PRINCIPE DE MAZUR POUR $U(1,d)$

par

Boyer Pascal

Résumé. — Le principe de Mazur fournit des conditions simples pour qu'une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible non ramifiée provenant d'une forme modulaire de niveau $\Gamma_0(Np)$ provienne aussi d'une forme de niveau $\Gamma_0(N)$. L'objectif de ce travail est de proposer une généralisation de ce principe en dimension supérieure pour certaine formes intérieures étendues non quasi-déployée d'un groupe unitaire en étudiant la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura dites de Kottwitz-Harris-Taylor en lien avec la dégénérescence de la monodromie locale.

***Abstract* (Mazur's principle for $U(1,d)$).** — The Mazur principle gives simple conditions for an irreducible unramified $\overline{\mathbb{F}}_l$-representation coming from a modular form of level $\Gamma_0(Np)$ to come for some modular form of level $\Gamma_0(N)$. The aim of this work is to give a generalization of this principle in higher dimension for some particular extended inner forms non quasi split of a unitary group studying the torsion cohomology classes of Shimura varieties of Kottwitz-Harris-Taylor type within its link with the local monodromy degeneracy.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.
Mots clefs. — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

Introduction

Dans la théorie classique des formes modulaires, une question cruciale est la détermination optimale du niveau à partir duquel une représentation galoisienne modulo l est modulaire : que l'on pense par exemple à son application à la preuve du grand théorème de Fermat. Les conjectures de Serre, désormais prouvées par Khare et Wintenberger dans [**10**], fournissent un cadre précis pour cette question dans le cas de GL_2. Avant que ne soient établies les conjectures de Serre, le principe de Mazur, rappelé ci-après, constituait le résultat le plus évolué sur ce thème et, par exemple, l'ingrédient principal dans la preuve du théorème de Ribet.

Théorème. — (Principe de Mazur cf. [**12**] ***théorème 6.1)***
Soient N un entier, p un nombre premier ne divisant pas N et $\bar\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_l/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{F}}_l)$ une représentation galoisienne provenant d'une forme modulaire de niveau $\Gamma_0(Np)$. On suppose que
- *$p \neq l$,*
- *$\bar\rho$ est irréductible et non ramifiée en p et*
- *l ne divise pas $p-1$.*

Alors $\bar\rho$ provient d'une forme modulaire de niveau $\Gamma_0(N)$.

Dans ce travail nous proposons, théorème 1.3.2, une généralisation du principe de Mazur pour un groupe de similitudes $G/\mathbb{Q}$ et une place p telle que, cf. (1.2.1), $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times GL_d(F_v) \times \cdots$, où F est un corps CM et v une place de F jouant le rôle du premier p dans le principe de Mazur. Une représentation automorphe Π de G fournit des paramètres de Satake en ses places de non ramification et donc un idéal premier $\widetilde{\mathfrak{m}}$ d'une algèbre de Hecke, cf. la définition 1.2.4. D'après [**8**], on associe à $\widetilde{\mathfrak{m}}$ une représentation $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ de $\mathrm{Gal}(\bar F/F)$. Comme dans le cas de GL_2
- on part d'une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation $\bar\rho$ de $\mathrm{Gal}(\bar F/F)$ s'écrivant comme la réduction modulo l de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ où $\widetilde{\mathfrak{m}}$ est associé à une représentation automorphe Π de niveau I,
- et on cherche des conditions pour l'existence d'une représentation automorphe Π' de niveau I' avec $I_v \subsetneq I'_v$ quitte à augmenter I en des places annexes $w \neq v$ associée donc à un idéal $\widetilde{\mathfrak{m}}'$ tel que $\bar\rho$ s'écrit encore comme la réduction modulo l de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}',v}$.

La condition clairement indispensable de non ramification en p dans le cas de GL_2, est remplacée par la dégénérescence de la monodromie au sens suivant. Le logarithme de la monodromie à la place v de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ définit un opérateur nilpotent $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ de GL_d dont la taille des blocs de Jordan fournit une partition $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ de d. En supposant $\bar\rho$ irréductible et en prenant $l \geq d$, $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ possède une structure entière unique et admet donc une réduction modulo l fournissant une partition $\underline{d_{\bar\rho,v}}$ ne dépendant pas du choix de Π. La condition de non ramification pour GL_2 devient alors : pour la relation de dominance usuelle sur les partitions, $\underline{d_{\bar\rho,v}}$ est strictement plus petite que $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$.

La démonstration repose sur l'étude de la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura dites de Kottwitz-Harris-Taylor, et sur l'observation que cette torsion se relève, cf. [**5**], en caractéristique 0 quitte à augmenter le niveau. L'idée consiste alors à jouer avec cette propriété

— en la place p où à l'aide des hypothèses du théorème 1.3.2, on parvient à diminuer le niveau en p tout en gardant une torsion non triviale,

— puis en augmentant le niveau en une place annexe quelconque, on relève cette torsion en caractéristique nulle.

On étudie en outre, cf. le corollaire 1.3.3, l'existence d'un Π tel que $\underline{d_{\bar\rho,v}} = \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ ainsi, cf. le corollaire 3.4.2, que des conditions explicites sur $\widetilde{\mathfrak{m}}$ pour que $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ en v ne dégénère pas i.e. tel que la partition en bloc de Jordan de la réduction modulo l de $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ soit égale à $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$.

Nous remercions V. Sécherre pour nous avoir expliqué le lemme 1.1.7. ainsi que V. Lafforgue pour ses nombreuses remarques sur une première version de ce travail.

1. Dégénérescence de la monodromie et diminution du niveau

1.1. Rappels sur les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations de $GL_d(K)$. — Notons K un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal q une puissance d'un nombre premier p. Une racine carrée $q^{\frac{1}{2}}$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ étant fixée, pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, nous noterons $\pi\{k\}$ la représentation tordue de π où l'action de $g \in GL_n(K)$ est donnée par $\pi(g)\nu(g)^k$ avec $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\operatorname{val}(\det g)}$.

1.1.1. Définitions. — *Soit $P = MN$ un parabolique standard de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N. On note $\delta_P : P(K) \to \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ l'application définie par*

$$\delta_P(h) = |\det(\operatorname{ad}(h)_{|\operatorname{Lie} N})|^{-1}.$$

Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, et P_{n_1,n_2} le parabolique standard de $GL_{n_1+n_2}$ de Levi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ et de radical unipotent N,

$$\pi_1 \times \pi_2$$

désigne l'induite parabolique normalisée de $P_{n_1,n_2}(K)$ à $GL_{n_1+n_2}(K)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : GL_{n_1+n_2}(K) \to V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_{P_{n_1,n_2}}^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)\Big(f(g)\Big), \quad \forall n \in N,\ \forall m \in M,\ \forall g \in GL_{n_1+n_2}(K).$$

Rappelons qu'une représentation irréductible π de $GL_n(K)$ est dite *cuspidale* si elle n'est pas isomorphe à un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

1.1.2. Notation. — *Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$. L'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de $\pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \cdots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$ est noté $\mathrm{St}_s(\pi)$ (resp. $\mathrm{Speh}_s(\pi)$).*

Notons $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K et ϖ_K une uniformisante. Le sous-groupe compact ouvert de $GL_d(\mathcal{O}_K)$ des éléments dont la réduction modulo ϖ_K est triangulaire supérieure, est le classique sous-groupe d'Iwahori. Rappelons que toute représentation irréductible de $GL_d(K)$ admettant des vecteurs non nuls invariants sous le sous-groupe d'Iwahori est, avec les notations précédentes un sous-quotient d'une induite $\chi_1 \times \cdots \times \chi_d$ où les χ_i sont des caractères de $K^\times$ uniquement définis à l'ordre près.

1.1.3. Notation. — *Pour toute représentation irréductible π de $GL_d(K)$ ayant des vecteurs non nuls invariants par le sous-groupe d'Iwahori, on note*(1)

$$V(\pi) = \Big\{ \chi_i(\varpi_K) : \ i = 1, \cdots, d \Big\}$$

où les caractères χ_i sont tels que π est un sous-quotient de l'induite $\chi_1 \times \cdots \times \chi_d$.

Remarque : avec les notations précédentes, on a

$$V(\mathrm{St}_t(\chi)) = \Big\{ \chi(\varpi_K) q^{\frac{1-t}{2}}, \chi(\varpi_K) q^{\frac{1-t+2}{2}}, \cdots, \chi(\varpi_K) q^{\frac{t-1}{2}} \Big\}.$$

1.1.4. Définition. — Étant donnée une partition de d

$$\underline{d} = (m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r \geq 1) \text{ avec } d = m_1 + \cdots + m_r,$$

le sous-groupe d'Iwahori généralisé standard associé est par définition l'ensemble des éléments de $GL_d(\mathcal{O}_K)$ dont la réduction modulo ϖ_K appartient au parabolique standard de Levi $GL_{m_1} \times GL_{m_2} \times \cdots \times GL_{m_r}$. Un sous-groupe d'Iwahori généralisé est alors un conjugué d'un sous-groupe d'Iwahori généralisé standard par un élément de $GL_d(\mathcal{O}_K)$.

Remarque : pour $m_1 = m_2 = \cdots = m_d = 1$, on retrouve le classique sous-groupe d'Iwahori.

On associe habituellement à une partition $\underline{m} = (m_1 \geq \cdots \geq m_r)$ de d, un diagramme de Ferrers dont la i-ème ligne est de longueur m_i. Les longueurs $t_1 \geq \cdots \geq t_{m_1}$ des colonnes du diagramme de Ferrers définissent alors la partition

$$\underline{m}^* = (t_1 \geq \cdots \geq t_{m_1})$$

conjuguée de $\underline{m}$.

1.1.5. Notation. — *Pour $\underline{m}$ une partition de conjuguée $\underline{m}^* = (t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_{m_1})$, on note $\underline{m}^{(1)}$ la partition dont la conjuguée est $(t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_{m_1})$.*

Remarque : autrement dit $\underline{m}^{(1)}$ est la partition obtenue à partir de $\underline{m}$ en supprimant sa première colonne.

1. Plus précisément $V(\pi)$ est un multi-ensemble, i.e. on garde en mémoire la répétition des $\chi(\varpi_K)$.

1.1.6. Définition. — On dira que d'une partition $\underline{m} = (m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r)$ de n qu'elle est contenue dans une partition $\underline{m}' = (m'_1 \geq m'_2 \geq \cdots \geq m'_{r'})$ de n' si $r \leq r'$ et si pour tout $i = 1, \cdots, r$ on a $m_i \leq m'_i$.

On rappelle la relation de dominance usuelle sur les partitions

$$\underline{n} = (n_1 \geq n_2 \geq \cdots) \leq \underline{m} = (m_1 \geq m_2 \geq \cdots) \Leftrightarrow \forall k \geq 1 \sum_{i=1}^{k} n_i \leq \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

La relation $\underline{n} \leq \underline{m}$ est équivalente à $\underline{m}^* \leq \underline{n}^*$ sur les partitions conjuguées.

1.1.7. Lemme. — *Soit $\pi \simeq \mathrm{St}_{t_1}(\chi_1) \times \cdots \times \mathrm{St}_{t_s}(\chi_s)$ avec $t_1 + \cdots + t_s = d$ et où $\chi_1, \cdots, \chi_s$ sont des caractères de $K^\times$. L'ensemble des sous-groupes d'Iwahori généralisés P tels que π ait des vecteurs non nuls P-fixes, admet un plus grand élément dont les tailles des blocs sont, à conjugaison près, ceux de la partition $\underline{d}(\pi)$ conjuguée à $(t_1 \geq \cdots \geq t_s)$.*

Démonstration. — Notons $\mathcal{K} = GL_d(\mathcal{O}_K)$ le compact maximal de $GL_d(K)$, puis $\mathcal{K}(1)$ son pro-p radical. Rappelons que π a des vecteurs non nuls P-fixes si et seulement si l'espace $\mathcal{K}(\pi)$ des vecteurs non nuls $\mathcal{K}(1)$-fixes de π vu comme représentation de $\mathcal{K}/\mathcal{K}(1)$ a des vecteurs non nuls fixes par $P' := P/\mathcal{K}(1)$, c'est-à-dire si $\mathcal{K}(\pi)^{U'}$, où U' le radical unipotent de P', contient le caractère trivial de $M' = P'/U'$.

En appliquant l'involution de Zelevinski Z, on se ramène à la propriété que $\mathcal{K}(Z(\pi))^{U'}$ contient un facteur non dégénéré, c'est-à-dire au fait que $Z(\pi)$ est λ-dégénérée, où λ désigne la partition de d donnée par les blocs de M', au sens de la théorie des modèles de Whittaker dégénérés, cf. [**15**] §V.5. Le résultat découle alors de loc. cit. □

1.1.8. Définition. — À la représentation $\pi \simeq \mathrm{St}_{t_1}(\chi_1) \times \cdots \times \mathrm{St}_{t_s}(\chi_s)$ on associe $T(\pi)$ le diagramme de Ferrers étiqueté par $V(\pi)$ défini comme suit :
— les longueurs des lignes de ce tableau sont les $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_s$
— et on étiquette la i-ème ligne de gauche à droite avec dans l'ordre les $\chi_i q^{\frac{1-t_i}{2}}, \cdots, \chi_i q^{\frac{t_i-1}{2}}$.

1.2. Représentation galoisienne associée à $\mathfrak{m}$. — Soient F^+ un corps totalement réel et $E/\mathbb{Q}$ une extension quadratique imaginaire : on considère alors le corps $F = EF^+$ qui est CM. Pour toute place w de F, on notera
— F_w son localisé en w,
— $\mathcal{O}_w$ son anneau des entiers d'uniformisante ϖ_w et
— q_w le cardinal du corps résiduel $\kappa(w) := \mathcal{O}_w/(\varpi_w)$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F, B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*_{|F}$ est la conjugaison complexe c. Pour $\beta \in B^{*=-1}$, on note $\sharp_\beta$ l'involution $x \mapsto x^{\sharp_\beta} = \beta x^* \beta^{-1}$ et $G/\mathbb{Q}$ le groupe de similitudes, noté G_τ dans [**8**], défini pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^{\sharp_\beta} = \lambda\}$$

avec $B^{op}=B\otimes_{F,c}F$. Si x est une place de $\mathbb{Q}$ décomposée $x=yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x)\simeq (B_y^{op})^\times\times\mathbb{Q}_x^\times\simeq\mathbb{Q}_x^\times\times\prod_{z_i}(B_{z_i}^{op})^\times, \tag{1.2.1}$$

où, en identifiant les places de F^+ au dessus de x avec les places de F au dessus de y, $x=\prod_i z_i$ dans F^+. Dans [**8**] lemme I.7.1, les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel que pour tous tels d,E^+ et F :

— si x est une place de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;

— les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1,d-1)$ pour le plongement τ et $(0,d)$ pour les autres.

On fixe à présent un nombre premier $p=uu^c$ décomposé dans E tel qu'il existe une place v de F au dessus de u avec

$$(B_v^{op})^\times\simeq GL_d(F_v).$$

On note

$$v_1=v,v_2,\cdots,v_r$$

les places de F au dessus de u. Avec un abus coupable de notation, on utilisera $G(F_v)$ pour désigner le facteur en v de la formule (1.2.1), isomorphe donc à $GL_d(F_v)$.

1.2.2. Définition. — Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits »[2] de $G(\mathbb{A}^\infty)$, de la forme U^vK_v avec

— $U^v=U^p\times\mathbb{Z}_p^\times\times\prod_{i=2}^r\mathrm{Ker}\Big(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times\longrightarrow(\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{n_i})^\times\Big)$ pour des entiers $n_2,\cdots,n_r$ positifs ou nuls,

— et où K_v est un sous-groupe d'Iwahori généralisé.

— Pour $I=U^vK_v\in\mathcal{I}$ comme ci-avant, on notera $I^v=U^v$ et $I_v=K_v$.

1.2.3. Notation. — *Pour $I\in\mathcal{I}$, on note* $\mathrm{Spl}(I)$ *l'ensemble des places w de F telles que $p_w:=w_{|\mathbb{Q}}$ est décomposée dans E et, cf. la formule (1.2.1), la composante locale I_w de I à la place w est isomorphe à $GL_d(\mathcal{O}_w)$.*

1.2.4. Définition. — Pour l un nombre premier distinct de p et $I\in\mathcal{I}$ un niveau fini, soit

$$\mathbb{T}_I:=\mathbb{Z}_l\Big[T_{w,i}:\ w\in\mathrm{Spl}(I)\text{ et }i=1,\cdots,d\Big],$$

l'algèbre de Hecke associée à $\mathrm{Spl}(I)$, où $T_{w,i}$ est la fonction caractéristique de

$$GL_d(\mathcal{O}_w)\,\mathrm{diag}(\overbrace{\varpi_w,\cdots,\varpi_w}^{i},\overbrace{1,\cdots,1}^{d-i})GL_d(\mathcal{O}_w)\subset GL_d(F_w).$$

Remarque : l'algèbre $\mathbb{T}_I$ ne dépend que de $\mathrm{Spl}(I)$ au sens où si $J\in_I C$ est tel que $\mathrm{Spl}(J)=\mathrm{Spl}(I)$ alors $\mathbb{T}_J=\mathbb{T}_I$.

Les idéaux premiers minimaux de $\mathbb{T}_I$ sont les idéaux premiers de $\mathbb{T}_I$ au dessus de l'idéal nul de $\mathbb{Z}_l$ et sont donc en bijection naturelle avec les idéaux premiers de $\mathbb{T}_I\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l$. Ainsi pour un tel idéal $\widetilde{\mathfrak{m}}$ premier minimal, $(\mathbb{T}_I\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l)/\widetilde{\mathfrak{m}}$ est une extension finie $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ de $\mathbb{Q}_l$.

2. tels qu'il existe une place $x\neq p$ pour laquelle la projection de U^v sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [**8**] bas de la page 90

Fixons pour la suite un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$. Étant donnée une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation algébrique irréductible ξ de $G(\mathbb{Q})$, rappelons qu'une $\mathbb{C}$-représentation irréductible Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ est dite ξ-cohomologique s'il existe un entier i tel que

$$H^i((\mathrm{Lie}\, G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes \iota(\xi^\vee)) \neq (0)$$

où U_τ est un sous-groupe compact modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, maximal, cf. [**8**] p.92. Une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible Π^∞ de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sera dit automorphe ξ-cohomologique s'il existe une $\mathbb{C}$-représentation ξ-cohomologique Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ telle que $\iota\Big(\Pi^\infty\Big) \otimes \Pi_\infty$ est une $\mathbb{C}$-représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$.
Remarque : si $\iota' : \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ est un autre choix d'isomorphisme et si Π^∞ est automorphe ξ-cohomologique relativement à ι, alors, d'après la formule de Matsushima, $(\iota')^{-1} \circ \iota(\Pi^\infty)$ l'est relativement à ι'.

1.2.5. Définition. — Un idéal $\widetilde{\mathfrak{m}}$ premier minimal de $\mathbb{T}_I$ est dit ξ-cohomologique s'il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation automorphe ξ-cohomologique Π de $G(\mathbb{A})$ possédant des vecteurs non nuls fixes sous I et telle que pour tout $w \in \mathrm{Spl}(I)$, les paramètres de Satake de Π_{p_w} sont donnés par les images des $T_w^{(i)} \in K_{\widetilde{\mathfrak{m}}} := (\mathbb{T}_I \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)/\widetilde{\mathfrak{m}}$, où $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_l$.

Remarque : on fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et on notera $\overline{\mathbb{T}}_I := \mathbb{T}_I \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{Z}}_l$ de sorte que $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ s'injecte canoniquement dans $\overline{\mathbb{Q}}_l = (\overline{\mathbb{T}}_I \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l)/\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{Z}}_l$.

1.2.6. Notation. — *Un* Π *comme dans la définition précédente, n'est pas nécessairement unique mais définit une unique classe d'équivalence proche au sens de* [**14**] *que l'on notera* $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$.

Dans la suite nous ne considérerons que des idéaux premiers ξ-cohomologiques, ce qui permet de définir leur représentation galoisienne associée au sens suivant.

1.2.7. Définition. — On note

$$\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{Q}}_l)$$

la représentation galoisienne associée à un tel Π d'après [**8**] et [**14**].

Remarque : pour toute place $w \in \mathrm{Spl}(I)$, les valeurs propres de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}(\mathrm{Frob}_w)$ sont données par les paramètres de Satake de Π_v et appartiennent donc à $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$.

La restriction de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ au groupe de Galois local en v s'identifie à une représentation de Weil-Deligne $(\sigma_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}, N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v})$ où $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ est le logarithme de la partie unipotente de la monodromie locale. Notons que cet opérateur nilpotent est défini à l'aide de la série formelle $\ln(1-x) = -\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ que l'on peut tronquer en $k \leq d-1$. En particulier

- si $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ est entière, i.e. s'il existe un réseau stable Γ et si $l \geq d$, alors l'opérateur $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ est défini sur Γ et on note $\overline{N}_{\widetilde{\mathfrak{m}},v,\Gamma}$ sa réduction modulo l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Dans la suite l vérifiera toujours l'inégalité $l \geq d$.
- Si en outre la réduction modulo l de $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ est irréductible alors tous les réseaux stables Γ sont homothétiques et on notera simplement $\overline{N}_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$.

1.2.8. Notation. — *Tout élément nilpotent de $GL_d(F_v)$ admet une forme de Jordan associée à une unique partition de d donnée par la taille de ses blocs de Jordan. On note*

$$\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} \quad \textit{resp.} \ \underline{d_{\mathfrak{m},v}}$$

la partition associée à $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ (resp. à $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$).

On introduit alors les diagrammes de Ferrers étiquetés $T_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ et $T_{\mathfrak{m},v}$ associés respectivement à $N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ et $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$ dont les longueurs des lignes sont les tailles, classées par ordre décroissant, des blocs de Jordan de l'opérateur de monodromie associé. On rappelle par ailleurs que les longueurs des colonnes de $T_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ sont les $\dim \operatorname{Ker} N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} N_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}^{i}$. On a une formule analogue pour $T_{\mathfrak{m},v}$ de sorte qu'en particulier

$$\underline{d_{\mathfrak{m},v}} \leq \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}.$$

Remarque : avec les notations de la définition 1.1.8 et la description de la correspondance de Langlands locale, $T_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$ est le diagramme de Ferrers $T(\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}},v})$.

1.3. Énoncé du théorème principal. — Considérons un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{T}_I$ qui est ξ-cohomologique au sens où au moins un idéal premier minimal $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ l'est. Pour un tel $\widetilde{\mathfrak{m}}$, on a une injection $\mathbb{T}_I/\widetilde{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ où $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ désigne l'anneau des entiers de $K_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$: la composée de cette injection avec la réduction modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ coïncide alors avec la surjection $\mathbb{T}_I/\widetilde{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_I/\mathfrak{m}$. On peut ainsi parler de la réduction modulo $\mathfrak{m}$ des paramètres de Satake $S_{\widetilde{\mathfrak{m}}}(w)$ lesquels ne dépendent donc que de $\mathfrak{m}$ et sont donc donnés par le multi-ensemble des racines du polynôme de Hecke en w

$$P_{\mathfrak{m},w}(X) := \sum_{i=0}^{d} (-1)^i q_w^{\frac{i(i-1)}{2}} \overline{T_{w,i}} X^{d-i} \in \overline{\mathbb{F}}_l[X]$$

i.e.

$$S_{\mathfrak{m}}(w) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m} \simeq \overline{\mathbb{F}}_l \text{ tel que } P_{\mathfrak{m},w}(\lambda) = 0 \Big\}.$$

Ainsi tout idéal premier $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ qui est ξ-cohomologique, fournit une (ou des) représentation automorphe dont les paramètres de Satake modulo l en toute place de $\mathrm{Spl}(I)$ sont donnés par $\mathfrak{m}$; pour deux tels idéaux premiers on obtient ainsi des représentations automorphes dites congruentes, au sens où elles partagent les mêmes paramètres de Satake en presque toutes les places.

1.3.1. Définition. — On dira que $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$ est détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$, si, cf. la notation 1.1.5 et la définition 1.1.6, $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^{(1)}$ n'est pas contenu dans $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$.

1.3.2. Théorème. — *Soient*

- *$I \in \mathcal{I}$ un sous-groupe compact ouvert tel que modulo ϖ_v, la composante I_v de I à la place v, cf. la formule (1.2.1), est un sous-groupe d'Iwahori généralisé relativement à une partition $\underline{m} = (m_1 \geq \cdots \geq m_r)$ de d avec $r > 1$,*
- *et, cf la remarque suivant la définition 1.2.4, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathbb{T}_I$,*

tels que $\underline{m}$ soit maximale relativement au fait qu'il existe un idéal premier minimal $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ ainsi qu'une représentation automorphe irréductible $\Pi \in \Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ possédant des vecteurs non nuls invariants sous I. On suppose alors que :

1) $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$, est irréductible

2) $l \geq d$;

3) la partition $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ est strictement plus petite que la partition $\underline{m}^*$ conjuguée à $\underline{m}$;

4) au choix
(i) soit $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$ est détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$,
(ii) soit la composante locale en v de $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ n'est pas de la forme $\chi_{v,1} \times \chi_{v,2} \times ?$ pour $\chi_{v,1}$ et $\chi_{v,2}$ des caractères de $F_v^\times$ tels que $\chi_{v,2} \equiv \chi_{v,1}\nu \mod l$ où

$$\nu : x \in F_v^\times \mapsto q^{-\operatorname{val} x},$$

et ? une représentation quelconque.

Alors pour toute place $w \in \mathrm{Spl}(I)$ distincte de v, il existe un sous-groupe d'Iwahori généralisé I'_v (resp. I'_w) associée à une partition $\underline{m'_v} > \underline{m}$ (resp. $\underline{m'_w}$) ainsi qu'un idéal maximal ξ-cohomologique $\mathfrak{m}'$ de $\mathbb{T}_{I'}$, où $I' := I'_v I'_w I^{v,w}$, tel que

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{m}'} \simeq \overline{\rho}_{\mathfrak{m}}.$$

Autrement dit $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ provient d'une représentation automorphe de niveau I'.

Remarque : comme $l \geq d$ et $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible, $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ est bien défini indépendamment du réseau stable. Par maximalité de $\underline{m}$, on a $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} = \underline{m}^*$ de sorte que l'hypothèse $\underline{d_{\mathfrak{m},v}} < \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ est clairement nécessaire pour obtenir un énoncé de diminution du niveau.

Le principe de la démonstration consiste à calculer la cohomologie en niveau I de la variété de Shimura associée à G, cf. le §2.1, en utilisant la suite spectrale de Rapoport-Zink en la place v. On constate alors

— $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ étant irréductible, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ cette suite spectrale dégénère en E_1, tous les groupes de cohomologie étant concentrés en degré médian ;
— l'hypothèse $\underline{d_{\mathfrak{m},v}} < \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ impose que certains des termes initiaux de cette suite spectrale ont de la torsion non triviale.

Ainsi la cohomologie de toute la variété de Shimura admet une filtration dont certains gradués sont de torsion et la partie la plus difficile de la preuve consiste, proposition 3.3.1
— à montrer que la cohomologie elle-même admet de la torsion non triviale
— et que celle-ci subsiste en diminuant légèrement le niveau en v.

On utilise alors le résultat principal de [**5**] qui permet de relever une telle classe de torsion en caractéristique 0 quitte à augmenter le niveau en une place auxiliaire.

Une question naturelle est d'itérer ce résultat afin de construire un niveau $I' = I^{v,w} I'_v I'_w$ avec $I'_w \subset I_w$ et I'_v un sous-groupe d'Iwahori généralisé associé à une partition $\underline{m}$, de sorte qu'il existe $\widetilde{\mathfrak{m}}$ avec

$$\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} = \underline{d_{\mathfrak{m},v}} = \underline{m}$$

et $\Pi \in \Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ ayant des vecteurs non nuls invariants sous I'. C'est clairement le cas si $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ n'admet pas plus d'une ligne de longueur 1 puisqu'alors la condition 4-ii) est toujours vérifiée. Plus généralement on a l'énoncé suivant.

1.3.3. Corollaire. — *Supposons que l'ensemble des étiquettes des lignes de longueur* 1 *du diagramme de Ferrers étiqueté associé à* $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$*, ne contient aucun sous-ensemble de la forme* $\{\alpha, q\alpha\}$*. Alors pour toute place* $w \in \mathrm{Spl}(I)$ *distincte de* v*, il existe un sous-groupe d'Iwahori généralisé* I'_v *(resp.* I'_w*) associée à la partition* $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}^*$ *(resp.* $\underline{m'_w}$*) ainsi qu'un idéal maximal* ξ*-cohomologique* $\mathfrak{m}'$ *de* $\mathbb{T}_{I'}$*, où* $I' := I'_v I'_w I^{v,w}$*, tel que*

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{m}'} \simeq \overline{\rho}_{\mathfrak{m}},$$

autrement dit $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ *provient d'une représentation automorphe de niveau* I'*.*

Remarque : on notera que dans le cas $d = 2$ soit l'hypothèse 4-ii) est vérifié et sinon il n'y a rien à démontrer puisqu'il existe alors un $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ non ramifié en v.

Au §3.4, on donnera par ailleurs un énoncé de non dégénérescence de la monodromie, i.e. des conditions explicites sur $\mathfrak{m}$ et $\widetilde{\mathfrak{m}}$, pour que $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} = \underline{d_{\mathfrak{m},v}}$, cf. le corollaire 3.4.2.

2. Cohomologie des variétés de Kottwitz-Harris-Taylor

2.1. Rappels sur la géométrie. — On note $(X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ le système projectif des variétés de Shimura dites de Kottwitz-Harris-Taylor au dessus de $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_v$.
Remarque : pour tout sous-groupe compact ouvert I de $G(\mathbb{A}^\infty)$, on peut définir X_I au dessus de $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_w$ pour tout $w \in \mathrm{Spl}$.

Il est muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$, où $\deg = \mathrm{val} \circ \mathrm{Art}^{-1}$ où $\mathrm{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

Pour $I \in \mathcal{I}$, on note : X_{I,s_v} (resp. $X_{I,\eta}$) la fibre spéciale (resp. générique) de X_I en v et $X_{I,\bar{s}_v} := X_{I,s_v} \times \mathrm{Spec}\, \overline{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique (resp. $X_{I,\bar{\eta}}$ la fibre générique géométrique).

Soit $I \in \mathcal{I}$ tel que, cf. la définition 1.2.2, sa composante I_v à la place v, est le sous-groupe d'Iwahori généralisé standard associé à la partition $(m_1 \geq \cdots \geq m_r)$ de d. Alors le morphisme $X_I \longrightarrow X_{I^v}$ est le problème de modules correspondant à la donnée d'une chaîne d'isogénies

$$\mathcal{G}_A = \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1 \to \cdots \to \mathcal{G}_r = \mathcal{G}_A/\mathcal{G}_A[\varpi_v]$$

de $\mathcal{O}_v$-modules de Barsotti-Tate où :

— pour tout $i = 1, \cdots, r$, l'isogénie $\mathcal{G}_{i-1} \longrightarrow \mathcal{G}_i$ est de degré q^{m_i} et

— la composée de ces r isogénies est égale à l'application canonique $\mathcal{G}_A \longrightarrow \mathcal{G}_A/\mathcal{G}_A[\varpi_v]$, où $\mathcal{G}_A$ est le module de Barsotti-Tate associé à la variété abélienne universelle sur X_{I^v}.

2.1.1. Notation. — *Pour tout $1 \leq i \leq r$, on note $Y_{I,i}$ le sous-schéma fermé de $X_{I,\bar{s}_v}$ sur lequel $\mathcal{G}_{i-1} \longrightarrow \mathcal{G}_i$ a un noyau connexe. Pour tout $S \subset \{1, \cdots, r\}$ non vide, on note*

$$Y_{I,S} = \bigcap_{i \in S} Y_{I,i}, \qquad Y^0_{I,S} = Y_{I,S} - \bigcup_{S \subsetneq T} Y_{I,T}.$$

Pour tout $1 \leq m \leq r$, soit

$$Y_I^{(r)} := \coprod_{\sharp S = r} Y_{I,S} \quad \text{et} \quad a_r : Y_I^{(r)} \longrightarrow Y_I$$

la projection.

De la théorie du modèle local de Rapoport-Zink, on déduit la description suivante, cf. par exemple [**14**].

2.1.2. Proposition. — *Le schéma X_I est de pure dimension d et a réduction semi-stable sur $\mathcal{O}_v$, i.e. pour tout point fermé x de $X_{I,\bar{s}_v}$, il existe un voisinage étale $V \longrightarrow X_I$ de x et un $\mathcal{O}_v$-morphisme étale*

$$V \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v[T_1, \cdots, T_d]/(T_1 \cdots T_m - \varpi_v)$$

pour $1 \leq m \leq d$. Le schéma X_I est régulier et le morphisme de restriction du niveau $X_I \longrightarrow X_{I^v}$ est fini et plat. Tous les $Y_{I,S}$ sont lisses sur $\operatorname{Spec} \kappa(w)$ *de pure dimension $d - \sharp S$ avec*

$$X_{I,\bar{s}_v} = \bigcup_{i=1}^{r} Y_{I,i}$$

où pour $i \neq j$, les schémas $Y_{I,i}$ et $Y_{I,j}$ n'ont pas de composante connexe en commun.

La fibre spéciale géométrique $X_{I,\bar{s}_v}$, quel que soit le niveau I, admet une stratification dite de Newton : pour tout $1 \leq h \leq d$, on note $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}$ (resp. $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$) la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h, i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).

2.1.3. Notation. — *On note*

$$j^{\geq h} : X^{=h}_{I,\bar{s}_v} \hookrightarrow X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, \qquad i^h : X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}$$

et $j^{=h} = i^h \circ j^{\geq h}$.

Lorsque le niveau I_v en v de I est de la forme $\operatorname{Ker}\Big(GL_d(\mathcal{O}_v) \twoheadrightarrow GL_d(\mathcal{O}_v/\varpi_v^{m_1})\Big)$, pour tout $1 \leq h < d$, la strate de Newton $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ est alors géométriquement induite au sens où il existe un sous-schéma fermé $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1_h}$ tel que :

$$X^{=h}_{I,\bar{s}_v} \simeq X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1_h} \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1}).$$

Passons provisoirement en niveau infini en v et notons $X_{I^v\infty}$ la tour de variété associée : à l'aide des variétés d'Igusa de première et seconde espèce, les auteurs de [**8**] p136, associent à toute représentation admissible ρ_v des inversibles de l'ordre maximal $\mathcal{D}_{v,h}$ de l'algèbre à division centrale $D_{v,h}$ sur F_v d'invariant $1/h$, un système local $\mathcal{L}_{1_h}(\rho_v)$ sur $X^{=h}_{I^v\infty,\bar{s}_v,1_h}$

muni d'une action de $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$, où le deuxième facteur agit via la projection $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v) \longrightarrow \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(\mathcal{O}_v)$. On note alors

$$\mathcal{L}(\rho_v) := \mathcal{L}_{1_h}(\rho_v) \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)} GL_d(\mathcal{O}_v)$$

sa version induite sur $X^{=h}_{I^{v\infty},\bar{s}_v}$.

2.1.4. Notation. — *Soient π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et pour $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$, on note $\pi_v[t]_D$ la représentation de $D^\times_{tg,v}$ associé à la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_t(\pi_v)$ par la correspondance locale de Jacquet-Langlands. La représentation $\pi_v[t]_D$ de $D^\times_{v,tg}$ fournit alors un système local sur $X^{=tg}_{I^{v\infty},\bar{s}_v,1_{tg}}$*

$$\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{1_{tg}} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\rho_{v,i})_{1_{tg}}$$

où $(\pi_v[t]_D)_{|\mathcal{D}^\times_{v,h}} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \rho_{v,i}$ avec $\rho_{v,i}$ irréductible et muni d'une action de $P_{tg,d-tg}(F_v)$ via son quotient $GL_{d-tg} \times \mathbb{Z}$.

2.1.5. Définition. — Les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont alors les

$$\widetilde{HT}_{1_{tg}}(\pi_v,\Pi_t) := \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{1_{tg}} \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}$$

où Π_t est une représentation quelconque de $GL_{tg}(F_v)$. La version induite est notée

$$\widetilde{HT}(\pi_v,\Pi_t) := \Big(\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{1_{tg}} \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \Big) \times_{P_{tg,d-tg}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où l'action du radical unipotent de $P_{tg,d-tg}(F_v)$ est triviale, et celle de

$$(g^{\infty,v}, \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix}, \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{tg,d-tg}(F_v) \times W_v$$

est donnée

- par celle de g_v^c sur Π_t et $\deg(\sigma_v) \in \mathbb{Z}$ sur $\Xi^{\frac{tg-d}{2}}$ ainsi que
- celle de $(g^{\infty,v}, g_v^{et}, \mathrm{val}(\det g_v^c) - \deg \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ sur $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v[t]_D)_{1_{tg}} \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}$, où $\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$ est défini par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$.

On dit de l'action de $GL_{tg}(F_v)$ qu'elle est *infinitésimale.*

2.1.6. Notations. — *On pose*

$$HT(\pi_v,\Pi_t) := \widetilde{HT}(\pi_v,\Pi_t)[d-tg],$$

et le faisceau pervers d'Harris-Taylor associé est

$$P(t,\pi_v) := {}^p j^{=tg}_{!*} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v),$$

où $\mathbb{L}^\vee$ désigne la correspondance locale de Langlands.

On rappelle que π'_v est inertiellement équivalente à π_v si et seulement s'il existe un caractère $\zeta : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes (\zeta \circ \mathrm{val} \circ \det)$.

2.1.7. Notation. — *Soit Υ l'ensemble des classes d'équivalence inertielle des caractères de $F_v^\times$.*

Les faisceaux pervers $P(t,\pi_v)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence inertielle de π_v et sont de la forme

$$P(t,\pi_v)=e_{\pi_v}\mathcal{P}(t,\pi_v)$$

où $\mathcal{P}(t,\pi_v)$ est un faisceau pervers irréductible.

2.1.8. Notation. — *Pour $I\in\mathcal{I}$, on notera $\mathcal{P}_I(t,\pi_v):=\mathcal{P}(t,\pi_v)^{I_v}$ le faisceau pervers d'Harris-Taylor sur $X_{I,\bar{s}_v}$ et on ajoutera plus généralement un indice I pour les $HT(\pi_v,\Pi_t)$ lorsqu'on les considère à niveau fini I.*

Remarque : lorsque I_v est un sous-groupe d'Iwahori généralisé, le faisceau pervers $P_I(t,\pi_v)$ est nul si π_v n'est pas un caractère.

Le résultat principal de [**1**] sur les faisceaux de cohomologies des faisceaux pervers d'Harris-Taylor peut s'écrire comme suit sous la forme d'une résolution

$$\begin{aligned}0\to j_!^{=d}HT_{1_t}(\chi_v,\Pi_t\{\frac{t-d}{2}\}\otimes \mathrm{Speh}_{d-t}(\chi_v\{\frac{t}{2}\}))\otimes\Xi^{\frac{d-t}{2}}\longrightarrow\cdots\\ \cdots\longrightarrow j_!^{=t+1}HT_{1_t}(\chi_v,\Pi_t\{-1/2\}\otimes\chi_v\{\frac{t}{2}\})\otimes\Xi^{\frac{1}{2}}\\ \longrightarrow j_!^{=t}HT_{1_t}(\chi_v,\Pi_t)\longrightarrow {}^pj_{!*}^{=t}HT_{1_t}(\chi_v,\Pi_t)\to 0,\end{aligned}\qquad(2.1.9)$$

où pour tout $t\leq h\leq d$, Π_t (resp. Π_{h-t}) une représentation de $GL_t(F_v)$ (resp. de $GL_{h-t}(F_v)$), on a noté

$$HT_{1_t}(\chi_v,\Pi_t\otimes\Pi_{h-t}):=HT_{1_h}(\chi_v,\Pi_t\otimes\Pi_{h-t})\times_{P_{t,h-t,d-h}(F_v)}P_{t,d-t}(F_v).$$

Remarque : on a un résultat similaire en remplaçant χ_v par une cuspidale π_v quelconque.

Pour χ_v une représentation cuspidale de $GL_1(F_v)$, i.e. un caractère de $F_v^\times$, le $\overline{\mathbb{Z}}_l$-système local $\mathcal{L}_{1_h}(\chi_v)$ est isomorphe à $\overline{\mathbb{Z}}_l$ muni de l'action du groupe fondamental $\Pi_1(X^{=h}_{I,\bar{s}_v})$ de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ qui se factorise par son quotient $\Pi_1(X^{=h}_{I,\bar{s}_v})\twoheadrightarrow\mathcal{D}^\times_{v,h}$ où l'action de $\mathcal{D}^\times_{v,h}$ est donnée par le caractère χ_v. En remarquant, cf. [**3**] lemme 3.0.2, que l'adhérence $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}$ de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ est lisse, on en déduit que $\overline{\mathbb{Z}}_l[d-h]$ est un faisceau pervers sur $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}$ qui s'identifie, avec l'action de $\Pi_1(X^{=h}_{I,\bar{s}_v})$ comme ci-avant, alors aux deux extensions intermédiaires

$${}^pj_{!*}^{\geq h}\mathcal{L}_{1_h}(\chi_v)[d-h]\simeq {}^{p+}j_{!*}^{\geq h}\mathcal{L}_{1_h}(\chi_v)[d-h].\qquad(2.1.10)$$

Remarque : Le fait que la résolution précédente soit encore valide sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$ découle, cf. [**3**], du fait que les faisceaux de cohomologie de $\mathcal{P}(\chi_v,t)$ sont sans torsion propriété qui découle de [**13**], et plus généralement en remplaçant comme dans la remarque ci-avant χ_v par une cuspidale quelconque, du résultat principal de [**3**].

2.2. Cohomologie d'un système local. — Fixons un plongement $\sigma_0:E\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_l$ et notons Φ l'ensemble des plongements $\sigma:F\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_l$ dont la restriction à E est σ_0. On rappelle alors qu'il existe une bijection explicite entre les représentations algébriques irréductibles ξ de G sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et les $(\sharp\Phi+1)$-uplets

$$\Big(a_0,(\overrightarrow{a_\sigma})_{\sigma\in\Phi}\Big)$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\sigma \in \Phi$, on a $\overrightarrow{a_\sigma} = (a_{\sigma,1} \leq \cdots \leq a_{\sigma,d})$. Il existe alors une extension finie K de $\mathbb{Q}_l$ telle que la représentation $\iota^{-1} \circ \xi$ de plus haut poids $\Big(a_0, (\overrightarrow{a_\sigma})_{\sigma \in \Phi}\Big)$, est définie sur K. On note $W_{\xi,K}$ l'espace de cette représentation et $W_{\xi,\mathcal{O}}$ un réseau stable sous l'action du sous-groupe compact maximal $G(\mathbb{Z}_l)$ et où $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des entiers de K.
Remarque : si on suppose que ξ est l-petit, i.e. que pour tout $\sigma \in \Phi$ $a_{\sigma,d} - a_{\sigma,1} < l$, alors un tel réseau stable est unique à homothétie près.

Notons λ une uniformisante de $\mathcal{O}$ et soit pour $n \geq 1$, un sous-groupe distingué $I_n \in \mathcal{I}$ de $I \in \mathcal{I}$, compact ouvert agissant trivialement sur $W_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n} := W_{\xi,\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\lambda^n$. On note alors $V_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n}$ le faisceau sur X_I dont les sections sur un ouvert étale $T \longrightarrow X_I$ sont les fonctions

$$f : \pi_0\Big(X_{I_n} \times_{X_I} T\Big) \longrightarrow W_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n}$$

telles que pour tout $k \in I$ et $C \in \pi_0\Big(X_{I_n} \times_{X_I} T\Big)$, on a la relation $f(Ck) = k^{-1}f(C)$.

2.2.1. Notations. — *On note*

$$V_{\xi,\mathcal{O}} = \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} V_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n} \text{ et } V_{\xi,K} = V_{\xi,\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} K.$$

On utilisera aussi la notation $V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ et $V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l}$ pour les versions sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$ et $\overline{\mathbb{Q}}_l$ respectivement ainsi que

$$HT_\xi(\pi_v, \Pi_t) := HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{xi,\overline{\mathbb{Q}}_l}.$$

Remarque : la représentation ξ est dite *régulière* si son paramètre $\Big(a_0, (\overrightarrow{a_\sigma})_{\sigma \in \Phi}\Big)$ est tel que pour tout $\sigma \in \Phi$, on a $a_{\sigma,1} < \cdots < a_{\sigma,d}$.

2.3. Relèvement des classes de cohomologie de torsion. — Commençons par rappeler le résultat suivant sur le relèvement en caractéristique nulle des classes de torsion.

2.3.1. Théorème. — *(cf.* [**5**] *corollaire 2.9) Soit i tel que le sous-module de torsion de $H^i(X_{I,\bar\eta}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ est non nul. Alors pour tout $v \in \mathrm{Spl}(I)$, il existe une représentation irréductible ξ-cohomologique $\Pi(v)$ non ramifiée en toute place $w \neq v$ ne divisant pas I et dont les paramètres de Satake modulo l en w sont donnés par $S_{\mathfrak{m}}(w)$.*

Remarque : la composante en v de $\Pi(v)$ est ramifiée et d'après loc. cit. en utilisant le lemme 1.1.7, possède des vecteurs non nuls invariants sous un certain sous-groupe d'Iwahori généralisé associé à une partition de la forme $(m \geq 1 \geq 1 \geq \cdots \geq 1)$.

D'après le théorème précédent, pour prouver 1.3.2 il suffit alors de montrer, cf. la proposition 3.3.1, qu'il existe un niveau I' de la forme $I' = I^v I'_v$ où I'_v est un sous-groupe d'Iwahori généralisé contenant strictement I_v tel que la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie de $X_{I'}$ à coefficients dans V_ξ est non nulle et donc, par maximalité de $\underline{m}$ nécessairement de torsion.

3. Preuve du théorème principal

3.1. Suite spectrale de Rapoport-Zink. — On considère à présent un niveau $I \in \mathcal{I}$ tel que la composante I_v de I à la place v est le sous-groupe d'Iwahori standard associé à la partition $\underline{m} = (m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r)$ de d. Avec les notations de 2.1.1, la variété de Shimura X_I admet une réduction semi-stable à la place v ce qui permet de reprendre les constructions de Rapoport-Zink, cf. par exemple [**9**] §3.

3.1.1. Notation. — *On note $R\Psi_{I;v}(\overline{\mathbb{Z}}_l)$ le complexe des cycles évanescents sur $X_{I,\bar{s}_v}$.*

Rapoport et Zink construisent en particulier un bicomplexe $\mathcal{A}$ ainsi qu'un isomorphisme de complexes
$$R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l) \simeq s(\mathcal{A})$$
où $s(\mathcal{A})$ est le complexe simple associé à $\mathcal{A}$ ainsi qu'un morphisme
$$\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[-1,1](-1)$$
qui via l'isomorphisme précédent fournit
$$(T-1)\otimes T^\vee : R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l) \longrightarrow R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l)(-1).$$
Le bicomplexe $\mathcal{A}$ est ensuite muni d'une filtration croissante $W_\bullet\mathcal{A}$ de sorte que les gradués correspondant $\mathrm{gr}^W_\bullet s(\mathcal{A})$ sont les $\mathrm{gr}^W_\bullet s(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est le bicomplexe à différentielles nulles, cf. les notations 2.1.1
$$\begin{array}{llll} a_{r,*}\overline{\mathbb{Z}}_l & & & \\ a_{r-1,*}\overline{\mathbb{Z}}_l & a_{r,*}\overline{\mathbb{Z}}_l(-1) & & \\ \cdots & & & \\ a_{1,*}\overline{\mathbb{Z}}_l & a_{2,*}\overline{\mathbb{Z}}_l(-1) & \cdots & a_{r,*}\overline{\mathbb{Z}}_l(-r+1) \end{array}$$
où le coin gauche correspond à $(0,0)$ et où $W_r\mathcal{B}$ est obtenu en appliquant le foncteur de troncation canonique $\tau_{\leq r+q}$ à la q-ième ligne de $\mathcal{B}$. Ainsi le gradué $\mathrm{gr}^W_r R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l)$ a pour faisceaux de cohomologie
$$\Big(\mathcal{H}^i \mathrm{gr}^W_k R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l)\Big) = \Big(\overbrace{0,\cdots,0}^{i}, a_{|k|+1,*}\overline{\mathbb{Z}}_l(-|k|), a_{|k|+3,*}\overline{\mathbb{Z}}_l(-|k|-1),\cdots\Big). \qquad (3.1.2)$$
Rapoport et Zink montrent en outre que l'opérateur $(T-1)\otimes T^\vee$ défini plus haut, induit un isomorphisme
$$((T-1)\otimes T^\vee)^r : \mathrm{gr}^W_r R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^W_{-r} R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l)(-r). \qquad (3.1.3)$$
Sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, $(T-1)\otimes T^\vee$ est en outre nilpotent ce qui permet de définir
$$N = \log T \otimes T^\vee : R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1] \longrightarrow R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1](-1),$$
lequel correspond alors à l'opérateur de monodromie usuel. Ainsi les $\mathrm{gr}^W_\bullet s(\mathcal{A}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ sont les gradués de la filtration de monodromie de $R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$.
Remarque : les $\mathrm{gr}^W_r R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ sont décrits explicitement en tout niveau dans [**1**].

Rappelons, cf. [**4**] §1.4, que $\mathcal{D} := D^b_c(X_{I,\bar{s}_v}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ est muni de deux structures perverses notées p et $p+$

$$\begin{aligned} A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0} &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \mathcal{H}^k i_x^* A = 0,\ \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0} &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \mathcal{H}^k i_x^! A = 0,\ \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}$, et

$$\begin{aligned} A \in {}^{p+}\mathcal{D}^{\leq 0} &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} \mathcal{H}^i i_x^* A = 0, & \forall i > -\dim \overline{\{x\}} + 1 \\ \mathcal{H}^{-\dim \overline{\{x\}}+1} i_x^* A & \text{de torsion} \end{cases} \\ A \in {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0} &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} \mathcal{H}^i i_x^! A = 0, & \forall i < -\dim \overline{\{x\}} \\ \mathcal{H}^{-\dim \overline{\{x\}}} i_x^! A & \text{libre} \end{cases} \end{aligned}$$

3.1.4. Notation. — *On introduit le faisceau pervers*

$$\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} := R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l)[d-1](\frac{d-1}{2})$$

qui est autodual et pervers pour les deux t-structures p et $p+$. On notera aussi

$$\mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} := \mathrm{gr}^W_r R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l)[d-1](\frac{d-1}{2}).$$

3.1.5. Lemme. — *Les $\mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ sont pervers pour les deux t-structures p et $p+$.*

Démonstration. — De la description donnée plus haut de $\mathrm{gr}^W_r s(\mathcal{B})$, lequel à un décalage près correspond à $\mathrm{gr}^W_r \Psi_{\overline{\mathbb{Z}}_l}$, et donc de (3.1.2), on en déduit que ce dernier appartient à ${}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X_{I,\bar{s}_v}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \subset {}^{p+}\mathcal{D}^{\leq 0}(X_{I,\bar{s}_v}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$. De la lissité des $Y_{I,S}$ et donc des $Y_I^{(r)}$, on obtient de même, après application du foncteur de dualité de Grothendieck-Verdier, que $\mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} \in {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X_{I,\bar{s}_v}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \subset {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X_{I,\bar{s}_v}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$, d'où le résultat.

$\square$

Rappelons que $\mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l}$ étant pur, il est semi-simple et s'écrit, cf. la notation 2.1.7 et d'après [**1**]

$$\mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l} = \bigoplus_{\substack{1 \leq h \leq d \\ h \equiv r+1 \mod 2}} \bigoplus_{\chi_v \in \Upsilon} \mathcal{P}_I(h, \chi_v)(\frac{r}{2}).$$

3.1.6. Lemme. — *Sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$, on a une décomposition*

$$\mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} = \bigoplus_{\substack{1 \leq h \leq d \\ h \equiv r+1 \mod 2}} \mathrm{gr}^W_{r,h} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l},$$

où $\mathrm{gr}^W_{r,h} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\chi_v \in \Upsilon} \mathcal{P}_I(h, \chi_v)(\frac{r}{2})$.

Démonstration. — Le résultat découle d'après (2.1.10) du fait détaillé ci-dessous. Considérons une extension

$$0 \to A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \to 0$$

où A_1 et A_2 sont des p-extensions intermédiaires de systèmes locaux sur respectivement $X^{=h_1}_{I,\bar{s}_v}$ et $X^{=h_2}_{I,\bar{s}_v}$ avec $h_1 > h_2$ et telle que $A \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ est scindée. Soit alors A'_2 le tiré en arrière

$$\begin{tikzcd} A'_2 \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, hook, dashed] & A \arrow[d, hook] \\ A_2 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \arrow[r, hook] & A \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \end{tikzcd}$$

de sorte que

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & A_1 \arrow[d, hook] \\ A'_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A'_1 \arrow[d, two heads] \\ A'_2 \arrow[r, hook] & A_2 \arrow[r, two heads] & T \end{tikzcd}$$

Comme A_2 est un p-extension intermédiaire, si T était non nul, sa restriction à $X^{=h_2}_{I,\bar{s}_v}$ serait non nulle ce qui ne se peut pas puisque cette strate n'intersecte pas $X^{\geq h_1}_{I,\bar{s}_v}$. Ainsi donc A est scindée.

$\square$

On fixe une fois pour toute une énumération de $\Upsilon = \{\chi_{v,1}, \chi_{v,2}, \cdots\}$ et on considère le tiré en arrière

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_{v,1}, h)(\frac{r}{2}) \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, hook, dashed] & \mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{P}_I(\chi_{v,1}, h)(\frac{r}{2}) \arrow[r, hook] & \mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l}, \end{tikzcd}$$

Soit alors le quotient $\mathrm{gr}^W_{r,\geq 2}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} := \mathrm{gr}^W_r \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} / \mathcal{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_{v,1}, h)(\frac{r}{2})$. On procède alors comme précédemment en considérant le tiré en arrière

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_{v,2}, h)(\frac{r}{2}) \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, hook, dashed] & \mathrm{gr}^W_{r,\geq 2} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{P}_I(\chi_{v,2}, h)(\frac{r}{2}) \arrow[r, hook] & \mathrm{gr}^W_{r,\geq 2} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l}, \end{tikzcd}$$

et ainsi de suite de façon à obtenir des structures entières $\mathcal{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_v, h)(\frac{r}{2})$ pour tout $h \equiv r+1 \mod 2$ et $1 \leq h \leq d$.

3.1.7. Lemme. — *Les structures entières $\mathcal{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_v, h)(\frac{r}{2})$ ne dépendent pas de r . Par ailleurs on a des isomorphismes*

$$(T-1) \otimes T^\vee : \mathcal{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_v, h)(\frac{r}{2}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{I,\Gamma_{r-2}}(\chi_v, h)(\frac{r-2}{2}) \qquad (3.1.8)$$

pour tout $2 \leq h \leq d$, $h \equiv r-1 \mod 2$ et $3-h \leq r \leq h-1$.

Démonstration. — D'après (3.1.3) et la décomposition du lemme 3.1.6, $(T-1)\otimes T^\vee$ induit des isomorphismes
$$(T-1)\otimes T^\vee : \mathrm{gr}^W_{r,h}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^W_{r,h}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}$$
pour tout $2\leq h\leq d$, $h\equiv r-1 \mod 2$ et $3-h\leq r\leq h-1$. Le résultat en découle alors puisqu'on utilise, pour tous ces r, la même numérotation de Υ pour construire les structures entières $\mathcal{P}_{I,\Gamma_r}(\chi_{v,i},h)(\frac{r}{2})$.

□

3.1.9. Notation. — *On notera alors plus simplement $\mathcal{P}_{I,\Gamma}(\chi_v,t)$ la structure entière de $\mathcal{P}_I(\chi_v,t)$ fournie par $\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ et le choix de l'énumération de Υ.*

Remarque : On ne cherche pas ici à préciser de quelle structure entière il s'agit. Lorsque le niveau en v est grand, on peut montrer que plusieurs telles structures coexistent pour les $\mathcal{P}_I(\pi_v,t)$ lorsqu'on filtre $\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}$.

La suite spectrale dite de Rapoport-Zink associée
$$E_1^{p,q}=H^{p+q}(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_{-p}R\Psi_{I,v}(\overline{\mathbb{Z}}_l)\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})\Rightarrow H^{p+q}(X_{I,\bar{\eta}},V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}), \tag{3.1.10}$$
peut alors se raffiner en utilisant les $\mathcal{P}_{I,\Gamma}(\chi_v,h)(\frac{r}{2})$, ou comme dans [**9**], se décrire à l'aide des $Y_{I,S}$:
$$E_1^{p,q}=\bigoplus_{i\geq\max\{0,-p\}}\ \bigoplus_{\sharp S=p+2i+1} H^{q-2i}(Y_{I,S},V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}(-i)).$$

3.1.11. Proposition. — *Soit $I\in\mathcal{I}$ avec donc I_v un sous-groupe d'Iwahori généralisé. Soit $\widetilde{\mathfrak{m}}$ un idéal premier de $\mathbb{T}_I$ tel qu'il existe r et $i\neq 0$ avec $H^i(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_r\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l})_{\widetilde{\mathfrak{m}}}\neq 0$. Alors la représentation galoisienne $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ associée est réductible.*

Démonstration. — Le théorème 2.2.4 de [**1**] décrit les gradués[3] $\mathrm{gr}^W_r\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l}$ en termes des faisceaux pervers d'Harris-Taylor lesquels sont indexés par les représentations irréductibles cuspidales d'un $GL_g(F_v)$ pour g variant de 1 à d. En niveau Iwahori généralisé à la place v, seules les cuspidales (caractères) pour $g=1$ contribuent.

Les groupes de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor sont explicités au §3 de [**2**]. Pour ce faire on décrit la partie Π^∞-isotypique de ces groupes de cohomologie pour Π une représentation automorphe cohomologique. On note alors que pour avoir de la cohomologie Π^∞-isotypique en dehors du degré médian il faut que la composante locale Π_v en v soit de la forme $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$ pour π_v une représentation tempérée, auquel cas Π^∞ est de la forme $\mathrm{Speh}_s(\pi)$ pour π cuspidale, ce qui en termes galoisiens signifie que la représentation galoisienne associée à Π par la correspondance de Langlands globale s'écrit $\rho|-|^{\frac{1-s}{2}}\oplus\cdots\oplus\rho|-|^{\frac{s-1}{2}}$ où ρ est la représentation galoisienne associé à π par la correspondance de Langlands globale.

□

3. On montre dans loc. cit. que les filtrations de monodromie et de poids de $\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l}$ coïncident à un décalage près.

3.1.12. Proposition. — *On suppose que $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible et on choisit une partition $\underline{m}=(m_1\geq\cdots\geq m_r)$ de d maximale de sorte qu'il existe*
— $I\in\mathcal{I}$ avec I_v un sous-groupe d'Iwahori généralisé associé à $\underline{m}$ et
— un idéal premier $\widetilde{\mathfrak{m}}\subset\mathfrak{m}$ tel que $H^0(X_{I,\bar{s}_v},\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l})_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ est non nul.
Si en outre, tous les $H^i(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_r\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ sont sans torsion, alors la partition $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ associé à l'opérateur de monodromie est égale à celle $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$.

Démonstration. — D'après la proposition précédente si $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible alors les $H^i(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_r\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l})_{\mathfrak{m}}$ sont nuls pour tout $i\neq 0$ et la suite spectrale (3.1.10) de Rapoport-Zink dégénère en E_1. Par maximalité de $\underline{m}$, les idéaux premiers $\widetilde{\mathfrak{m}}\subset\mathfrak{m}$ tels qu'il existe $\Pi\in\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ contribuant à $H^0(X_{I,\bar{s}_v},\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l$ sont tels que, d'après le lemme 1.1.7 la composante locale Π_v est de la forme $\mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1})\times\cdots\times\mathrm{St}_{t_{m_1}}(\chi_{v,m_1})$ où $(t_1\geq\cdots\geq t_{m_1})$ est la partition conjuguée à $\underline{m}$ et où les $\chi_{v,i}$ sont des caractères de $F_v^\times$. En particulier tous les $\rho_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ fournissent la même partition $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ que l'on peut retrouver comme suit en utilisant la filtration de monodromie. Il existe une constante[(4)] e telle que le nombre de lignes de taille i dans le diagramme de Ferrers de $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$ multiplié par e est égal à

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_l}H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_{i-1}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l-\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_l}H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_{i+1}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l.$$

Si en outre, tous les $H^i(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_r\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ sont sans torsion, on a une filtration de $H^0(X_{I,\bar{s}_v},\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{F}}_l})_{\mathfrak{m}}$ dont les gradués sont les $H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_r\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{F}}_l$ et où l'opérateur $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ induit, d'après (3.1.3), des isomorphismes

$$\overline{N}^r_{\mathfrak{m},v}:H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_r\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{F}}_l\simeq H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_{-r}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{F}}_l.$$

Ainsi la décomposition de Jordan de l'opérateur de monodromie agissant sur $H^0(X_{I,\bar{s}_v},\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{F}}_l})_{\mathfrak{m}}$ fournit un diagramme de Ferrers dont le nombre de lignes de longueur i est égal à

$$\begin{gathered}\dim_{\overline{\mathbb{F}}_l}H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_{i-1}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{F}}_l-\dim_{\overline{\mathbb{F}}_l}H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_{i+1}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{F}}_l\\ =\\ \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_l}H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_{i-1}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l-\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_l}H^0(X_{I,\bar{s}_v},\mathrm{gr}^W_{i+1}\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\overline{\mathbb{Q}}_l.\end{gathered}$$

Comme la représentation galoisienne $H^0(X_{I,\bar{s}_v},\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_l}\otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{F}}_l})_{\mathfrak{m}}$ est isotypique relativement à la représentation irréductible $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$, on en déduit que $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}=\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$. □

3.2. Construction d'une classe de torsion. — Soit $\widetilde{\mathfrak{m}}\subset\mathfrak{m}$ un idéal premier de $\mathbb{T}_I$ tel que, cf. la remarque suivant la définition 1.2.4, il existe $I\in\mathcal{I}$ avec I_v un sous-groupe d'Iwahori généralisé associé à la partition $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^*$. *On choisit un tel $\widetilde{\mathfrak{m}}$ de sorte que $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^*$ soit maximal.* Rappelons que nécessairement

$$\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^*\leq\underline{d_{\mathfrak{m},v}}^*,$$

4. que l'on pourrait exprimer en utilisant la dimension des invariants sous I des $\Pi\in\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ pour $\widetilde{\mathfrak{m}}$ décrivant les idéaux premiers contenus dans $\mathfrak{m}$,

et qu'en cas d'égalité il n'y a plus rien à démontrer. Supposons donc l'inégalité précédente stricte de sorte que d'après la proposition 3.1.12, des isomorphismes 3.1.3 et de l'interprétation de l'opérateur de monodromie $N = \log T \otimes T^\vee$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, si tous les $E_{1,\mathfrak{m}}^{p,q}$ étaient libres alors on aurait $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} = \underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ ce qui n'est pas par hypothèse. Ainsi donc il existe r et i tel que

$$H^i(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{gr}_r^W \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m},\mathrm{Tor}} \neq (0).$$

D'après [**1**] et comme remarqué à la fin du §2.1, les faisceaux pervers d'Harris-Taylor des $\mathrm{gr}_r^W(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l})$ en niveau Iwahori généralisé, sont les $\mathcal{P}_I(\chi_v, t)(\frac{\delta}{2})$. Ainsi donc il existe un caractère χ_v de $F_v^\times$ et un entier $t \leq d$ tels que la cohomologie en niveau I de $\mathcal{P}_{I,\Gamma}(\chi_v, t)$ a de la torsion. On reprend alors les arguments du §2 de [**5**] dans un cas plus général i.e. désormais I_v n'est plus le sous-groupe compact maximal mais un sous-groupe d'Iwahori généralisé. Considérons pour ce faire t_0 maximal tel qu'il existe un caractère χ_v et $i_0 \in \mathbb{Z}$ que l'on choisit minimal, pour lesquels

$$H^{i_0}(X_{I,\bar{s}_v}, \mathcal{P}_{I,\Gamma}(\chi_v, t_0) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m},\mathrm{Tor}} \neq (0).$$

3.2.1. Lemme. — *Pour tout $t_0 < t \leq d$, la torsion des $H_c^i(X_{I,\bar{s}_v}^{=t}, HT_{I,\Gamma}(\chi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ est nulle.*

Remarque : dans l'énoncé ci-avant et dans la suite $HT_{I,\Gamma}(\chi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ désigne une structure entière quelconque de $HT_I(\chi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l}$, étant sous entendu que le résultat ne dépend pas du choix d'une telle structure.

Démonstration. — Commençons par noter que comme $X_{I,\bar{s}_v}^{=d}$ est ponctuel, on a nécessairement $t_0 < d$. On raisonne par récurrence sur t du cas trivial $t = d$ à $t_0 + 1$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$ et traitons le cas t. On considère la filtration par les poids de $j_!^{\geq t} HT_{I,\Gamma}(\chi_v, \Pi_t)$ dont les gradués $gr_k^W(!, \chi_v, t)$, cf. [**1**] proposition 4.3.1 complétée par le corollaire 5.4.1, sont nuls pour $k > 0$ ou $-k < \lfloor d \rfloor - t$ et sinon donnés par ${}^p j_{!*}^{\geq(t-k)} HT_{I,\Gamma}(\chi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[-k-1]}_{\chi'_v})(-k/2)$: on rappelle, cf. (2.1.10), que les p et $p+$ extensions intermédiaires coïncident pour les systèmes locaux d'Harris-Taylor associés à un caractère. On considère alors la suite spectrale associée, cf. [**2**] preuve de la proposition 5.1.1 :

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(X_{I,\bar{s}_v}, gr_{-i}^W(!, \chi_v, t) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}) \Rightarrow H^{i+j}(X_{I,\bar{s}_v}, j_!^{\geq t} HT_{I,\Gamma}(\chi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}).$$

Le résultat découle alors trivialement du fait que les $E_{1,\mathfrak{m}}^{i,j}$ sont

— sans torsion, d'après la définition de t_0 et

— nuls pour $i + j \neq 0$.

□

3.2.2. Lemme. — *Avec les notations précédentes, on a $i_0 = 0$, autrement dit pour tout $i \neq 0, 1$, la torsion de $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, \mathcal{P}_{I,\Gamma}(\chi_v, t_0) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ est triviale.*

Démonstration. — On reprend l'étude de la suite spectrale précédente pour $t = t_0$:

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(X_{I,\bar{s}_v}, gr_{-i}^W(!, \chi_v, t_0) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}) \Rightarrow H^{i+j}(X_{I,\bar{s}_v}, j_!^{\geq t_0} HT_{I,\Gamma}(\chi_v, \Pi_{t_0}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}).$$

Par définition de t_0, pour tout $i \neq 0$, les $E_{1,\mathfrak{m}}^{i,j}$ sont nuls pour $i+j \neq 0$ et sinon sans torsion. S'il existait $j<0$ tel que la torsion de $E_{1,\mathfrak{m}}^{0,j}$ était non nul, alors celle de $E_{\infty,\mathfrak{m}}^{j} = H^j(X_{I,\bar{s}_v}, j_!^{\geq t_0} HT_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_{t_0}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ serait aussi non nulle ce qui n'est pas puisque, $X_{I,\bar{s}_v}^{=t_0}$ étant affine, les $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, j_!^{\geq t_0} HT_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_{t_0}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})$ sont nuls pour tout $i<0$. On a ainsi $i_0 \geq 0$ et on conclut en utilisant la dualité de Verdier.

□

On peut calculer les $H^i(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{\geq t_0} HT_{I^v v^\infty,\Gamma}(\chi_v,\Pi_{t_0}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ en utilisant la résolution 2.1.9. On remarque alors, d'après le lemme 3.2.1 et le fait que sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ la cohomologie est concentrée en degré 0, que la torsion de $H^0(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{\geq t_0} HT_{I^v v^\infty,\Gamma}(\chi_v,\Pi_{t_0}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ provient d'un morphisme non strict entre les $\overline{\mathbb{Z}}_l$-modules libres

$$H^0(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, j_{!*}^{=t_0+1} HT_{1_{t_0}}(\chi_v, \Pi_{t_0}\{-1/2\} \otimes \chi_v\{t_0/2\} \otimes \Xi^{1/2}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \\ H^0(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, j_{!*}^{=t_0} HT_{1_{t_0}}(\chi_v,\Pi_{t_0}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}. \quad (3.2.3)$$

Comme par hypothèse $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible, en niveau infini en v, les représentations automorphes Π qui contribuent à la $\overline{\mathbb{Q}}_l$-cohomologie des deux termes de 3.2.3, ont leur composante locale en v, d'après le §5 de [**2**], de la forme

$$\Pi_v \simeq \mathrm{St}_{t_0+1}(\chi_{v,0}) \times \mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1}) \times \cdots \mathrm{St}_{t_r}(\chi_{v,r})$$

où les $\chi_{v,k}$ sont des caractères de $F_v^\times$ avec $\chi_{v,0}$ inertiellement équivalent à χ_v. D'après loc. cit. la contribution d'une telle Π s'obtient en remplaçant dans l'écriture précédente de Π_v, le facteur $\mathrm{St}_{t_0+1}(\chi_{v,0})$ par l'induite normalisée $\mathrm{St}_{t_0}(\chi_{v,0}\{-1/2\}) \times \chi_{v,0}\{t_0/2\}$.

3.2.4. Lemme. — *Pour tout $t \leq t_0$, les $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{=t} HT_{I,\Gamma}(\chi_v,\Pi_t) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ vérifient les propriétés suivantes :*
— *les quotients libres sont nuls pour tout $i \neq 0$;*
— *ils sont nuls pour tout $i < t_0 - t$;*
— *pour $i = t_0 - t$, le sous-module de torsion est non nul.*

Démonstration. — Le premier point découle, comme déjà noté, du fait que $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible. Passons provisoirement en niveau infini en v et calculons les groupes de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{=t} HT_{1_t}(\chi_v,\Pi_t)$ à l'aide de la résolution 2.1.9. En ce qui concerne les $H^i(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{=t} HT_{1_t}(\chi_v,\Pi_t) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ pour $i \leq t_0 - t$, du fait que les strates de Newton sont affines et que donc les $H^\delta(X_{I^v v^\infty,\bar{s}_v}, j_!^{=h} HT(\chi_v,\Pi_h) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})$ sont nuls pour $\delta < 0$, seuls les $t_0 - t + 2$ premiers termes de la résolution interviennent, lesquels se retrouvent aussi, quitte à modifier les composantes infinitésimales, dans la résolution de ${}^p j_{!*}^{=t_0} HT_{1_{t_0}}(\chi_v,\Pi_{t_0})$. Par adjonction, les flèches

$$j_!^{=h+1} HT_{1_t}(\chi_v, \Pi_t\{\frac{t-h-1}{2}\} \otimes \mathrm{Speh}_{h+1-t}(\chi_v\{\frac{t}{2}\} \otimes \Xi^{\frac{h+1-t}{2}} \longrightarrow \\ j_!^{=h} HT_{1_t}(\chi_v, \Pi_t\{\frac{t-h}{2}\} \otimes \mathrm{Speh}_{h-t}(\chi_v\{\frac{t}{2}\} \otimes \Xi^{\frac{h-t}{2}}$$

dans la résolution de ${}^p j^{=t}_{!*} HT_{1_t}(\chi_v, \Pi_t)$ se déduisent de celles

$$j^{=h+1}_! HT_{1_{t_0}}(\chi_v, \Pi_{t_0}\{\frac{t_0-h-1}{2}\} \otimes \mathrm{Speh}_{h+1-t_0}(\chi_v\{\frac{t_0}{2}\}) \otimes \Xi^{\frac{h+1-t_0}{2}} \longrightarrow \\ j^{=h}_! HT_{1_{t_0}}(\chi_v, \Pi_{t_0}\{\frac{t_0-h}{2}\} \otimes \mathrm{Speh}_{h-t_0}(\chi_v\{\frac{t_0}{2}\}) \otimes \Xi^{\frac{h-t_0}{2}}$$

à modification des composantes infinitésimales près. D'après le lemme 3.2.1, les groupes de cohomologie des $j^{=h}_! HT_{1_h}(\chi_v, \Pi_h))$ pour $h \geq t_0$ sont sans torsion de sorte que la torsion cherchée ne provient que des flèches entre les

$$H^0\Big(X_{I^v v^\infty, \bar{s}_v}, j^{=h+1}_! HT_{1_t}(\chi_v, \Pi_t\{\frac{t-h-1}{2}\} \otimes \mathrm{Speh}_{h+1-t}(\chi_v\{\frac{t}{2}\} \otimes \Xi^{\frac{h+1-t}{2}} \otimes V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}\Big) \\ \longrightarrow \\ H^0\Big(X_{I^v v^\infty, \bar{s}_v}, j^{=h}_! HT_{1_t}(\chi_v, \Pi_t\{\frac{t-h}{2}\} \otimes \mathrm{Speh}_{h-t}(\chi_v\{\frac{t}{2}\} \otimes \Xi^{\frac{h-t}{2}} \otimes V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}\Big)$$

et plus précisément, du fait qu'elles sont ou non strictes. Or comme remarqué ci-avant, cette propriété se lit aussi dans la suite spectrale associé au calcul des groupes de cohomologie de ${}^p j^{=t_0}_{!*} HT_{1_{t_0}}(\chi_v, \Pi_{t_0})$, ce qui donne les propriétés de l'énoncé en niveau $I^v v^\infty$. Pour redescendre en niveau I, on utilise la suite spectrale

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i(I_v, H^j(X_{I^v v^\infty, \bar{s}_v}, P)) \Rightarrow H^{i+j}(X_{I^v I_v, \bar{s}_v}, P) \qquad (3.2.5)$$

où P est un faisceau pervers quelconque : les propriétés sont alors clairement vérifiées en niveau I. □

3.3. Diminution du niveau. — On reprend les notations du paragraphe précédent où $\underline{d}$ est la partition associée au sous-groupe d'Iwahori généralisé I_v. On se propose dans un premier temps de montrer le résultat suivant.

3.3.1. Proposition. — *Sous les hypothèses du théorème 1.3.2, il existe $i \in \mathbb{Z}$ ainsi qu'un niveau $J = I^v J_v$ avec J_v un sous-groupe d'Iwahori généralisé associé à une partition $\underline{m}'$ strictement plus grande que la partition $\underline{m}$ associée à I_v, tel que $H^i(X_{J,\bar{\eta}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ est non nul et de torsion.*

Démonstration. — Considérons une représentation automorphe Π vérifiant les points suivants :

— elle est ξ-cohomologique avec pour composante locale en v

$$\Pi_v \simeq \mathrm{St}_{t_0+1}(\chi_{v,0}) \times \mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1}) \times \cdots \mathrm{St}_{t_r}(\chi_{v,r})$$

où les $\chi_{v,k}$ sont des caractères de $F_v^\times$ avec $\chi_{v,0}$ inertiellement équivalent à χ_v ;

— en niveau I, l'application en les $\Pi^{\infty,v}$-composantes isotypiques de (3.2.3) n'est pas stricte. En particulier la partition associée à $(t_0, 1, t_1, \cdots, t_r)$ doit être inférieure ou égale à $\underline{d}^*$.

On choisit une telle représentation Π de sorte que la partition associée à $(t_0+1, t_1, \cdots, t_r)$ soit minimale. D'après la preuve du lemme précédent,

— en utilisant la suite spectrale (3.2.5) pour $P = \mathcal{P}_{I,\Gamma}(\chi_v, 1) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}$, on obtient que la torsion de $H^{1-t_0}(X_{I^v I'_v}, \mathcal{P}_{I,\Gamma}(\chi_v, 1) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ est non nulle où I'_v est un sous-groupe d'Iwahori associé à la partition $(d'_{\mathfrak{m},v})^*$ duale de $(\overbrace{1, \cdots, 1}^{t_0+1}, t_1, \cdots, t_r)$;

— pour tout $t > 1$ et en notant $I' := I^v I'_v$, les groupes de cohomologie $H^i(X_{I^v I'_v,\bar{s}_v}, \mathcal{P}_{I',\Gamma}(\chi_v, t) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ sont sans torsion.

A partir de la torsion construite dans $H^{1-t_0}(X_{I^v I'_v}, \mathcal{P}_{I',\Gamma}(\chi_v, 1) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$, on cherche à construire de la torsion dans un des $H^i(X_{I'}, V_\xi)_{\mathfrak{m}}$. Pour ce faire il suffit que I' contienne strictement I puisqu'alors tous les quotients libres de la suite spectrale de Rapoport-Zinkl (3.1.10) sont nuls. Comme

$$(\overbrace{1, \cdots, 1}^{t_0+1}, t_1, \cdots, t_r) \leq (t_0, 1, t_1, \cdots, t_r) \leq \underline{d}^*$$

avec égalité dans la première si et seulement si $t_0 = 1$, on en déduit le lemme suivant.

3.3.2. Lemme. — *Si le diagramme de Ferrers étiqueté $T_{\mathfrak{m},v}$ ne contient pas deux blocs de taille 1 d'étiquettes $\{\lambda, q\lambda\}$ ou si $t_0 > 1$ alors I'_v contient strictement I_v i.e. $(d'_{\mathfrak{m},v})^*$ est strictement plus grande que $d^*_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}$.*

On suppose à présent que $t_0 = 1$ de sorte que tous les $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, \mathcal{P}_{I,\Gamma}(t, \chi_v) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ sont libres dès que $t > 1$.

3.3.3. Lemme. — *Dans le cas $t_0 = 1$ et si $I'_v = I_v$, alors $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ n'est pas détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$ au sens de la définition 1.3.1.*

Démonstration. — Notons suivant [**4**], $\mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l})$ l'image du morphisme d'adjonction

$$j^{=1}_! j^{=1,*} \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l} \longrightarrow \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}.$$

— C'est un faisceau pervers qui correspond au noyau de l'opérateur de monodromie.

— Son conoyau $\mathrm{coFil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l})$ est libre, et $\mathcal{P}_{I,\Gamma}(1, \chi_v)$ n'en est pas un constituant quel que soit le caractère χ_v.

Les groupes de cohomologie $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{coFil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ peuvent alors se calculer en utilisant une filtration de stratification quelconque de sorte que ses gradués sont les $\mathcal{P}_{I,\Gamma}(t, \chi_v)(\frac{t-1}{2} - k)$ pour $1 < t \leq d$ et $0 \leq k < t - 1$. Par hypothèse les termes $E_1^{p,q}$ de cette suite spectrale sont sans torsion et concentrés sur la droite $p+q = 0$. Comme dans la preuve de la proposition 3.1.12, par maximalité de I et d'après (3.1.8), l'opérateur de monodromie sur $H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{coFil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Z}}_l}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ a pour diagramme de Ferrers un multiple de celui de $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^{(1)}$ où $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ est un idéal premier quelconque tel qu'il existe $\Pi \in \Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ contribuant à $\overline{H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{Q}}_l} \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}}$. L'absence de torsion des $H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathcal{P}_{I,\Gamma}(t, \chi_v)(\frac{t-1}{2} - k) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ pour tout $1 < t \leq d$ et $0 \leq k < t - 1$, nous fournit comme dans la preuve de 3.1.12, que le diagramme de Ferrers associé à $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ sur

$$H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{coFil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_l}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}} \simeq H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_l}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}} \; / \; H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathrm{Fil}^1_!(\Psi_{I,v,\overline{\mathbb{F}}_l}) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$$

est un multiple de celui de $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}^{(1)}$. Ainsi en particulier $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ n'est pas détérioré. $\square$

Ainsi sous les hypothèses du théorème 1.3.2, on a construit une classe de torsion dans la cohomologie en niveau $J = I^v J_v$ avec I_v strictement contenu dans J_v. $\square$

Remarque : en reprenant la description précédente de l'apparition de la torsion, il est aussi possible d'augmenter le niveau en une place de ramification de I autre que v.

3.4. Un énoncé de non dégénérescence de la monodromie. — On change à présent de point de vue : considérant qu'il est à priori difficile d'avoir des informations sur la partition $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$, on cherche des conditions pour que $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}} = \underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ ou au moins pour que $\underline{d_{\mathfrak{m},v}}$ ne soit pas trop « éloignée » de $\underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$. L'idée est de reprendre les arguments précédents, i.e. d'étudier la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura. Pour résumer la preuve précédente, sous les hypothèses 1-2-3) du théorème 1.3.2, on montre

— tout d'abord que, quitte à diminuer le niveau en v, un des groupes de cohomologie d'un faisceau pervers d'Harris-Taylor de la forme $\mathcal{P}(1, \chi_v)$ a de la torsion

— puis en utilisant une des hypothèses 4), on vérifie que cette torsion se propage à la cohomologie de la fibre générique de la variété de Shimura.

Prenons alors comme point de départ des conditions explicites sur $\mathfrak{m}$ ou $\widetilde{\mathfrak{m}}$, pour que, quel que soit le niveau en v, la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie de la fibre générique de la variété de Shimura à coefficients dans V_ξ soit sans torsion. D'après le théorème 4.4 de [**6**], cf. aussi [**7**] dans un cadre plus général, il suffit qu'il existe une place $w \in \mathrm{Spl}(I)$ vérifiant la propriété suivante

$$\alpha \in S_{\mathfrak{m}}(w) \Rightarrow q_w \alpha \notin S_{\mathfrak{m}}(w), \tag{3.4.1}$$

auquel cas la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie de $V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ est concentrée en degré médian et sans torsion.

3.4.2. Corollaire. — *Avec les notations et sous les hypothèses 1-2) de 1.3.2, on suppose en outre qu'il existe une place $w \in \mathrm{Spl}(I)$ telle l'implication de (3.4.1) soit vérifiée. Alors $\overline{N_{\mathfrak{m},v}}$ n'est pas détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$. Si en outre, cf. l'hypothèse 4-ii) de 1.3.2, la composante locale en v de $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ n'est pas de la forme $\chi_{v,1} \times \chi_{v,2} \times ?$ pour $\chi_{v,1}$ et $\chi_{v,2}$ des caractères de $F_v^\times$ tels que $\chi_{v,2} \equiv \chi_{v,1}\nu \mod l$ alors*

$$\underline{d_{\mathfrak{m},v}} = \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}.$$

Remarque : pour s'assurer que la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie n'a pas de torsion, on peut aussi utiliser [**11**], et demander que

— le paramètre ξ soit très régulier au sens de la définition 7.18 de loc. cit.,

— que l soit bon, cf. la définition 2.3 de loc. cit.

— et que le niveau I soit maximal en l.

Démonstration. — On reprend les arguments du paragraphe précédent et donc l'étude de la torsion dans la localisation en $\mathfrak{m}$ de la suite spectrale de Rapoport-Zink. Rappelons que $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ étant supposé irréductible, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, cette suite spectrale dégénère en E_1 de sorte que si aucun de ses termes $E_1^{p,q}$ n'a de la torsion alors $\underline{d_{\mathfrak{m},v}} = \underline{d_{\widetilde{\mathfrak{m}},v}}$. Si au contraire un des termes a de la torsion alors, cf. le lemme 3.2.2, il existe $1 \leq t_0 \leq d$ que l'on choisit minimal tel que la torsion de $H^0(X_{I,\bar{s}_v}, \mathcal{P}_{I,\Gamma}(\chi_v, t_0) \otimes V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ est non nulle. En reprenant le raisonnement de la preuve de la proposition 3.3.1, on en déduit que, comme par hypothèse la localisation en $\mathfrak{m}$ de la cohomologie de la variété de Shimura est sans torsion, que nécessairement $t_0 = 1$. Pour que cette torsion n'apparaisse pas dans l'aboutissement de la suite spectrale de Rapoport-Zink, il faut donc nécessairement,

— avec les notations du lemme 3.3.3, que $I'_v = I_v$ et donc $\overline{N}_{\mathfrak{m},v}$ n'est pas détérioré relativement à $\widetilde{\mathfrak{m}}$,
— et que, cf. le lemme 3.3.2, que la composante locale en v de $\Pi_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ n'est pas de la forme $\chi_{v,1} \times \chi_{v,2} \times ?$ pour $\chi_{v,1}$ et $\chi_{v,2}$ des caractères de $F_v^\times$ tels que $\chi_{v,2} \equiv \chi_{v,1}\nu \mod l$.

Les deux résultats de l'énoncé en découle alors trivialement. $\square$

Références

[1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.

[2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.

[3] P. Boyer. La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre. *soumis*, 2013.

[4] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de Shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.

[5] P. Boyer. Torsion classes in the cohomology of KHT Shimura's varieties. *soumis*, pages 1–20, 2017.

[6] Pascal Boyer. Sur la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, pages 1–19, 2017.

[7] A. Caraiani and P. Scholze. On the generic part of the cohomology of compact unitary Shimura varieties. *Preprint*, 2015.

[8] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[9] L. Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. In *Périodes p-adiques*, number 223 in Astérisque, 1994.

[10] Chandrashekhar Khare and Jean-Pierre Wintenberger. Serre's modularity conjecture. *Inventiones Mathematicae*, 178 (3), 2009.

[11] K.-W. Lan and J. Suh. Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on compact PEL-type Shimura varieties. *Duke Math.*, 161(6) :951–1170, 2012.

[12] K. A. Ribet. On modular representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ arising from modular forms. *Invent. Math.*, 100(2) :431–476, 1990.

[13] P. Schneider and U. Stuhler. The cohomology of p-adic symmetric spaces. *Invent. Math.*, 105(1) :47–122, 1991.

[14] R. Taylor and T. Yoshida. Compatibility of local and global Langlands correspondences. *J.A.M.S.*, 20 :467–493, 2007.

[15] M.-F. Vignéras. Induced R-representations of p-adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.

BOYER PASCAL • *E-mail :* boyer@math.univ-paris13.fr, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25