de $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$;
- du fait, cf. [2] proposition 1.4.17 (i), que les composés

$$p_{j_*} \circ p_{i_*}, \quad p_{i^*} \circ p_{j!}, \quad p_{i^!} \circ p_{j_*}$$

sont nuls ;

- de la nullité de $p_{i^*} p_{j!_*}$ et $p_{i^!} p_{j!_*}$.

□

Remarque : pour ${}^+ \mathcal{C}$, on a en particulier que $p^+ j_!(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$.

En utilisant la construction du corollaire 1.1.4, on définit alors les foncteurs suivant :

$$\begin{aligned} p_{j!} &= \tau_{\leq -2}^F j_* = \tau_{\geq 0}^F j_! \\ p^+ j_! &= {}^+ \tau_{\leq -2}^F j_* = {}^+ \tau_{\geq 0}^F j_! \\ p_{j!_*} &= \tau_{\leq -1}^F j_* = \tau_{\geq 1}^F j_! \\ p^+ j_{!_*} &= {}^+ \tau_{\leq -1}^F j_* = {}^+ \tau_{\geq 1}^F j_! \\ p_{j_*} &= \tau_{\leq 0}^F j_* = \tau_{\geq 2}^F j_! \\ p^+ j_* &= {}^+ \tau_{\leq 0}^F j_* = {}^+ \tau_{\geq 2}^F j_! \end{aligned}$$

dont le premier (resp. le dernier) est à image dans \mathcal{C} (resp. ${}^+ \mathcal{C}$) et les quatre autres dans $\mathcal{C} \cap {}^+ \mathcal{C}$. On a alors les triangles distingués suivant (cf. [13] 2.42-2.46) :

$$\begin{aligned} p_{j!} &\rightarrow p^+ j_! \rightarrow p_{i_*} h_{tors}^{-1} i^* j_*[1] \rightsquigarrow \\ p^+ j_! &\rightarrow p_{j!_*} \rightarrow p_{i_*} h_{libre}^{-1} i^* j_*[1] \rightsquigarrow \\ p_{j!_*} &\rightarrow p^+ j_{!_*} \rightarrow p_{i_*} h_{tors}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ p^+ j_{!_*} &\rightarrow p_{j_*} \rightarrow p_{i_*} h_{libre}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ p_{j_*} &\rightarrow p^+ j_* \rightarrow p_{i_*} h_{tors}^1 i^* j_*[-1] \rightsquigarrow \end{aligned}$$

1.2.3. Corollaire. — On suppose que j_* (resp. $j_!$) est t -exact pour \mathcal{C} (resp. ${}^+\mathcal{C}$) alors $j_*(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$ dans ${}^+\mathcal{C}$ (resp. $j_!(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$ dans \mathcal{C}). En outre ${}^p j_{!*}(\mathcal{F}_U)$ (resp. ${}^{p+} j_{!*}(\mathcal{F}_U)$) est dans $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$.

Démonstration. — Soit $L \in \mathcal{F}_U$ dans $\mathcal{C}_U \cap {}^+\mathcal{C}_U$; comme ${}^p j_* = j_*$, $j_* L \in \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}$ et le résultat découle du corollaire 1.1.7. Le cas de $j_!$ est dual : comme ${}^+ j_! = j_!$, $j_! L \in \mathcal{F}$ dans ${}^+\mathcal{C}$ de sorte que $j_! L$ appartient à $\mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}$ d'où le résultat. En ce qui concerne les extensions intermédiaires, on utilise qu'un quotient d'un divisible (resp. un sous-objet d'un libre) est divisible (resp. libre) et la définition de ${}^p j_{!*}$ sa version $p+$. \square

1.2.4. Proposition. — (cf. [13] 2.27, 2.28, 2.29) Dans une situation de recollement, le foncteur ${}^p j_{!*}$ vérifie les propriétés suivantes :

- il préserve les monomorphismes et les épimorphismes ;
- en ce qui concerne les socles et les top, pour $A \in \mathcal{C}_U$ on a

$$\begin{aligned} \text{Soc } {}^p j_{!*} A &\simeq \text{Soc } {}^p j_* A \simeq {}^p j_{!*} \text{Soc } A \\ \text{Top } {}^p j_! A &\simeq \text{Top } {}^p j_{!*} A \simeq {}^p j_{!*} \text{Top } A \end{aligned}$$

- il est pleinement fidèle.

Remarque : en particulier pour A et B des faisceau pervers à support respectivement dans X et F , on a

$$\text{Hom}({}^p j_! A, B) = 0, \quad \text{Hom}(B, {}^p j_* A) = 0.$$

1.3. Réduction modulaire. — On note $\mathbb{F}(-)$ le foncteur de réduction modulaire $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{L}}^{\mathbb{L}} (-)$; ce dernier ne commute pas aux foncteurs de troncations. Précisément pour $A \in D_c^b(X, \mathbb{O})$, d'après cf. [13] proposition 2.35, on a les triangles distingués :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\tau_{\leq n} A &\rightarrow \tau_{\leq n} \mathbb{F}A \rightarrow h^{-1} \left(\mathbb{F}h_{\text{tors}}^{n+1} A \right) [-n] \rightsquigarrow \\ \tau_{\leq n} \mathbb{F}A &\rightarrow \mathbb{F}^+ \tau_{\leq n} A \rightarrow h^0 \left(\mathbb{F}h_{\text{tors}}^{n+1} A \right) [-n-1] \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^+ \tau_{\leq n} A &\rightarrow \mathbb{F}\tau_{\leq n+1} A \rightarrow \mathbb{F}h_{\text{libre}}^{n+1} A [-n-1] \rightsquigarrow \end{aligned}$$

En appliquant ceci aux foncteurs de troncation $\tau_{\leq i}^F$ on obtient alors les triangles distingués 2.54-2.61 de [13] :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^p j_! &\rightarrow {}^p j_! \mathbb{F} \rightarrow h^{-1} \mathbb{F}^p i_* {}^p h_{\text{tors}}^{-1} i^* j_* [2] \rightsquigarrow \\ {}^p j_! \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F}^p j_! \rightarrow h^0 \mathbb{F}^p i_* {}^p h_{\text{tors}}^{-1} i^* j_* [1] \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p j_! &\rightarrow \mathbb{F}^p j_{!*} \rightarrow \mathbb{F}^p i_* h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* [1] \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p j_{!*} &\rightarrow {}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow h^{-1} \mathbb{F}^p i_* {}^p h_{\text{tors}}^0 i^* j_* [1] \rightsquigarrow \\ {}^p j_{!*} \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F}^p j_{!*} \rightarrow h^0 \mathbb{F}^p i_* {}^p h_{\text{tors}}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p j_{!*} &\rightarrow \mathbb{F}^p j_* \rightarrow \mathbb{F}^p i_* h_{\text{libre}}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p j_* &\rightarrow {}^p j_* \mathbb{F} \rightarrow h^{-1} \mathbb{F}^p i_* h_{\text{tors}}^1 i^* j_* \rightsquigarrow \\ {}^p j_* \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F}^p j_* \rightarrow h^0 \mathbb{F}^p i_* h_{\text{tors}}^1 i^* j_* [-1] \rightsquigarrow \\ \mathbb{F}^p j_* &\rightarrow \mathbb{F}^p j_* \rightarrow \mathbb{F}^p i_* h_{\text{libre}}^1 i^* j_* [-1] \rightsquigarrow \end{aligned}$$

1.4. t -structures perverses. — Dans la suite S désigne le spectre soit

- d'un corps ;
- d'un anneau de valuation discrète hensélien A ;
- de \bar{A} le normalisé de A dans une clôture algébrique du corps des fractions de A .

On rappelle en outre que Λ désigne une des trois lettres \mathbb{K}, \mathbb{O} ou \mathbb{F} introduites plus haut.

Soit alors X un schéma de type fini sur S . On note $\mathcal{D} := D_c^b(X, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine de $D(X, \Lambda)$ formée des complexes à cohomologie bornée constructible. Si $j : U \hookrightarrow X$ est un ouvert dense de complémentaire $i : F \hookrightarrow X$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{i^!} & \xleftarrow{j_*} \\ \mathcal{D}_F & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{D} \xrightarrow{j^*} & \mathcal{D}_U \\ & \xleftarrow{i^*} & \xleftarrow{j^!} & \end{array}$$

est une situation de recollement ce qui permet de recoller des t -structures munies de théories de torsion comme précédemment.

1.4.1. Notation. — Dans la suite du texte, h^i désignera le foncteur cohomologique associée à la t -structure naturelle sur la catégorie dérivée considérée.

(a) **Cas où S est le spectre d'un corps** : on considérera dans cette situation la t -structure perverse p définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^p D^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p D^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$. On note alors ${}^p \text{FP}(X, \Lambda)$ le cœur de cette t -structure : c'est une catégorie abélienne noethérienne et Λ -linéaire.

1.4.2. Notation. — Les foncteurs cohomologiques associés à la t -structure perverse ci-avant seront notés ${}^p h^i$.

Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{O}$, en tant que catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire, on obtient comme précédemment une autre t -structure $p+$

$$\begin{aligned} A \in {}^{p+} D^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^* A = 0, & \forall i > -\dim \overline{\{x\}} + 1 \\ h^{-\dim \overline{\{x\}} + 1} i_x^* A \text{ de torsion} \end{cases} \\ A \in {}^{p+} D^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} h^i i_x^! A = 0, & \forall i < -\dim \overline{\{x\}} \\ h^{-\dim \overline{\{x\}}} i_x^! A \text{ libre} \end{cases} \end{aligned}$$

dont on notera ${}^{p+} \text{FP}(X, \mathbb{O})$ le cœur et ${}^{p+} h^i$ les foncteurs cohomologiques. C'est une catégorie abélienne artinienne et \mathbb{O} -linéaire.

Remarque : la t -structure p (resp. $p+$) sur X , s'obtient par recollement des t -structures p (resp. $p+$) sur U et F . Dans le cas où Λ est un corps, p et $p+$ coïncident.

1.4.3. Proposition. — (cf. [13] §1.7)

- Un objet A de $D_c^b(X, \mathbb{O})$ est dans ${}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \mathbb{O})$ (resp. ${}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}$) si et seulement si $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}$ est un objet de ${}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \mathbb{F})$ (resp. de ${}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \mathbb{F})$).
- Soit A un objet de ${}^p\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$ alors $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{O}/(\varpi)$ est un objet de ${}^p\mathrm{FP}(X, \mathbb{F})$ si et seulement si A est libre, ce qui revient à demander que A soit un objet de ${}^{p+}\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$. On a alors $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{O}/(\varpi) = \mathrm{Coker} \varpi.1_A$, noyau pris dans ${}^p\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$.
- Soit A un objet de ${}^{p+}\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$ alors $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{O}/(\varpi)$ est un objet de ${}^{p+}\mathrm{FP}(X, \mathbb{F})$ si et seulement si A est divisible, ce qui revient à demander que A soit un objet de ${}^p\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$. On a alors $A \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} \mathbb{O}/(\varpi) = \mathrm{Ker} \varpi.1_A[1]$, noyau pris dans ${}^{p+}\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$.

Remarque : la dualité de Grothendieck échange les deux t -structures perverses p et $p+$. Soient $A, B \in {}^p\mathcal{C} \cap {}^{p+}\mathcal{C}$ tels que $A \hookrightarrow B$ (resp. $A \twoheadrightarrow B$) dans ${}^p\mathcal{C}$. Alors $DB \twoheadrightarrow DA$ (resp. $DB \hookrightarrow DA$) dans ${}^{p+}\mathcal{C}$.

Remarque : si f est un foncteur exact à droite pour la t -structure p et commute à la dualité de Grothendieck-Verdier alors

$$A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0} \Rightarrow f(A) \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}.$$

1.4.4. Proposition. — On suppose que l'inclusion $j : U \hookrightarrow X$ est affine alors pour $P \in {}^p\mathrm{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\mathrm{FP}(U, \mathbb{O})$ on a

$$j_*P = {}^pj_*P = {}^{p+}j_*P, \quad j_!P = {}^pj_!P = {}^{p+}j_!P,$$

et ${}^pj_{!*}P, {}^{p+}j_{!*}P$ sont dans ${}^p\mathrm{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$.

Démonstration. — Comme j est affine, j_* (resp. $j_!$) est t -exact pour p (resp. $p+$) et le résultat découle du corollaire 1.2.3. \square

Remarque : en ce qui concerne les extensions intermédiaires, par définition ${}^pj_{!*}K = \mathrm{Im}_{{}^p\mathcal{C}}({}^pj_!K \rightarrow {}^pj_*K)$ et ${}^{p+}j_{!*} = \mathrm{Im}_{{}^{p+}\mathcal{C}}({}^{p+}j_!K \rightarrow {}^{p+}j_*K)$ sont donc aussi dans ${}^p\mathcal{C} \cap {}^{p+}\mathcal{C}$. Ils sont en outre reliés par la suite exacte courte dans ${}^p\mathcal{C}$:

$$0 \rightarrow {}^pj_{!*} \rightarrow {}^{p+}j_{!*} \rightarrow {}^pi_* {}^ph_{tors}^0 i^* j_* \rightarrow 0. \quad (1.4.5)$$

1.4.6. Lemme. — Soit $P \in {}^p\mathrm{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\mathrm{FP}(U, \mathbb{O})$ avec $j : U \hookrightarrow X$ affine tel que ${}^ph_{tors}^0 i^* j_* P$ est non nul. Alors il existe un point z de $X - U$ tel que $\left(z^* h^{-\dim \bar{z}} {}^{p+}j_{!*} P \right)_{tors}$ est non nul.

Remarque : comme ${}^pj_{!*}P \in {}^p\mathcal{D}^{\leq -1}$, on a nécessairement $z^* h^{-\dim \bar{z}} {}^pj_{!*}P$ qui est nul.

Démonstration. — On choisit pour z un point générique du support de ${}^ph_{tors}^0 i^* j_* P$ de sorte que d'après la remarque précédente, la suite exacte longue des faisceaux de cohomologie appliquée à la suite exacte courte (1.4.5) a pour fibre en z :

$$0 \rightarrow z^* h^{-\dim \bar{z}} {}^{p+}j_{!*} P \rightarrow z^* h^{-\dim \bar{z}} \left({}^ph_{tors}^0 i^* j_* P \right) \rightarrow 0$$

ce qui donne le résultat. \square

Remarque : plus généralement avec les notations précédentes, si Q est un faisceau pervers tel que dans ${}^p\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$

$${}^p j_{!*}P \hookrightarrow Q \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*}P$$

distinct de ${}^p j_{!*}P$ alors la conclusion du lemme s'applique à Q . On notera que dans ${}^{p+}\mathrm{FP}(X, \mathbb{O})$ les inclusions précédentes deviennent

$${}^p j_{!*}P \twoheadrightarrow Q \twoheadrightarrow {}^{p+} j_{!*}P.$$

1.4.7. Proposition. — Soit $K \in {}^p\mathrm{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\mathrm{FP}(U, \mathbb{O})$ un faisceau pervers sans torsion sur U . Si l'inclusion $j : U \hookrightarrow X$ est affine alors

$$\mathbb{F}j_*K = j_*\mathbb{F}K, \quad \mathbb{F}j_!K = j_!\mathbb{F}K$$

Démonstration. — Le résultat découle directement de la proposition 1.4.4 et du fait que $\mathbb{F}K$ est un faisceau pervers. \square

(b) **Cas où** $S = \mathrm{Spec} A$: on note

- $f : X \rightarrow S$ le morphisme structural ;
- $s = \mathrm{Spec} k$ (resp. $\eta = \mathrm{Spec} K$) le point fermé (resp. générique) de S ;
- X_s (resp. X_η) la fibre spéciale (resp. générique) de X ;
- $i : X_s \hookrightarrow X$ (resp. $j : X_\eta \hookrightarrow X$) l'inclusion fermée (resp. ouverte).

Le complexe $f^!\Lambda_S[2](1)$ est dualisant sur X d'après [7] Th. finitude §4. On considère alors la t -structure sur X obtenue par recollement de la perversité autoduale p sur la fibre spéciale X_s de X et de la t -structure $({}^pD^{\leq -1}(X_\eta, \Lambda), {}^pD^{\geq -1}(X_\eta, \Lambda))$, notée $p[1]$, où p est la perversité autoduale sur la fibre générique X_η de X . Autrement dit, en posant, d'après [1] XIV 2.2, pour x un point de X d'image y dans S

$$\delta(x) = \deg \mathrm{Tr} \kappa(x)/\kappa(y) + \dim \overline{\{y\}}$$

on a

$$\begin{aligned} A \in {}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^q(i_x^*A) = 0, \forall q > -\delta(x) \\ A \in {}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^q(i_x^!A) = 0, \forall q < -\delta(x) \end{aligned}$$

On définit de même la t -structure $p+$ sur X de sorte que le foncteur dualisant $D_X = R\mathrm{Hom}(-, K_X)$ échange ${}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda)$ (resp. ${}^{p+}D^{\leq 0}(X, \Lambda)$) et ${}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda)$ (resp. ${}^{p+}D^{\geq 0}(X, \Lambda)$).

1.4.8. Proposition. — Le foncteur j_* (resp. $j_!$) est t -exact pour X_η muni de la t -structure $p[1]$ (resp. $p + [1]$) et X de la t -structure p (resp. $p+$) définie ci-dessus.

Démonstration. — Pour le cas de j_* , cf. par exemple [11] bas de la page 48 ; le cas de $j_!$ est dual. \square

D'après le corollaire 1.2.3, on en déduit alors le résultat suivant.

1.4.9. Corollaire. — Si $L_{\mathbb{O}} \in {}^pD^{\leq -1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}D^{\geq -1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{O})$, i.e. est sans torsion pour la t -structure $({}^pD^{\leq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$, alors $j_!L_{\mathbb{O}}$, $j_*L_{\mathbb{O}}$, ${}^pj_{!*}L_{\mathbb{O}}$ et ${}^{p+}j_{!*}L_{\mathbb{O}}$ appartiennent à ${}^pD^{\leq 0}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}D^{\geq 0}(X, \mathbb{O})$, i.e. sont sans torsion.

(c) **Cas où $S = \text{Spec } \bar{A}$** : on note

- $\bar{s} = \text{Spec } \bar{k}$ (resp. $\bar{\eta} = \text{Spec } K$) le point fermé (resp. générique) de S ;
- $X_{\bar{s}}$ (resp. $X_{\bar{\eta}}$) la fibre spéciale (resp. générique) de X ;
- $\bar{i} : X_{\bar{s}} \hookrightarrow X$ (resp. $\bar{j} : X_{\bar{\eta}} \hookrightarrow X$) l'inclusion fermée (resp. ouverte).

Remarque : dans cette situation, il n'y a plus de complexe dualisant.

On considère alors les t -structures suivantes :

- $p(1)$ en recollant $({}^pD^{\leq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$ et $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda))$;
- $p(0)$ en recollant $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$ et $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda))$.

Remarque : on notera $p(1)+$ et $p(0)+$ les t -structures obtenues en recollant comme ci-dessus à partir des versions $p+$ sur $X_{\bar{\eta}}$ et $X_{\bar{s}}$.

1.4.10. Proposition. — (i) Pour $X_{\bar{\eta}}$ et X munis des t -structures $p[1]$ et $p(1)$ (resp. $p[1]+$ et $p(1)+$), les foncteurs \bar{j}_* et $\bar{j}_!$ sont t -exact. Pour $L_{\mathbb{O}}$ sur $X_{\bar{\eta}}$ qui est $p[1]$ pervers sans torsion, on a

$$\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} = {}^{p(1)}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}} = {}^{p(1)+}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}}$$

qui est sans torsion sur X et on a la suite exacte courte de faisceau $p(1)$ -pervers sans torsion sur X :

$$0 \rightarrow \bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \longrightarrow \bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \longrightarrow \bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0.$$

(ii) Pour $X_{\bar{\eta}}$ et X munis des t -structures p et $p(0)$ (resp. $p+$ et $p(0)+$), les foncteurs \bar{j}_* et $\bar{j}_!$ sont t -exact. Pour $L_{\mathbb{O}}$ sur $X_{\bar{\eta}}$ qui est p -pervers sans torsion, on a

$$\bar{j}_!L_{\mathbb{O}} = {}^{p(0)}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}} = {}^{p(0)+}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}}$$

qui est sans torsion sur X et on a la suite exacte courte de faisceau $p(0)$ -pervers sans torsion sur X :

$$0 \rightarrow \bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \longrightarrow j_*L_{\mathbb{O}} \longrightarrow \bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0.$$

Remarque : le complexe $\bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}}$ est le complexe des cycles proches notés $\Psi_{\bar{\eta}}(L_{\mathbb{O}})$ que l'on considère muni de son action du groupe de Galois.

Démonstration. — (i) Le foncteur \bar{j}_* (resp. $\bar{j}_!$) est t -exact à gauche (resp. à droite) pour p et $p+$. Par ailleurs comme d'après [11] §4, $\bar{i}^*\bar{j}_*$ est t -exact relativement à p sur $X_{\bar{\eta}}$ et p sur $X_{\bar{s}}$, on en déduit que \bar{j}_* est t -exact relativement à $p[1]$ sur $X_{\bar{\eta}}$ et $p(1)$ sur X . En ce qui concerne $\bar{j}_!$, considérons le triangle distingué

$$\bar{j}_!\bar{j}^*K \longrightarrow K \longrightarrow \bar{i}_*\bar{i}^*K \rightsquigarrow$$

pour $K = \bar{j}_* L_\mathbb{O}$ avec $L_\mathbb{O}$ qui est $p[1]$ pervers. La suite exacte longue de $p(1)$ -cohomologie et le fait que ${}^p h^r \bar{i}_* \bar{j}_* L_\mathbb{O}$ est nul pour tout $r \neq -1$, donnent la nullité des ${}^{p(1)} h^r \bar{j}_! \bar{j}_* K$ pour tout $r \neq 0$ ainsi que la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \bar{i}_* {}^{p(1)} h^{-1} \bar{i}_* K \rightarrow \bar{j}_! \bar{j}_* K \rightarrow K \rightarrow 0$$

avec ${}^{p(1)} h^{-1} \bar{i}_* K = \Psi_\eta(L_\mathbb{O})$ qui est p -pervers. On en déduit alors que $\bar{j}_!$ est t -exact relativement à $p[1]$ et $p(1)$ ainsi que $\bar{j}_* L_\mathbb{O} = {}^{p(1)} \bar{j}_! L_\mathbb{O}$.

Soit alors $L_\mathbb{O}$ qui est $p[1]+$ pervers et soit

$${}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O} \rightarrow L_\mathbb{O} \rightarrow {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O} \rightsquigarrow$$

le triangle distingué associé où ${}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O}[1]$ est $p[1]$ pervers de torsion et ${}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O}$ est libre. Après application du foncteur exact \bar{j}_* on obtient le triangle distingué

$$\bar{j}_* {}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O} \rightarrow \bar{j}_* L_\mathbb{O} \rightarrow \bar{j}_* {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O} \rightsquigarrow$$

où $\bar{j}_* {}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O}$ et $\bar{j}_* {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O}[1]$ sont $p(1)$ -pervers. Par ailleurs comme pour tout M qui est $p[1]$ -pervers, $\bar{j}_* M = {}^{p(1)} \bar{j}_! M$, il découle du corollaire 1.2.2 que $\bar{j}_* {}^{p[1]} h^0 L_\mathbb{O}$ (resp. $\bar{j}_* {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O}[1]$) est libre (resp. de torsion). On en déduit alors que \bar{j}_* est t -exact à gauche relativement à $p[1]+$ et $p(1)+$ et donc t -exact. La t -exactitude de $\bar{j}_!$ relativement à $p[1]+$ et $p(1)+$ s'en déduit alors comme précédemment.

Remarque : pour tout M qui est $p[1]+$ pervers, $\bar{j}_* M = {}^{p(1)+} \bar{j}_! M$.

(ii) Le raisonnement est strictement identique en notant que relativement aux t -structures p et $p(0)$, $\bar{i}_* \bar{j}_*$ est t -exact de sorte que pour $K = \bar{j}_* L_\mathbb{O}$:

- $\bar{i}_* \bar{i}_* K$ est p -pervers ;
- ${}^{p(1)} \bar{i}_* K = \Psi_\eta(L_\mathbb{O})$ est p -pervers ;
- ${}^{p(1)} h^{-1} \bar{i}_* K$ est nul.

□

1.5. Cas d'un schéma de Hecke. — Soit $\mathbb{X}_\mathcal{I} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$. Pour $\Lambda = \mathbb{K}$ ou \mathbb{O} . La catégorie $\text{FP}\mathbb{H}_\mathbb{G}(\mathbb{X}_\mathcal{I}; \Lambda)$ (resp. $\text{FH}_\mathbb{G}(\mathbb{X}_\mathcal{I}; \Lambda)$) des *faisceaux pervers* (resp. des *faisceaux*) de Hecke sur $\mathbb{X}_\mathcal{I}$ à coefficients dans Λ est définie comme la catégorie dont :

- les objets sont les systèmes $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ où \mathcal{F}_I est un faisceau pervers (resp. faisceau) sur \mathbb{X}_I à coefficients dans Λ , tels que pour tout $g \in \mathbb{G}$ et $J \subset I$ tel que $g^{-1} J g \subset I$, on dispose d'un morphisme de faisceaux sur \mathbb{X}_I , $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*} \mathcal{F}_J$ soumis à la condition de cocycle

$$u_{K,I}(g'g) = [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \circ u_{J,I}(g)$$

- Les flèches sont les systèmes $(f_I)_{I \in \mathcal{I}}$ avec $f_I : \mathcal{F}_I \longrightarrow \mathcal{F}'_I$ tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J) \\ \downarrow f_I & & \downarrow [g]_{J,I,*}(f_J) \\ \mathcal{F}'_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J) \end{array}$$

Remarque : par rapport à [5] §1.3.7, on a supprimé les conditions (ii) et (iii). Les propositions 6.1 et 6.2 de loc. cit. sont encore valables, i.e. $\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ et $\mathrm{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ sont des catégories abéliennes munies de foncteurs $j_!, i^*$ (resp. Rj_*, i_* , resp. $j_*, Ri^!$) qui sont t -exact à droite (resp. t -exact, resp. t exacts à gauche) avec les propriétés d'adjonction habituelles, de sorte que l'on se retrouve à nouveau dans une situation de recollement.

- Pour $\Lambda = \mathbb{O}$, on demande en outre que les $[g]_{J,I,*}$ restent t -exact. On définit alors
- ${}^p\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{O})$ et ${}^{p+}\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{O})$ comme ci-dessus en prenant à chaque étage la même t -structure i.e. avec ou sans $+$;
 - les théories de torsion à chaque niveau « induisent » une théorie de torsion sur $\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \mathbb{O})$;
 - comme les $[g]_{J,I,*}$ commutent avec le foncteur $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{O}}^{\mathbb{L}} (-)$, la théorie de réduction modulaire précédente se prolonge aux faisceaux pervers de Hecke.

Remarque : contrairement à [5], avec notre définition de faisceaux pervers de Hecke, sans les conditions (ii) et (iii) de la définition 1.3.7 de loc. cit., le dual de Grothendieck d'un faisceau pervers de Hecke n'est pas a priori un faisceau pervers de Hecke. On pourra toutefois noter que dans le cas particulier où $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ est un \mathbb{O} -système local pervers sur $j_{\mathcal{I}} : \mathbb{U}_{\mathcal{I}} \hookrightarrow \mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ avec $\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = {}^p j_{!,*} \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ alors $D\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ est un faisceau pervers de Hecke relativement à la t -structure $p+$ isomorphe à ${}^{p+} j_{!*} \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\vee}$.

2. Filtrations de stratification d'un faisceau pervers sans torsion

Pour un Λ -faisceau pervers sans torsion sur un schéma X muni d'une stratification $\{X_{\alpha} : \alpha \in I\}$, nous allons construire des filtrations de celui-ci.

2.1. Rappels sur les pushout et pullback dans une catégorie abélienne. — Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne. Pour $A \rightarrow B$ une flèche entre objets de \mathcal{C} , on rappelle qu'un noyau $K \rightarrow A$ (resp. un conoyau $B \rightarrow Q$) est défini par la propriété universelle suivante : pour tout objet X de \mathcal{C} muni d'une flèche $X \rightarrow A$ (resp. $B \rightarrow X$) telle que le composé avec $A \rightarrow B$ est nul, il existe une flèche $X \rightarrow K$ (resp. $Q \rightarrow X$) telle que le diagramme suivant

commute

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 \downarrow & \searrow 0 & \\
 K & \longrightarrow & A \longrightarrow B
 \end{array}
 \quad (\text{ resp. } \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow 0 & \uparrow \\
 A & \longrightarrow & B \longrightarrow Q
 \end{array}
).$$

2.1.1. Définition. — Un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 P & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & C
 \end{array}$$

est un pullback (dit aussi un tiré en arrière) si pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & C
 \end{array}$$

il existe une unique flèche $X \rightarrow P$ telle que $X \rightarrow P \rightarrow A = X \rightarrow A$ et $X \rightarrow P \rightarrow B = X \rightarrow B$.

Dualement on a la définition suivante.

2.1.2. Définition. — Un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \longrightarrow & P
 \end{array}$$

est un pushout (dit aussi un poussé en avant) si pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

il existe une unique flèche $P \rightarrow X$ telle que $B \rightarrow P \rightarrow X = B \rightarrow X$ et $C \rightarrow P \rightarrow X = C \rightarrow X$.

2.1.3. Théorème. — (cf. [9] §2.1) Dans une catégorie abélienne \mathcal{C} , tout diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 & \downarrow & \\
 A & \longrightarrow & C
 \end{array}
 \quad (\text{ resp. } \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 & & \downarrow \\
 & & C
 \end{array}
)$$

peut être complété en un pullback (resp. pullout) et ce de manière unique à isomorphisme près.

2.1.4. Proposition. — Soit

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

un pullback et $K \rightarrow P$ un noyau de $P \rightarrow B$. Alors $K \rightarrow P \rightarrow A$ est un noyau de $A \rightarrow C$.

Démonstration. — Soit $X \rightarrow A$ tel que $X \rightarrow A \rightarrow C$ est nul ; alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{0} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

est commutatif de sorte qu'il existe une flèche $X \rightarrow P$ telle que $X \rightarrow P \rightarrow A = X \rightarrow A$ et $X \rightarrow P \rightarrow B$ est nul de sorte qu'il existe une unique flèche $X \rightarrow K$ telle que $X \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow A = X \rightarrow A$. Le résultat découle alors de la propriété universelle du noyau. \square

Dualement on la proposition suivante.

2.1.5. Proposition. — Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & P \end{array}$$

un pushout et $P \rightarrow Q$ un conoyau de $C \rightarrow P$. Alors $B \rightarrow P \rightarrow Q$ est un conoyau de $A \rightarrow B$.

Démonstration. — Soit $B \rightarrow X$ telle que $A \rightarrow B \rightarrow X$ est nulle. Le diagramme suivant est alors commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{0} & X \end{array}$$

de sorte qu'il existe une flèche $P \rightarrow X$ telle que $C \rightarrow P \rightarrow X$ est nulle. Ainsi il existe une unique flèche $Q \rightarrow X$ telle que $B \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow X = B \rightarrow X$ et le résultat découle de la propriété universelle du conoyau. \square

Rappelons aussi le résultat suivant.

2.1.6. Proposition. — (cf [9] théorème 2.54) Soit

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

un pullback avec $B \rightarrow C$ surjective ; alors $P \rightarrow A$ est surjective.

Dualement si

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & P \end{array}$$

est un pushout avec $C \rightarrow A$ injective alors $B \rightarrow P$ est injective.

2.1.7. Corollaire. — Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{C} et soit $C' \rightarrow C$ une flèche de \mathcal{C} . On note

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & C' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

le pullback. Alors $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow C' \rightarrow 0$ est exacte.

Démonstration. — D'après la proposition précédente $P \rightarrow C'$ est surjective et d'après 2.1.4, A est un noyau de $P \rightarrow C'$ d'où le résultat. \square

2.1.8. Corollaire. — Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{C} et soit $A \rightarrow A'$ une flèche de \mathcal{C} . On note

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & P \end{array}$$

le pushout. Alors $0 \rightarrow A' \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow 0$ est exacte.

Démonstration. — D'après la proposition précédente, $A' \rightarrow P$ est injective et d'après 2.1.5, C est un conoyau de $A' \rightarrow P$, d'où le résultat. \square

2.2. Stratifications d'un schéma. —

2.2.1. Définition. — Une stratification d'un schéma X est une collection finie

$$\{X_\alpha; \alpha \in I\}$$

de sous-schémas localement fermés de X telle que :

- les X_α sont disjoints deux à deux ;
- $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$;
- pour tout $\alpha \in I$, la frontière $Fr X_\alpha$ s'écrit comme une réunion de strates X_β .

2.2.2. Lemme. — Il existe un unique sous-ensemble $I^= \subset I$ minimal pour la propriété suivante :

$$\bigcup_{\alpha \in I^=} X_\alpha \text{ est dense dans } X.$$

Démonstration. — C'est immédiat puisque l'ensemble des sous ensembles J de I tels que $\bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$ est dense dans le support de P est non vide et stable par intersection. \square

Remarque : pour $\alpha \neq \beta$ des éléments de I^1 , $\overline{X_\alpha}$ et $\overline{X_\beta}$ sont des composantes irréductibles distinctes de X .

2.2.3. Définition. — Pour tout $h \geq 1$, on définit $X^{=h} := \bigcup_{\alpha \in I^h} X_\alpha$ où I^h est défini par récurrence

$$I^{=h+1} := I^1(I_{\geq h+1}), \text{ où } \overline{X^{=h}} - X^{=h} = \bigcup_{\alpha \in I^{\geq h+1}} X_\alpha.$$

2.2.4. Notation. — On note $X^{\geq h} := \overline{X^{=h}} = \bigcup_{\alpha \in I^{\geq h}} X_\alpha$.

Remarque : on obtient ainsi une stratification plus grossière que l'on notera sous la forme suivante

$$X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \dots X^{\geq k} \supset \emptyset$$

où pour tout $1 \leq h \leq k$, la codimension de $X^{\geq h}$ est supérieure ou égale à $h - 1$ et donc $k - 1$ est inférieur ou égal à la dimension de X .

2.2.5. Notation. — On note $j^{\geq h}$ l'inclusion $X^{=h} \hookrightarrow X^{\geq h}$ et $i_{\geq h} : X^{\geq h} \hookrightarrow X$.

2.3. Saturation. — On reprend les notations du §1.1, \mathcal{C} désigne le cœur d'une catégorie dérivée triangulée munie d'une t -structure. On suppose que \mathcal{C} est \mathbb{O} -linéaire noethérienne munie de la théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ comme dans la proposition 1.1.1 ; on note alors ${}^+\mathcal{C}$ la catégorie abélienne artinienne qui lui est associée munie de sa théorie de torsion $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$, cf. le corollaire 1.1.4. On considère alors une flèche $A \rightarrow P$ entre deux objets de $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$.

2.3.1. Lemme. — Si $A \rightarrow P$ est une inclusion dans ${}^+\mathcal{C}$ alors c'est aussi une inclusion dans \mathcal{C} .

Démonstration. — La suite exacte courte de ${}^+\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow 0$$

définit un triangle distingué $A \rightarrow P \rightarrow B \rightsquigarrow$ où B est tant que quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ d'un objet divisible est donc divisible. Ainsi tous les termes de ce triangle distingué appartiennent à \mathcal{C} de sorte que la suite est aussi exacte dans \mathcal{C} . \square

Remarque : une inclusion $A \rightarrow P$ dans \mathcal{C} est une inclusion dans ${}^+\mathcal{C}$ si et seulement si le quotient P/A est sans torsion dans \mathcal{C} . Dualement on a le lemme suivant.

2.3.2. Lemme. — Si $A \rightarrow P$ est une surjection dans \mathcal{C} , alors c'est une surjection dans ${}^+\mathcal{C}$.

Démonstration. — La suite exacte courte de \mathcal{C}

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow 0$$

définit un triangle distingué $B \rightarrow A \rightarrow P \rightsquigarrow$ où B en tant que sous-objet d'un objet libre de \mathcal{C} est un objet de ${}^+\mathcal{C}$ et donc tous les termes de ce triangle appartiennent à ${}^+\mathcal{C}$ et donc la suite précédente est aussi exacte dans ${}^+\mathcal{C}$. \square

Remarque : une surjection $A \rightarrow P$ dans ${}^+\mathcal{C}$ est une surjection dans \mathcal{C} si et seulement si le noyau dans ${}^+\mathcal{C}$ de $A \rightarrow P$ est sans torsion.

2.3.3. Lemme. — Soit $f_{\mathbb{O}} : A \rightarrow B$ est une flèche entre deux objets de $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$ telle que $f_{\mathbb{K}}$ est un isomorphisme. Alors $f_{\mathbb{O}}$ est un isomorphisme si et seulement si c'est une injection dans ${}^+\mathcal{C}$ et/ou une surjection dans \mathcal{C} .

2.3.4. Proposition. — Soit $i : A \hookrightarrow P$ une inclusion dans \mathcal{C} avec A et P sans torsion dans \mathcal{C} ; il existe alors une unique factorisation $A \rightarrow B \rightarrow P$ de f dans \mathcal{C} telle que :

- B est sans torsion dans \mathcal{C} ;
- le conoyau de $B \rightarrow P$ dans \mathcal{C} soit sans torsion ;
- le conoyau de $A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} est de torsion.

On appellera B le saturé de i lequel est alors obtenu comme l'image de i dans ${}^+\mathcal{C}$.

Démonstration. — Vérifions tout d'abord que $B = \text{Im}_{+C} i$ convient ; comme B est le quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ de A qui est divisible dans ${}^+\mathcal{C}$, on en déduit que B est sans torsion dans ${}^+\mathcal{C}$ et appartient donc aussi à \mathcal{C} . Ainsi comme i est injective dans \mathcal{C} on en déduit que A est un sous-objet de B dans \mathcal{C} .

Considérons la suite exacte courte de ${}^+\mathcal{C}$: $0 \rightarrow P \rightarrow D \rightarrow 0$ où D en tant que quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ d'un objet divisible, est sans torsion et donc un objet de \mathcal{C} . Le triangle distingué associé est alors constitué d'objets de \mathcal{C} et donc une suite exacte courte dans \mathcal{C} avec donc D sans torsion.

De même considérons la suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow 0$ dans \mathcal{C} où E est un objet de \mathcal{C} . On obtient alors un triangle distingué $E[1] \rightarrow A \rightarrow B \rightsquigarrow$ associé à la surjection dans ${}^+\mathcal{C}$: $A \twoheadrightarrow B$ de sorte que $D[1]$ est un objet de ${}^+\mathcal{C}$ et donc D est un objet de torsion de \mathcal{C} .

Considérons alors B' une autre factorisation vérifiant les conditions de l'énoncé ; comme précédemment on a $A \hookrightarrow B'$ dans \mathcal{C} et donc une suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B' \rightarrow E' \rightarrow 0$ avec par hypothèse E' de torsion de sorte que dans ${}^+\mathcal{C}$, $A \rightarrow B'$ est surjective. La propriété de l'octaèdre donne alors que le cône D' de $B' \rightarrow P$ est un objet de \mathcal{C} : en effet son h^{-1} s'injecte dans E' et aussi dans B il est donc libre et de torsion et donc nul. Ainsi donc $B \hookrightarrow X$ dans \mathcal{C} avec un conoyau sans torsion. Ainsi la suite exacte courte dans \mathcal{C} : $0 \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow D \rightarrow 0$ est aussi une suite exacte courte dans ${}^+\mathcal{C}$ et d'après la propriété

universelle de l'image, on a $\text{Im}_{+C} f \hookrightarrow B'$ dans ${}^+C$; ainsi comme dans ${}^+C$, $A \rightarrow B'$ est surjective, on a bien $B' = \text{Im}_{+C} f$. \square

2.3.5. Corollaire. — Soit $f : A \rightarrow P$ une flèche entre objets sans torsion de C alors $\text{Im}_C f$ est un sous-objet dans C de $B = \text{Im}_{+C} f$ avec :

- B un objet sans torsion de C ;
- dans C , $B \hookrightarrow P$ avec P/B sans torsion.

Démonstration. — On prend $i : A' = \text{Im}_C f \hookrightarrow P$ dont on prend le saturé; pour affirmer que ce saturé est $B = \text{Im}_{+C} f$ il suffit de voir que :

- B est sans torsion dans C ;
- $B \hookrightarrow P$ dans C avec P/B sans torsion dans C ;
- $A' \hookrightarrow B$ dans C avec B/A' de torsion.

Le premier point découle simplement du fait que B est un quotient dans ${}^+C$ de A' qui est un objet sans torsion de ${}^+C$. La suite exacte courte dans ${}^+C$: $0 \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow D \rightarrow 0$, comme P est divisible sans ${}^+C$, montre que D est sans torsion dans ${}^+C$ et appartient donc à C de sorte que la suite précédente est aussi une suite exacte courte de C ce qui montre le deuxième point. D'après la propriété universelle de l'image, on en déduit que $A' \hookrightarrow B$ dans C et comme la flèche $A \rightarrow A' \hookrightarrow B$ dans C est surjective dans ${}^+C$, on obtient B/A' de torsion dans C , d'où le résultat. \square

2.4. Cas d'une situation de recollement. — Soit

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{i^!} & \xleftarrow{j^*} \\ \mathcal{D}_F & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{D} & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{D}_U \\ & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j_!} & \end{array}$$

une situation de recollement telle que :

- \mathcal{D}_F et \mathcal{D}_U sont munis d'une t -structure $(\mathcal{D}_F^{\leq 0}, \mathcal{D}_F^{\geq 0})$ et $(\mathcal{D}_U^{\leq 0}, \mathcal{D}_U^{\geq 0})$ de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i^*K \in \mathcal{D}_F^{\leq 0}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i^!K \in \mathcal{D}_F^{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

est la t -structure sur \mathcal{D} obtenue par recollement ;

- \mathcal{C}_F et \mathcal{C}_U sont des catégories abéliennes \mathbb{O} -linéaires munies des théories de torsion $(\mathcal{T}_F, \mathcal{F}_F)$, et $(\mathcal{T}_U, \mathcal{F}_U)$ de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{P \in C : {}^p i^*P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{T}_U\} \\ \mathcal{F} &:= \{P \in C : {}^p i^!P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{F}_U\} \end{aligned}$$

est une théorie de torsion sur la catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire C .

Comme au corollaire 1.1.4, on notera

$$\begin{aligned} {}^+D^{\leq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1} : h^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^+D^{\geq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0} : h^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

la t -structure duale de cœur ${}^+\mathcal{C}$ muni de sa théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$ « duale » de celle de \mathcal{C} .

Remarque : les objets de \mathcal{F} sont divisibles dans ${}^+\mathcal{C}$ muni de la théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$.

Soit désormais $P_\Lambda \in \mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$, autrement dit $P_\Lambda \in \mathcal{F}$ dans \mathcal{C} . Considérons alors le diagramme commutatif dans \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & P_\Lambda & \xrightarrow{\quad} & {}^p j_* j^* P_\Lambda & \xrightarrow{\quad} & {}^{p+} j_* j^* P_\Lambda \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \nearrow \\
 {}^p j! j^* P_\Lambda & \longrightarrow & {}^{p+} j! j^* P_\Lambda & \longrightarrow & {}^p j!_* j^* P_\Lambda & \longrightarrow & {}^{p+} j!_* j^* P
 \end{array}$$

Remarque : d'après le corollaire 1.2.2, ${}^{p+} j! j^* P_\Lambda$ est sans torsion et on a la suite exacte courte de \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow {}^p h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* j^* P_\Lambda \rightarrow {}^{p+} j! j^* P_\Lambda \rightarrow {}^p j!_* j^* P_\Lambda \rightarrow 0. \quad (2.4.1)$$

2.4.2. Définition. — On pose

- $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ l'image dans ${}^+\mathcal{C}$ de ${}^{p+} j! j^* P_\Lambda \rightarrow P_\Lambda$;
- $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ l'image dans ${}^+\mathcal{C}$ de

$${}^p h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* j^* P_\Lambda \rightarrow {}^{p+} j! j^* P_\Lambda \hookrightarrow \text{Fil}_U^1(P_\Lambda).$$

2.4.3. Lemme. — Les faisceaux pervers $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ et $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ définissent dans \mathcal{C} une filtration

$$\text{Fil}_U^0(P_\Lambda) \subset \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \subset P_\Lambda$$

telle que :

- les gradués sont sans torsion dans \mathcal{C} ;
- on a une surjection naturelle dans ${}^+\mathcal{C}$:

$${}^{p+} j!_* j^* P_\Lambda \twoheadrightarrow \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) / \text{Fil}_U^0(P_\Lambda);$$

- $P_\Lambda / \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \simeq i_* {}^{p+} i^* P_\Lambda$.

Démonstration. — - Notons tout d'abord que $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ est un quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ d'un faisceau pervers ${}^{p+} j! j^* P_\Lambda \in \mathcal{F}$ divisible, de sorte qu'il est sans torsion et donc, dans ${}^+\mathcal{C}$, l'inclusion $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \hookrightarrow P_\Lambda$ est, d'après 2.3.1, une inclusion dans \mathcal{C} également.

- De la même façon $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ est un quotient dans ${}^+\mathcal{C}$ d'un faisceau pervers ${}^p h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* P_\Lambda$ divisible, et est donc sans torsion de sorte que, dans ${}^+\mathcal{C}$, l'inclusion $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda) \hookrightarrow \text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ est aussi, d'après 2.3.1, une inclusion dans \mathcal{C} .

- D'après 2.3.4, $P_\Lambda / \text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ appartient à $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$. De la suite exacte courte dans ${}^+\mathcal{C}$

$$0 \rightarrow i_* {}^{p+} h^{-1} i^* P_\Lambda \rightarrow {}^{p+} j! j^* P_\Lambda \rightarrow P \rightarrow i_* {}^{p+} h^0 i^* P_\Lambda \rightarrow 0,$$

on en déduit alors que $P_\Lambda / \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \simeq i_* {}^{p+} h^0 i^* P_\Lambda$.

- Dans ${}^+\mathcal{C}$, $\text{Fil}_U^1(P_\Lambda) / \text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ est un quotient de l'objet divisible ${}^p j_* j^* P_\Lambda$ et appartient donc à $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$. \square

On résume les constructions précédentes par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
{}^p j_{!*} j^* P_\Lambda & \xrightarrow{+\mathcal{C}} & \mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda) / \mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda) & & \\
\uparrow \mathcal{C} & & \uparrow c_{n+c} & & \\
{}^{p+} j_{!*} j^* P_\Lambda & \xrightarrow{+\mathcal{C}} & \mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda) & \xleftarrow{c_{n+c}} & P_\Lambda \xrightarrow{c_{n+c}} i_* {}^{p+} i^* P_\Lambda \\
\uparrow \mathcal{C} & & \uparrow c_{n+c} & & \\
{}^p h_{libre}^{-1} i^* j_{!*} j^* P_\Lambda & \xrightarrow{+\mathcal{C}} & \mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda) & &
\end{array}$$

Remarque : en ce qui concerne le quotient $gr_U^1(P_\Lambda) := \mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda) / \mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda)$, on peut écrire la surjection du lemme précédent comme une suite d'inclusions dans \mathcal{C}

$${}^p j_{!*} j^* P_\Lambda \hookrightarrow gr_U^1(P_\Lambda) \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*} j^* P_\Lambda,$$

et on dit que $gr_U^1(P_\Lambda)$ est « coïncé » entre les deux extensions intermédiaires.

2.4.4. Définition. — Avec les notations précédentes, $\mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ (resp. $\mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda)$) est dit saturé si dans la définition 2.4.2, l'image est prise dans \mathcal{C} . Si $\mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ et $\mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ sont tous deux saturés, on dira que la filtration $\mathrm{Fil}_U^0(P_\Lambda) \subset \mathrm{Fil}_U^1(P_\Lambda) \subset P_\Lambda$ est saturée.

Remarque : dans le cas où la filtration est saturée, le gradué $gr_U^1(P_\Lambda)$ est ${}^p j_{!*} j^* P_\Lambda$.

Dualement, en utilisant la suite exacte courte de \mathcal{C}

$$0 \rightarrow {}^{p+} j_{!*} j^* P_\Lambda \rightarrow {}^p j_{!*} j^* P_\Lambda \rightarrow {}^p h_{libre}^0 i^* j_{!*} j^* P_\Lambda \rightarrow 0$$

et le fait que ${}^p j_{!*} j^* P_\Lambda$ est sans torsion dans \mathcal{C} , on définit la cofiltration suivante.

2.4.5. Définition. — On pose

- $\mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda)$ l'image dans \mathcal{C} de $P_\Lambda \rightarrow {}^p j_{!*} j^* P_\Lambda$;
- $\mathrm{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$ l'image dans \mathcal{C} de

$$P_\Lambda \rightarrow {}^p j_{!*} j^* P_\Lambda \rightarrow {}^p i_* {}^p h_{libre}^0 i^* j_{!*} j^* P_\Lambda.$$

Remarque : on obtient ainsi une cofiltration dans \mathcal{C}

$$P_\Lambda \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$$

avec $\mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda)$ (resp. $\mathrm{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$) qui est un sous-objet du faisceau pervers libre ${}^p j_{!*} j^* P_\Lambda$ (resp. ${}^p i_* {}^p h_{libre}^0 i^* j_{!*} j^* P_\Lambda$) et appartient donc à $\mathcal{C} \cap {}^+ \mathcal{C}$. En ce qui concerne le noyau $\mathrm{cogr}_{U,-1}(P_\Lambda)$ de $\mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) \rightarrow \mathrm{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$, on a les inclusions dans \mathcal{C} :

$${}^p j_{!*} j^* P_\Lambda \hookrightarrow \mathrm{cogr}_{U,-1}(P_\Lambda) \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*} j^* P_\Lambda.$$

En ce qui concerne le noyau de $P_\Lambda \rightarrow \mathrm{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda)$, en vertu de la suite exacte dans \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow i_* {}^p i^! P_\Lambda \rightarrow P_\Lambda \rightarrow {}^p j_{!*} j^* P_\Lambda \rightarrow i_* {}^p h^1 i^! P_\Lambda \rightarrow 0,$$

on en déduit qu'il est isomorphe à $i_* {}^p i^! P_\Lambda$.

On résume cette construction par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{cogr}_{U,-1}(P_\Lambda) & \xleftarrow{\mathcal{C}} & {}^{p+}j_{!*}j^*P_\Lambda \\
 & & \downarrow \mathcal{C} & & \downarrow \mathcal{C} \\
 i_*{}^p i^! P_\Lambda & \xleftarrow{\mathcal{C}^{n+\mathcal{C}}} & P & \xrightarrow{\mathcal{C}^{n+\mathcal{C}}} & \text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) & \xleftarrow{\mathcal{C}} & {}^p j_* j^* P_\Lambda \\
 & & \downarrow \mathcal{C} & & \downarrow \mathcal{C} \\
 & & \text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda) & \xleftarrow{\mathcal{C}} & {}^p h_{\text{libre}}^0 i^* j_* j^* P_\Lambda
 \end{array}$$

2.4.6. Proposition. — Si \mathcal{D} est muni d'une dualité D qui :

- échange ! et * ;
- permute \mathcal{C} et ${}^+\mathcal{C}$;
- et telle que $D(P_\Lambda) \simeq P_\Lambda$.

alors

$$\begin{aligned}
 \text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) &\simeq D\left(\text{Fil}_U^1(P_\Lambda)\right) \\
 \text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda) &\simeq D\left(\text{Fil}_U^0(P_\Lambda)\right).
 \end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que si $P \hookrightarrow Q$ est une injection dans \mathcal{C} alors $DQ \twoheadrightarrow DP$ est une surjection dans ${}^+\mathcal{C}$. \square

Remarque : la filtration $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda) \subset \text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$ est saturée si et seulement si, dans la définition 2.4.5, les quotients

$${}^p j_* j^* P_\Lambda / \text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) \text{ et } \left({}^p i_* {}^p h_{\text{libre}}^0 i^* j_* P_\Lambda \right) / \text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$$

sont sans torsion.

Remarque : La filtration $\text{Fil}_U^0(P_\Lambda) \subset \text{Fil}_U^1(P_\Lambda) \subset P_\Lambda$ définit une cofiltration dans $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$

$$P_\Lambda \twoheadrightarrow / \text{Fil}_{U,0}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow / \text{Fil}_{U,1}(P_\Lambda)$$

où on a posé $/ \text{Fil}_{U,0}(P_\Lambda) := P_\Lambda / \text{Fil}_U^0(P_\Lambda)$ et $/ \text{Fil}_{U,1}(P_\Lambda) := P_\Lambda / \text{Fil}_U^1(P_\Lambda)$. De même la cofiltration $P_\Lambda \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda)$, définit une filtration dans $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$

$$/ \text{CoFil}_U^{-1}(P_\Lambda) \hookrightarrow / \text{CoFil}_U^0(P_\Lambda) \hookrightarrow P_\Lambda$$

avec par définition $\text{CoFil}_{U,0}(P_\Lambda) = P_\Lambda / / \text{CoFil}_U^0(P_\Lambda)$ et $\text{CoFil}_{U,-1}(P_\Lambda) = P_\Lambda / / \text{CoFil}_U^{-1}(P_\Lambda)$.

À priori ces deux filtrations (resp. cofiltrations) ne sont pas égales comme nous le verrons dans l'exemple donné par le faisceau pervers des cycles proches d'une variété de Shimura unitaire., cf. la figure 4. Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned}
 / \text{CoFil}_U^{-1}(P_\Lambda) &\simeq D\left(/ \text{Fil}_{U,1}(DP_\Lambda)\right) \\
 / \text{CoFil}_U^0(P_\Lambda) &\simeq D\left(/ \text{Fil}_{U,0}(DP_\Lambda)\right).
 \end{aligned}$$

2.5. Recollement d'une t -structure perverse. — Comme au §1.4, S désignera soit le spectre d'un corps, soit celui d'un anneau de valuation discrète hensélien A ou encore celui de \bar{A} le normalisé de A dans une clôture algébrique du corps des fractions de A . On considère alors X un schéma de type fini sur S . Pour $j : U \hookrightarrow X$ une inclusion d'un ouvert dense contenant la fibre générique X_η (resp. $X_{\bar{\eta}}$) si $S = \text{Spec } A$ (resp. $S = \text{Spec } \bar{A}$) avec $i : F := X - U \hookrightarrow X$, on est dans une situation de recollement ce qui permet d'appliquer les constructions du paragraphe précédent.

2.5.1. Lemme. — Pour $S = \text{Spec } k$ et $P_\mathbb{O} \in {}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$ tel que $P_\mathbb{K} := P_\mathbb{O} \otimes_\mathbb{O} \mathbb{K}$ est simple de support dense dans X . Il existe alors un ouvert dense $j : U \hookrightarrow X$ et un système local libre $\mathcal{L}_\mathbb{O}$ sur U tels que

$${}^p j_{!*} \mathcal{L}_\mathbb{O}[-\dim X] \hookrightarrow P_\mathbb{O} \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*} \mathcal{L}_\mathbb{O}[-\dim X].$$

Démonstration. — Pour tout $s < -\dim X$, $h^{-s} P_\mathbb{O}$ est nul de support et pour $s = -\dim X$ soit $j : U \hookrightarrow X$ tel que $\mathcal{L}_\mathbb{O}[-\dim X] := j^* P_\mathbb{O}$ est localement constant sans torsion. Avec les notations du paragraphe précédent, soit

$$\text{Fil}_U^0(P_\mathbb{O}) \subset \text{Fil}_U^1(P_\mathbb{O}) \subset P_\mathbb{O}.$$

Comme

- $P_\mathbb{K}$ est simple ;
- $\text{Fil}_U^1(P_\mathbb{O}) \otimes_\mathbb{O} \mathbb{K}$ est non nul, vu le choix de U ;

on en déduit que $\text{Fil}^0(P_\mathbb{O}) \otimes_\mathbb{O} \mathbb{K}$ est nul et comme il est sans torsion, il est nul. De même $(P_\mathbb{O}/\text{Fil}_U^1(P_\mathbb{O})) \otimes_\mathbb{O} \mathbb{K}$ est nul et sans torsion, il est nul. \square

2.6. Filtration et cofiltration de stratification. — Soit X un schéma muni d'une filtration $\mathfrak{S} = (X_\alpha)_{\alpha \in I}$; par la construction du paragraphe 2.2, on se ramène à la situation

$$X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \dots \supset X^{\geq d} \neq \emptyset,$$

avec les notations de 2.2.5. Pour $\Lambda = \mathbb{K}, \mathbb{O}$ ou \mathbb{F} et $P_\Lambda \in {}^p\text{FP}(X, \Lambda)$ un faisceau pervers sur X sans torsion, on se propose de définir des filtrations de P_Λ dont les gradués sont sans torsion.

Remarque : dans le cas $\Lambda = \mathbb{K}$ ou \mathbb{F} , les faisceaux pervers sont automatiquement sans torsion. Les constructions suivantes s'appliquent pour d'autres anneaux Λ où p est inversible.

2.6.1. Définition. — Avec les notations de 2.4.2, on définit

$$\text{Fil}_\mathfrak{S}^0(P_\Gamma) := i_{h,*} \text{Fil}_{X=h}^1(P_\Gamma),$$

où h est tel que le support de P_Λ est dense dans $X^{\geq h}$.

2.6.2. Proposition. — Tout faisceau pervers $P_\Gamma \in {}^p\text{FP}(X, \Lambda)$ sans torsion sur X muni d'une stratification \mathfrak{S} , peut-être muni fonctoriellement d'une filtration dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$

$$\text{Fil}_\mathfrak{S}^0(P_\Gamma) \subset \text{Fil}_\mathfrak{S}^1(P_\Gamma) \subset \dots \subset \text{Fil}_\mathfrak{S}^r(P_\Gamma) = P_\Gamma$$

telle que :

- r est inférieur ou égal à la dimension du support de P_Λ ;
- tous les gradués $gr_{\mathfrak{S}}^q(P_\Lambda) := \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^q(P_\Lambda) / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{q-1}(P_\Lambda)$ sont sans torsion dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$;
- $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda)$ a été défini ci-avant ;
- $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^k(P_\Lambda) / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{k-1}(P_\Lambda)$ est le $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0$ de $P_\Lambda / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{k-1}(P_\Lambda)$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la dimension du support de P_Λ ; le cas où la dimension est nulle étant trivial supposons donc le résultat acquis jusqu'à la dimension $r - 1$ et traitons le cas où la dimension du support de P_Λ est égale à r . Par construction le quotient $Q := P_\Gamma / \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Gamma)$ est à support dans la frontière de U_P et est donc de dimension strictement inférieure à celle de P_Γ . Soit alors $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(Q) \subset \dots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{r-1}(Q)$ de sorte que les tirés en arrière suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda) & \longrightarrow & P_\Lambda & \longrightarrow & Q = {}^{p+}i_P^* P_\Lambda \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow \text{J} & & \uparrow \text{J} \\
 0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda) & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^r(P_\Lambda) & \dashrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{r-1}(Q) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow \text{J} & & \uparrow \text{J} \\
 0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda) & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{r-1}(P_\Lambda) & \dashrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{r-2}(Q) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow \text{J} & & \uparrow \text{J} \\
 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots & \dashrightarrow & \dots \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow = & & \uparrow \text{J} & & \uparrow \text{J} \\
 0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(P_\Lambda) & \longrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^1(P_\Lambda) & \dashrightarrow & \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(Q) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

définissent la filtration demandée. □

2.6.3. Notation. — La filtration construite dans la proposition précédente sera dite de \mathfrak{S} -stratification et on notera

$$\text{EFil}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}(P_\Lambda) = h^{p+q} gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_\Lambda) \Rightarrow h^{p+q} P_\Lambda$$

la suite spectrale qui lui est associée et qui calcule les faisceaux de cohomologie de P_Λ .

2.6.4. Définition. — On dira que P_Λ est :

- \mathfrak{S} -saturé si à chaque étape de la construction le $\text{Fil}_{\mathcal{U}}^1$ est saturé au sens de la définition 2.4.4 ;
- \mathfrak{S} -dégénéré si la suite spectrale spectrale $\text{EFil}_{\mathfrak{S},r}^{p,q}$ dégénère en E_1 .

Remarque : dans le cas où $gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_\Lambda)$ est l'image d'un morphisme d'adjonction, i.e. où on ne sature pas cette image du ${}^p j_! \mathcal{L}_0[h] \rightarrow gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_\Lambda)$, toute filtration de ${}^p j_! \mathcal{L}_0[h]$ induit une

filtration du $gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda})$ ainsi qu'un morphisme de suite spectrale de faisceaux de cohomologie, cf. le §3.3 ainsi que le §???. Comme par ailleurs l'aboutissement de la suite spectrale associée à la filtration de ${}^p j_! \mathcal{L}_0[h]$ a un aboutissement connu puisque nul hors de sa strate, il est assez aisé de la contrôler et donc d'en déduire celle de $gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda})$. Nous reviendrons au §3.2 sur cette notion de faisceau pervers \mathfrak{S} -saturé, en attendant revenons à l'étude de la suite spectrale $\text{EFil}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}(P_{\Lambda})$ et sur la notion de faisceau pervers \mathfrak{S} -dégénéré.

2.6.5. Lemme. — Soient p , des systèmes locaux \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 sur les strates de dimension $h_0 < h_1$ tels que $gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda})$ et $gr_{\mathfrak{S}}^{-p-1}(P_{\Lambda})$ soient respectivement les images dans ${}^{p+\mathcal{C}}$ de extensions par zéro de $\mathcal{L}_0[h_0]$ et $\mathcal{L}_1[h_1]$. On suppose que pour toute inclusion dans ${}^{p+\mathcal{C}}$, $K_0 \hookrightarrow {}^p j_!^{\geq h_0} \mathcal{L}_0[h_0]$, on a $\text{Hom}(K_0, gr_{\mathfrak{S}}^{-p-1}(P_{\Lambda})) = 0$. Alors pour tout i , la flèche

$$h^i gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda}) \longrightarrow h^{i+1} gr_{\mathfrak{S}}^{-p-1}(P_{\Lambda})$$

de la suite spectrale $\text{EFil}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}$ est nulle.

Démonstration. — Les flèches en question sont données par les

$$i_{=h}^* h^{\alpha} gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda}) \longrightarrow i_{=h}^* h^{\alpha} gr_{\mathfrak{S}}^{-p-1}(P_{\Lambda})[1],$$

pour $h \geq 1$. Pour h tel que $X^{=h}$ est de dimension strictement plus grande que h_0 alors $i_{=h}^* gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda})$ est nul et donc une telle flèche est nulle. Pour $h = h_0$, $i_{h_0}^* gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda}) \simeq \mathcal{L}_0[h_0]$ alors que $i_{h_0}^* gr_{\mathfrak{S}}^{-p-1}(P_{\Lambda})[1]$ n'a de la cohomologie qu'en degré $< h_0$. Pour $h = h_0 + 1$, on a $i_{\geq h}^* gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda}) = K_0$ avec K_0 le noyau dans ${}^{p+\mathcal{C}}$ de $j_! \mathcal{L}_0[h_0] \rightarrow gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda})$ de sorte que

$$\text{Hom}(i_{\geq h_0+1}^* gr_{\mathfrak{S}}^{-p}(P_{\Lambda}), i_{\geq h_0+1}^* gr_{\mathfrak{S}}^{-p-1}(P_{\Lambda})[1]) = \text{Hom}_{p+\mathcal{C}}(K_0, gr_{\mathfrak{S}}^{-p-1}(P_{\Lambda})).$$

□

Dualement, on peut définir des cofiltrations.

2.6.6. Définition. — Avec les notations précédentes, on pose

$$\text{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_{\Gamma}) := i_{h,*} \text{CoFil}_{X=h,-1}(P_{\Gamma}),$$

où h est tel que le support de P_{Λ} est dense dans $X^{\geq h}$.

En raisonnant par récurrence sur la dimension du support de P_Λ et en utilisant des push-out comme dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & K := {}^p i^! P_\Lambda & \longrightarrow & P_\Lambda & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_\Lambda) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},1-r}(K) & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},-r}(P_\Lambda) & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_\Lambda) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},2-r}(K) & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},1-r}(P_\Lambda) & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_\Lambda) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(K) & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},-1}(P_\Lambda) & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_\Lambda) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

on obtient la proposition duale de 2.6.2.

2.6.7. Proposition. — *Tout faisceau pervers $P_\Gamma \in {}^p \text{FP}(X, \Lambda)$ sans torsion sur X muni d'une stratification \mathfrak{S} , peut-être muni functoriellement d'une cofiltration dans ${}^p \text{FP}(X, \Lambda)$*

$$P_\Gamma = \text{CoFil}_{\mathfrak{S},-r}(P_\Gamma) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},1-r}(P_\Gamma) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_\Gamma)$$

telle que :

- r est la dimension du support de P_Λ ;
- tous les gradués sont sans torsion dans ${}^p \text{FP}(X, \Lambda)$;
- $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},0}(P_\Lambda)$ a été défini ci-avant ;
- $\text{Ker}\left(\text{CoFil}_{\mathfrak{S},-k}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},1-k}(P_\Lambda)\right)$ est le $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},0}$ de $\text{Ker}\left(P_\Lambda \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},1-k}(P_\Lambda)\right)$.

2.6.8. Définition. — La cofiltration construite dans la proposition précédente sera dite de \mathfrak{S} -stratification.

En reprenant la preuve de 2.4.6, on en déduit le résultat suivant.

2.6.9. Lemme. — *La dualité de Verdier échange la filtration et la cofiltration définies ci-avant :*

$$D\left(\text{CoFil}_{\mathfrak{S},-k}(P_\Lambda)\right) \simeq \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^k(DP_\Lambda).$$

Remarque : la cofiltration (resp. la filtration) associée à la filtration $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^k(P_\Lambda)$ (resp. la cofiltration $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},k}(P_\Lambda)$) sera notée ${}^/ \text{Fil}_{\mathfrak{S},k}(P_\Lambda)$ (resp. ${}^/ \text{CoFil}_{\mathfrak{S}}^k(P_\Lambda)$) dont les gradués appartiennent à $\mathcal{C} \cap {}^+ \mathcal{C}$.

Remarque : en ce qui concerne la suites spectrales associées à une telle cofiltration, notons qu'elle est plutôt adaptée aux calculs des $i^!$ alors que pour la filtration de stratification c'étaient les i^* .

2.7. Filtration et cofiltration \mathfrak{S} -exhaustives. — Soit X un schéma muni d'une stratification \mathfrak{S} et P_Λ un faisceau pervers sans torsion de ${}^p\mathrm{FP}(X, \Lambda)$ que l'on suppose \mathfrak{S} -constructible, i.e. ses faisceaux de cohomologie sont constructibles relativement à la stratification \mathfrak{S} . Autrement dit si on note \mathfrak{S}_P la stratification la moins fine de sorte que P_Λ est \mathfrak{S}_P -constructible, \mathfrak{S} est plus fine que \mathfrak{S}_P .

2.7.1. Proposition. — *Par application successives des filtrations $\mathrm{Fil}_U^0 \subset \mathrm{Fil}_U^1$ de la définition 2.4.2, tout faisceau pervers P_Λ sans torsion dans ${}^p\mathrm{FP}(X, \Lambda)$ sur X peut être muni fonctoriellement d'une filtration dans ${}^p\mathrm{FP}(X, \Lambda)$*

$$\mathrm{Fill}^0(P_\Lambda) \subset \mathrm{Fill}^1(P_\Lambda) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}^d(P_\Lambda) = P_\Lambda$$

telle que :

- d est un entier assez grand ;
- les gradués $\mathrm{gr}^k(P_\Lambda)$ sont sans torsion ;
- pour tout $0 \leq k \leq d$, il existe $\alpha(k) \in I$ ainsi qu'un système local $\mathcal{L}(k)$ sur $X_{\alpha(k)}$ et des injections dans ${}^p\mathrm{FP}(X, \Lambda)$:

$${}^p j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k) \hookrightarrow \mathrm{gr}^k(P_\Lambda) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k).$$

Démonstration. — On considère une stratification \mathfrak{S} de X plus fine que \mathfrak{S}_P . On raisonne par récurrence sur la dimension r de P_Λ ; le cas $r = 0$ étant trivial, on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $r - 1$ et traitons le cas de r . On considère la filtration de la définition 2.4.2

$$\mathrm{Fil}_{U_P}^0(P_\Lambda) \subset \mathrm{Fil}_{U_P}^1(P_\Lambda) \subset P_\Lambda$$

où :

- $\mathrm{Fil}_{U_P}^0(P_\Lambda)$ et $P_\Lambda / \mathrm{Fil}_{U_P}^1(P_\Lambda)$ sont de dimension strictement inférieure à r et donc d'après l'hypothèse de récurrence, munies de telles filtrations ;
- $\mathrm{gr} := \mathrm{Fil}_{U_P}^1(P_\Lambda) / \mathrm{Fil}_{U_P}^0(P_\Lambda)$ est tel que

$${}^p j_{U_P, !*} j_{U_P}^* P_\Lambda \hookrightarrow \mathrm{gr} \hookrightarrow {}^{p+} j_{U_P, !*} j_{U_P}^* P_\Lambda.$$

Comme P_Λ est \mathfrak{S} -constructible, on en déduit que pour tout $\alpha \in I(P)$, $\mathcal{L}_\alpha := j_\alpha^* P_\Lambda$ est localement constant de sorte que gr se décompose en une somme directe $\bigoplus_{\alpha \in I(P)} \mathrm{gr}_\alpha$ avec

$${}^p j_{\alpha, !*} \mathcal{L}_\alpha \hookrightarrow \mathrm{gr}_\alpha \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha, !*} \mathcal{L}_\alpha.$$

On procède alors comme dans le paragraphe précédent par pull-back, pour obtenir la filtration de l'énoncé. \square

Remarque : la construction précédente ne dépend que de \mathfrak{S}_P et pas du choix de \mathfrak{S} plus fine que \mathfrak{S}_P ce qui nous permet d'ôter \mathfrak{S} des notations.

2.7.2. Définition. — La filtration construite à la proposition précédente sera dite de stratification exhaustive; on dira que le faisceau pervers est exhaustivement saturé si sa filtration exhaustive l'est, i.e. si à chaque étape de la construction les Fil_U^0 et Fil_U^1 sont saturés au sens de la définition 2.4.4.

2.7.3. Notation. — On notera

$$\text{EFill}_1^{p,q}(P_\Lambda) = h^{p+q} \text{grr}^{-p}(P_\Lambda) \Rightarrow h^{p+q} P_\Lambda$$

la suite spectrale associée à la filtration exhaustive de P_Λ qui calcule ses faisceaux de cohomologie.

Dualement, on construit des cofiltrations exhaustives en utilisant $P_\Lambda \twoheadrightarrow \text{CoFil}^{U_P, -d}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U_P, 0}(P_\Lambda)$.

2.7.4. Proposition. — Par application successives des cofiltrations $\text{CoFil}_{U, -1} \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U, 0}$ de la définition 2.4.5, tout faisceau pervers P_Λ sans torsion dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$ sur X peut être muni functoriellement d'une cofiltration dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$

$$P_\Lambda = \text{CoFill}_{-d}(P_\Lambda) \subset \text{CoFill}_{1-d}(P_\Lambda) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \text{CoFill}_0(P_\Lambda)$$

telle que :

- d est un entier assez grand;
- les gradués $\text{cogrr}_k(P_\Lambda)$ sont sans torsion;
- pour tout $0 \leq k \leq d$, il existe $\alpha(k) \in I$ ainsi qu'un système local $\mathcal{L}(k)$ sur $X_{\alpha(k)}$ et des injections dans ${}^p\text{FP}(X, \Lambda)$:

$${}^p j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k) \hookrightarrow \text{cogrr}_k(P_\Lambda) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k).$$

2.7.5. Définition. — La cofiltration construite à la proposition précédente sera dite de stratification exhaustive.

La proposition 2.4.6 permet de relier filtration et cofiltration par la dualité de Verdier.

2.7.6. Lemme. — La dualité de Verdier échange la filtration et la cofiltration définies ci-dessus, i.e.

$$D\left(\text{CoFill}_{-k}(P_\Lambda)\right) \simeq \text{Fill}_k(DP_\Lambda).$$

Remarque : dans les constructions précédentes, les systèmes locaux $\mathcal{L}(k) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ ne sont pas nécessairement irréductibles. On peut bien entendu filtrer les $\mathcal{L}(k)$ de sorte que les gradués sont simples après tensorisation par \mathbb{K} ; bien entendu les réseaux obtenus dépendront à priori du procédé choisi.

2.7.7. Notation. — On notera ${}^l\text{Fill}_k$ (resp. ${}^l\text{CoFill}^k$) la cofiltration (resp. la filtration) de $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$ associée à la filtration (resp. la cofiltration) Fill^k (resp. CoFill_k).

2.8. Cas d'un schéma de Hecke. — Pour $\mathbb{X}_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ un schéma de Hecke relativement à $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$ et $\Lambda = \mathbb{K}, \mathbb{O}$ ou \mathbb{F} , nous avons défini au §1.5, la catégorie $\text{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ des faisceaux pervers de Hecke sur $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ à coefficients dans Λ . Pour $\Lambda = \mathbb{O}$, on dispose des théories de torsion p et $p+$.

On peut alors reprendre les constructions des §2.6 et §2.7, à chaque niveau $I \in \mathcal{I}$ ce qui permet de définir des filtrations ou cofiltrations de stratification d'un faisceau pervers de Hecke sans torsion.

2.9. Modifications d'un faisceau pervers sans torsion. — L'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'on ne peut pas donner plus de précisions sur la position des gradués

$${}^p j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k) \hookrightarrow gr_k(P_{\Lambda}) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k)$$

dans l'énoncé de la proposition 2.7.1. Plus précisément à partir d'un faisceau pervers sans torsion $P_{\mathbb{O}}$ muni de sa filtration de stratification exhaustive, nous montrerons comment, quitte à modifier certains des réseaux $\mathcal{L}(k)$, construire $P'_{\mathbb{O}}$ dont les gradués sont les G_k

$${}^p j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k) \hookrightarrow G_k \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k), !*} \mathcal{L}(k)$$

où on se donne par avance la position des G_k et on s'autorise à modifier le réseau $\mathcal{L}(k)$, i.e. à prendre $\mathcal{L}'(k)$ avec $\mathcal{L}'(k) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K} \simeq \mathcal{L}(k) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$.

2.9.1. Lemme. — Soient $P_{\mathbb{O}}^-, P_{\mathbb{O}}^+ \in {}^p \text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+} \text{FP}(X, \mathbb{O})$ et une suite exacte courte de ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow T_0 \rightarrow 0$$

où T_0 est de l^n torsion. Il existe alors une suite exacte courte de ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0,$$

où T est de l^n torsion. En outre toute suite exacte courte de ${}^p \text{FP}(X, \mathbb{O})$ de la forme

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0,$$

avec T de torsion est telle que T est de l^n torsion.

Démonstration. — La suite exacte courte $0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow T_{\mathbb{O}} \rightarrow 0$ fournit un élément $\xi \in \text{Ext}_{\mathbb{O}}^1(T_{\mathbb{O}}, P_{\mathbb{O}}^-)$ qui est de l^n torsion de sorte que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}}^- & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & T_{\mathbb{O}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \times l^n \\
 0 & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}}^- & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}}^+ & \longrightarrow & T_{\mathbb{O}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \times l^n & & \downarrow & & \downarrow = \\
 0 & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}}^- & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & T_{\mathbb{O}} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où $P_{\mathbb{O}} \simeq P_{\mathbb{O}}^- \oplus T_{\mathbb{O}}$. On obtient ainsi une flèche de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$P_{\mathbb{O}}^+ \longrightarrow P_{\mathbb{O}} \longrightarrow P_{\mathbb{O}}^-$$

dont le noyau $N_{\mathbb{O}}$ est libre et tel que $P_{\mathbb{O}}^+/N_{\mathbb{O}}$ est libre; ainsi $N_{\mathbb{O}}$ est nul. On note alors $T \in {}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ le conoyau

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0$$

avec T qui est de l^n torsion.

Considérons désormais une suite exacte courte de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$:

$$0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0.$$

Soit m tel que T est de l^m torsion. La suite exacte longue

$$\dots \rightarrow {}^ph^{-1}i^*P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow {}^ph^{-1}i^*P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow {}^ph^{-1}i^*T \rightarrow {}^ph^0i^*P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow 0$$

impose que $l^m {}^ph_{tor}^0 i^*T_{\mathbb{O}} = 0$ et donc $m \geq n$. □

Exemples :

(1) Pour $L_{\mathbb{O}} \in {}^p\text{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(U, \mathbb{O})$, la suite exacte courte

$$0 \rightarrow {}^pj_{!*}L_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^{p+}j_{!*}L_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^ph_{tor}^0 i^*j_{!*}L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0,$$

vérifie les hypothèses de l'énoncé, ce qui fournit alors une suite exacte courte de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$:

$$0 \rightarrow {}^{p+}j_{!*}L_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^pj_{!*}L_{\mathbb{O}} \rightarrow T \rightarrow 0.$$

En outre on a $i^*T \in {}^p\mathcal{D}(F, \mathbb{O})^{\leq -1}$ et ${}^pi^!T \in {}^p\mathcal{D}(F, \mathbb{O})^{\geq 1}$, de sorte que $T \simeq {}^pj_{!*}j^*T \simeq {}^pj_{!*}L_{\mathbb{O}}/l^n L_{\mathbb{O}}$.

(2) De même pour

$${}^pj_{!*}L_{\mathbb{O}} \hookrightarrow P_{\mathbb{O}}^- \hookrightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \hookrightarrow {}^{p+}j_{!*}L_{\mathbb{O}},$$

on obtient une suite exacte courte $0 \rightarrow P_{\mathbb{O}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{O}}^- \rightarrow T \rightarrow 0$ où T est de torsion.

(3) A contrario étant donné $L_{\mathbb{O}} \in {}^p\text{FP}(U, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(U, \mathbb{O})$ ainsi qu'une suite exacte courte dans ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$0 \rightarrow A_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^pj_{!*}L_{\mathbb{O}} \rightarrow i_*T \rightarrow 0$$

avec $T \in {}^p\text{FP}(F, \mathbb{O})$ de torsion ; alors T est nécessairement nul puisqu'isomorphe à ${}^p j_{!*} j^* T$.

2.9.2. Proposition-Définition. — Soit

$$\text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \subset \text{Fill}^1(P_{\mathbb{O}}) \subset \cdots \subset \text{Fill}^d(P_{\mathbb{O}}) = P_{\mathbb{O}}$$

la filtration exhaustive d'un \mathbb{O} -faisceau pervers $P_{\mathbb{O}}$ sans torsion. Pour tout $k = 0, \dots, d$ on peut construire un faisceau pervers sans torsion $P_{\mathbb{O},k}$ muni d'une filtration

$$\text{Fil}^0(P_{\mathbb{O},k}) \subset \text{Fil}^1(P_{\mathbb{O},k}) \subset \cdots \subset \text{Fil}^d(P_{\mathbb{O},k}) = P_{\mathbb{O},k}$$

telle que :

- pour tout $k = 0, \dots, d$, la construction fournit un isomorphisme $P_{\mathbb{O}} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K} \simeq P_{\mathbb{O},k} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ compatible aux filtrations, c'est à dire que pour tout $i = 0, \dots, d$, cet isomorphisme induit un isomorphisme entre $\text{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ et $\text{Fill}^i(P_{\mathbb{O}}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$;
- pour tout $i = 0, \dots, k$, le gradué $gr^i(P_{\mathbb{O},k})$ est, avec les notations du paragraphe précédent, de la forme ${}^p j_{\alpha(i),!*} \mathcal{L}_i$.

Démonstration. — Soit la suite exacte courte de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$

$$0 \rightarrow \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \rightarrow P_{\mathbb{O}} \rightarrow / \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}}) \rightarrow 0,$$

où par construction, il existe un système local $\mathcal{L}(0)$ sur une strate $X_{\alpha(0)}$ tel que

$${}^p j_{\alpha(0),!*} \mathcal{L}(0) \hookrightarrow \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(0),!*} \mathcal{L}(0).$$

En utilisant la remarque qui suite le lemme 2.9.1, on obtient par pushout :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) & \longrightarrow & P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & / \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & {}^p j_{\alpha(0),!*} \mathcal{L}(0) & \dashrightarrow & P_{\mathbb{O},0} & \longrightarrow & / \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

La filtration

$$\text{Fill}^1(P_{\mathbb{O}}) / \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \subset \cdots \subset \text{Fill}^d(P_{\mathbb{O}}) / \text{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) = / \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}})$$

de $/ \text{Fill}_0(P_{\mathbb{O}})$ donne alors par pull-back une filtration

$$\text{Fil}^0(P_{\mathbb{O},0}) \subset \text{Fil}^1(P_{\mathbb{O},0}) \subset \cdots \subset \text{Fil}^d(P_{\mathbb{O},0}) = P_{\mathbb{O},0}$$

qui vérifie les propriétés énoncées.

Supposons donc construit $P_{\mathbb{O},k}$ et soit

$$0 \rightarrow \text{Fil}^k(P_{\mathbb{O},k}) \rightarrow \text{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \rightarrow gr^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \rightarrow 0,$$

où avec les notations du paragraphe précédent, il existe une strate $\alpha(k+1)$ et un système local $\mathcal{L}(k+1)$ tel que

$${}^p j_{\alpha(k+1),!*} \mathcal{L}(k+1) \hookrightarrow gr^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k+1),!*} \mathcal{L}(k+1).$$

Soit alors

$$0 \rightarrow \mathrm{Fil}^k(P_{\mathbb{O},k}) \longrightarrow F_{k+1} \longrightarrow {}^p j_{\alpha(k+1),!*} \mathcal{L}(k+1) \rightarrow 0$$

l'extension obtenue par pull-back à partir de $\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k})$. D'après le lemme précédent, on a un morphisme $\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \longrightarrow F_{k+1}$ ce qui par pushout permet de définir $P_{\mathbb{O},k+1}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) & \longrightarrow & P_{\mathbb{O},k} & \longrightarrow & P_{\mathbb{O},k}/\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & F_{k+1} & \dashrightarrow & P_{\mathbb{O},k+1} & \longrightarrow & P_{\mathbb{O},k}/\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pour tout $i \leq k+1$, on pose $\mathrm{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k+1}) := \mathrm{Fil}^i(F_{k+1}) = \mathrm{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k})$; comme précédemment la filtration $\mathrm{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k})/\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k})$ de $P_{\mathbb{O},k}/\mathrm{Fil}^{k+1}(P_{\mathbb{O},k})$ permet par pull-back de définir les $\mathrm{Fil}^i(P_{\mathbb{O},k+1})$ pour $k+1 < i \leq d$. \square

Dualement, on a la construction suivante.

2.9.3. Proposition-Définition. — *Soit*

$$P_{\mathbb{O}} \twoheadrightarrow \mathrm{CoFill}_{-d}(P_{\mathbb{O}}) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFill}_{1-d}(P_{\mathbb{O}}) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathrm{CoFill}_0(P_{\mathbb{O}})$$

la cofiltration exhaustive d'un faisceau pervers $P_{\mathbb{O}}$ sans torsion. Pour tout $k = 0, \dots, d$ on peut construire un faisceau pervers sans torsion $P_{\mathbb{O},k}$ muni d'une cofiltration

$$P_{\mathbb{O},k} \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{-d}(P_{\mathbb{O},k}) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{1-d}(P_{\mathbb{O},k}) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_0(P_{\mathbb{O},k})$$

telle que :

- pour tout $k = 0, \dots, d$, la construction fournit un isomorphisme $P_{\mathbb{O}} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K} \simeq P_{\mathbb{O},k} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ compatible aux cofiltrations, c'est à dire que pour tout $i = 0, \dots, d$, cet isomorphisme induit un isomorphisme entre $\mathrm{CoFil}^i(P_{\mathbb{O},k}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ et $\mathrm{CoFill}^i(P_{\mathbb{O}}) \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$;
- pour tout $i = 0, \dots, k$, le gradué $gr_{-i}(P_{\mathbb{O},k})$ est, avec les notations du paragraphe précédent, de la forme ${}^{p+} j_{\alpha(i),!*} \mathcal{L}_i$.

Remarque : il est bien entendu possible de modifier $P_{\mathbb{O}}$ afin d'obtenir pour gradués n'importe lequel des faisceaux pervers ${}^p j_{\alpha(k),!*} \mathcal{L}_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow {}^{p+} j_{\alpha(k),!*} \mathcal{L}_k$. On notera toutefois que lorsque l'on déplace ces gradués, en général on modifie aussi les réseaux \mathcal{L}_k .

3. Sur quelques classes de faisceaux pervers sans torsion

3.1. Minimalité et maximalité. — On reprend la problématique du paragraphe précédent mais en rigidifiant un peu le contexte. Par exemple pour $\mathrm{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \hookrightarrow P_{\mathbb{O}}$ avec

$${}^p j_{0,!*} \mathcal{L}(0) \hookrightarrow \mathrm{Fill}^0(P_{\mathbb{O}}) \hookrightarrow F_0 \hookrightarrow {}^{p+} j_{0,!*} \mathcal{L}(0)$$

par pushout on construit $P'_\mathbb{O}$ sans modifier $\cdot \text{Fill}_0(P_\mathbb{O})$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fill}^0(P_\mathbb{O}) & \longrightarrow & P_\mathbb{O} & \longrightarrow & / \text{Fill}_0(P_\mathbb{O}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & F_0 & \dashrightarrow & P'_\mathbb{O} & \longrightarrow & / \text{Fill}_0(P_\mathbb{O}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ainsi une question naturelle est de savoir si une extension $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$ a été obtenue par pushout (resp. pullback) à partir d'une extension $0 \rightarrow A' \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ (resp. $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C' \rightarrow 0$) via $A' \hookrightarrow A$ (resp. $C \hookrightarrow C'$).

3.1.1. Définition. — Une extension

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$ sera dite minimale (resp. maximale) si pour toute flèche $A \twoheadrightarrow T$ (resp. $T \hookrightarrow C$) de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ (resp. ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$) où T est un objet de torsion de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ (resp. ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$) le pushout (resp. le pullback) T'

$$\begin{array}{ccc} A \longrightarrow B & \text{resp.} & T' \dashrightarrow T \\ \downarrow & & \downarrow \\ T \hookrightarrow T' & & B \twoheadrightarrow C \end{array}$$

est tel que la flèche $T \hookrightarrow T'$ (resp. $T' \twoheadrightarrow T$) de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ (resp. ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$) n'y est pas surjective (resp. injective).

Remarque : une extension $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ est minimale (resp. maximale) si et seulement si elle n'est pas obtenue par pushout (resp. pullback) à partir de $A' \hookrightarrow A$ (resp. $C \hookrightarrow C'$) :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C \longrightarrow 0 & \text{resp.} & \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{=} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \dashrightarrow C \longrightarrow 0 \end{array} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow A \dashrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 & & \begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \dashrightarrow C \longrightarrow 0 \\ \downarrow = & \downarrow & \downarrow \\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0 \end{array} \end{array}$$

3.1.2. Lemme. — Soit $\mathcal{L}_\mathbb{O}$ un système local irréductible sans torsion sur un ouvert U de X et soit $P_\mathbb{O}$ un quotient dans ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O})$ (resp. un sous-objet dans ${}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$) de ${}^{p+}j_!\mathcal{L}_\mathbb{O}$ (resp. ${}^p j_*\mathcal{L}_\mathbb{O}$). Alors pour tout $P_\mathbb{O} \twoheadrightarrow C$ (resp. $A \hookrightarrow P_\mathbb{O}$) dans ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$, l'extension

$$0 \rightarrow A \rightarrow P_\mathbb{O} \rightarrow C \rightarrow 0$$

est minimale (resp. maximale).

Démonstration. — Traitons tout d’abord le cas de ${}^{p+}j_! \mathcal{L}_\mathbb{O}$ qui est sans torsion. Comme ${}^{ph^0}i^*{}^{p+}j_! \mathcal{L}_\mathbb{O}$ est nul, on en déduit que ${}^{ph^0}i^*P_\mathbb{O}$ est nul aussi. Soit alors $0 \rightarrow A \rightarrow P_\mathbb{O} \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{O})$ avec C non nul de sorte que $A \simeq i_*i^*A$ et ainsi pour tout quotient $A \twoheadrightarrow T$, $T \simeq i_*i^*T$ est à support dans $F = X - U$. Si on avait $P_\mathbb{O} \twoheadrightarrow T$ alors comme ${}^{ph^0}i^*P$ est nul, on en déduirait que ${}^{ph^0}i^*T = T$ est nul, ce qui prouve bien que l’extension est minimale.

Le cas de pj_* se traite de manière similaire en utilisant que ${}^{p+}h^0i^!P_\mathbb{O}$ est nul. \square

3.1.3. Définition. — Un système local $\mathcal{L}_\mathbb{O}$ irréductible sans torsion sur U est dit minimal (resp. maximal) si l’extension

$$0 \rightarrow {}^{p+}j_! \mathcal{L}_\mathbb{O} \longrightarrow {}^pj_* \mathcal{L}_\mathbb{O} \longrightarrow i_* {}^{ph^0}h_{\text{libre}}^0 i^* j_* \mathcal{L}_\mathbb{O} \rightarrow$$

$$\text{resp. } 0 \rightarrow i_* {}^{ph^0}h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* \mathcal{L}_\mathbb{O} \longrightarrow {}^{p+}j_! \mathcal{L}_\mathbb{O} \longrightarrow {}^pj_! \mathcal{L}_\mathbb{O} \rightarrow 0$$

est une extension minimale (resp. maximale).

3.2. Faisceaux pervers saturés. — On rappelle qu’un faisceau pervers sans torsion est dit saturé (resp. exhaustivement saturé) si sa filtration (resp. sa filtration exhaustive) de stratification l’est, cf. les définitions 2.6.4 et 2.7.2.

3.2.1. Notation. — On reprend les notations du §2.2 que l’on complète comme suit :

- pour $1 \leq h \leq h' \leq d$, $X^{h \leq h'} := X^{=h} \amalg \dots \amalg X^{=h'}$; en particulier $X^{h \leq h}$ est égal à $X^{=h}$.
- pour $1 \leq h \leq h' \leq d$, $j^{h \leq h'} : X^{h \leq h'} \hookrightarrow X^{\geq h}$; en particulier $j^{h \leq h} = j^{\geq h}$.
- pour $1 \leq h < h' \leq d$, $j^{h < h'} : X^{=h} \hookrightarrow X^{h \leq h'}$.
- pour $1 \leq h \leq h' < \tilde{h}$, $j^{h \leq h' < \tilde{h}} : X^{h \leq h'} \hookrightarrow X^{h \leq \tilde{h}}$; en particulier on a $j^{h \leq h'} = j^{h \leq \tilde{h}} \circ j^{h \leq h' < \tilde{h}}$.
- pour $1 \leq h \leq h' \leq d$, $i_{h \leq h'} : X^{\geq h'} \hookrightarrow X^{\geq h}$; en particulier $i_{1 \leq h} = i_{\geq h}$;
- pour $1 \leq h < h' \leq d$, $i_{h < h'} : X^{=h'} \hookrightarrow X^{h \leq h'}$; en particulier $i_{=h} = i_{1 < h}$.
- pour $1 \leq h \leq h' \leq d$, $i_{1 \leq h \leq h'} : X^{h \leq h'} \hookrightarrow X^{\geq 1}$; en particulier $i_{1 \leq h \leq h} = i_{=h}$.

Remarque : dans les notations précédentes, dès que l’on a la lettre j alors le foncteur j^* associé est t -exact.

3.2.2. Proposition. — Soit $P_\mathbb{O}$ un faisceau pervers sans torsion sur X ; avec les notations précédentes, $P_\mathbb{O}$ est saturé si et seulement si pour tout $1 \leq h \leq d$, ${}^{ph^0}i_{\geq h}^* P_\mathbb{O}$ est sans torsion.

Démonstration. — On rappelle la suite exacte

$$0 \rightarrow {}^{ph^{-1}}i_{\geq 2}^* P_\mathbb{O} \longrightarrow {}^pj_!^{\geq 1} j^{\geq 1,*} P_\mathbb{O} \longrightarrow P_\mathbb{O} \longrightarrow {}^{ph^0}i_{\geq 2}^* P_\mathbb{O} \rightarrow 0$$

de sorte que $\text{Fil}_{X=1}^1(P_\mathbb{O})$ est saturé si et seulement si ${}^{ph^0}i_{\geq 2}^* P_\mathbb{O}$ est sans torsion. Le quotient $P_\mathbb{O} / \text{Fil}^0(P_\mathbb{O})$ est alors isomorphe à $P_1 := {}^{ph^0}i_{\geq 2}^* P_\mathbb{O}$ à support dans $X^{\geq 2}$. Pour tout $2 \leq h \leq$

d , on a

$${}^p h^0 i_{2 \leq h}^* P_1 = {}^p h^0 (i_{\geq 2} \circ i_{2 \leq 3})^* P_{\mathbb{O}} = {}^p h^0 i_{\geq 3}^* P_{\mathbb{O}}$$

de sorte que P_1 vérifie encore les hypothèses de l'énoncé. On conclut alors par récurrence sur la dimension du support de P . \square

Remarque : comme $X^{\geq h}$ n'est pas une strate mais une réunion de strates, il est en général difficile de tester si un faisceau pervers sur $X^{\geq h}$ est libre ou non. Par exemple même si certaines des fibres de ses faisceaux de cohomologie ont de la torsion cela ne signifie pas que le faisceau pervers n'est pas libre. En revanche pour un faisceau pervers \mathfrak{S} -constructible, ses ${}^p h^0 i_{\leq h}^*$ sont localement constants et donc libre si et seulement si la fibre en un point quelconque de $X^=h$ de son faisceau de cohomologie en la dimension de $X^=h$ est libre. Ainsi la proposition suivante sera plus facilement exploitable.

3.2.3. Proposition. — Soit $P_{\mathbb{O}}$ un faisceau pervers sans torsion sur un schéma X . Avec les notations précédentes on suppose que pour tout $1 \leq h \leq d$,

- $j^{\geq h}$ est affine ;
- ${}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}}$ est sans torsion.

Alors $P_{\mathbb{O}}$ est saturé.

Avant de donner la preuve de ce résultat, commençons par le lemme technique suivant.

3.2.4. Lemme. — On considère les suites exactes dans \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \downarrow & & & & \\ & & C & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & C' & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Si B' et C' sont sans torsion alors, avec les notations du lemme 1.1.5, le quotient de ${}^+ h^0 C$ par l'image de ${}^+ h^0 A$ est sans torsion.

Démonstration. — Quitte à quotienter A par le noyau de $A \rightarrow B$, on peut supposer que cette application est injective. En considérant les parties libres on a

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & {}^+h^0 A & \longrightarrow & {}^+h^0 B & \longrightarrow & B' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & {}^+h^0 \text{Im} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

où Im est l'image de $B \rightarrow C$. Ce diagramme est exact dans \mathcal{C} et ${}^+\mathcal{C}$ et le quotient E cherché est le push out

$$\begin{array}{ccc}
 {}^+h^0 B & \longrightarrow & B' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 {}^+h^0 \text{Im} & \dashrightarrow & E
 \end{array}$$

La flèche ${}^+h^0 B \rightarrow B'$ étant surjective dans \mathcal{C} et ${}^+\mathcal{C}$, on en déduit que ${}^+ \text{Im} \rightarrow E$ est aussi surjective dans ${}^+\mathcal{C}$ et donc que E est un objet libre de ${}^+\mathcal{C}$. Le résultat découle alors du triangle distingué

$${}^+h^0 \text{Im} / {}^+h^0 A \longrightarrow {}^+h^0 C / {}^+h^0 A \longrightarrow {}^+h^0 C / {}^+h^0 \text{Im} \rightsquigarrow$$

et du fait que les premier et dernier termes appartiennent à $\mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$. \square

Démonstration. — de la proposition 3.2.3 D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que pour tout $1 \leq h \leq d$, ${}^p h^0 i_{\geq h}^* P_{\mathbb{O}}$ est sans torsion. Pour cela on raisonne par récurrence sur h de d à 1. Comme $X^{\geq d} = X^{=d}$ le cas $h = d$ est immédiat. Supposons donc avoir montré que pour tout $k \geq h + 1$, ${}^p h^0 i_{\geq k}^* P_{\mathbb{O}}$ est sans torsion et traitons le cas de h . Avec les notations précédentes, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow {}^p h^{-1} i_{=h}^* P_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^p j_!^{1 \leq h-1 < h} j^{1 \leq h-1, *} P_{\mathbb{O}} \rightarrow j^{1 \leq h, *} P_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}} \rightarrow 0$$

où par hypothèses, ${}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}}$ est un faisceau localement libre. Pour

$$A := \left({}^p j_!^{1 \leq h-1 < h} j^{1 \leq h-1, *} P_{\mathbb{O}} \right) / \left({}^p h^{-1} i_{=h}^* P_{\mathbb{O}} \right)$$

on a alors la suite exacte courte

$$0 \rightarrow {}^p j_!^{1 \leq h} A \rightarrow {}^p j_!^{1 \leq h} j^{1 \leq h, *} P_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^p j_!^{\geq h} {}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}} \rightarrow 0$$

où le 0 à gauche est donné par la nullité de ${}^p h^{-1} j_!^{\geq h} {}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}}$ car $j^{\geq h}$ est affine, ce qui implique aussi que ${}^p j_!^{\geq h} {}^p h^0 i_{=h}^* P_{\mathbb{O}}$ est libre. Par application du lemme précédent, on obtient une flèche

$${}^{p+} j_!^{1 \leq h-1} j^{1 \leq h-1, *} P_{\mathbb{O}} \rightarrow {}^{p+} j_!^{1 \leq h} j^{1 \leq h, *} P_{\mathbb{O}}$$

qui est saturée, i.e. dont le conoyau B' est sans torsion. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
{}^p j_!^{1 \leq h-1} j^{1 \leq h-1,*} P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & {}^p j_!^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} P_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \\
& \searrow \text{---} & \downarrow & & & & \\
& & P_{\mathbb{O}} & & & & \\
& & \downarrow & & & & \\
& & {}^p h^0 i_{\geq h+1}^* P_{\mathbb{O}} & & & & \\
& & \downarrow & & & & \\
& & 0 & & & &
\end{array}$$

vérifie donc les hypothèses du lemme précédent de sorte que la flèche en pointillée est saturée, i.e. son conoyau ${}^p h^0 i_{\geq h}^* P_{\mathbb{O}}$ est sans torsion. \square

3.3. Systèmes locaux récurrents et récurrents. —

3.3.1. Définition. — Un système local libre $(X^{=1}, \mathcal{L}_{\Lambda})$ est dit récurrent si pour $P_{\Lambda} := i_{\geq 2,*} {}^p h^{-1} i_{\geq 2}^* {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_{\Lambda}$ et h tel que le support de P_{Λ} est dense dans $X^{=h}$, le morphisme d'adjonction

$${}^{p+} j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} P_{\Lambda} \longrightarrow P_{\Lambda}$$

est surjectif dans \mathcal{C} .

Remarque : de manière équivalente \mathcal{L}_{Λ} est récurrent si et seulement si ${}^p h^0 i^* P_{\Lambda}$ est nul. Pour $\Lambda = \mathbb{O}$, on remarque en particulier que cette propriété ne dépend pas du réseau stable de $P_{\mathbb{O}} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$.

Remarque : si \mathcal{L}_{Λ} est de la forme $\mathcal{L}_{\Lambda,1} \oplus \mathcal{L}_{\Lambda,2}$ où le support de $P_{\Lambda,i}$ est dense dans $X^{\geq h_1}$ avec les notations précédentes ; si $h_1 < h_2$ alors \mathcal{L}_{Λ} ne peut pas être récurrent même si $\mathcal{L}_{\Lambda,1}$ et $\mathcal{L}_{\Lambda,2}$ le sont. En revanche dans le cas $h_1 = h_2$, on peut aisément démontrer que si pour $i = 1, 2$, le support de $P_{\Lambda,i}$ est dense dans $X^{\geq h}$, alors \mathcal{L}_{Λ} est récurrent si et seulement si $\mathcal{L}_{\Lambda,1}$ et $\mathcal{L}_{\Lambda,2}$ le sont.

Remarque : l'intérêt de cette notion est le suivant : on note $\text{EFill}_{i,r}^{p,q} \Rightarrow h^{p+q} j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} P_{\Lambda}$ la suite spectrale exhaustive dont l'aboutissement est connu, et

$$\text{EFill}_r^{p,q} \Rightarrow h^{p+q} P_{\Lambda} \simeq h^{p+q-1} {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_{\Lambda}$$

dont on cherche à déterminer l'aboutissement. Dans le cas où \mathcal{L}_{Λ} est récurrent, on a un morphisme de suites spectrales $\text{EFill}_{i,r}^{p,q} \longrightarrow \text{EFill}_r^{p,q}$ surjectif, i.e. pour tout p, q, r le diagramme

suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{EFill}_{!,r}^{p,q} & \longrightarrow & \mathrm{EFill}_{!,r}^{p+r,q-r+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{EFill}_r^{p,q} & \longrightarrow & \mathrm{EFill}_r^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

ce qui fournit un outil pour calculer les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\Gamma$ particulièrement si les flèches $\mathrm{EFill}_{!,1}^{p,q} \longrightarrow \mathrm{EFill}_1^{p,q}$ sont surjectives. On renvoie le lecteur au §??.

3.3.2. Lemme. — Si $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{O})$ est récurrent alors $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{K})$ et $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{F})$ le sont aussi.

Démonstration. — Cela découle directement de l'isomorphisme ${}^p h^0 i^* P_\mathbb{K} \simeq {}^p h^0 i^* P_\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ et de la nullité de ${}^p h^1 i^* P_\mathbb{O}$. \square

3.3.3. Lemme. — Soit $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{K})$ un système local libre et soit $h \geq 1$ tel que le support de $P_\mathbb{K} = i_{\geq 2,*} {}^p h^{-1} i_{\geq 2}^* {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$ est dense dans $X^{=h}$. Alors $(X^{=1}, \mathcal{L}_\mathbb{K})$ est récurrent si et seulement si pour tout faisceau pervers $A_\mathbb{K}$ à support dans $X^{\geq h+1}$, l'une des deux propriétés équivalentes suivantes

- $\mathrm{Ext}_\mathbb{K}^1({}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}, A_\mathbb{K}) = 0$;
- $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(P_\mathbb{K}, A_\mathbb{K}) = 0$.

Démonstration. — Supposons tout d'abord que $\mathcal{L}_\mathbb{K}$ est récurrent et soit

$$0 \rightarrow A_\mathbb{K} \rightarrow B_\mathbb{K} \rightarrow {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} \rightarrow 0$$

la suite exacte courte associé à un élément $\xi \in \mathrm{Ext}^1({}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}, A_\mathbb{K})$. On a $j^{\geq 1,*} B_\mathbb{K} \simeq \mathcal{L}_\mathbb{K}$; soit alors $\mathrm{Fil}^1(B_\mathbb{K}) \subset B_\mathbb{K}$ l'image de

$${}^p j_{!*}^{\geq 1} j^{\geq 1,*} B_\mathbb{K} \rightarrow B_\mathbb{K}.$$

Comme $\mathcal{L}_\mathbb{K}$ est récurrent, $P_\mathbb{K}$ admet un unique quotient irréductible à savoir ${}^p j_{!*}^{\geq h} j^{\geq h,*} P_\mathbb{K}$ de sorte que $\mathrm{Fil}^1(B_\mathbb{K})$ est isomorphe à ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$. On obtient ainsi un relèvement $P_\mathbb{K} \rightarrow {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$ et donc $B_\mathbb{K} \simeq A_\mathbb{K} \oplus {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$.

Réciproquement si $P_\mathbb{K} \rightarrow A_\mathbb{K}$ est un quotient à support dans $X^{\geq h+1}$, le pushout

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_\mathbb{K} & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & A_\mathbb{K} & \dashrightarrow & B_\mathbb{K} & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} \longrightarrow 0 \end{array}$$

définit un élément de $\xi \in \mathrm{Ext}^1({}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}, A_\mathbb{K})$. En outre la surjection ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K} \rightarrow B_\mathbb{K}$ et le fait que le top de ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$ soit ${}^p j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\mathbb{K}$, impose que ξ est non trivial. \square

3.3.4. Définition. — Le faisceau localement libre irréductible $(X^{=1}, \mathcal{L}_\Lambda)$ est dit récursif s'il est récurrent et si tous les constituants simples de $j_{!*}^{\geq 1} \mathcal{L}_\Lambda$ sont récurrents.

Remarque : l'intérêt des systèmes locaux récurrents est que l'on peut calculer les faisceaux de cohomologie de leur extension intermédiaire par récurrence.

4. Faisceaux pervers sur les variétés de Shimura simples

Nous allons expliciter les constructions précédentes aux faisceaux pervers étudiés dans [5], i.e. sur les variétés de Shimura simples associées à des groupes unitaires telles qu'elles sont définies dans [10].

4.1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$. — Dans la suite K désigne un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal q une puissance de p et on rappelle quelques notations de [5] sur les représentations admissibles de $GL_n(K)$ à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ où l un nombre premier distinct de p .

4.1.1. Notation. — Une racine carrée $q^{\frac{1}{2}}$ de q dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ étant fixée, pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, nous noterons $\pi\{k\}$ la représentation tordue de π de sorte que l'action d'un élément $g \in GL_n(K)$ est donnée par $\pi(g)\nu(g)^k$ avec $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\text{val}(\det g)}$.

4.1.2. Définitions. — — Soit $P = MN$ un parabolique de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N . On note $\delta_P : P(K) \rightarrow R^\times$ l'application définie par

$$\delta_P(h) = |\det(\text{ad}(h)|_{\text{Lie}N})|^{-1}.$$

— Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des R -représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, et P un parabolique de $GL_{n_1+n_2}$ de Lévi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ et de radical unipotent N ,

$$\pi_1 \times_P \pi_2$$

désigne l'induite parabolique normalisée de $P(K)$ à $GL_{n_1+n_2}(K)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : GL_{n_1+n_2}(K) \rightarrow V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_P^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)\left(f(g)\right), \quad \forall n \in N, \forall m \in M, \forall g \in GL_{n_1+n_2}(K).$$

Remarque : en particulier si P est standard alors $\pi_1 \times_P \pi_2$ est l'induite « classique » de $\pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}$.

— Foncteurs de Jacquet : pour π une R -représentation admissible de $GL_n(K)$, l'espace des vecteurs $N(K)$ -coinvariants est stable sous l'action de $M(K) \simeq P(K)/N(K)$. On notera $J_P(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}$.

4.1.3. Notations. — Dans le cas où le parabolique est standard de Lévi $GL_{r_1} \times GL_{r_2} \times \dots \times GL_{r_k}$, on le notera P_{r_1, \dots, r_k} et \times désignera \times_P .

4.1.4. Définitions. — Une représentation π de $GL_n(K)$ est dite cuspidale si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$. L'induite parabolique

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

possède

- un unique quotient irréductible noté $St_s(\pi)$; c'est une représentation de Steinberg généralisée.
- une unique sous-représentation irréductible notée $Speh_s(\pi)$; c'est une représentation de $Speh$ généralisée.

D'après [15] 2.10, l'induite parabolique

$$St_{s-t}\left(\pi\left\{-\frac{t}{2}\right\}\right) \times Speh_t\left(\pi\left\{\frac{s-t}{2}\right\}\right)$$

admet une unique sous-représentation irréductible que l'on note $LT_\pi(s, t)$ ou parfois $\left[\overleftarrow{s-t-1}, \overrightarrow{t}\right]_\pi$, qui s'avère être aussi l'unique sous-représentation irréductible des induites suivantes.

$$\begin{aligned} & Speh_{t+1}\left(\pi\left\{\frac{s-t-1}{2}\right\}\right) \times St_{s-t-1}\left(\pi\left\{-\frac{t+1}{2}\right\}\right), \\ & Speh_t\left(\pi\left\{\frac{s-t}{2}\right\}\right) \times_{op} St_{s-t}\left(\pi\left\{-\frac{t}{2}\right\}\right), \\ & St_{s-t-1}\left(\pi\left\{-\frac{t+1}{2}\right\}\right) \times_{op} Speh_{t+1}\left(\pi\left\{\frac{s-t-1}{2}\right\}\right) \end{aligned}$$

Afin d'éviter d'avoir à écrire systématiquement toutes ces torsions, on introduit les notations suivantes.

4.1.5. Notations. — Un entier $g \geq 1$ étant fixé, pour π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{t_1g}(K)$ et $GL_{t_2g}(K)$, on notera

$$\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 = \pi_1\left\{-\frac{t_2}{2}\right\} \times \pi_2\left\{\frac{t_1}{2}\right\} \text{ et } \pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2 = \pi_1\left\{\frac{t_2}{2}\right\} \times \pi_2\left\{-\frac{t_1}{2}\right\}$$

Remarque : avec ces notations, $LT_\pi(s, t)$ est, par exemple, l'unique sous-représentation irréductible de $St_{s-t}(\pi) \overrightarrow{\times} Speh_t(\pi)$ et de $Speh_t(\pi) \overleftarrow{\times} St_{s-t}(\pi)$.

4.2. Variétés de Shimura unitaires simples. — Soit $F = F^+E$ un corps CM avec E/\mathbb{Q} quadratique imaginaire pure, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Dans [10], les auteurs justifient l'existence d'un groupe unitaire G_τ vérifiant les points suivants :

- $G_\tau(\mathbb{R}) \simeq U(1, d-1) \times U(0, d)^{r-1}$;
- $G_\tau(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p)^\times \times \prod_{i=1}^r (B_{v_i}^{op})^\times$ où $v = v_1, v_2, \dots, v_r$ sont les places de F au dessus de la place u de E telle que $p = u^c u$ et où B est une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 vérifiant certaines propriétés, cf. [10], dont en particulier d'être soit

décomposée soit une algèbre à division en toute place et décomposée à la place v . On notera en outre w une place de F telle que $G(F_w) \simeq D_{F_w, d}^\times$.

Pour tout sous-groupe compact U^p de $G_\tau(\mathbb{A}^{\infty, p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times)$$

4.2.1. Définition. — Pour $U^p \ll$ assez petit \gg ⁽¹⁾ on note $X_{U^p(m)}$ « la variété de Shimura associée à $G \gg$ construite dans [10].

Remarque : $X_{U^p(m)}$ est un schéma projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$ tel que quand U varie, les $X_{U^p(m)}$ forment un système projectif dont les morphismes de transition sont finis et plats : quand $m_1 = m'_1$ ils sont en plus étales. Le système projectif $(X_{U^p(m)})_{U^p, m}$ est naturellement muni d'une action de $G_\tau(\mathbb{A}^\infty)$.

Notons \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de \mathbb{G} , de la forme $U^p(m)$ et donc muni d'une application $m_1 : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{N}$.

4.2.2. Proposition. — *Le système projectif $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ définit un schéma de Hecke au sens de [5], où les morphismes de restriction du niveau $r_{J, I} : X_J \rightarrow X_I$ sont finis et plats.*

Remarque : si $m_1(J) = m_1(I)$ alors $r_{J, I}$ est étale.

4.3. Stratification de Newton. — Pour $I \in \mathcal{I}$, on note $X_{I, s}$ la fibre spéciale de X_I et $X_{I, \bar{s}} := X_{I, s} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique.

4.3.1. Définition. — (cf. [5] §1.3) Pour tout $1 \leq h \leq d$, $X_{I, \bar{s}}^{\geq h}$ (resp. $X_{I, \bar{s}}^{=h}$) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).

Remarque : pour tout $1 \leq h \leq d$, la strate de Newton de hauteur h est de pure dimension $d - h$; le système projectif associé définit alors un schéma de Hecke $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq h}$ (resp. $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{=h}$) pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$, [10] III.4.4.

Remarque : dans le cas de bonne réduction, i.e. $m_1 = 0$, $X_{I, \bar{s}}^{\geq d-h}$ est lisse.

4.3.2. Proposition. — (cf. [12]) *Pour tout $1 \leq h < d$, la strate $X_{I, \bar{s}}^{=h}$ est affine.*

4.3.3. Définition. — Pour une suite (r_1, r_2, \dots, r_k) telle que $\sum_{i=1}^k r_i = d$, on note P_{r_1, r_2, \dots, r_k} le sous-groupe parabolique standard de GL_d associé au sous-groupe de Levi $GL_{r_1} \times GL_{r_2} \times \dots \times GL_{r_k}$ et on note N_{r_1, \dots, r_k} son radical unipotent.

1. tel qu'il existe une place x pour laquelle la projection de U^p sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [10] bas de la page 90

4.3.4. Proposition. — (cf. [10] p.116) Pour tout $1 \leq h < d$, les strates $X_{I,\bar{s}}^{\leq h}$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$, au sens où il existe un sous-schéma fermé $X_{I,\bar{s},1}^{\leq h}$ tel que :

$$X_{I,\bar{s}}^{\leq h} \simeq X_{I,\bar{s},1}^{\leq h} \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/v^{m_1}).$$

4.3.5. Notation. — On notera $X_{I,\bar{s},1}^{\geq h}$ l'adhérence de $X_{I,\bar{s},1}^{\leq h}$ dans $X_{I,\bar{s}}^{\leq h}$.

Remarque : le système projectif $(X_{I,\bar{s},1}^{\leq h})_{I \in \mathcal{I}}$ définit un schéma de Hecke $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h}$ pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d-h}(K)$ où \mathbb{G} agit à travers son quotient $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(K)$ donné par l'application $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$. Par ailleurs l'action d'un élément $w_v \in W_v$ est donnée par l'action de $-\deg(w_v)$ où \deg est la composée du caractère non ramifié de W_v , qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes, avec la valuation v de K .

4.3.6. Notation. — On adoptera les notations suivantes concernant les flèches de schémas de Hecke

$$i^h : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}} = X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}, \quad j_{\Gamma}^{\geq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\geq h}.$$

4.4. Systèmes locaux d'Harris-Taylor. — En ce qui concerne la notion de faisceau de Hecke, on renvoie le lecteur à [5] §6 ; comme dans loc. cit. §7, \mathfrak{G} désignera le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke adapté à la situation.

4.4.1. Définition. — Soit $D_{v,d}$ l'algèbre à division centrale sur F_v d'invariant $1/d$ et d'ordre maximal $\mathcal{D}_{v,d}$.

4.4.2. Notation. — La correspondance de Jacquet-Langlands locale associée à toute $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible τ_v de $D_{v,h}^{\times}$ un diviseur g de $h = tg$ et une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$. On notera alors $\pi_v[t]_D$ cette représentation de $D_{v,h}^{\times}$.

À toute $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible admissible $\tau_v = \pi_v[t]_D$ de $D_{v,h}^{\times}$, on associe un système local de Hecke $\mathcal{F}(\pi_v, t)_1$ sur $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\leq h}$ pour le groupe

$$G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^{\times} \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^{\times} \times D_{v,h}^{\times} / \mathcal{D}_{v,h}^{\times}$$

dont l'action, cf. [10] p.136, se factorise par $G^{(h)}(\mathbb{A}^{\infty}) / \mathcal{D}_{v,h}^{\times}$ via l'application

$$(g^{\infty,p}, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta) \mapsto (g^{p,\infty}, g_{p,0} q^{v(\det \delta)^{-c}}, \delta, g_v^{et}, g_{v_i}). \quad (4.4.3)$$

4.4.4. Notation. — Pour $1 \leq t < s$, on note $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ le faisceau sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}$ obtenu en induisant $\mathcal{F}(\pi_v, t)_1$ géométriquement :

$$\mathcal{F}(\pi_v, t) := \mathcal{F}(\pi_v, t)_1 \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

Par ailleurs si Γ est un réseau stable de τ_v , on notera $\mathcal{F}_{\Gamma}(\pi_v, t)$ le $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau associé.

Remarque : $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ se présente sous la forme d'une somme directe de e_{π_v} faisceaux de Hecke irréductibles $\mathcal{F}(\pi_v, t) = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \mathfrak{F}_{\rho_{v,i}, \mathcal{I}}$ où $(\pi_v[t]_D)_{|\mathcal{D}_{v,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \rho_{v,i}$ avec $\rho_{v,i}$ irréductible.

4.4.5. Définition. — (**Systemes locaux dits d'Harris-Taylor**) Pour Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, on note $HT(\pi_v, \Pi_t)$ le W_v -faisceau pervers de Hecke sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{=tg}$ pour $G(\mathbb{A}^\infty)$ défini par

$$H(\pi_v, \Pi_t) := \mathcal{F}(\pi_v, t)[d - tg] \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \otimes \Pi_t,$$

où l'action se déduit par induction par celle de

$$(g^p, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, g_v^c, \sigma) \in$$

$$G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-tg}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times GL_{tg}(F_v) \times W_v$$

sur le faisceau non induit, via

- $(g^p, g_{p,0} q^{-c+v(\det g_v^c) - \deg \sigma}, \gamma, g^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{v,tg}^\times$ sur $\mathcal{F}(t, \pi_v)$ où $\gamma \in D_{v,tg}^\times/\mathcal{D}_{v,tg}^\times$ est tel que $v(\text{rn}\gamma) = v(\det g_v^c) - \deg \sigma$;
- g_v^c sur Π_t ,

et où comme précédemment le radical unipotent de $P_{tg,d}(F_v)$ agit trivialement.

Si Γ est un réseau stable de $\pi_v[t]_D$ et Γ_t un réseau stable de Π_t , on notera $HT_{\Gamma \otimes_t}(\pi_v, \Pi_t)$ le $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau associé.

Remarque : l'action de W_v sur ces faisceaux d'Harris-Taylor se factorise par l'application deg ; dans [5] on a choisi de les considérer comme des \mathbb{Z} -faisceaux de Hecke de sorte que l'action de $c_v \in W_v$ est donnée par celle de $(q^{-\deg c_v}, \text{deg } c_v) \in \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Z}$.

4.4.6. Proposition. — (cf. [5] proposition 4.3.1 et corollaire 5.4.1) Pour tout $1 \leq t \leq s$, on a l'égalité dans \mathfrak{G} :

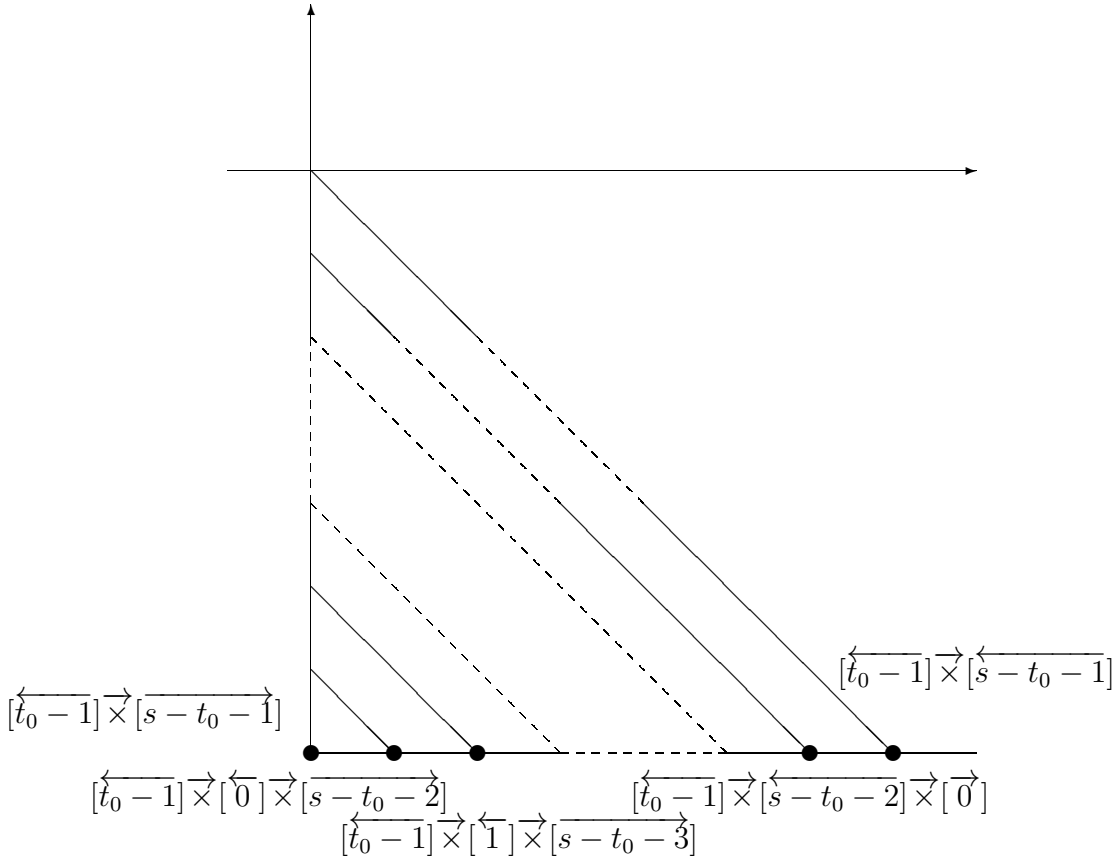
$$i_*^{tg} j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = i_*^{tg} j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) + \sum_{i=1}^{s-t} i_*^{(t+i)g} j_!^{\geq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i-1}]_{\pi_v})(i/2). \quad (4.4.7)$$

Remarque : on rappelle que $j^{\geq h}$ est affine et donc $j_!^{\geq h}$ est t -exact.

4.4.8. Proposition. — Pour tout $1 \leq t \leq s$, $j_!^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, \Pi_t)$ possède une unique filtration avec gradués simples ; ces gradués gr^k sont :

- nuls pour $k > 0$;
- pour $k \leq 0$ il sont égaux à

$$j_!^{\geq (t-k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{-k-1}]_{\pi_v}) \otimes \Xi^{k/2}$$


 FIGURE 1. Germes en un point supersingulier des $\text{EFill}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$

Démonstration. — Le cas $t = s$ étant trivial, on suppose $1 \leq t < s$. On rappelle que d'après [5], pour tout $1 \leq t \leq s$, on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck

$$j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{r=0}^{s-t} j_{!*}^{\geq (t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{[r-1]}_{\pi_v}) \otimes \Xi^{-r/2}.$$

Par ailleurs d'après loc. cit, la fibre en un point supersingulier de $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ est nulle sauf pour $i = 1 - t$. On considère alors la fibre en un point supersingulier de la suite spectrale de stratification exhaustive, cf. la notation 2.7.3

$$\text{EFill}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)) = h^{p+q} \text{gr}_r^{-p}(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)) \Rightarrow h^{p+q} j_{\mathcal{I},!}^{\geq tg} HT_{\mathbb{Q}_l}(\pi_v, \Pi_t),$$

dont on trouvera une illustration à la figure 1. Ainsi pour tout $p \geq 0$, il existe un unique q tel que la fibre en un point supersingulier de $\text{EFill}_{\mathfrak{S},1}^{p,q}(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ soit non nulle. Le résultat découle alors du fait que la fibre en un point supersingulier de l'aboutissement est nulle. \square

4.4.9. Corollaire. — *Les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont récursifs au sens de de la définition 3.3.4 ; autrement dit si*

$$(0) = \text{Fill}_!^0(\Pi_t) \subset \text{Fill}_!^1(\Pi_t) \subset \cdots \subset \text{Fill}_!^{s+1-t}(\Pi_t) = j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$$

est la filtration de stratification exhaustive de $j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$. Pour tout $1 \leq k \leq s+1-t$, on a alors une surjection

$$j_!^{\geq (s+1-k)g} j^{\geq (s+1-k)g,*} \text{Fill}_!^k(\Pi_t) \twoheadrightarrow \text{Fill}_!^k(\Pi_t)$$

où $\text{Fill}_!^k(\Pi_t)$ est à support dans $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq (s+1-k)g}$ avec

$$j^{\geq (s+1-k)g,*} \text{Fill}_!^k(\Pi_t) \simeq HT(\pi_v, \Pi_t \xrightarrow{\leftarrow} [s-k-t]_{\pi_v}) \otimes \Xi^{(k+t-s+1)/2}$$

et dont l'image dans le groupe de Grothendieck est

$$\sum_{i=1}^k j_{!*}^{\geq (s+1-i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \xrightarrow{\leftarrow} [s-i-t]_{\pi_v}) \otimes \Xi^{(i+t-s+1)/2}.$$

Remarque : on a un énoncé dual concernant $j_*^{\geq tg} HT_{\mathbb{Q}_l}(\pi_v, \Pi_t)$ et sa cofiltration de stratification exhaustive

$$\begin{aligned} j_*^{\geq tg} HT_{\mathbb{Q}_l}(\pi_v, \Pi_t) &= \text{CoFill}_{*,t-s-1}(\Pi_t) \twoheadrightarrow \text{CoFill}_{*,t-s}(\Pi_t) \twoheadrightarrow \cdots \\ &\twoheadrightarrow \text{CoFill}_{*,-1}(\Pi_t) \twoheadrightarrow \text{CoFill}_{*,0}(\Pi_t) = 0. \end{aligned}$$

Démonstration. — On pose $P = j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$; avec les notations de la définition 2.4.2,

$$\text{Fill}_!^{s+1-t}(\Pi_t) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq tg}}^1(P) = P,$$

ce qui donne donc le résultat pour $k = s+1-t$. Comme les gradués de l'unique filtration maximale de P sont rangés dans l'ordre croissant de leur dimension, nécessairement on a

$$\text{Fill}_!^{s-t}(\Pi_t) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq tg}}^0(P) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=(t+1)g}}^1\left(\text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq tg}}^0(P)\right),$$

ce qui donne le résultat pour $k = s-t$.

Selon le même argument, à chaque étape de la construction de la filtration de stratification exhaustive, on aura

$$\text{Fill}_!^{s-t+1-k}(\Pi_t) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=(t+k)g}}^1\left(\text{Fill}_!^{s-t+1-k}(\Pi_t)\right)$$

et

$$\text{Fill}_!^{s-t+1-k-1}(\Pi_t) = \text{Fil}_{X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=(t+k)g}}^0\left(\text{Fill}_!^{s-t+1-k}(\Pi_t)\right).$$

d'où le résultat. □

4.5. Faisceau pervers de Hecke des cycles proches. —

4.5.1. Définition. — Pour tout $J \in \mathcal{I}$, les faisceaux pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\eta_v, J}(\Lambda)[d-1](\frac{d-1}{2})$ sur $X_{J, \bar{s}}$ définissent un W_v -faisceau pervers de Hecke, au sens de la définition 1.3.6 de [5], que l'on note $\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda}$.

Remarque : comme dans le paragraphe précédent, pour $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l$, on notera simplement $\Psi_{\mathcal{I}}$.
Remarque : dans [5] §2.2, on utilise l'action de la monodromie pour découper $\Psi_{\mathcal{I}}$ en une somme directe

$$\Psi_{\mathcal{I}} = \bigoplus_{\substack{1 \leq g \leq d \\ \pi_v \in \text{Cusp}_v(g)}} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

où $\text{Cusp}_v(g)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence inertielles, cf. définition 1.1.3 de [5], des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ avec $1 \leq g \leq d$.

4.5.2. Définition. — (**Faisceau pervers dits d'Harris-Taylor**) On note $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ le W_v -faisceau pervers de Hecke sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq 1}$ de support $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq h}$ et de poids zéro défini par

$$i_*^{tg} j_*^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathfrak{L}(\pi_v),$$

où \mathfrak{L}^\vee est la correspondance de Langlands, cf. [10].

L'action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$ sur $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ se définit par induction en faisant agir

$$(g^p, g_{p,0}, g_v^c, g_v^{et}, g_{v_i}, \sigma) \in G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times W_v$$

via l'action de :

- $(g^p, g_{p,0} q^{-\deg \sigma}, \gamma, g_v^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^\infty) / \mathcal{D}_{v, tg}^\times$ sur $\mathcal{F}(t, \pi_v)$ où $\gamma \in D_{v, tg}^\times$ est tel que $v(\text{rn} \delta) = v(\det g_v^c) - \deg \sigma$;
- (g_v^c, σ) sur $\text{St}_t(\pi_v) \otimes \mathfrak{L}(\pi_v)$.

Remarque : on notera que $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ ne dépend, en tant que W_v -faisceau pervers de Hecke, que de la classe d'équivalence inertielle de π_v . Si Γ_D , Γ_G et Γ_W sont respectivement des réseaux stables de $\pi_v[t]_D$, $\text{St}_t(\pi_v)$ et $\mathfrak{L}(\pi_v)$, on notera

$$\mathcal{P}_{\Gamma_{\otimes t}}(t, \pi_v)$$

le $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers de Hecke associé.

4.5.3. Proposition. — (cf. [5] corollaire 5.4.2) On a l'égalité suivante dans \mathfrak{G} :

$$e_{\pi_v}[\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}] = \sum_{k=1-s_g}^{s_g-1} \sum_{\substack{|k| < t \leq s_g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(t, \pi_v)(-\frac{k}{2}),$$

où e_{π_v} est le cardinal de la classe d'équivalence inertielle de π_v , cf. loc. cit. définition 1.1.3.

Remarque : d'après la remarque qui suit le théorème 2.4.4 de [5], les faisceaux pervers d'Harris-Taylor $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ sont de la forme $e_{\pi_v} \mathfrak{P}(t, \pi_v)$ où $\mathfrak{P}(t, \pi_v)$ est un faisceau pervers simple.

Comme précédemment, nous allons étudier les filtrations de stratification du W_v -faisceau pervers de Hecke $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$, où π_v est une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $1 \leq g \leq d$ et $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$.

4.5.4. Proposition. — *Soit*

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ de la proposition 2.6.2. La filtration obtenue coïncide avec la filtration par les noyaux de la monodromie, i.e. pour tout $1 \leq k \leq s$, la surjection

$$j_!^{\geq kg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{k-1}]_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v) \left(\frac{1-k}{2} \right) \twoheadrightarrow \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) / \text{Fil}_{\mathfrak{G}}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}),$$

a pour image dans le groupe de Grothendieck

$$\sum_{i=k}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{k-i}{2} \right).$$

Remarque : la figure 2 illustre la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ où chaque cercle représente un faisceau pervers d'Harris-Taylor $\mathcal{P}(t, \pi_v) \left(\frac{1-t}{2} + k \right)$.

Démonstration. — L'observation de la suite spectrale de monodromie-poids faisceutique

$$E_1^{M, p, q} = h^{p+q} gr_{-p}^M(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \Rightarrow h^{p+q} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

décrite par le théorème 2.2.6 de [5] impose que pour tout $1 \leq t \leq s-1$ et pour tout $0 \leq k \leq s-t-1$, dans toute filtration croissante de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ l'indice k_1 du gradué contenant $\mathcal{P}(t-k, \pi_v) \left(\frac{t-k-1}{2} \right)$ est inférieur ou égale à l'indice k_2 du gradué contenant $\mathcal{P}(t-k+1, \pi_v) \left(\frac{t-k-2}{2} \right)$.

Remarque : à la figure 3, les contraintes mentionnées ci-avant s'expriment en disant que chaque fois que deux cercles sont reliés il faut que l'indice de celui qui est le plus bas soit supérieur ou égal à l'autre.

On rappelle que $j_!^{\geq g, *}\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} \simeq HT(\pi_v, \pi_v) \otimes L_g(\pi_v)$; ainsi $\text{Fil}_{\mathfrak{G}}^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ qui est l'image de

$$j_!^{\geq g} HT(\pi_v, \pi_v) \otimes L_g(\pi_v) \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}, \quad (4.5.5)$$

a une image nécessairement inférieure, dans \mathfrak{G} , à $\sum_{i=1}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(i/2)$ car d'après la proposition 4.4.6, ce sont les seuls constituants de $j_!^{\geq g} HT(\pi_v, \pi_v) \otimes L_g(\pi_v)$ qui sont des constituants de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ d'après la proposition 4.5.3. Or d'après l'observation du début de la preuve illustré par la figure 3, pour tout $i \geq 1$, l'indice d'un gradué contenant $\mathcal{P}(i, \pi_v)(i/2)$ est inférieur ou égal à celui de contenant $\mathcal{P}(1, \pi_v)$. On en déduit donc que l'image de (4.5.5) est égale à $\sum_{i=1}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(i/2)$.

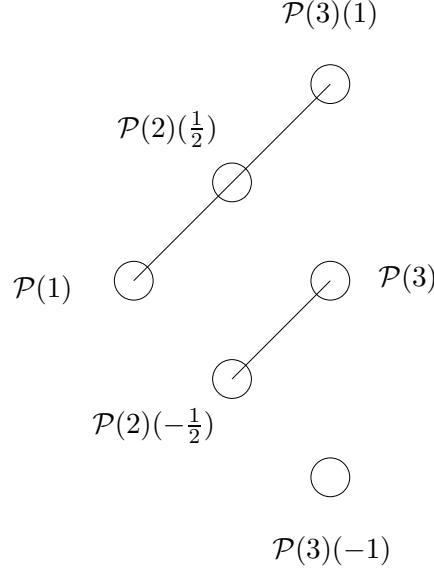


FIGURE 3. Illustration des contraintes d'une filtration de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ avec $s = 3$.

est alors, d'après les propositions 4.5.3 et 4.4.6, dans \mathfrak{G} , inférieure ou égale à

$$\sum_{i=t+1}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)\left(\frac{i-1-2t}{2}\right)$$

et contient $\mathcal{P}(t+1, \pi_v)(-t/2)$. D'après l'observation du début de la preuve, pour tout $i > t+1$, l'indice d'un gradué contenant $\mathcal{P}(i, \pi_v)(\frac{i+1-2t}{2})$ est inférieur ou égal à celui contenant $\mathcal{P}(t+1, \pi_v)(-t/2)$ de sorte que cette image est égale à $\sum_{i=t+1}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(\frac{i-1-2t}{2})$. On conclut alors par récurrence. \square

Dualement on a la description suivante de la cofiltration de stratification.

4.5.6. Proposition. — *On note*

$$\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} = \text{CoFil}_{\mathfrak{S}, -s}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S}, 1-s}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S}, 0}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = 0$$

la cofiltration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ de la proposition 2.6.7. La cofiltration obtenue coïncide alors avec celle donnée par les images de la monodromie i.e. pour tout $1 \leq k \leq s$, l'injection

$$\text{Ker}\left(\text{CoFil}_{\mathfrak{S}, -k}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S}, 1-k}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})\right) \hookrightarrow j_*^{\geq kg} HT(\pi_v, \overleftarrow{[k-1]}_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v)\left(\frac{k-1}{2}\right),$$

a pour image dans le groupe de Grothendieck

$$\sum_{i=k}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{i-k}{2} \right).$$

Remarque : pour $s \geq 3$, on notera ainsi que les filtrations $\text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ et ${}^{\vee}\text{CoFil}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ ne coïncident pas, cf. par exemple l'illustration de la figure 4 où les traits relient les faisceaux pervers simples d'un même gradué et où on a centré les graduations de sorte que le gradué de plus grande dimension soit d'indice nul.

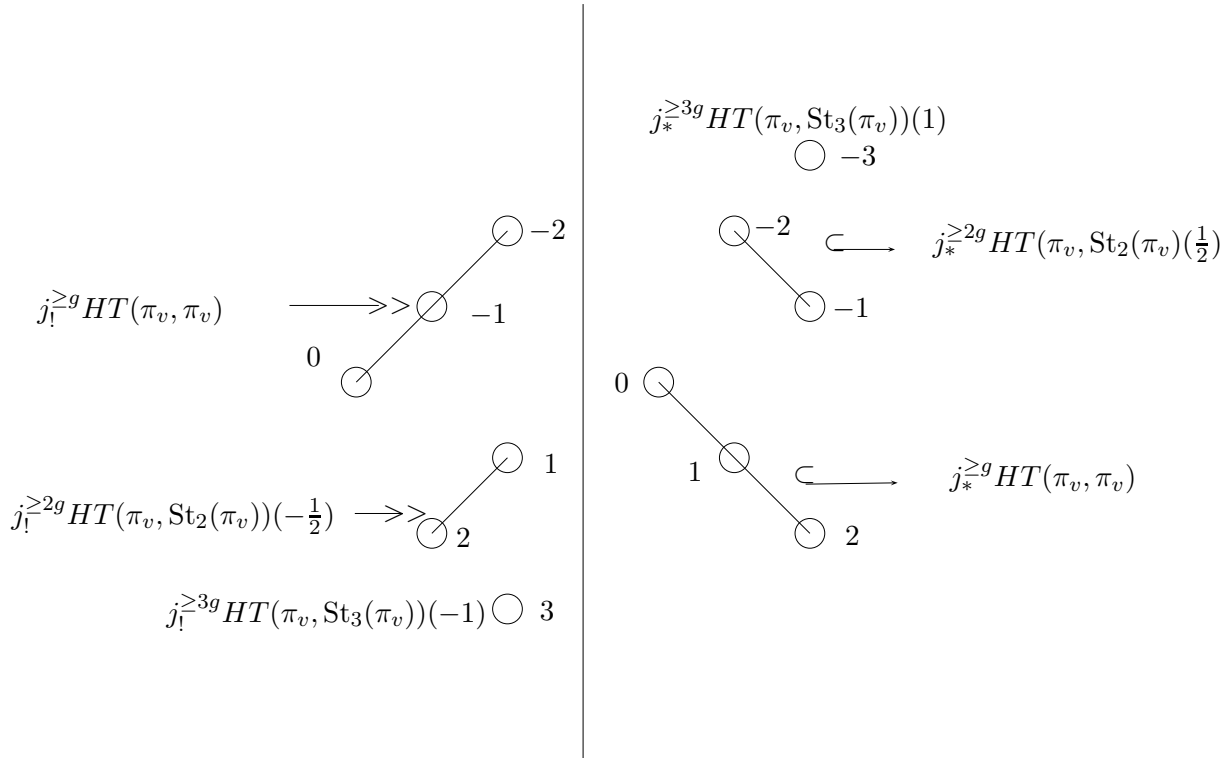


FIGURE 4. Illustration de la filtration (fig. à gauche) et de la cofiltration (fig. à droite) de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ avec $s = 3$.

Remarque : les filtrations (resp. les cofiltrations) de stratification exhaustives de $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})$ (resp. $j_*^{\geq tg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})$) fournissent alors la filtration (resp. la cofiltration) de stratification exhaustive de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$. On renvoie à la figure 4 pour un exemple de numérotation des gradués.

4.5.7. Corollaire. — La suite spectrale associée à la filtration de stratification

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \dots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

dégénère en E_1 .

Démonstration. — Le résultat découle directement de la description de [5] 2.2.6 des flèches de la suite spectrale de monodromie-poids faisceautique

$$E_1^{M,p,q} = h^{p+q} gr_{-p}^M(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \Rightarrow h^{p+q} \Psi_{\mathcal{I},\pi_v}.$$

□

Remarque : autrement dit toutes les flèches de la suite spectrale de monodromie proviennent des tranches, i.e. des flèches des suites spectrales associées aux $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v})$.

Remarque : à l'inverse les suites spectrales des tranches de la cofiltration de stratification dégénèrent en E_1 , alors que la suite spectrale associée à la cofiltration de stratification contient toutes les flèches de la suite spectrale de monodromie.

5. Retour sur les résultats faisceautiques de [5]

L'objectif de ce paragraphe est de revenir sur la preuve des principaux résultats de [5] en utilisant les filtrations de stratification, l'intérêt étant de simplifier les arguments et de dégager une future stratégie d'étude sur \bar{Z}_l et $\bar{\mathbb{F}}_l$. Rappelons tout d'abord la stratégie de loc. cit.

1. On utilise tout d'abord le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues afin de relier les germes des faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents à une représentation locale dite de Deligne-Carayol : cette partie est rappelée dans le paragraphe suivant.
2. Dans [10], les auteurs donnent une « recette » afin de calculer la somme alternée des groupes de cohomologie des $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ avec les notations précédentes. Ainsi au terme du §5.4 de [5], on obtient les propositions 4.4.6 et 4.5.3 qui s'énoncent dans des groupes de Grothendieck de faisceaux pervers de Hecke.
3. Ensuite il s'agit de calculer les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor ainsi que ceux du complexe des cycles évanescents. Pour ce faire :
 - dans [5], on utilise une propriété d'autodualité à la Zelevinski sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, prouvée par Fargues ;
 - une deuxième solution est proposée dans [6] et repose sur le théorème de Lefschetz difficile et sur des calculs fastidieux de groupes de cohomologie.

Dans la suite nous proposons une troisième alternative beaucoup plus simple de l'étape 3 qui repose, via les filtrations de stratification,

- sur les calculs élémentaires des groupes de cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor. Rappelons comment ces calculs procèdent. On choisit une représentation irréductible automorphe Π , cohomologique pour le système local \mathcal{L}_ξ à l'infini et la

composante Π_v de la forme $\text{Speh}_s(\pi_v)$ pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_d(F_v)$ avec $d = sg$. L'image de $H^*(j_{\mathcal{I}}^{\geq tg} HT(\pi_v, t))[\Pi^{\infty, v}]$ dans le groupe de Grothendieck correspondant, est calculée dans [10] de sorte que, de l'égalité de [6] proposition 2.6.1 ou [5] corollaire 5.4.1

$$i_{\mathcal{I},*}^{tg} j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{r=0}^{s-t} (-1)^r i_{\mathcal{I},*}^{(t+r)g} j_{\mathcal{I},!}^{\geq (t+r)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [r-1]_{\pi_v})(r/2). \quad (5.0.8)$$

et la pureté, on en déduit, par récurrence, chacun les images des $H^i(j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, t))[\Pi^{\infty, v}]$ dans le groupe de Grothendieck.

- Le deuxième argument cohomologie concerne une propriété des groupes de cohomologie $H_{\eta, \xi}^i$ de la variété de Shimura à coefficients dans le système local \mathcal{L}_{ξ} à l'infini :
 - soit on utilise le résultat principal de [14], à savoir que pour Π automorphe cohomologique pour ξ et telle que $\Pi_v \simeq \text{St}_s(\pi_v)$, la monodromie de $H_{\eta, \xi}^0[\Pi^{\infty, v}]$ est d'ordre s .
 - soit on utilise, pour la représentation automorphe Π utilisée plus haut, que $H_{\eta, \xi}^i[\Pi^{\infty}]$ est non nulle si et seulement si $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$.

En ce qui concerne cette dernière stratégie, résumons les résultats nous allons utiliser, lesquels d'après ce que l'on vient d'expliquer, se lisent directement sur le calcul de la somme alternée de la cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor donnée dans [10] et rappelé dans [6].

5.0.9. Proposition. — (cf. [6] lemme 3.5.3)

Avec les notations ci-dessus :

- les parties de poids $t - s$ de $H^i(pj_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty, v}]$ sont nulles pour $i \neq t - s$ et $GL_d(F_v)$ -isotypiques de la forme $\Pi_t \overrightarrow{\times} [s - t - 1]_{\pi_v}$ pour $i = t - s$;
- si $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(k)$ est un constituant de $H^i(pj_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty, v}]$ pour $t < s$ alors $i = s - t = 1$, $k = 1/2$ et $\Pi_t = \text{St}_t(\pi_v)$.

5.0.10. Corollaire. — Dans la suite spectrale des cycles évanescents

$$E_2^{i,j} = H^i(h^j \Psi_{\mathcal{I}}) \Rightarrow H_{\eta}^{i+j}$$

si $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{k}{2})$ est un sous-quotient de $H^i(h^j \Psi_{\mathcal{I}})[\Pi^{\infty, v}]$ avec $i + j > 0$ alors $i + j = 1$, $j = -g$ et $k = s - 1$.

Démonstration. — Commençons par noter qu'on se ramène à regarder $H^i(h^j \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ et donc aux j de la forme $(t - s)g - r$ avec $1 \leq t \leq s$ et pour un tel t , $0 \leq r \leq t - 1$. Comme on regarde $i + j > 0$ le cas $t = s$ est exclu car alors on a nécessairement $i = 0$ puisque $h^j \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ est à support dans les points supersinguliers.

Dans le cas où $g > 1$, $H^i(h^{(t-s)g-r} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})[\Pi^{\infty, v}]$ est de la forme $H^{i-(s-t)g}(pj_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_{t,r}))[\Pi^{\infty, v}]$ avec $\Pi_{t,r}$ qui est égal à $\text{St}_t(\pi_v)$ si et seulement si $r = 0$. Le résultat découle alors du deuxième point de la proposition précédente.

Dans le cas $g = 1$, le raisonnement est le même en utilisant les suites spectrales de stratification puisque les $h^j \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ ne sont pas directement des systèmes locaux d'Harris-Taylor. \square

5.1. Espaces de Lubin-Tate. — La lettre K désigne une extension finie de \mathbb{Q}_p , dont on note \mathcal{O}_K l'anneau des entiers, \mathcal{P}_K l'idéal maximal, ϖ_K une uniformisante et $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$ son corps résiduel de cardinal $q = p^f$. L'extension maximale non ramifiée de K sera notée K^{nr} de complété \widehat{K}^{nr} , d'anneau des entiers respectifs $\mathcal{O}_{K^{nr}}$ et $\mathcal{O}_{\widehat{K}^{nr}}$.

Soit $d \geq 1$ et $\Sigma_{K,d}$ le \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate formel sur $\bar{\kappa}$ de hauteur d , cf. [10] §II. On considère la catégorie \mathcal{C} des \mathcal{O}_K -algèbres locales, artiniennes, de corps résiduel $\bar{\kappa}$.

5.1.1. Définition. — Le foncteur qui à un objet R de \mathcal{C} associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations par quasi-isogénies sur R de $\Sigma_{K,d}$ munies d'une structure de niveau n est pro-représentable par un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n} = \coprod_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$ où $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$ représente le même foncteur mais en considérant des déformations par des isogénies de hauteur h .

Remarque : chacun des $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$ est non-canoniquement isomorphe au schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)}$ noté $\text{Spf Def}_{d,n}$ dans [5].

Remarque : on notera sans chapeau les fibres génériques au sens de Raynaud-Berkovich de ces espaces ; ce sont donc des \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques au sens de [3]. On pose

$$\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K} := \mathcal{M}_{LT,n} \widehat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}.$$

5.1.2. Définition. — Étant donné un anneau Λ , soit $\Psi_{K,\Lambda,d,n}^i$ le Λ -module de type fini associé, via la théorie des cycles évanescents de Berkovich, au morphisme structural $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)} \rightarrow \text{Spf } \widehat{\mathcal{O}}_K^{nr}$.

Remarque : on a en fait $\Psi_{K,\Lambda,d,n}^i \simeq H_c^i(\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}, \Lambda)$.

5.1.3 — Ce module est muni d'une action de $GL_d(\mathcal{O}_K)$ qui se factorise par le morphisme surjectif naturel $GL_d(\mathcal{O}_K) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K^n)$ et on pose $\Psi_{K,\Lambda,d}^i = \varinjlim_n \Psi_{K,\Lambda,d,n}^i$ de sorte que comme $\mathfrak{K}_n := \text{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_K) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n))$ est pro- p pour tout $n \geq 1$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\Psi_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,n}^i = (\Psi_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d}^i)^{\mathfrak{K}_n}.$$

5.1.4. Notations. — On notera

- $D_{K,d}$ l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$ et $\mathcal{D}_{K,d}$ son ordre maximal ;
- $GDW_K(d)$ le groupe produit $GL_d(K) \times D_{K,d}^\times \times W_K$;
- $GDW_K(d)^0$ le noyau de l'application

$$(g, \delta, c) \mapsto \text{val}(\det(g^{-1})\text{rn}(\delta) \text{Art}_K^{-1}(c)) \in \mathbb{Z};$$

- on adoptera une notation similaire pour $GW_K^0(d)$.
 – $GDW_K(d)^1$ le noyau de l'application $GDW_K(d) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Le groupe des automorphismes de $\Sigma_{K,d}$ s'identifie avec $D_{K,d}^\times$ lequel agit donc naturellement sur $\Psi_{K,\Lambda,d}$ tout comme le sous-groupe d'inertie I_K . On dispose ainsi d'une action « naturelle » de $GL_d(\mathcal{O}_K) \times \mathcal{D}_{K,d}^\times \times I_K$ sur $\Psi_{K,\Lambda,d}$ que l'on peut prolonger, cf. [4] par exemple, au groupe $GDW_K(d)^0$. Pour un caractère χ de K^\times d'image finie, soit $\Psi_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\chi}$ le facteur direct de $\Psi_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\chi}$ sur lequel le centre de $GL_d(\mathcal{O})$ agit via χ , l'action de $GDW_K(d)^0$ sur $\Psi_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\chi}$ se prolonger alors à $GDW_K(d)^1$.

Remarque : la construction précédente pour les espaces $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}$ fourni des $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espaces vectoriels $\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,n}^i \simeq (\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d}^i)^{\otimes n}$ où

$$\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\chi}^i \simeq \text{Ind}_{GDW_K(d)^1}^{GDW_K(d)} \Psi_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\chi}^i$$

est une représentation de $GDW_K(d)$.

5.1.5. Notation. — Soit $\text{Cusp}_\chi(|d|)$ l'ensemble des classes d'équivalences des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(K)$ de caractère central χ où g décrit les diviseurs de d . Pour $\pi \in \text{Cusp}_\chi(|d|)$, on notera

$$\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\pi}^i = \text{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}_l[D_{K,d}^\times]}(\pi[s]_D, \mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,\chi}^i),$$

avec $\pi[s]_D := \text{JL}^{-1}(\text{St}_s(\pi)^\vee)$ où JL désigne la correspondance de Jacquet-Langlands.

Remarque : comme toute représentation irréductible τ de $D_{K,d}^\times$ de caractère central χ est de la forme $\pi[s]_D$ pour une certaine représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$ de caractère central χ , on en déduit que

$$\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,\chi}^i \simeq \bigoplus_{\pi \in \text{Cusp}_\chi(|d|)} \mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,\pi}^i.$$

5.1.6. Théorème. — [5] Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$, on a

$$\mathcal{U}_{K,\bar{\mathbb{Q}}_l,d,\pi}^{d-1-i} \simeq \begin{cases} \mathcal{L}(\pi)(-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}) \otimes [\overleftarrow{s-1-i}, \overrightarrow{i}]_\pi & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

où \mathcal{L}^\vee désigne la correspondance de Langlands locale construite dans [10].

5.2. Les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont récurrents. — Il s'agit de prouver le corollaire 4.4.9 sans utiliser le calcul des germes aux points supersinguliers des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. Pour cela on raisonne par récurrence sur t de s à 1. Les cas $t = s$ et $s - 1$ étant évidents, supposons donc le résultat acquis

jusqu'au rang $t + 1$ et traitons le cas de t . On pose $P = {}^p h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* HT(\pi_v, \Pi_t)$ de sorte que l'on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow P \longrightarrow {}^p j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow {}^p j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0.$$

Il s'agit ainsi de montrer que le morphisme d'adjonction $j_!^{\geq (t+1)g} j^{\geq (t+1)g,*} P \rightarrow P$ est surjectif; on note P_0 l'image de ce morphisme. De la connaissance des constituants irréductibles de P et, d'après l'hypothèse de récurrence, des quotients de $j_!^{\geq (t+1)g} j^{\geq (t+1)g,*} P$, l'image de P_0 dans le groupe de Grothendieck est, en utilisant que les strates non supersingulières sont géométriquement induites, de la forme

$$[P_0] = \sum_{i=1}^{s-t-k} i^{(t+i)g} j_{!*}^{\geq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[i-1]_{\pi_v}})(i/2)$$

pour un entier $0 \leq k \leq s - t - 1$. Par ailleurs la filtration par les poids de P fournit un quotient $P \twoheadrightarrow P'_0$ où $[P'_0] = [P_0]$ dans le groupe de Grothendieck de sorte que le composé $P_0 \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P'_0$ est un isomorphisme. On obtient ainsi que P_0 est un facteur direct de $P \simeq P_0 \oplus Q_0$. Il nous faut alors prouver que Q_0 est nul.

Pour ce faire nous allons raisonner sur la cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor à la manière de [6], l'idée étant de montrer qu'il existe un indice $i \leq -k$ tel que $H^i(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ est non nul de sorte que comme $j^{\geq tg}$ est affine et donc que tous les $H^i(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ sont nuls pour $i < 0$, on doit nécessairement avoir $k = 0$ et donc Q_0 est nul. On note A le pushout

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & P_0 & \dashrightarrow & A & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow 0 \end{array}$$

de sorte que l'on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow Q_0 \longrightarrow j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow A \rightarrow 0$$

où la flèche $A \rightarrow Q_0[1]$ se factorise par ${}^p j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow Q_0[1]$. Pour k non nul, par pureté on en déduit alors que les flèches $H^i(A) \rightarrow H^{1+i}(Q_0)$ sont nulles et donc

$$H^i(j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)) \simeq H^i(A) \oplus H^i(Q_0).$$

Il suffit alors de prouver que $H^{-k}(A)$ est non nul.

Soit alors comme dans [6] §3.5, une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A})$ telle que $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]_{\pi_v}}$ et Π est cohomologique pour ξ au sens de loc. cit. D'après les rappels de [6] donnés à la proposition 5.0.9, les parties de poids $t - s$ de $H^i({}^p j_{\mathcal{I},!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty, v}]$ sont nulles pour $i \neq t - s$ et $GL_d(F_v)$ -isotypiques de la forme $\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]_{\pi_v}}$ pour $i = t - s$. On en déduit alors que dans la suite spectrale des poids calculant la cohomologie de A , la composante $\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-k, k-1]_{\pi_v}}$ de poids $t - s$ de

$H^{-k}(p j_{\mathcal{I},!}^{\geq(s-k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [s-t-k-1]_{\pi_v}) (\frac{s-t-k}{2})) [\Pi^{\infty, v}]$ n'est pas un constituant d'un autre des termes initiaux de cette suite spectrale et en fournit donc un constituant de son aboutissement et donc un constituant de poids $t-s$ de $H^{-k}(A) [\Pi^{\infty, v}]$ qui est donc non nul.

5.2.1. Corollaire. — *Soit*

$$0 \rightarrow \text{Fill}_!^{s-t}(\Pi_t) \longrightarrow p j_{!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow p j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0,$$

avec $\text{Fill}_!^{s-t}(\Pi_t) = p h_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* HT(\pi_v, \Pi_t)$. On a alors une résolution

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow j_{!}^{\geq sg} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t}(\pi_v)) (\frac{s-t}{2}) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow j_{!}^{\geq (t+2)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_2(\pi_v))(1) \longrightarrow j_{!}^{\geq (t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_1(\pi_v)) (\frac{1}{2}) \\ \longrightarrow \text{Fill}_!^{s-t}(\Pi_t) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Remarque : on retrouve en particulier le calcul des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor du théorème 2.2.5 de [5]. Plus concrètement en considérant la surjection

$$j_{!}^{\geq (t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \otimes \Xi^{-1/2} \twoheadrightarrow \text{Fill}_!^{s-t}(\Pi_t)$$

comme un morphisme de faisceaux pervers filtrés, on obtient un morphisme de suites spectrales

$$\left(\text{EFill}_r^{p,q} \left(j_{!}^{\geq (t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \right), d_r^{p,q} \right) \longrightarrow \left(\text{EFill}_r^{p,q} (\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{s-t}(\Pi_t)), d_r^{p,q} \right). \quad (5.2.2)$$

Comme les $d_r^{p,q}$ du membre de gauche sont connues par récurrence, on en déduit les $d_r^{p,q}$ du membre de droite et donc comme les germes des faisceaux de cohomologie de $j_{!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ sont connues, on en déduit les germes des faisceaux de cohomologie de $j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ ainsi que la description de la suite spectrale de $\left(\text{EFill}_r^{p,q} \left(j_{!}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \right), d_r^{p,q} \right)$.

Remarque : on trouvera à la figure 5 une illustration de l'argument précédent ; ainsi la description explicite de la suite spectrale de la figure 1 de [5] §5.8 est obtenue sans utiliser ni la propriété d'autodualité du modèle local ni le théorème de Lefschetz difficile sur la cohomologie de la variété de Shimura.

5.3. Faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$. — Il s'agit à partir de la proposition 4.5.3 de prouver la proposition 4.5.4 ; le calcul des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$ procédera alors comme dans la preuve du corollaire 4.5.7.

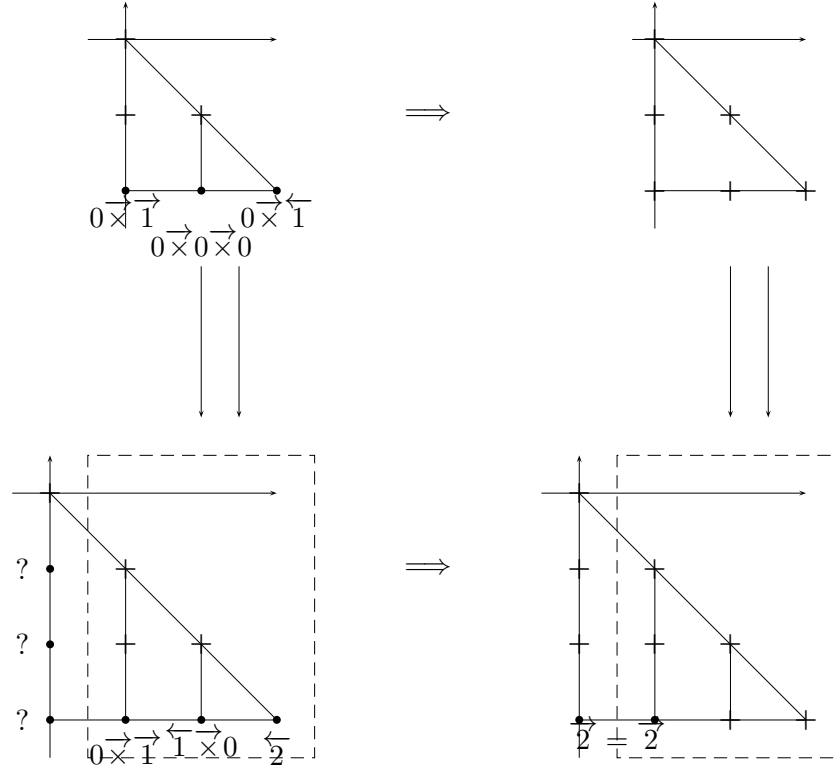


FIGURE 5. Germes en un point supersingulier du morphisme de suites spectrales (5.2.2) ; on explicite simplement l'action du groupe linéaire en « factorisant » par $\Pi_t \overrightarrow{\times}$, i.e. quand on écrit $0 \overrightarrow{\times} 1$ il faut lire avec les notations précédentes $\Pi_t \overrightarrow{\times} 0 \overleftarrow{\times}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} 1 \overrightarrow{\times}_{\pi_v}$.

Démonstration de la proposition 4.5.4. — Supposons par l'absurde qu'il existe un indice k pour lequel

$$j_1^{\geq kg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{k-1}]_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v) \left(\frac{1-k}{2} \right) \longrightarrow \text{Fil}_S^k(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) / \text{Fil}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \quad (5.3.1)$$

a une image dans le groupe de Grothendieck strictement inférieure à $\sum_{i=k}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(-\frac{2k-1-i}{2} \right)$. *Remarque :* d'après 4.5.3 et 4.4.6, cette image est nécessairement inférieure ou égale à celle proposée.

D'après 4.4.9, l'image en question est de la forme $\sum_{i=k}^{k+r_k} \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(-\frac{2k-1-i}{2} \right)$ pour un entier $0 < r_k \leq s - k$. On considère alors i minimal tel qu'il existe $1 \leq k \leq s - 1$ pour lequel $\mathcal{P}(i, \pi_v) \left(-\frac{2k-1-i}{2} \right)$ n'appartienne pas à l'image de (5.3.1). On en déduit alors que $HT(\pi_v, [\overleftarrow{i-1}]_{\pi_v}) \left(-\frac{2k-1-i}{2} \right)$ est un quotient de $j^{\geq ig, *} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ et donc que le germe en un point

géométrique de $X_{\mathcal{I}}^{-ig}$ admet un constituant de poids $2k - 1 - i$, de sorte que d'après l'hypothèse de récurrence sur le modèle local, on doit nécessairement avoir $i = s$.

Ainsi soit k minimal tel que $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$ n'appartienne pas à l'image de (5.3.1). Comme précédemment on en déduit alors que $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$, tout comme $\mathcal{P}(s, \pi_v)(-\frac{s-1}{2})$, est un quotient de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$.

- On en déduit en particulier que la monodromie sur $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ est d'ordre $\leq s - 1$ et donc, pour Π automorphe cohomologique pour ξ avec $\Pi_v \simeq \text{St}_s(\pi_v)$, la monodromie sur $H_{\eta_v, \xi}^0[\Pi^\infty]$ est d'ordre $\leq s - 1$ ce qui contredit le résultat principal de [14].
- On peut aussi raisonner sur la cohomologie de la variété de Shimura en étudiant la suite spectrale des cycles évanescents et plus particulièrement sa Π^∞ -composante isotypique pour Π automorphe avec $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$, Notons tout d'abord que la fibre en un point supersingulier de $h^0\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ admet $\pi_v[s]_D \otimes [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$ comme quotient de sorte que $H^0(h^0\Psi_{\mathcal{I}})[\Pi^{\infty, v}]$ admet $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$ comme sous-quotient. D'après le corollaire 5.0.10, pour tout $i > 0$, $H^i(h^{1-i}\Psi_{\mathcal{I}})[\Pi^{\infty, v}]$ n'admet pas $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$ comme sous-quotient de sorte que $H_\eta^0[\Pi^{\infty, v}]$ admet $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{2k-1-s}{2})$ comme sous-quotient, ce qui contredit le fait que $H_\eta^0[\Pi^\infty]$ est non nul si et seulement si Π est une représentation automorphe. □

5.3.2. Corollaire. — Avec les notations précédentes, on a une résolution

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow j_!^{\geq sg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{s-1-2t}{2}) \rightarrow \dots \\
 \dots \rightarrow j_!^{\geq (t+1)g} HT(\pi_v, [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{1}]_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{2-t}{2}) \rightarrow j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{1-t}{2}) \\
 \rightarrow \text{Fil}_S^t(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) / \text{Fil}^{t-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Remarque : on retrouve alors le calcul des faisceaux de cohomologie de [5] et en particulier le corollaire 4.5.7, i.e. que la suite spectrale de stratification dégénère en E_1 .

Références

- [1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [2] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [3] V.G. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.

- [4] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3) :573–629, 1999.
- [5] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [6] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [7] P. Deligne. Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ adique. In *SGA 4 $\frac{1}{2}$* .
- [8] L. Fargues, A. Genestier, and V. Lafforgue. *The isomorphism between Lubin-Tate and Drinfeld towers. (L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld.)*. Progress in Mathematics 262. Basel : Birkhäuser. xii, 406 p., 2008.
- [9] Peter Freyd. Abelian categories. 2003.
- [10] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [11] L. Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. In *Périodes p -adiques*, number 223 in Astérisque, 1994.
- [12] T. Ito. Hasse invariants for somme unitary Shimura varieties. *Math. Forsch. Oberwolfach report 28/2005*, pages 1565–1568, 2005.
- [13] D. Juteau. Modular Springer correspondence and decomposition matrices. *Thèse de l'Université Paris 7*, 2007.
- [14] R. Taylor and T. Yoshida. Compatibility of local and global Langlands correspondences. *J.A.M.S.*, 20 :467–493, 2007.
- [15] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.