GROUPE MIRABOLIQUE, STRATIFICATION DE NEWTON RAFFINÉE ET COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE

par

Boyer Pascal

Résumé. — Dans [**1**], on détermine les groupes de cohomologie des espaces de Lubin-Tate par voie globale en calculant les fibres des faisceaux de cohomologie du faisceau pervers des cycles évanescents Ψ d'une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor. L'ingrédient le plus complexe consiste à contrôler les flèches de deux suites spectrales calculant l'une les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, et l'autre ceux de Ψ. Dans cet article, nous contournons ces difficultés en utilisant la théorie classique des représentations du groupe mirabolique ainsi qu'un argument géométrique simple.

Abstract **(Mirabolic group, ramified Newton stratification and cohomology of Lubin-Tate spaces)**

In [**1**], we determine the cohomology of Lubin-Tate spaces globally using the comparison theorem of Berkovich by computing the fibers at supersingular points of the perverse sheaf of vanishing cycle Ψ of some Shimura variety of Kottwitz-Harris-Taylor type. The most difficult argument deals with the control of maps of the spectral sequences computing the sheaf cohomology of both Harris-Taylor perverse sheaves and those of Ψ. In this paper, we bypass these difficulties using the classical theory of representations of the mirabolic group and a simple geometric argument.

Table des matières

Classification mathématique par sujets **(2010).** — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

1. Introduction

Le résultat principal de [**1**] est la détermination de chacun des groupes de cohomologie à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, de la tour de Lubin-Tate. En utilisant le théorème de comparaison de Berkovich, la démonstration est de nature globale et consiste à calculer les germes en un point supersingulier des faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents $\Psi_{\mathcal{I}}$ en une place v d'un corps CM, F, d'une tour de variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor $X_{\mathcal{I}}$ indexée par l'ensemble $\mathcal{I}$ de ses niveaux. La preuve se déroule alors en deux temps relativement distincts :

— Les auteurs de [**4**] associent à une représentation irréductible ρ_v du groupe des inversibles $D_{v,h}^{\times}$ de l'algèbre à division centrale sur F_v d'invariant $1/h$, un système local $\mathcal{L}(\rho_v)$, dit d'Harris-Taylor, sur la strate de Newton $X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}^{=h}$ de la fibre spéciale en v de $X_{\mathcal{I}}$ et calculent la somme alternée de leurs groupes de cohomologies à support compact. Dans [**1**] on exploite ce calcul en exprimant les images des faisceaux pervers ${}^p j_!^{=h}\mathcal{L}(\rho_v)[d-h]$ et $\Psi_{\mathcal{I}}$ dans un groupe de Grothendieck de faisceaux pervers équivariants, en termes d'extensions intermédiaires de systèmes locaux d'Harris-Taylor sur les différentes strates de Newton. Il s'agit de la partie la plus simple de loc. cit., celle qui est contrôlée par la formule des traces.

— Dans un deuxième temps, on étudie les suites spectrales associées à la filtration par les poids de ces deux faisceaux pervers pour calculer les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{=h}\mathcal{L}(\rho_v)[d-h]$ et ceux de $\Psi_{\mathcal{I}}$. La partie la plus complexe de [**1**] consiste à contrôler les flèches de ces suites spectrales et au final, montrer « qu'elles sont le moins triviales possibles », au sens où dès que la source et le but d'une telle flèche partagent un sous-faisceau équivariant, cette flèche induit un isomorphisme sur ceux-ci.

Pour montrer ce fait, dans [**1**], on utilise une propriété de compatibilité à l'involution de Zelevinsky de la cohomologie des espaces de Lubin-Tate. Dans [**2**], on propose une autre démonstration plus simple conceptuellement mais aussi très lourde, reposant sur des calculs de groupes de cohomologie globaux et en utilisant le théorème de Lefschetz vache.

Ces deux preuves sont techniquement difficiles et ne permettent pas de réellement comprendre la raison profonde de la non trivialité de ces flèches. Le but premier de cet article est ainsi de proposer une nouvelle preuve simple et en un sens, naturelle. Plus précisément à partir de la première étape mentionnée ci-avant, nous utilisons tout d'abord, avec les notations du paragraphe suivant, le fait que l'inclusion

$$X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}} \setminus X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h+1}}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$$

est affine, cf. le lemme 5.2. Ensuite de la théorie classique des représentations induites du groupe mirabolique, rappelée au §4, on obtient, cf. les suites exactes courtes (6.1) et (6.3), une filtration, à deux crans, des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, fournissant une suite spectrale qui dégénère en E_1 et qui correspond au terme $E_2 = E_\infty$ de la suite spectrale de [**1**]. Autrement dit la détermination des flèches dans [**1**] est entièrement contrôlée par l'affinité de l'inclusion ci-dessus et la théorie des représentations du groupe mirabolique. Le même procédé appliqué au faisceau pervers des cycles évanescents fournit de la même façon, cf. la proposition 7.3, une filtration de celui-ci, dont la suite spectrale calculant ses faisceaux de cohomologie dégénère en E_1, cf. le corollaire 7.4, et coïncide avec le terme $E_2 = E_\infty$ de la suite spectrale de [**1**].

2. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples

Soit $F = F^+E$ un corps CM avec $E/\mathbb{Q}$ quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Pour v une place de F, on notera

— F_v le complété du localisé de F en v,

— $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de F_v,

— ϖ_v une uniformisante et

— q_v le cardinal du corps résiduel $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F, B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*_{|F}$ est la conjugaison complexe c. Pour $\beta \in B^{*=-1}$, on note $\sharp_\beta$ l'involution $x \mapsto x^{\sharp_\beta} = \beta x^* \beta^{-1}$ et $G/\mathbb{Q}$ le groupe de similitudes défini pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_\mathbb{Q} R)^\times \text{ tel que } gg^{\sharp_\beta} = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$. Si x est une place de $\mathbb{Q}$ décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times, \tag{2.1}$$

où, en identifiant les places de F^+ au dessus de x avec les places de F au dessus de y, $x = \prod_i z_i$ dans F^+.

Dans [**4**], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :

— si x est une place de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;

— les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

2.2. Notation. — *On fixe un nombre premier l non ramifié dans E et on note* Spl *l'ensemble des places v de F telles que $p_v := v_{|\mathbb{Q}} \neq l$ est décomposé dans F et $B_v^\times \simeq GL_d(F_v)$.*

Rappelons, cf. [**4**] bas de la page 90, qu'un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ est dit « assez petit » s'il existe une place x pour laquelle la projection de U^v sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité.

2.3. Notation. — *Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Pour $I \in \mathcal{I}$, on note $X_{I,\eta} \longrightarrow$ Spec F la variété de Shimura associée, dit de Kottwitz-Harris-Taylor.*

Remarque : pour tout $v \in \mathrm{Spl}$, la variété $X_{I,\eta}$ admet un modèle projectif $X_{I,v}$ sur $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_v$ de fibre spéciale X_{I,s_v}. Pour I décrivant $\mathcal{I}$, le système projectif $(X_{I,v})_{I \in \mathcal{I}}$ est naturellement muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$, où $\deg = \mathrm{val} \circ \mathrm{Art}^{-1}$ où $\mathrm{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

2.4. Notations. — *(cf.* [**1**] *§1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, la fibre spéciale géométrique $X_{I,\bar{s}_v}$ admet une stratification de Newton*

$$X_{I,\bar{s}_v} =: X^{\geq 1}_{I,\bar{s}_v} \supset X^{\geq 2}_{I,\bar{s}_v} \supset \cdots \supset X^{\geq d}_{I,\bar{s}_v}$$

où $X^{=h}_{I,\bar{s}_v} := X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v} - X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}$ est un schéma affine, lisse de pure dimension $d-h$ formé des points géométriques dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate est de rang h. Pour tout $1 \leq h < d$, nous utiliserons les notations suivantes :

$$i^h : X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}, \quad j^{\geq h} : X^{=h}_{I,\bar{s}_v} \hookrightarrow X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v},$$

ainsi que $j^{=h} = i^h \circ j^{\geq h}$.

Soit $\mathcal{G}(h)$ le groupe de Barsotti-Tate universel sur $X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}}$:

$$0 \to \mathcal{G}(h)^c \longrightarrow \mathcal{G}(h) \longrightarrow \mathcal{G}(h)^{et} \to 0$$

où $\mathcal{G}(h)^c$ (resp. $\mathcal{G}(h)^{et}$) est connexe (resp. étale) de dimension h (resp. $d-h$). Notons $\iota_{m_1} : (\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d \longrightarrow \mathcal{G}(h)[p^{m_1}]$ la structure de niveau universelle. Notons alors $(e_i(m_1))_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$.

2.5. Définition. — On introduit le sous-schéma fermé $X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}}$ de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ défini par la propriété que $\Big\{\iota_{m_1}(e_i(m_1)) :\ 1 \leq i \leq h\Big\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$.

Plus généralement étant donné $a \in GL_d(\mathcal{O}_v)/P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$ que l'on identifiera avec le sous-espace vectoriel $\langle a(e_1), \cdots, a(e_h)\rangle$ engendré par les images par a des h premiers vecteurs $e_1, \cdots, e_h$ de la base canonique de $\mathcal{O}_v^d$, on définit la strate *dite pure*[(1)] $X^{=h}_{I,\bar{s},a}$ comme le sous-schéma fermé tel que $\Big\{\iota_{m_1}(a(e_i(m_1)) :\ 1 \leq i \leq h\Big\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$, où $e_i(m_1)$ est l'image de e_i modulo $\mathcal{P}_v^{m_1}$.

Remarque : L'action de $GL_d(F_v)$ sur $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ donne la décomposition

$$X^{=h}_{I,\bar{s}_v} \simeq X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}} \times_{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n))} GL_d(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n)),$$

au sens où la strate $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,a}$ s'obtient comme l'image par a de $X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}}$.

2.6. Notation. — *On note $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ l'adhérence de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ dans $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}$ et*

$$j^{\geq h}_{\overline{1_h}} : X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}.$$

1. en comparaison des strates de la définition 5.1

3. Faisceaux pervers d'Harris-Taylor et des cycles évanescents

Fixons une place $v \in \mathrm{Spl}$. En utilisant un analogue des classiques variétés d'Igusa, les auteurs de [**4**] associent à toute représentation ρ_v de l'ordre maximal $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ de $D_{v,h}^\times$, un système local $\mathcal{L}(\rho_v)_{\overline{1_h}}$ sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ muni d'une action équivariante de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times P_{h,d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ telle que

— le sous-groupe unipotent de $P_{h,d}(F_v)$ agit trivialement et

— l'action du facteur $GL_h(F_v)$ de son Levi agit via $\mathrm{val} \circ \det : GL_h(F_v) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$.

On introduit alors la version induite de ces systèmes locaux

$$\mathcal{L}(\rho_v) := \mathcal{L}(\rho_v)_{\overline{1_h}} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v),$$

muni donc d'une action équivariante de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$.

3.1. Notation. — *La correspondance de Jacquet-Langlands permet de paramétrer les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations irréductibles de $D_{v,h}^\times$ à l'aide des représentations irréductibles cuspidales π_v de $GL_g(F_v)$ pour g un diviseur de $h = tg$, on écrit une telle représentation sous la forme $\pi_v[t]_D$.*

3.2. Notation. — *Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$et Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, on note*[(2)]*, cf. la première remarque de 2.1.3 de* [**1**],

$$\widetilde{HT}_{\overline{1_h}}(\pi_v, \Pi_t)(n) := \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1_h}} \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}-n}$$

le système local d'Harris-Taylor associé où

$$\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$$

est définie par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$ et

- *$GL_{tg}(F_v)$ agit diagonalement sur Π_t et sur $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1_h}} \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}-n}$ via son quotient $GL_{tg}(F_v) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$,*
- *le groupe de Weil W_v en v agit diagonalement sur $\mathbb{L}(\pi_v)$ et sur le facteur $\Xi^{\frac{tg-d}{2}-n}$ via, pour ce dernier, l'application* $\deg : W_v \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ *qui envoie les frobenius géométriques sur* 1.

On note aussi

$$HT_1(\pi_v, \Pi_t) := \widetilde{HT}_1(\pi_v, \Pi_t)[d - tg]$$

et

$$P(t, \pi_v)_{\overline{1_h}} := j^{=tg}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{1_h}}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$$

le faisceau pervers d'Harris-Taylor associé où $\mathbb{L}^\vee$ est la correspondance Langlands sur F_v. En ce qui concerne les versions induites on les notera sans l'indice 1, *i.e. $HT(\pi_v, \Pi_t)$ et $P(t, \pi_v)$.*

2. Lorsque $n = 0$, on le fera disparaitre des notations.

Remarque : on rappelle que π'_v est inertiellement équivalente à π_v si et seulement s'il existe un caractère $\zeta : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que

$$\pi'_v \simeq \pi_v \otimes (\zeta \circ \mathrm{val} \circ \det).$$

Les faisceau pervers $P(t,\pi_v)$ ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de π_v i.e. pour tout $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, les faisceaux pervers $P(t,\pi_v)$ et $P(t,\pi_v \otimes \chi)$, munis de leurs actions par corrrespondances, sont isomorphes. En particulier, en notant e_{π_v} le cardinal de la classe d'équivalence inertielle de π_v, on a

$$P(t,\pi_v) = e_{\pi_v} \mathcal{P}(t,\pi_v)$$

où $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ est un faisceau pervers équivariant simple. De la même façon, il existe un système local $\mathcal{HT}(\pi_v,\Pi_t)$ tel que $HT(\pi_v,\Pi_t) = e_{\pi_v}\mathcal{HT}(\pi_v,\Pi_t)$.

3.3. Définition. — Pour tout $I \in \mathcal{I}$, le faisceaux pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\eta_v,I}(\overline{\mathbb{Q}}_l[d-1])(\frac{d-1}{2})$ sur $X_{I,\bar{s}_v}$ sera noté Ψ_I. Le faisceau pervers de Hecke associé sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$ est noté $\Psi_{\mathcal{I}}$.

Dans [**1**], on décompose dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers équivariants sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$ relativement à l'action de Hecke et du groupe de Weil en v, le faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{I}}$ en termes des faisceaux pervers d'Harris-Taylor $\mathcal{P}(t,\pi_v)(n)$.

3.4. Notation. — *Pour $K^\bullet$ un complexe de faisceaux, on notera $\mathcal{H}^iK^\bullet$ sont i-ème faisceau de cohomologie.*

4. Deux représentations induites du groupe mirabolique

Le nouvel argument pour calculer les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor et du complexe des cycles évanescents, repose sur deux lemmes, le premier 4.4 de théorie des représentations du groupe mirabolique et le deuxième 5.2 de nature géométrique.

4.1. Définition. — Soit $P = MN$ un parabolique standard de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N. On note $\delta_P : P(F_v) \to \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ l'application définie par $\delta_P(h) = |\det(\mathrm{ad}(h)_{|\mathrm{Lie} N})|^{-1}$. Pour (π_1,V_1) et (π_2,V_2) des représentations de respectivement $GL_{n_1}(F_v)$ et $GL_{n_2}(F_v)$, et P_{n_1,n_1+n_2} le parabolique standard de $GL_{n_1+n_2}$ de Levi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ et de radical unipotent N,

$$\pi_1 \times \pi_2$$

désigne l'induite parabolique normalisée de $P_{n_1,n_1+n_2}(F_v)$ à $GL_{n_1+n_2}(F_v)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : GL_{n_1+n_2}(F_v) \to V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_{P_{n_1,n_1+n_2}}^{-1/2}(m)(\pi_1\otimes\pi_2)(m)\Big(f(g)\Big), \quad \forall n \in N,\ \forall m \in M(F_v),\ \forall g \in GL_{n_1+n_2}(F_v),$$

ou encore en terme d'induite classique

$$\pi_1 \times \pi_2 \simeq \mathrm{ind}_{P_{n_1,n_1+n_2}(F_v)}^{GL_{n_1+n_2}(F_v)} \pi_1\{\frac{n_2}{2}\} \otimes \pi_2\{-\frac{n_1}{2}\}. \tag{4.2}$$

Remarque : Rappelons qu'une représentation π de $GL_n(F_v)$ est dite *cuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

4.3. Notations. — *Soient g un diviseur de $d = sg$ et π_v une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F_v)$.*

— *L'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de*

$$\pi_v\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi_v\{\frac{3-s}{2}\} \times \cdots \times \pi_v\{\frac{s-1}{2}\}$$

est noté $\mathrm{St}_s(\pi_v)$ *(resp.* $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$*).*

— *L'unique sous-espace irréductible de*

$$\mathrm{St}_t(\pi_v\{\frac{-s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})$$

est noté $LT_{\pi_v}(t-1,s)$.

4.4. Lemme. — *Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, alors en tant que représentation du parabolique $P_{1,(t+s)g}(F_v)$, on a des isomorphismes*

$$\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\})_{|P_{1,tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\}) \simeq LT_{\pi_v}(t-1,s)_{|P_{1,(t+s)g}(F_v)},$$

et

$$\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})_{|P_{1,sg}(F_v)} \simeq LT_{\pi_v}(t,s-1)_{|P_{1,(t+s)g}(F_v)},$$

où dans le premier isomorphisme, l'induite parabolique est relativement à

$$\begin{pmatrix} P_{1,tg} & U \\ 0 & GL_{sg} \end{pmatrix}$$

alors que dans le deuxième, il s'agit de l'induite à support compact relativement à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{sg-1} \\ 0 & GL_{tg} & U \\ 0 & 0 & GL_{sg-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque : si dans le lemme précédent, on remplace la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_t(\pi_v)$ par $LT_{\pi_v}(\delta, t-\delta-1)$, le membre de droite dans le premier isomorphisme devient $LT_{\pi_v}(\delta, t-\delta-1+s)$.

Démonstration. — Pour $n \geq 2$, on note $M_n(F_v)$ le sous-groupe de $P_{1,n}(F_v)$ dont le premier coefficient en haut à gauche est égal à 1. Quitte à tordre les actions par $g \mapsto \sigma({}^t g^{-1})\sigma^{-1}$, où σ est la matrice de permutation associé au cycle $(12\cdots n)$, on reconnait le traditionnel groupe mirabolique dont le radical unipotent $V_{n-1}(F_v)$ est abélien isomorphe à $(F_v^\times)^{n-1}$.

On rappelle cf. par exemple [**5**] §III.1.10, que

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})_{|M_{sg}(F_v)} \\ \longrightarrow \Big(\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})\Big)_{|M_{(t+s)g}(F_v)} \\ \longrightarrow \mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\})_{|M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\}) \to 0, \end{aligned}$$

où le deuxième terme est l'induite parabolique relativement à $\begin{pmatrix} M_{tg} & U \\ 0 & GL_{sg} \end{pmatrix}$ et le premier, l'induite à support compact relativement à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{sg-1} \\ 0 & GL_{tg} & U \\ 0 & 0 & GL_{sg-1} \end{pmatrix}$. En outre pour tout $k \geq 0$, la dérivée d'ordre k de $\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\})_{|M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})$ est, cf. [**5**] p153, donnée par celle de $\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\})_{|M_{tg}(F_v)}$ induite avec $\mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})$, i.e.

$$\Big(\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\})_{|M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})\Big)^{(k)} \simeq \Big(\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\})_{|M_{tg}(F_v)}\Big)^{(k)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\}).$$

Rappelons que la dérivée d'ordre k de $\mathrm{St}_t(\pi_v)$ est nulle sauf si k est de la forme δg avec $0 \leq \delta \leq t$ auquel cas elle est isomorphe à $\mathrm{St}_{t-\delta}(\pi_v\{\frac{\delta}{2}\})$. Ainsi en raisonnant par récurrence sur t, on en déduit que $\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\})_{|M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})$ et $LT_{\pi_v}(t-1,s)_{|M_{(t+s)g}(F_v)}$ ont les mêmes dérivées et qu'elles sont toutes d'ordre $\leq tg$. Considérons alors le morphisme composé

$$\begin{aligned} LT_{\pi_v}(t-1,s)_{|M_{(t+s)g}(F_v)} \hookrightarrow \Big(\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})\Big)_{|M_{(t+s)g}(F_v)} \\ \twoheadrightarrow \mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\})_{|M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\}) \end{aligned}$$

et notons $K \hookrightarrow \mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})_{|M_{sg}(F_v)}$ son noyau. D'après [**6**] proposition 5.3 et corollaire 6.8, $\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})_{|M_{sg}(F_v)}$ est homogène, i.e. tout sous-espace $M_{(t+s)g}(F_v)$-équivariant irréductible a une dérivée d'ordre $(t+1)g$, or on vient de voir que les dérivées de $LT_{\pi_v}(t-1,s)_{|M_{(t+s)g}(F_v)}$ sont d'ordre $\leq tg$, de sorte que

$$LT_{\pi_v}(t-1,s) \hookrightarrow \mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})_{|M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}).$$

Comme ces deux termes ont les mêmes dérivées, cette injection est un isomorphisme. □

5. Stratification de Newton raffinée

5.1. Définitions. — *Pour tout $h_0 \leq h$, on introduit les strates « non pures » suivantes*

$$X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0}}} := X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v} \cap X^{\geq h_0}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0}}},$$

ainsi que

$$X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0}}\backslash\overline{1_{h_0+1}}} := X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0}}} \setminus X^{\geq h'}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0+1}}} \qquad \text{où } \left\{ \begin{array}{ll} h'=h & \text{si } h_0<h \\ h'=h+1 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

On notera alors

$$j^{\geq h}_{\overline{1_{h_0}}\backslash\overline{1_{h_0+1}}} : X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0}}\backslash\overline{1_{h_0+1}}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0}}}, \qquad i^{h\leq +1}_{\overline{1_{h_0}},\overline{1_{h_0+1}}} : X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0+1}}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0}}},$$

et $j^{=h}_{\overline{1_{h_0}}\backslash\overline{1_{h_0+1}}} := i^{h}_{\overline{1_{h_0}}} \circ j^{\geq h}_{\overline{1_{h_0}}\backslash\overline{1_{h_0+1}}}$. *Dans le cas* $h_0=h$*, on notera simplement*

$$X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\neq 1} := X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}}}$$

ainsi que $j^{=h}_{\neq 1} := j^{=h}_{\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}}}$. *On utilisera aussi la notation*

$$i^{h+1\leq +0}_{\overline{1_{h_0}},\overline{1_{h_0+1}}} : X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0+1}}} \hookrightarrow X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0}}}.$$

5.2. Lemme. — *L'inclusion ouverte* $j^{\geq h}_{\neq 1}$ *est affine.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{G}(h)$ le groupe de Barsotti-Tate universel sur $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$:

$$0 \to \mathcal{G}(h)^c \longrightarrow \mathcal{G}(h) \longrightarrow \mathcal{G}(h)^{et} \to 0$$

où $\mathcal{G}(h)^c$ (resp. $\mathcal{G}(h)^{et}$) est connexe (resp. étale) de dimension h (resp. $d-h$). Notons

$$\iota_{m_1} : (\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d \longrightarrow \mathcal{G}(h)[p^{m_1}]$$

la structure de niveau universelle. Notant $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ la base canonique de $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$, on rappelle alors que $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ est défini par la propriété que $\Big\{\iota_{m_1}(e_i) :\ 1\leq i\leq h\Big\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$.

Ainsi pour tout $\operatorname{Spec} A \longrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$, le fermé $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h+1}}} \times_{X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}} \operatorname{Spec} A$ est donné par l'annulation de $\iota(e_{h+1})$, d'où le résultat. □

5.3. Notation. — *Pour* $h_0<h$ *et un système local d'Harris-Taylor* $HT(\pi_v,\Pi_t)$ *sur* $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$*, avec donc* $h=tg$*, on notera*

$$HT_{\neq\overline{1_{h_0}}}(\pi_v,\Pi_t)$$

la restriction de $HT(\pi_v,\Pi_t)$ *à* $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\neq\overline{1_{h_0}}}$. *Lorsque* $h=h_0$*, on notera plus simplement* $HT_{\neq 1}(\pi_v,\Pi_t)$.

Fixons à présent une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ et notons $s=\lfloor \frac{d}{g} \rfloor$. Rappelons l'énoncé suivant de [**1**] 4.5.1 dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke [3]

$$j^{=tg}_{\overline{1_{tg}},!}HT_{\overline{1_{tg}}}(\pi_v,\Pi_t) = \sum_{i=t}^{s} {}^p j^{=ig}_{\overline{1_{tg}},!*}HT_{\overline{1_{tg}}}\Big(\pi_v,\Pi_t\{(i-t)\frac{g-1}{2}\}\otimes \mathrm{St}_{i-t}(\pi_v\{-t\frac{g-1}{2}\})\Big)(\frac{i-t}{2}), \quad (5.4)$$

où on utilise la notation

$${}^p j^{=ig}_{\overline{1_{tg}},!*}HT_{\overline{1_{tg}}}(\pi_v,\cdots) := \mathrm{ind}_{P_{tg,ig,d}(F_v)}^{P_{tg,d}(F_v)}\, {}^p j^{=ig}_{\overline{1_{ig}},!*}HT_{\overline{1_{ig}}}(\pi_v,\cdots).$$

Dans [**1**], pour calculer les germes des faisceaux de cohomologie de ${}^p j^{=tg}_{\overline{1_{tg}},!*}HT_{\overline{1_{tg}}}(\pi_v,\Pi_t)$, on procède comme suit.

(a) On considère tout d'abord la filtration par les poids de $j^{=tg}_{\overline{1_{tg}},!}HT_{\overline{1_{tg}}}(\pi_v,\Pi_t)$, soit

$$\mathrm{Fil}^{t-s}(\pi_v,\Pi_t)\subset\cdots\subset \mathrm{Fil}^{-1}(\pi_v,\Pi_t)\subset \mathrm{Fil}^0(\pi_v,\Pi_t) = j^{=tg}_{\overline{1_{tg}},!}HT_{\overline{1_{tg}}}(\pi_v,\Pi_t)$$

dont les gradués sont

$$\mathrm{gr}^{-k}(\pi_v,\Pi_t)\simeq {}^p j^{=(t+k)g}_{\overline{1_{tg}},!*}HT_{\overline{1_{tg}}}(\pi_v,\Pi_t\{k\frac{g-1}{2}\}\otimes \mathrm{St}_k(\pi_v\{-t\frac{g-1}{2}\}))(-\frac{k}{2})\Big).$$

(b) On dispose alors d'une suite spectrale faisceautique

$$E_1^{p,q} = \mathcal{H}^{p+q}\mathrm{gr}^{-p}(\pi_v,\Pi_t)\Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}j^{=tg}_{1,!}HT_1(\pi_v,\Pi_t). \quad (5.5)$$

Pour tout point géométrique z de $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$, la fibre en z de l'aboutissement de cette suite spectrale est connue, nulle dès que $h>tg$. En raisonnant par récurrence les fibres en z des $E_1^{p,q}$ sont aussi connues pour tout (p,q) si $p>0$:

— si h n'est pas de la forme $(t+\delta)g$ alors les fibres en z de $E_1^{p,q}$ pour $p>0$ sont toutes nulles ;

— pour $h=(t+\delta)g$, elles sont nulles sauf pour $q=(t+\delta)g-d-\delta$.

(c) Ainsi pour calculer les fibres des faisceaux de cohomologie de $j^{=tg}_{1,!*}HT_1(\pi_v,\Pi_t)$, on est ramené à étudier les flèches $d_1^{p,q}$ pour $q=(t+\delta)g-d-\delta$ et $p>0$, et à montrer qu'elles sont non nulles ce qui suffit à les caractériser.

Le but des paragraphes suivant est de proposer une nouvelle preuve élémentaire utilisant simplement les applications $j^{=h}_{\neq 1}$ et la théorie des représentations du groupe mirabolique.

6. Faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor

Commençons par poser $h:=tg$ et

$$P(\pi_v,\Pi_t) := i^{h+1}_{*}\,{}^p\mathcal{H}^{-1}i^{h+1,*}_{\overline{1_h}}\Big({}^p j^{=h}_{\overline{1_h},!*}HT_{\overline{1_h}}(\pi_v,\Pi_t)\Big),$$

de sorte que

$$0\to P(\pi_v,\Pi_t)\longrightarrow j^{=h}_{\overline{1_h},!}HT_{\overline{1_h}}(\pi_v,\Pi_t)\longrightarrow {}^p j^{=h}_{\overline{1_h},!*}HT_{\overline{1_h}}(\pi_v,\Pi_t)\to 0. \quad (6.1)$$

3. pour les torsions, cf. la formule (4.2)

6.2. Lemme. — *Le complexe* $i^{h+1,*}_{\overline{1_{h+1}}} P(\pi_v,\Pi_t)$ *est pervers.*

Démonstration. — Notons $F := {}^p j^{\geq h}_{!*} HT_{\overline{1_h}}(\pi_v,\Pi_t)$ de sorte qu'il s'agit de montrer que

$$i^{h+1\leq +0,*}_{\overline{1_h},\overline{1_{h+1}}}\Big({}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F\Big)$$

est pervers. Pour ce faire, on utilise la suite spectrale

$$E_2^{r,s} = {}^p\mathcal{H}^r i^{h+1\leq +0,*}_{\overline{1_h},\overline{1_{h+1}}}\Big({}^p\mathcal{H}^s i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F\Big) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{r+s} i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h},\overline{1_{h+1}}} F.$$

Considérons le triangle distingué

$$j^{\geq h}_{\overline{1_h},!} j^{\geq h,*}_{\overline{1_h}} F \longrightarrow F \longrightarrow i^{h\leq +1}_{\overline{1_h},*} i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F \rightsquigarrow .$$

Comme $j^{\geq h}_{\overline{1_h}}$ est affine, alors $j^{\geq h}_{\overline{1_h},!} j^{\geq h,*}_{\overline{1_h}} F$ est pervers et la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué précédent s'écrit

$$0 \to i^{h\leq +1}_{\overline{1_h},*} {}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F \longrightarrow {}^p j^{\geq h}_{\overline{1_h},!} j^{\geq h,*}_{\overline{1_h}} F \longrightarrow F \longrightarrow i^{h\leq +1}_{\overline{1_h},*} {}^p\mathcal{H}^0 i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F \to 0,$$

et donc en particulier, ${}^p\mathcal{H}^s i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F$ est nul pour tout $s < -1$. La surjectivité $j^{\geq h}_{\overline{1_h},!} j^{\geq h,*}_{\overline{1_h}} F \twoheadrightarrow F$, implique aussi la nullité pour $s = 0$. Ainsi la suite spectrale précédente dégénère en E_2 avec

$${}^p\mathcal{H}^r i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h},\overline{1_{h+1}}} F \simeq {}^p\mathcal{H}^{r+1} i^{h+1\leq +0,*}_{\overline{1_h},\overline{1_{h+1}}}\Big({}^p\mathcal{H}^{-1} i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h}} F\Big).$$

De la même façon, comme $j^{\geq h}_{\neq 1}$ est affine, ${}^p\mathcal{H}^r i^{h\leq +1,*}_{\overline{1_h},\overline{1_{h+1}}} F$ est nul pour $r < -1$, d'où le résultat. □

En particulier, on a donc une suite exacte courte de faisceaux pervers

$$0 \to j^{=h+1}_{\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}},!} j^{=h+1,*}_{\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}}} P(\pi_v,\Pi_t) \longrightarrow P(\pi_v,\Pi_t) \longrightarrow i^{h+1}_{\overline{1_{h+1}},*} {}^p i^{h+1,*}_{\overline{1_{h+1}}} P(\pi_v,\Pi_t) \to 0. \qquad (6.3)$$

6.4. Proposition. — *(cf. aussi le lemme B.3.3 de* [**3**]*)*
Avec les notations précédentes on a

$$i^{tg+1}_{\overline{1_{tg+1}},*} {}^p i^{tg+1,*}_{\overline{1_{tg+1}}} P(\pi_v,\Pi_t) \simeq {}^p j^{=(t+1)g}_{\overline{1_{tg+1}},!*} HT_{\overline{1_{tg+1}}}(\pi_v, \Pi_t\{\frac{g-1}{2}\} \otimes (\pi_v)_{|P_{1,g}(F_v)}\{-t\frac{g-1}{2}\})(\frac{1}{2}).$$

Remarque : rappelons que le terme de droite de l'isomorphisme de la proposition précédente est une notation pour

$$\mathrm{ind}_{P_{tg,tg+1,(t+1)g,d}(F_v)}^{P_{tg,tg+1,d}(F_v)} {}^p j^{=(t+1)g}_{\overline{1_{(t+1)g}},!*} HT_{\overline{1_{(t+1)g}}}(\pi_v, \Pi_t\{\frac{g-1}{2}\} \otimes (\pi_v)_{|P_{1,g}(F_v)}\{-t\frac{g-1}{2}\})(\frac{1}{2}).$$

Avant de donner la preuve de cette proposition, commençons par deux corollaires.

6.5. Corollaire. — *Soient* $h_0 \geq h = tg$ *et* z *un point géométrique de* $X^{=h_0}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$. *Le germe en* z *du* i*-ème faisceau de cohomologie de* ${}^p j^{=tg}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{1_h}}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$ *est*

— *nul si* (h,i) *n'est pas de la forme* $\big((t+\delta)g, (t+\delta)g - d - \delta\big)$ *avec* $(t+\delta)g \leq d$,

— *et sinon il est isomorphe au germe en* z *de* $HT_{\overline{1_h}}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v\{\delta\frac{g-1}{2}\})\otimes\mathrm{Speh}_\delta(\pi_v\{-t\frac{g-1}{2}\}))$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur t de s à 1. Pour $t=s$, on a ${}^p j^{=tg}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{1_h}}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \simeq {}^p j^{=tg}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{1_h}}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$ d'où le résultat. Supposons alors le résultat acquis au rang $t+1$. D'après (6.1), le germe en z du i-ème faisceau de cohomologie de ${}^p j^{=tg}_{\overline{1_h},!*} HT_{\overline{1_h}}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$ est isomorphe à celui du $(i+1)$-ème de $P(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$, lequel d'après (6.1) et la proposition précédente est isomorphe à celui du $(i+1)$-ème faisceau de cohomologie de ${}^p j^{=(t+1)g}_{\overline{1_{tg+1}},!*} HT_{\overline{1_{tg+1}}}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v\{\frac{g-1}{2}\}) \otimes (\pi_v)_{P_{1,g}(F_v)}\{-t\frac{g-1}{2}\})(\frac{1}{2})$, lequel d'après l'hypothèse de récurrence et le premier isomorphisme du lemme 4.4 pour $t=1$ et $s=\delta-1$, vérifie bien les deux tirets de l'énoncé. □

Remarque : une autre façon d'énoncer le résultat précédent consiste à dire que les flèches de la suite spectrale (5.5) sont « le moins triviales possible ».

6.6. Corollaire. — *Soit $h_0 = t_0 g \leq h = tg$ avec $1 \leq t < s$. On a alors la suite exacte courte*

$$0 \to {}^p j^{=(t+1)g}_{\overline{1_{h_0+1}},!*} HT_{\overline{1_{h_0+1}}}\Big(\pi_v, \Pi_{t_0}\{\frac{g-1}{2}\} \otimes \mathrm{St}_{t+1-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\})_{P_{1,(t+1-t_0)g}(F_v)}\Big)(\frac{1}{2})$$
$$\longrightarrow j^{=tg}_{\overline{1_{h_0}}\setminus\overline{1_{h_0+1}},!} j^{=tg,*}_{\overline{1_{h_0}}\setminus\overline{1_{h_0+1}}}\Big({}^p j^{=tg}_{\overline{1_{h_0}}!*} HT_{\overline{1_{h_0}}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\}))\Big)$$
$$\longrightarrow {}^p j^{=tg}_{\overline{1_{h_0}}\setminus\overline{1_{h_0+1}},!*} HT_{\overline{1_{h_0}}\setminus\overline{1_{h_0+1}}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\})) \to 0.$$

Remarque : en ce qui concerne les décalages, et notamment où est passé le $\frac{g-1}{2}$ qui s'applique sur $\Pi_{t_0} \otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\})$, rappelons, cf. (4.2), que

$$\mathrm{ind}_{P_{(t-t_0)g,(t-t_0+1)g}(F_v)}^{GL_{(t-t_0+1)g}(F_v)} \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{\frac{g-1}{2}\}) \otimes \pi_v\{-(t-t_0)\frac{g-1}{2}\} \twoheadrightarrow \mathrm{St}_{t-t_0+1}(\pi_v).$$

Démonstration. — Comme

$${}^p j^{=tg}_{\overline{1_{h_0}}\setminus\overline{1_{h_0+1}},!*} j^{=tg,*}_{\overline{1_{h_0}}\setminus\overline{1_{h_0+1}}}\Big({}^p j^{=tg}_{\overline{1_{h_0}}!*} HT_{\overline{1_{h_0}}}(\pi_v,, \Pi_{t_0} \otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\}))\Big) \simeq$$
$${}^p j^{=tg}_{\overline{1_{h_0}}\setminus\overline{1_{h_0+1}},!*} HT_{\overline{1_{h_0}}\setminus\overline{1_{h_0+1}}}(\pi_v,, \Pi_{t_0} \otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\})),$$

il s'agit simplement d'identifier

$$i^{tg+1}_{\overline{1_{h_0+1}},*} {}^p\mathcal{H}^{-1} i^{tg+1,*}_{\overline{1_{h_0+1}}}\Big({}^p j^{=tg}_{\overline{1_{h_0}}!*} HT_{\overline{1_{h_0}}}(\pi_v,, \Pi_{t_0} \otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\}))\Big) \tag{6.7}$$

avec le premier terme de la suite exacte courte de l'énoncé. La preuve se déroule en deux temps :

(i) on construit tout d'abord une surjection de (6.7) vers le faisceau pervers de l'énoncé

(ii) et on vérifie dans un deuxième temps que les faisceaux de cohomologie de ces deux faisceaux pervers possèdent les mêmes germes en tout point géométrique.

(i) Pour le premier point notons tout d'abord que d'après (5.4), on a [4]

$$j^{=tg}_{\overline{1_{h_0}},!}HT_{\overline{1_{h_0}}}(\pi_v,\Pi_{t_0}\otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\}))=\sum_{i=t}^{s} {}^pj^{=ig}_{\overline{1_{h_0}},!*}HT_{\overline{1_{h_0}}}\Big(\pi_v,$$
$$\Pi_{t_0}\{(i-t)\frac{g-1}{2}\}\otimes\Big(\mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-\frac{i-t}{2}\})\times \mathrm{St}_{i-t}(\pi_v\{\frac{t-t_0}{2}\})\Big)\{-t_0\frac{g-1}{2}\}\Big)(\frac{i-t}{2}).$$

En utilisant la filtration par les poids et la surjection

$$\mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-\frac{i-t}{2}\})\times \mathrm{St}_{i-t}(\pi_v\{\frac{t-t_0}{2}\})\twoheadrightarrow \mathrm{St}_{i-t_0}(\pi_v),$$

on obtient une surjection

$$\begin{aligned}{}^p\mathcal{H}^{-1}i^{tg+1,*}_{\overline{1_{h_0}}}\Big({}^pj^{=tg}_{\overline{1_{h_0}},!*}HT_{\overline{1_{h_0}}}(\pi_v,,\Pi_{t_0}\otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\}))\Big)\twoheadrightarrow\\ {}^pj^{=(t+1)g}_{\overline{1_{h_0}},!*}HT_{\overline{1_{h_0}}}(\pi_v,,\Pi_{t_0}\{\frac{g-1}{2}\}\otimes \mathrm{St}_{t+1-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\}))(\frac{1}{2})\end{aligned}\qquad(6.7)$$

ce qui, après par application du foncteur ${}^pi^{h+1\leq +0,*}_{\overline{1_{h_0}},\overline{1_{h_0+1}}}$, fournit la surjection cherchée.
(ii) Les germes des faisceaux de cohomologie de

$$A:={}^pj^{=(t+1)g}_{\overline{1_{h_0+1}},!*}HT_{\overline{1_{h_0+1}}}\Big(\pi_v,\Pi_{t_0}\{\frac{g-1}{2}\}\otimes \mathrm{St}_{t+1-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\})_{P_{1,(t+1-t_0)g}(F_v)}\Big)(\frac{1}{2})$$

sont donnés par le corollaire précédent de même que ceux de

$$B:={}^pj^{=tg}_{\overline{1_{h_0}}\backslash\overline{1_{h_0+1}},!*}HT_{\overline{1_{h_0}}\backslash\overline{1_{h_0+1}}}\Big(\pi_v,\Pi_{t_0}\otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\})\Big).$$

Il s'agit alors de vérifier, qu'à décalage d'un indice près, pour tout point géométrique z de $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0+1}}}$, on obtient la même chose. Pour ce qui concerne les conditions d'annulation, on vérifie aisément qu'elles sont les mêmes. Soit alors z un point géométrique de $X^{=(t+\delta)g}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{(t+\delta)g}}}$, d'après le corollaire précédent.

— La fibre en z du faisceau de cohomologie d'indice $(t+\delta)g-d-\delta$ de B se calcule par induction à partir de celle de ${}^pj^{=tg}_{a,!*}HT_a\Big(\pi_v,\Pi_{t_0}\otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\})\Big)$ où a est le sous-espace vectoriel de F_v^d engendré par les vecteurs $e_1,\cdots,e_{h_0},e_{h_0+1},\cdots,e_{h+1}$ de la base canonique. D'après le corollaire précédent, la fibre en z de $\mathcal{H}^{(t+\delta)g-d-\delta}{}^pj^{=tg}_{a,!*}HT_a\Big(\pi_v,\Pi_{t_0}\otimes \mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\})\Big)$ est isomorphe à

$$\Pi_{t_0}\{\delta\frac{g-1}{2}\}\otimes\Big(\mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{\delta\frac{g-1}{2}\}\otimes\Big(\mathrm{Speh}_\delta(\pi_v\{-(t-t_0)\frac{g-1}{2}\})\Big)_{|P_{1,\delta g}(F_v)}\Big)\{-t_0\frac{g-1}{2}\}$$

4. cf. la remarque précédente pour calculer les décalages

relativement au Levi

$$\begin{pmatrix} GL_{t_0g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GL_{(t-t_0)g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GL_{\delta g-1} \end{pmatrix}$$

de $GL_{(t+\delta)g}$. En induisant à $P_{tg_0,t_0g+1,(t+\delta)g}(F_v)$, on obtient que la fibre en z de $\mathcal{H}^{(t+\delta)g-d-\delta}B$ est isomorphe à

$$\Pi_{t_0}\{\delta\frac{g-1}{2}\} \otimes \Big(\mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-\frac{\delta}{2}\}) \times \big(\mathrm{Speh}_\delta(\pi_v\{\frac{t-t_0}{2}\})\big)_{|P_{1,\delta g}(F_v)}\Big)\{-t_0\frac{g-1}{2}\}$$

et donc d'après le deuxième isomorphisme du lemme 4.4, à

$$\Pi_{t_0}\{\delta\frac{g-1}{2}\} \otimes LT_{\pi_v}(t-t_0,\delta-1)_{|P_{1,(t-t_0+\delta)g}(F_v)}\{-t_0\frac{g-1}{2}\}.$$

— La fibre en z de $\mathcal{H}^{(t+1+\delta-1)g-d-\delta+1}A$ est d'après le corollaire précédent isomorphe à

$$\Pi_{t_0}\{\delta\frac{g-1}{2}\}\otimes\Big(\big(\mathrm{St}_{t-t_0+1}(\pi_v\{-\frac{\delta-1}{2}\})\big)_{P_{1,(t+1-t_0)g}(F_v)}\times\mathrm{Speh}_{\delta-1}(\pi_v\{\frac{t-t_0+1}{2}\})\Big)\{-t_0\frac{g-1}{2}\}$$

lequel d'après le premier isomorphisme du lemme 4.4 est isomorphe à

$$\Pi_{t_0}\{\delta\frac{g-1}{2}\} \otimes LT_{\pi_v}(t-t_0,\delta-1)_{|P_{1,(t-t_0+\delta)g}(F_v)}\{-t_0\frac{g-1}{2}\}.$$

Ainsi puisque la fibre en z de $\mathcal{H}^iB$ est isomorphe à celle de

$$\mathcal{H}^{i+1}\Big({}^p\mathcal{H}^{-1}i^{tg+1,*}_{\overline{1_{h_0}}}\big({}^pj^{=tg}_{\overline{1_{h_0}},!*}HT_{\overline{1_{h_0}}}(\pi_v,,\Pi_{t_0}\otimes\mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-t_0\frac{g-1}{2}\}))\big)\Big),$$

on en déduit donc que le noyau de la surjection (6.7) est un faisceau pervers dont les fibres en z de ses faisceaux de cohomologie sont nulles. Par symétrie, le résultat est valable pour tout point géométrique de $X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h_0+1}}}$ de sorte que ce noyau est nul, et la surjection (6.7) est en fait un isomorphisme, d'où le résultat. □

Démonstration. — de la proposition 6.4. On raisonne par récurrence sur t de s à 1. Le cas $t=s$ étant trivial puisque $P(\pi_v,\Pi_s)$ est nul, on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $t+1$. Partons de l'égalité de [**1**] 4.5.1 rappelée plus haut en (5.4) :

$$P(\pi_v,\Pi_t)=\sum_{i=t+1}^{s} j^{=ig}_{\overline{1_h},!*}HT_{\overline{1_h}}\Big(\pi_v,\Pi_t\{(i-t)\frac{g-1}{2}\}\otimes\mathrm{St}_{i-t}(\pi_v\{-t\frac{g-1}{2}\})\Big)(\frac{i-t}{2}). \quad (6.8)$$

On peut alors appliquer le corollaire précédent et calculer, en utilisant l'exactitude du foncteur $j^{=tg}_{\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}},!}j^{=tg,*}_{\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}}}$, l'image, dans le groupe de Grothendieck correspondant, de $P(\pi_v,\Pi_t)$

par ce foncteur, soit

$$j^{=tg}_{\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}},!}j^{=tg,*}_{\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}}}P(\pi_v,\Pi_t)=\sum_{i=t+1}^{s-1}$$
$${}^pj^{=ig}_{\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}},!*}HT_{\overline{1_h}\backslash\overline{1_{h+1}}}(\pi_v,\Pi_t\{(i-t)\frac{g-1}{2}\}\otimes \mathrm{St}_{i-t}(\pi_v\{-t\frac{g-1}{2}\})(\frac{i-t}{2})+$$
$${}^pj^{=(i+1)g}_{\overline{1_{h+1}},!*}HT_{\overline{1_{h+1}}}(\pi_v,\Pi_t\{(i+1-t)\frac{g-1}{2}\}\otimes \mathrm{St}_{i+1-t}(\pi_v\{-t\frac{g-1}{2}\}))(\frac{i+1-t}{2}).$$

Le résultat s'obtient alors, d'après (6.3), en soustrayant à l'égalité (6.8) l'égalité précédente. □

7. Faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents

En ce qui concerne les fibres des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$, on peut mener le même raisonnement. Rappelons qu'en notant

$$\bar{j}:X_{\mathcal{I},\bar\eta_v}\hookrightarrow X_{\mathcal{I}}\hookleftarrow X_{\mathcal{I},\bar s_v}:i,$$

où $\bar{j}_!={}^p\bar{j}_!$ et $\bar{j}_*={}^p\bar{j}_*$, le complexe des cycles évanescents est ${}^p\mathcal{H}^{-1}i^*\bar{j}_*\bar{\mathbb{Q}}_l$. Ainsi en utilisant que l'inclusion

$$\bar{j}^{\geq 1}_{\neq\bar 1_1}:X_{\mathcal{I},\bar\eta}-X^{\geq 1}_{\mathcal{I},\bar s_v,\bar 1_1}\hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar\eta}$$

est affine, exactement les mêmes arguments que ceux du lemme 6.2 montrent que $i^{1,*}_{\bar 1_1}\Psi_{\mathcal{I}}$ est pervers, ce qui donne la suite exacte courte

$$0\rightarrow j^{\geq 1}_{\neq\bar 1_1,!}j^{\geq 1,*}_{\neq\bar 1_1}\Psi_{\mathcal{I}}\longrightarrow\Psi_{\mathcal{I}}\longrightarrow i^1_{\bar 1_1,*}{}^p\mathcal{H}^0i^{1,*}_{\bar 1_1}\Psi_{\mathcal{I}}\rightarrow 0. \tag{7.1}$$

D'après [**1**], l'image de $\Psi_{\mathcal{I}}$ dans le groupe de Grothendieck est déterminée via la formule des traces. Afin d'exprimer le résultat, il est tout d'abord plus simple de décomposer $\Psi_{\mathcal{I}}$ comme dans [**1**] sous la forme

$$\Psi_{\mathcal{I}}\simeq\bigoplus_{\pi_v}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$$

où π_v décrit les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour $1\leq g\leq d$. En posant $s=\lfloor\frac{d}{g}\rfloor$, dans le groupe de Grothendieck adéquat, on a alors, cf. [**1**] proposition 4.1.4 ou corollaire 5.4.2

$$\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}=\sum_{k=1-s}^{s-1}\sum_{\substack{|k|<t\leq s\\ t\equiv k-1 \mod 2}}\mathcal{P}(t,\pi_v)(-\frac{k}{2}). \tag{7.2}$$

7.3. Proposition. — *(cf. aussi la proposition B.3.4 de* [**3**]*)*
Avec les notations précédentes, on a

$$i^1_{\bar 1_1,*}{}^p\mathcal{H}^0i^{1,*}_{\bar 1_1}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}=\sum_{k=1}^{s}{}^pj^{=kg}_{\overline{1_1},!*}HT_{\overline{1_1}}(\pi_v,\mathrm{St}_k(\pi_v)_{|P_{1,kg}(F_v)})(\frac{1-k}{2}).$$

Démonstration. — Les arguments sont similaires à ceux de la proposition 6.4 en utilisant le corollaire 6.6 avec $h_0+1=1$ en convenant que

$$X^{=0}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_0}} := X_{\mathcal{I},\bar{\eta}_v}.$$

On applique ainsi le foncteur $j^{\geq 1}_{\neq \overline{1}_1,!} j^{\geq 1,*}_{\neq \overline{1}_1}$ à l'égalité (7.2), ce qui donne d'après le corollaire 6.6

$$j^{\geq 1}_{\neq \overline{1}_1,!} j^{\geq 1,*}_{\neq \overline{1}_1} \Psi_{\mathcal{I},\pi_v} = \sum_{k=1-s}^{s-1} \sum_{\substack{|k|<t<s \\ t\equiv k-1 \mod 2}} \Big({}^p j^{=tg}_{\neq \overline{1_1},!*} HT_{\neq \overline{1_1}}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)_{|P_{1,tg}(F_v)}) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)(-\frac{k}{2})$$
$$+ {}^p j^{=(t+1)g}_{\overline{1_1},!*} HT_{\overline{1_1}}(\pi_v, \mathrm{St}_{t+1}(\pi_v)_{|P_{1,(t+1)g}(F_v)}) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)(-\frac{k-1}{2}) \Big)$$
$$+ \sum_{\substack{k\equiv s-1 \mod 2 \\ |k|\leq s-1}} \mathcal{P}(s,\pi_v)(-\frac{k}{2})$$

On soustrait alors cette égalité à (7.2), ce qui d'après la suite exacte courte (7.1) fournit le résultat. □

7.4. Corollaire. — *Soient π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et z un point géométrique de $X^{=d}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$. La fibre en z de $\mathcal{H}^i\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ vérifie alors les points suivant :*
- *elle est nulle si g ne divise pas d ;*
- *si $d=sg$, elle est nulle si $i>0$ ou si $i\leq -s$;*
- *pour $d=sg$ et $1-s\leq i\leq 0$, elle est isomorphe à la fibre en z de $HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(s-1+i,-i))\otimes \mathbb{L}(\pi_v)(\frac{i}{2})$.*

Remarque : le corollaire ci-dessus correspond au résultat principal de [**1**], cf. le corollaire 2.2.10 de loc. cit. En utilisant le le théorème de comparaison de Berkovich, on en déduit le calcul des groupes de cohomologie des espaces de Lubin-Tate, cf. le théorème 2.3.5 de [**1**].

Démonstration. — En utilisant la suite exacte courte (7.1), le germe cherché est celui de $i^1_{\overline{1}_1,*}\,{}^p\mathcal{H}^0 i^{1,*}_{\overline{1}_1}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$. Considérons alors la filtration par les poids de ce dernier faisceau pervers

$$0=\mathrm{Fil}^0(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \subset \mathrm{Fil}^1(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^s(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}),$$

dont les gradués sont

$$\mathrm{gr}^k(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) := \mathrm{Fil}^k(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v})/\mathrm{Fil}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \simeq {}^p j^{=kg}_{\overline{1_1},!*} HT_{\overline{1_1}}(\pi_v, \mathrm{St}_k(\pi_v)_{|P_{1,kg}(F_v)})(\frac{1-k}{2}),$$

pour $k=1,\cdots,s$. On considère alors la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ à partir de ceux de ses gradués, i.e.

$$E_1^{i,j} = \mathcal{H}^{i+j}\Big({}^p j^{=-ig}_{\overline{1_1},!*} HT_{\overline{1_1}}(\pi_v, \mathrm{St}_{-i}(\pi_v)_{|P_{1,-ig}(F_v)})(\frac{1+i}{2})\Big) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}.$$

D'après le corollaire 6.5, la fibre en z des $E_1^{i,j}$ vérifie alors les propriétés suivantes :
- tous les $(E_1^{i,j})_z$ sont nuls si $i\geq 0$ ou si $i<-s$;
- tous les $(E_1^{i,j})_z$ sont nuls si g ne divise pas d ;

— pour $d = sg$, les $(E_1^{i,j})_z$ sont nuls si $i + j > 0$ ou si $i + j \leq -s$.
— Pour $d = sg$ et $1 - s \leq i + j \leq 0$, les $(E_1^{i,j})_z$ sont nuls sauf pour $-i = s + i + j$, i.e. $j = -s - 2i$ auquel cas cette fibre est isomorphe à la fibre en z de $HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(s - 1 + i + j, -i_j)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)(\frac{i+j}{2})$.

Ainsi les couples (i, j) tels que $(E_1^{i,j})_z$ est non nul sont les $(-s + \delta, s - 2\delta)$ pour $\delta = 0, 1, \cdots, s - 1$. On remarque alors que toutes les flèches $d_r^{i,j}$ de cette suite spectrale sont nécessairement nuls puisque, par une récurrence immédiate sur r, soit son espace de départ $E_r^{i,j}$ soit son espace d'arrivée $E_r^{i+r,j+r-1}$ est nul. Ainsi donc on a $(E_\infty^{i,j})_z \simeq (E_1^{i,j})_z$ et le résultat découle des tirets précédents. □

Références

[1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.

[2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.

[3] P. Boyer. La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre. *soumis*, 2013.

[4] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[5] M.-F. Vignéras. *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[6] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of GL(n). *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.

Boyer Pascal • *E-mail :* boyer@math.univ-paris13.fr, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25