RÉSEAUX D'INDUCTION DES REPRÉSENTATIONS ELLIPTIQUES DE LUBIN-TATE

par

Boyer Pascal

Résumé. — Nous étudions la réduction modulo l de certaines représentations elliptiques ; pour chacune de ces représentations nous explicitons un réseau naturellement obtenu par récurrence via l'induction parabolique, en décrivant le graphe des extensions entre les différents sous-quotients irréductibles de sa réduction modulo l. La motivation essentielle de ce travail est que ces réseaux apparaissent dans la cohomologie des tours de Lubin-Tate.

***Abstract* (Induced lattices of Lubin-Tate elliptic representations).** — We study the reduction modulo l of some elliptic representations ; for each of these representations, we give a particular lattice naturally obtained by parabolic induction in giving the graph of extensions between its irreducible sub-quotient of its reduction modulo l. The principal motivation for this work, is that these lattices appear in the cohomology of Lubin-Tate towers.

Table des matières

Introduction

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et g un entier strictement positif. Pour π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$, nous étudions dans un premier temps les sous-quotients irréductibles de la réduction modulo l de la représentation de Steinberg généralisée $\mathrm{St}_s(\pi)$ pour $s \geqslant 1$, que l'on note aussi $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$ ou $[\overleftarrow{s-1}]$ lorsque π est la représentation triviale de $GL_1(K)$. Pour $s = 1$ on sait d'après [**10**] que $\varrho = r_l(\pi)$ est irréductible cuspidale mais pas forcément supercuspidale. On note $m(\varrho)$ le cardinal de l'ensemble des $\varrho\{i\}$ pour $i \in \mathbb{Z}$ si celui-ci n'est pas réduit à $\{\varrho\}$ et sinon $m(\varrho) = l$; le nombre de sous-quotients irréductibles de $r_l(\mathrm{St}_s(\pi))$ est alors égal au cardinal de

$$\mathcal{I}_s := \{\underline{i} = (i_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} :\ s - m(\varrho)\sum_{k=0}^{\infty} i_k l^k \geqslant 0\}.$$

Plus précisément, cf. la proposition 3.1.5, à tout $\underline{i} \in \mathcal{I}_s$ est associé un unique sous-quotient irréductible de $r_l(\mathrm{St}_s(\pi))$ noté $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ caractérisé par le fait qu'il est de niveau de cuspidalité $\underline{i} = (i_0, \cdots, i_u, 0, \cdots)$, i.e., cf. le §2, que son image par le foncteur de Jacquet associé au parabolique standard de Levi

$$GL_{s_\varrho(\underline{i})g}(K) \times GL_{m(\varrho)i_k g}(K) \times \cdots \times GL_{m(\varrho)i_u l^u}(K)$$

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

Mots clefs. — Représentations modulaires, involution de Zelevinski.

est cuspidale, où $s_\varrho(\underline{i}) = s - m(\varrho)\underline{i}(l)$ avec $\underline{i}(l) = \sum_{k=0}^\infty i_k l^k \geqslant 0$. Ces constituants se décrivent en fait simplement à partir de l'involution de Zelevinski Z_1, cf. le §2.3, sur les représentations superunipotentes telle qu'elle est définie dans [**11**] et dont un calcul explicite est donné dans [**9**] : précisément, proposition 3.1.5, $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s-1}])$ est égale à l'image de la représentation triviale de $GL_{sg}(K)$ par Z_1 et

$$I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) = \Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_0-1}]) \boxtimes \rho_0\Big) \times \cdots \times \Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_u-1}]) \boxtimes \rho_u\Big) \times \Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s_\varrho(\underline{i})-1}]) \boxtimes \rho_{-1}\Big)$$

avec pour $i = 0, \cdots, u$,

$$\rho_i = \mathrm{St}_{m(\varrho)l^i}(\rho\{\frac{m(\varrho)l^i - s}{2}\}), \qquad \rho_{-1} = \varrho\{\frac{s - s_\varrho(\underline{i})}{2}\},$$

et où pour $\pi_0 =< a >$ une représentation superunipotente de paramètre de Zelevinski $a = (1, r_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$, $\pi_0 \boxtimes \varrho$ désigne la représentation de paramètre de Zelevinski, $(\varrho, r_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$, cf. le §1.3.

Avec les notations du §1.2, en utilisant le morphisme surjectif $[\overleftarrow{s-2}]_\pi \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_\pi \twoheadrightarrow [\overleftarrow{s-1}]_\pi$, on construit à la proposition 3.2.1, par récurrence, un réseau $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ de $\mathrm{St}_s(\pi)$ tel que dans le graphe des extensions de sa réduction modulo l, les seules flèches, i.e. les extensions non triviales entre deux constituants irréductibles de $r_l(\mathrm{St}_s(\pi))$, sont celles qui relient $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ et $I_{\underline{i'}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ où $\underline{i} < \underline{i'}$ sont deux éléments successifs de $\mathcal{I}_s$ pour l'ordre lexicographique inverse.

On reprend au §4 les résultats précédents pour les représentations elliptiques, dites de Lubin-Tate, $LT_t(s) := [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$; ainsi, proposition 4.1.3, les constituants irréductibles de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ sont indexés par les éléments $\underline{i} \in \mathcal{I}_{t-1}$ de telle sorte que le constituant de niveau de cuspidalité $\underline{i}$ est

$$I_{\underline{i}}([\overleftarrow{m(\varrho)\underline{i}(l)-1}]_\pi) \times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t_\varrho(\underline{i})-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$$

où comme précédemment $\underline{i}(l) = \sum_{k=0}^\infty i_k l^k$ et $t_\varrho(\underline{i}) = t - m(\varrho)\underline{i}(l)$. Contrairement au cas $s = t$, l'image du constituant de niveau de cuspidalité $\underline{i} \in \mathcal{I}_{t-1}$ de $r_l([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$ par un foncteur de Jacquet n'est, en général, pas irréductible ni même semi-simple, cf. l'exemple de la fin du paragraphe 4 ; ses constituants irréductibles ne sont pas tous de niveau de cuspidalité $\underline{i}$ à l'exception notable de tout sous-espace et tout quotient irréductible.

En ce qui concerne les réseaux, comme la réduction modulo l de $[\overrightarrow{a}]_\pi$ est irréductible, elle ne possède à isomorphisme près qu'un seul réseau stable ; ainsi les réseaux des Steinberg généralisés construits précédemment, définissent par induction des réseaux de $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ qui s'avèrent être tous isomorphes, proposition 4.2.1 et la remarque qui suit la proposition 4.2.2 ; la description du graphe d'extensions de la réduction modulo l de ces réseaux est similaire à celle de $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-2}]_\pi)$ et donnée à la proposition 4.2.2.

Dans [**3**], nous montrons que les représentations elliptiques du type $LT_t(\pi, s) := [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ apparaissent dans la cohomologie des modèles locaux définis par Carayol dans [**5**], généralisant ceux introduits par Lubin et Tate. Dans [**4**], nous montrons que les réseaux introduits dans ce papier sont ceux de la $\overline{\mathbb{Z}}_l$-cohomologie de ces espaces. En ce qui concerne les autres représentations elliptiques, la situation semble plus complexe comme le montre l'exemple de la fin du §2.4 : il n'y a plus, en général, unicité du constituant ϱ-superunipotent de la réduction modulo l d'une représentation elliptique, par contre le cas limite classique suggère que la multiplicité 1 serait conservée.

1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$

Dans la suite K désigne une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel de cardinal q une puissance de p. Dans cet article nous étudierons des représentations admissibles π de $GL_d(K)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, $\overline{\mathbb{Z}}_l$ ou $\overline{\mathbb{F}}_l$ où l est un nombre premier distinct de p. En ce qui concerne la torsion, suivant [**3**], nous la noterons $\pi\{n\}$ de sorte que l'action d'un élément $g \in GL_d(K)$ est donnée par $\pi(g)|\det g|^n$ où $| - |$ est la valeur absolue sur K.

1.1. Induction et foncteur de Jacquet. —

1.1.1. Définition. — Pour une suite $r_1, r_2, \cdots, r_k$ telle que $\sum_{i=1}^k r_i = d$, on note $P_{r_1,r_2,\cdots,r_k}$ le sous-groupe parabolique de GL_d standard associé au sous-groupe de Levi $GL_{r_1}(F_v) \times GL_{r_2}(F_v) \times \cdots \times GL_{r_k}(F_v)$ et on note $N_{r_1,\cdots,r_k}$ son radical unipotent. On mettra en exposant *op* pour désigner les paraboliques opposés. Pour $\underline{\lambda} = (d = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r)$, on note $P_{\underline{\lambda}} = P_{\lambda_r, \lambda_{r-1}-\lambda_r, \cdots, \lambda_1-\lambda_2}$.

– Pour π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, $\pi_1 \times \pi_2$ désigne l'induite à $GL_{n_1+n_2}(K)$
$$\mathrm{Ind}_{P_{n_1,n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}$$
relativement au parabolique standard, que l'on notera aussi parfois sous sa forme normalisée $\mathrm{ind}_{P_{n_1,n_2}(K)} \pi_1 \otimes \pi_2$. Dans le cas du parabolique opposé au standard, on notera l'induite correspondante $\pi_1 \times_{op} \pi_2$.
– *Foncteurs de Jacquet* : soit $P = MN$ un parabolique de GL_d de Lévi M et de radical unipotent N. Pour π une représentation admissible de $GL_d(K)$, l'espace des vecteurs $N(K)$-coinvariants est stable sous l'action de $M(K) \simeq P(K)/N(K)$. On notera $J_P(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}$: c'est un foncteur exact.

Formules d'adjonction : J_P est un adjoint à gauche de ind_P, c'est *la réciprocité de Frobenius.* Par ailleurs *la deuxième formule d'adjonction*, prouvée par Dat dans [**7**] en toute généralité, affirme que $\times_{P^{op}} \otimes \delta_P^{-1}$ est un adjoint à gauche de J_P.

1.2. Représentations elliptiques sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$. — On rappelle dans ce paragraphe, quelques notations sur les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations admissibles de $GL_d(K)$, tirées de [**3**].

1.2.1. Définitions. — *Soit g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$:*

- les sous-quotients irréductibles de $V(\pi, s) := \pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \cdots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$ seront dits elliptiques de type π ;

- $V(\pi, s)$ possède un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible que l'on notera $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$ (resp. $[\overrightarrow{s-1}]_\pi$)) ; c'est une représentation de Steinberg (resp. de Speh) généralisée notée habituellement $\mathrm{St}_s(\pi)$ (resp. $\mathrm{Speh}_s(\pi)$) ;

- pour π_1 et π_2 des représentations respectivement de $GL_{t_1g}(K)$ et $GL_{t_2g}(K)$, on notera $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ (resp. $\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2$) l'induite $\pi_1\{-t_2/2\} \times \pi_2\{t_1/2\}$ (resp. $\pi_1\{t_2/2\} \times \pi_2\{-t_1/2\}$) relativement au parabolique standard, où on omet la référence à g car en général le contexte sera clair. On notera comme précédemment $\overrightarrow{\times}_{op}$ et $\overleftarrow{\times}_{op}$ les mêmes induites relativement au parabolique opposé.

On conviendra que $\Pi_t \times [\overleftrightarrow{-1}]_\pi := \Pi_t$.

Propriétés :

- pour $(\pi_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ des représentations de $GL_{t_ig}(K)$, on a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned} (\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2)^\vee \simeq &\quad \pi_1^\vee \overleftarrow{\times} \pi_2^\vee \\ (\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2) \overrightarrow{\times} \pi_3 = &\quad \pi_1 \overrightarrow{\times} (\pi_2 \overrightarrow{\times} \pi_3) \\ (\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2) \overleftarrow{\times} \pi_3 = &\quad \pi_1 \overleftarrow{\times} (\pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3) \end{aligned}$$
On a les mêmes égalités pour les versions relativement aux paraboliques opposés au standard. En outre si π_1 et π_2 sont elliptiques de type π, il en est de même de $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ et donc de $\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2$.
- soit g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$, on a
$$J_{P_{tg,(s-t)g}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{(s-t)/2\}} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi\{-t/2\}}$$
$$J_{P_{tg,(s-t)g}}([\overrightarrow{s-1}]_\pi) = [\overrightarrow{t-1}]_{\pi\{(t-s)/2\}} \otimes [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi\{t/2\}}$$
$$J_{P^{op}_{tg,(s-t)g}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{(t-s)/2\}} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi\{t/2\}}$$

$$J_{P^{op}_{tg,(s-t)g}}(\overrightarrow{[s-1]}_\pi) = \overrightarrow{[t-1]}_{\pi\{(s-t)/2\}} \otimes \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi\{-t/2\}}$$

- l'induite
$$\overleftarrow{[t-1]}_\pi \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_\pi \qquad (\text{resp. } \overleftarrow{[t-1]}_\pi \overrightarrow{\times}_{op} \overrightarrow{[s-t-1]}_\pi)$$
est de longueur 2 ; on notera $[\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi$ (resp. $[\overrightarrow{s-t},\overleftarrow{t-1}]_\pi$)) son unique sous-espace irréductible, et $[\overleftarrow{t},\overrightarrow{s-t-1}]_\pi$ (resp. $[\overrightarrow{s-t-1},\overleftarrow{t}]_\pi$)) son unique quotient irréductible ;
- par dualité, l'induite
$$\overleftarrow{[t-1]}_\pi \overleftarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_\pi \qquad (\text{resp. } \overleftarrow{[t-1]}_\pi \overleftarrow{\times}_{op} \overrightarrow{[s-t-1]}_\pi)$$
est de longueur 2 avec $[\overrightarrow{s-t-1},\overleftarrow{t}]_\pi$ (resp. $[\overleftarrow{t},\overrightarrow{s-t-1}]_\pi$)) pour unique sous-espace irréductible et $[\overrightarrow{s-t},\overleftarrow{t-1}]_\pi$ (resp. $[\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi$)) pour unique quotient irréductible.

Remarque : dans [**3**], nous montrons que les représentations $[\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi$ apparaissent dans la cohomologie des tours dites de Lubin-Tate définis dans [**5**] ; pour cela on les notera sous la forme $LT_t(\pi, s)$.

1.3. Classification à la Zelevinski sur $\overline{\mathbb{F}}_l$. — On rappelle que l et p désignent des nombres premiers distincts et que q est une puissance de p. On note $e_l(q)$ l'ordre de l'image de q dans $\mathbb{F}_l^\times$. On dit que l est *banal* pour $GL_d(K)$ si $e_l(q) > d$.

1.3.1. Définition. — Une représentation ϱ de $GL_d(K)$ est dite cuspidale si pour tout parabolique propre P, $J_P(\pi)$ est nul. Elle sera dite supercuspidale si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre. On notera $\mathrm{Cusp}_l = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{Cusp}_l(n)$ la réunion de l'ensemble des classes d'isomorphismes des $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentations irréductibles cuspidales de $GL_n(K)$.

1.3.2 — Segments de Zelevinski : le caractère non ramifié $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto p^{\mathrm{val}(\det g)} \in \overline{\mathbb{F}}_l$ agit sur Cusp_l par multiplication.

1.3.3. Définitions. — *Soit ϱ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$:*
- *la droite associée à ϱ est par définition l'ensemble $\{\varrho\{i\} \ / \ i \in \mathbb{Z}\}$; il est de cardinal fini $\epsilon(\varrho)$ un diviseur de $e_l(q)$, cf.* [**12**] *p.51. On pose comme dans loc. cit. $m(\varrho) = \epsilon(\varrho)$ si $\epsilon(\varrho) > 1$ et sinon $m(\varrho) = l$;*
- *un segment de Zelevinski associé à ϱ et de longueur $r \geqslant 1$ est une suite*
$$(\varrho, r) = (\varrho, \varrho\{1\}, \cdots, \varrho\{r-1\}).$$
- *Un **paramètre de Zelevinski** est un multi-ensemble $a = (\varrho_i, r_i)_{1 \leqslant i \leqslant t}$ de segments de Zelevinski dans Cusp_l ; le support s de a est la réunion des multi-ensembles (ϱ_i, r_i).*
- *Un paramètre de Zelevinski de la forme $(\varrho_i, r)_{1 \leqslant i \leqslant t}$ où $(\varrho_1, \cdots, \varrho_t)$ est un segment $(\varrho, m(\varrho)l^u)$ pour $u \geqslant 0$, est appelé **un cycle**.*
- *Un paramètre de Zelevinski qui ne contient pas de cycle est dit **restreint**. Si son support cuspidal est supercuspidal le paramètre est dit **supercuspidal**.*

Remarque : (cf. [**12**] p.54) étant donné un paramètre de Zelevinski a, si le segment (ϱ, r) apparaît dans a avec a cuspidal mais non supercuspidal, alors il existe une représentation ϱ' supercuspidale et un entier $s = m(\varrho')l^u$ tel que $\varrho = \mathrm{St}_s(\varrho')$. En remplaçant systématiquement de tels (ϱ, r) par le cycle $(\varrho'\nu^i, r)_{0 \leqslant i < s}$, on obtient un paramètre supercuspidal a_{sc}. En procédant en sens inverse on peut remplacer tous les cycles par des segments de la forme $(\mathrm{St}_s(\varrho)\{i\}, r)_{0 \leqslant i < s}$ afin d'obtenir un paramètre restreint a_{rst}.

1.3.4 — Classification des représentations irréductibles, cf. [**12**] V.9 : étant donné un paramètre de Zelevinski $a = (\varrho_i, r_i)_{1 \leqslant i \leqslant t}$, on lui associe une représentation irréductible $< a >$ qui vérifie les propriétés suivantes :

– si $a = (\varrho, r)$ alors $< (\varrho, r) >$ est l'unique, à isomorphisme près [1], sous-représentation de l'induite parabolique $\varrho \times \varrho\nu \times \cdots \times \varrho\nu^{r-1}$ telle que
$$J_{P_{n,n,\cdots,n}}(< (\varrho, r) >) = \varrho \times \cdots \otimes \varrho\{r-1\};$$
– de manière générale $< a >$ est l'unique sous-quotient de
$$\pi(a) :=< (\varrho_1, r_1) > \times \cdots \times < (\varrho_t, r_t) >$$
dont le niveau de Whittaker, cf. loc. cit., est le même que celui de $\pi(a)$;
– on a $< a >=< a_{sc} >=< a_{rst} >$ et le support supercuspidal (resp. cuspidal) de $< a >$ est le support de a_{sc} (resp. de a_{rst}) ;
– pour a et a' deux paramètres de Zelevinski supercuspidaux distincts alors $< a >$ et $< a' >$ ne sont pas isomorphes ;
– l'application $a \mapsto < a >$ est surjective.

1.3.5. Proposition. — *([**12**] III.5.14) L'induite parabolique*
$$\varrho \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} \varrho = \varrho\{\frac{1-s}{2}\} \times \cdots \times \varrho\{\frac{s-1}{2}\}$$
admet un unique sous-quotient non dégénéré que l'on note $\mathrm{St}_s(\varrho)$*. La représentation* $\mathrm{St}_s(\varrho)$ *est cuspidale si et seulement si*
$$s = 1, m(\varrho), m(\varrho)l, \cdots, m(\varrho)l^u, \cdots$$
La réunion de ces dernières avec les supercuspidales forment l'ensemble des représentations cuspidales.

1.4. Réduction modulo l des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations entières : généralités. — Une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation lisse de longueur finie π de $GL_n(K)$ est dite entière s'il existe une extension finie $E/\mathbb{Q}_l$ d'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ et une $\mathcal{O}_E$-représentation L de $GL_n(K)$ qui est un $\mathcal{O}_E$-module libre tel que $\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L \simeq \pi$ et tel que L est un $\mathcal{O}_E GL_n(K)$-module de type fini. Soit κ_E le corps résiduel de $\mathcal{O}_E$, on dit que $\kappa_E \otimes_{\mathcal{O}_E} L$ est la réduction de L et que $\overline{\mathbb{F}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L$ est la réduction modulo l de L.

1.4.1 — Principe de Brauer-Nesbitt : la semi-simplifiée de $\overline{\mathbb{F}}_l \otimes_{\mathcal{O}_E} L$ est une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation de $GL_n(K)$ de longueur finie qui ne dépend pas du choix de L. Son image dans le groupe de Grothendieck sera notée $r_l(\pi)$ et dite la réduction modulo l de π.
Remarque : la réduction modulo l, commute avec l'induction parabolique et les foncteurs de Jacquet. Elle ne respecte pas le caractère supercuspidal mais la réduction modulo l d'une représentation irréductible entière supercuspidale est irréductible cuspidale. Ainsi, pour π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible cuspidale entière, on dira qu'une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation est π-unipotente si elle est $r_l(\pi)$-superunipotente.

On rappelle, cf. [**10**] II.4.12, qu'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible supercuspidale de $GL_n(K)$ est entière si et seulement si son caractère central est entier. De manière générale une représentation irréductible de $GL_n(K)$ est entière si et seulement si les constituants irréductibles de son support supercuspidal $sc(\pi)$ sont entiers.

1.4.2 — Étant donnée une représentation Π de $GL_d(K)$, on lui associe le graphe orienté Γ_Π défini comme suit :
– ses sommets sont les différents facteurs irréductibles, $\pi_1, \cdots, \pi_c$, de Π vu dans le groupe de Grothendieck ;
– une flèche relie π_i à π_j si et seulement s'il existe un sous-quotient de Π qui est une extension *non triviale* de $\overline{\pi}_j$ par $\overline{\pi}_i$.

1. i.e. la multiplicité n'est pas forcément égale à 1 dans le cas non banal

Dans le cas où Π est une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible entière de $GL_d(K)$, pour un réseau stable Λ, Γ_Λ désigne, à la manière de [**1**], le graphe de la représentation $\Lambda \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$ au sens ci-dessus. Dans les paragraphes suivants nous construirons des exemples de réseaux pour les représentations elliptiques $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ où π est une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible cuspidale ; ce sont ceux qui apparaissent « naturellement » dans la cohomologie des tours de Lubin-Tate, cf. [**4**]. Signalons par ailleurs que l'on dispose toujours du réseau particulier donné par le lemme suivant et dont le graphe ne possède aucune flèche.

1.4.3. Proposition. — *(cf. le lemme 6.11 de* [**6**]*) Étant donnée une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation entière irréductible π de $GL_n(K)$, il existe un réseau π^l tel que $\pi^l \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$ est semi-simple.*

2. Représentations ϱ-superunipotentes

2.1. Définitions. — Rappelons qu'un bloc dans $\mathrm{mod}_{\overline{\mathbb{F}}_l} GL_n$ est une sous-catégorie abélienne pleine qui est un facteur direct sans être le produit direct de deux sous-catégories abéliennes non nulles. Soit (M,ρ) une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Levi M d'un parabolique de GL_n. On considère

$$\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}, \qquad \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}$$

avec $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentations irréductibles de GL_n qui sont des sous-quotients de $\mathrm{Ind}_{M'}^{GL_n} \rho'$ pour (M',ρ') inertiellement équivalent à (M,ρ) et $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}$ la sous-catégorie abélienne de $\mathrm{mod}_{\overline{\mathbb{F}}_l} GL_n$ constituée des $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentations de GL_n dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}$.

2.1.1. Définition. — Dans le cas où ρ est la représentation triviale du groupe des matrices diagonales, le bloc correspondant est appelé le bloc unipotent. Les représentations irréductibles de ce bloc sont appelés les *unipotentes*. Les représentations *superunipotentes* sont les unipotentes caractérisées par l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :
- il existe un vecteur fixe par le sous-groupe d'Iwahori standard ;
- la restriction parabolique au sous-groupe des matrices diagonales, n'est pas nulle.

2.1.2. Théorème. — *(cf.* [**12**] *théorème III.6) La catégorie* $\mathrm{mod}_{\overline{\mathbb{F}}_l} GL_n$ *est un produit direct de blocs, chaque bloc étant de la forme $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}$ pour ρ irréductible supercuspidal.*

2.1.3. Proposition. — *(cf.* [**12**] *IV.2.5, IV.6.2, IV.6.3) Pour ρ irréductible cuspidal, il existe un groupe G' de la forme $\prod_i GL_{n_i}(E_i)$ avec E_i une extension finie de K, ainsi qu'une bijection entre l'ensemble des représentations irréductibles cuspidal unipotentes de G' et* $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}$ *qui respecte le support cuspidal.*

Remarque : dans le cas banal, on a même une équivalence de catégorie entre le bloc unipotent de G' et $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}$.

2.1.4. Définition. — Soit ϱ une représentation cuspidale de $GL_g(K)$ pour g un diviseur de $d = sg$, et soit

$$\rho = \varrho\{\frac{(s-1)(g-1)}{2}\} \otimes \cdots \otimes \varrho\{\frac{(1-s)(g-1)}{2}\}$$

la représentation cuspidale de $M = GL_g(K)^s$. On dira d'une représentation dans le bloc $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}$, qu'elle est ϱ-superunipotente si sa restriction parabolique au groupe diagonal par blocs M est non nulle.

Remarque : les représentations superunipotentes sont avec cette définition les représentations 1_K-superunipotentes, où 1_K désigne la représentation triviale de $K^\times$.
Remarque : les foncteurs de Jacquet et d'induction ne respectent pas le caractère ϱ-superunipotent.

2.1.5. Définition. — ([**11**] §4.4) Pour ϱ une représentation cuspidale de $GL_g(K)$ et g un diviseur de $d = sg$, le groupe de Grothendieck ϱ-superunipotent $\mathrm{Groth}_{\varrho-su}$ est le quotient du groupe de Grothendieck $\mathrm{Groth}_{\varrho-u}$ des représentations ϱ-unipotentes par les non ϱ-superunipotentes. On désigne alors par $\mathcal{M}_\varrho : \mathrm{Groth}_{\varrho-u} \twoheadrightarrow \mathrm{Groth}_{\varrho-su}$ la projection associée.

2.1.6. Corollaire. — *(cf. [**12**] IV.6.3 p47) Pour ϱ irréductible cuspidale et ρ comme dans la définition 2.1.4, on a une bijection $F_{G,G'}$ entre les représentations ϱ-superunipotentes du bloc $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{F}}_l GL_n,[\rho]}$ et les représentations superunipotentes de $GL_s(E)$ pour une certaine extension finie E/K. Ces $F_{G,G'}$ commutent alors aux foncteurs de Jacquet et d'induction au sens où si P est un parabolique de G de Lévi M associé à un parabolique P' de G' de Lévi M' alors*

$$F_{G,G'} \circ \mathrm{Ind}_{P'}^{G'} = \mathrm{Ind}_P^G \circ F_{G,G'}, \qquad F_{M,M'} \circ J_{M'}^{G'} = J_P^G \circ F_{G,G'}.$$

Démonstration. — Le fait qu'il n'y ait qu'un seul $GL_s(E)$ découle de la construction de loc. cit. IV.3.3. Le groupe de Grothendieck superunipotent correspond à celui des modules sur l'algèbre de Hecke-Iwahori. La bijection découle alors de l'isomorphisme entre ces deux algèbres et la commutativité des foncteurs de Jacquet et d'induction, modulo les non superunipotentes, découle de loc. cit. p.47. □

2.1.7. Définition. — Avec les notations du corollaire précédent, pour π_0 une représentation irréductible superunipotente de $G' = GL_s(E)$, on note $\pi_0 \boxtimes \varrho$ la représentation ϱ-superunipotente $F_{G,G'}(\pi_0)$.

Remarque : si $\pi_0 =< a >$ pour un paramètre de Zelevinski $a = (1, r_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ alors $\pi_0 \boxtimes \varrho$ a pour paramètre de Zelevinski, $(\varrho, r_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$.

2.2. Niveau de cuspidalité. —

2.2.1. Proposition. — *Étant donnée une représentation cuspidale ϱ de $GL_g(K)$, pour toute représentation π de $GL_{sg}(K)$, du bloc ϱ-unipotent, on considère les paraboliques P de GL_d tels que le foncteur de Jacquet J_P appliqué à π soit non nul. Les éléments minimaux pour l'inclusion de cet ensemble de parabolique ont alors des sous-groupes de Lévi conjugués par des matrices de permutation. L'ordre de Bruhat sur les partitions de s donne alors une relation d'ordre partiel sur le bloc ρ-unipotent de $GL_{sg}(K)$: on y référera comme **le niveau de cuspidalité** relativement à ϱ.*

Démonstration. — Soit P un élément minimal de Lévi $\prod_{i=1}^r GL_{n_i}(K)$; d'après la transitivité des foncteurs de Jacquet on en déduit que $J_P(\pi)$ est cuspidal. D'après la réciprocité de Frobenius π est un sous-espace d'une induite parabolique $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$, où les π_i sont des représentations irréductibles cuspidales. Le résultat découle alors de l'exactitude à gauche du foncteur de Jacquet et du fait que la proposition est classiquement vérifiée pour $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ où les π_i sont cuspidaux. □

Remarque : d'après l'unicité du support supercuspidal, la partition de s associée au niveau de cuspidalité d'une représentation ρ-unipotente est de la forme $\underline{\lambda} = (\lambda_1 \geqslant \cdots \lambda_r)$ où pour tout $1 \leqslant i < r$, $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ est soit égal à 1 ou de la forme $m(\varrho)l^k$; pour tout $k \geqslant 0$ notons m_k (resp. m_{-1}) le nombre d'indice $1 \leqslant i < r$ tels que $\lambda_i - \lambda_{i+1} = m(\varrho)l^k$ (resp. $\lambda_i - \lambda_{i+1} = 1$) avec donc

$$s = m_{-1} + m_0 m(\varrho) + m_1 m(\varrho) l + \cdots + m_u m(\varrho) l^u, \qquad 0 \leqslant m_{-1}, \cdots, m_u.$$

Les ϱ-superunipotentes correspondent à $m_{-1} = s$ et $m_k = 0$ pour tout $k \geqslant 0$. On notera *le niveau de cuspidalité* sous la forme $(m_0, \cdots, m_u)$ et *l'ordre de Bruhat* est alors l'ordre lexicographique inverse. Par ailleurs, on notera que pour π irréductible le niveau cuspidal de tout constituant irréductible de $J_P(\pi)$ est supérieur ou égal à celui de π ; le même phénomène se produit pour l'induction parabolique.

Exemples : on fixe une représentation ϱ irréductible cuspidale de $GL_g(K)$ et pour $i=0,\cdots,u$, on pose $\rho_i=\mathrm{St}_{m(\varrho)l^i}(\varrho\{\frac{m(\varrho)l^i-s}{2}\})$ et $\rho_{-1}=\varrho$: ce sont des représentations cuspidales.

– Soit $s=m_{-1}+m_0m(\varrho)+m_1m(\varrho)l+\cdots+m_um(\varrho)l^u$ avec $0\leqslant m_{-1}<m(\varrho)$ et $0\leqslant m_0,\cdots,m_u<l$; le niveau de cuspidalité de $\mathrm{St}_s(\varrho)$ est alors $(m_0,\cdots,m_u)$ avec
$$\mathrm{St}_s(\varrho)\simeq \mathrm{St}_{m_{-1}}(\varrho_{-1})\times\mathrm{St}_{m_0}(\rho_0)\times\cdots\times\mathrm{St}_{m_u}(\rho_u).$$
– Pour $\pi_1,\cdots,\pi_r$ des représentation irréductibles ϱ-unipotentes de respectivement GL_{n_ig} et de niveau de cuspidalité $(m_0(i),\cdots,m_u(i))$; le niveau de cuspidalité de $\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_r$ est alors égal à $\sum_{i=1}^r\Big(m_0(i),\cdots,m_u(i)\Big)$.

– Soient pour $i=-1,0,\cdots,u$ des entiers $m_i\geqslant 0$ et des représentations π_i irréductibles super-unipotentes alors
$$\Big(\pi_{-1}\boxtimes\rho_{-1}\Big)\times\cdots\times\Big(\pi_u\boxtimes\rho_u\Big)$$
est irréductible, cf. [**12**] §V.3, de niveau de cuspidalité $(m_0,\cdots,m_u)$.

2.3. Involution de Zelevinski. — Dans ce paragraphe ϱ désigne une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$; nous allons reprendre les résultats principaux de [**11**] pour le bloc ϱ-unipotent. Pour tout parabolique standard Q de GL_d, on note, pour $i\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_i(Q)$ l'ensemble des paraboliques standard de Q dont les Levi ont $i+1$ facteurs GL_{r_k} de plus que Q ; pour $Q=GL_d$, on notera simplement $\mathcal{P}_i$. Pour toute représentation ρ du bloc ϱ-unipotent, on a alors un complexe augmenté, [**11**] §3.8 :
$$0\rightarrow\rho\rightarrow\bigoplus_{P\in\mathcal{P}_0}T_P(\rho)\rightarrow\bigoplus_{P\in\mathcal{P}_1}T_P(\rho)\rightarrow\cdots\rightarrow\bigoplus_{P\in\mathcal{P}_{s-1}}T_P(\rho)$$
où $T_P=\mathrm{ind}_P^G\circ J_P$, dont l'homologie $H^i(K^\bullet(\rho))$ vérifie les points suivants, cf. [**11**] théorème 4.6 :

(i) $H^{s-1}(K^\bullet(\rho))$ est non nul si et seulement si ρ est ϱ-superunipotente auquel cas, pour ρ irréductible, il admet un unique quotient irréductible qui est ϱ-superunipotent et que l'on note $Z_\varrho(\rho)$;

(ii) pour ρ une représentation irréductible ϱ-superunipotente, $Z_\varrho(\rho)$ est le seul constituant ϱ-superunipotent de $\bigoplus_i H^i(K^\bullet(\rho))$. L'application $\rho\mapsto Z_\varrho(\rho)$ est un involution qui préserve l'irréductibilité.

2.3.1. Lemme. — *L'involution Z_ϱ défini dans le groupe de Grothendieck des représentations ϱ-superunipotente commute aux foncteurs de Jacquet et à l'induction.*

Démonstration. — Rappelons que, cf. [**13**] corollaire du §1.3, pour deux partitions $\underline{\beta}=(\beta_1\leqslant\cdots\leqslant\beta_r=d)$ et $\underline{\gamma}=(\gamma_1\leqslant\cdots\leqslant\gamma_s=d)$ et pour toute représentation π de $GL_{\beta_1}(K)\times GL_{\beta_2-\beta_1}(K)\times\cdots\times GL_{\beta_r-\beta_{r-1}}(K)$, la représentation $J^{GL_d}_{P_{\underline{\gamma}}}\circ\mathrm{ind}^{GL_d}_{P_{\underline{\beta}}}(\pi)$ admet $\mathrm{ind}^{P_{\underline{\gamma}}}_{P_{\underline{\beta}\cap\underline{\gamma}}}\circ J^{P_{\underline{\beta}}}_{P_{\underline{\beta}\cap\underline{\gamma}}}(\pi)$ comme quotient. Ainsi pour tout parabolique Q, on en déduit avec les notations ci-dessus, des surjections pour tout $i=0,\cdots,s-1$
$$J_Q\Big(\bigoplus_{P\in\mathcal{P}_i}T_P(\pi)\Big)\twoheadrightarrow\bigoplus_{P\in\mathcal{P}_i(Q)}T_P\Big(J_Q^{GL_d}(\pi)\Big),\qquad\bigoplus_{P\in\mathcal{P}_i}T_P\Big(\mathrm{ind}_Q^{GL_d}\pi\Big)\twoheadrightarrow\mathrm{ind}_Q^{GL_d}\Big(\bigoplus_{P\in\mathcal{P}_i(Q)}T_P(\pi)\Big)$$
Par ailleurs pour ρ une représentation ϱ-superunipotente, on a $T_P(\rho)=0$ pour tout $P\in\mathcal{P}_i$ si $i>s-1$, de sorte que l'on obtient des surjections
$$J_Q^{GL_d}H^{s-1}(K^\bullet(\pi))\twoheadrightarrow H^{s-1}(K^\bullet(J_Q^{GL_d}(\pi))),\qquad H^{s-1}(K^\bullet(\mathrm{ind}_Q^{GL_d}\pi))\twoheadrightarrow\mathrm{ind}_Q^{GL_d}H^{s-1}(K^\bullet(\pi)).$$
Le résultat découle alors des faits suivants :

– d'après (ii) ci-dessus, les parties ϱ-superunipotentes de $H^i(K^\bullet(J_Q^{GL_d}(\pi)))$, $J_Q^{GL_d}H^{s-1}(K^\bullet(\pi))$ et $H^i(K^\bullet(\mathrm{ind}_Q^{GL_d}(\pi)))$ sont nuls pour $i\neq s-1$;

– on a égalité des sommes alternées

$$J_Q^{GL_d} H^*(K^\bullet(\pi)) = H^*(K^\bullet(J_Q^{GL_d}(\pi))), \qquad H^*(K^\bullet(\mathrm{ind}_Q^{GL_d} \pi)) = \mathrm{ind}_Q^{GL_d} H^*(K^\bullet(\pi)).$$

□

Dans [**9**] les auteurs décrivent l'involution de Zelevinski $Z_{\overline{\mathbb{F}}_l}$ sur les représentations **superunipotentes** ce qui d'après 2.1.6 fourni le calcul de Z_ϱ sur les représentation ϱ-superunipotentes pour toute représentation ϱ irréductible cuspidale. En particulier le résultat suivant découle de leur description.

2.3.2. Lemme. — *Pour $\epsilon(\rho) > 2$ (resp. $\epsilon(\rho) = 2$), $Z_\rho(< (\rho, s) >)$ est égale à $< a >$ pour le paramètre de Zelevinski a :*

$$(\rho\nu^{-q}, q+1),\ (\rho\nu^{1-q}, q+1), \cdots, (\rho\nu^{r-1-q}, q+1),\ (\rho\nu^{r+1-q}, q),\ (\rho\nu^{r+2-q}, q), \cdots, (\rho\nu^{-1-q}, q)$$

où r est le reste de la division euclidienne de s par $\epsilon(\rho) - 1 > 1$: $s = q(\epsilon(\rho) - 1) + r$, (resp. $< (\rho, s) >$ pour s pair et $< \rho(1), s >$ pour s impair).

2.4. Cas limite classique. — Cela correspond à $q \equiv 1 \bmod l$ et $d < l$. On s'intéresse aux représentations superunipotentes, c'est à dire aux représentations engendrées par leurs vecteurs fixes sous le sous-groupe d'Iwahori standard I. D'après [**10**], le foncteur $V \mapsto V^I$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations super-unipotentes et la catégorie des modules sur l'algèbre de Hecke-Iwahori. On en déduit alors le résultat bien connu suivant.

2.4.1. Proposition. — *L'induite normalisée de la représentation triviale du Borel, est semi-simple. Ses facteurs irréductibles sont en bijection avec les représentations irréductibles du groupe symétrique Σ_d, la multiplicité étant alors égale à la dimension de la représentation de Σ_d associée.*

Remarque : la bijection s'explicite comme suit : les représentations irréductibles de Σ_d sont en bijection avec les diagrammes de Young DY associés à une partition $\underline{n} = (d = n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r)$, auxquels on associe le paramètre de Zelevinski $a(DY) = (1, n_1), \cdots, (1, n_r)$ et donc la représentation irréductible de GL_d : $< a(DY) >$.

2.4.2. Proposition. — *Étant donné un parabolique de Young $\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2}$ de Σ_n ainsi que deux diagrammes de Young DY_1, DY_2 de respectivement Σ_{n_1} et Σ_{n_2}, l'induite parabolique $< a(DY_1) > \times < a(DY_2) >$ est une somme directe $\bigoplus_{DY} < a(DY) >$ qui porte sur les diagrammes de Young DY qui s'obtiennent à partir de DY_1 en lui adjoignant λ_1 carrés numérotés 1 sans en mettre plus d'un dans une même colonne, puis λ_2 numérotés 2 et ainsi de suite où $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$ est la partition de n_2 associée à DY_2, de sorte qu'en comptant les nouveaux carrés du haut vers le bas et de droite à gauche, le nombre de i est supérieur ou égal au nombre de $i+1$ pour tout i. (cf. [**8**] corollaire 4.39 ainsi que l'appendice).*

2.4.3. Corollaire. — *Pour tout $s < l$ et pour tout $0 \leqslant i \leqslant s$, la réduction modulo l de $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{s-1-i}]_1$ et $[\overrightarrow{i}, \overleftarrow{s-1-i}]_1$ est irréductible.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur i, en partant du fait que pour $i = 0$, la réduction modulo l de $[\overleftarrow{s-1}]_1$ et $[\overrightarrow{s-1}]_1$ est irréductible. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang i et traitons le cas de i. L'induite parabolique $[\overrightarrow{i}]_1 \times [\overleftarrow{s-2-i}]_1$ a pour sous-quotient $[\overrightarrow{i}, \overleftarrow{s-1-i}]_1$ et $[\overrightarrow{i+1}, \overleftarrow{s-2-i}]_1$. La réduction modulo l de cette induite est d'après la proposition précédente la somme directe $< a(DY_1) > \oplus < a(DY_2) >$ où DY_1 (resp. DY_2) est le diagramme de Young associé à la partition $(i+1, 1, \cdots, 1)$ (resp. $(i+2, 1, \cdots, 1)$). D'après l'hypothèse de récurrence la réduction modulo l de $[\overrightarrow{i}, \overleftarrow{s-1-i}]_1$ est $< a(DY_1) >$ de sorte que celle de $[\overrightarrow{i+1}, \overleftarrow{s-2-i}]_1$ est $< a(DY_2) >$ et est donc irréductible. Le raisonnement est identique pour $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{s-1-i}]_1$. □

Remarque : on notera que la réduction modulo l de $[\overleftarrow{1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{1}]_1$ n'est pas irréductible mais admet pour sous-quotient irréductible $< a(DY_1) >$ et $< a(DY_2) >$ où DY_1 (resp. DY_2) est le diagramme de Young associé à $(2,1,1)$ (resp. $(2,2)$).

3. Etude de la réduction modulo l de $\mathrm{St}_s(\pi)$

Dans ce paragraphe π désigne une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible cuspidale entière de $Gl_g(K)$ dont on note ϱ la réduction modulo l ; pour tout $s \geqslant 1$, on pose $d = sg$.

3.1. Constituants irréductibles. — On rappelle que tous les sous-quotients irréductibles de $\mathrm{St}_s(\pi)$ sont ϱ-unipotents ; on se propose alors de les décrire en fonction de leur niveau de cuspidalité au sens de la proposition 2.2.1.

3.1.1. Proposition. — *Dans le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentations admissibles de $Gl_d(K)$, pour tout $0 \leqslant t$, la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t}]_\pi$ contient une unique représentation ϱ-superunipotente que l'on notera $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}]_\pi)$.*

Démonstration. — La preuve procède par récurrence, le cas $t = 0$ découlant de l'irréductibilité de $\varrho = r_l(\pi)$ pour π irréductible cuspidale. Pour $t > 0$, la réduction modulo l de $J_{P_{tg,g}}([\overleftarrow{t}]_\pi) = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{1/2\}} \otimes [\overleftarrow{0}]_{\pi\{-t/2\}}$, d'après l'hypothèse de récurrence, ne contient qu'une seule représentation ϱ-superunipotente, le résultat découle alors du fait suivant.

Pour une partition $\underline{s} = (s = s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_r)$, on note $g.\underline{s} = (d = s_1 g \geqslant s_2 g \cdots \geqslant s_r g)$; si Π est une représentation ϱ-superunipotente, $J_{P_{g.\underline{s}}}(\Pi)$ est non nulle et contient au moins une représentation ϱ-superunipotente. $\square$

Remarque : d'après le lemme 2.3.1 en utilisant que la réduction modulo l de $[\overrightarrow{t}]_\pi$ est irréductible et ϱ-superunipotente, on en déduit que $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}]_\pi) \simeq Z_\varrho([\overrightarrow{t}]_\varrho)$. En outre d'après le corollaire 2.1.6, $Z_\varrho([\overrightarrow{t}]_\varrho) \simeq Z_1([\overrightarrow{t}]_1) \boxtimes \varrho$ de sorte que

$$I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}]_\pi) \simeq I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}]_1) \boxtimes \varrho \simeq Z_1([\overrightarrow{t}]_1) \boxtimes \varrho$$

où le calcul de $Z_1([\overrightarrow{t}]_1)$ est donnée dans [**9**].

Afin d'étudier les autres constituants non ϱ-superunipotents, on introduit les ensembles suivants.

3.1.2. Définitions. — *Soient $m_0, \cdots, m_u$ et s des entiers positifs ; $\mathcal{I}(m_0, \cdots, m_u)$ (resp. $\mathcal{I}_s$) désigne l'ensemble des $\underline{i} = (i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que :*
- *pour tout $k \geqslant 0$, $i_k \geqslant 0$;*
- *pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=r}^\infty (m_k - i_k) l^r \geqslant 0$ (resp. $s - \sum_{k=0}^\infty i_k m(\varrho) l^k \geqslant 0$).*

3.1.3. Lemme. — *Pour $s = m_{-1} + m_0 m(\varrho) + \cdots + m_u m(\varrho) l^u$ avec $0 \leqslant m_{-1} < m(\varrho)$ et $0 \leqslant m_0, \cdots, m_u < l$, on a $\mathcal{I}(m_0, \cdots, m_u) = \mathcal{I}_s$ avec pour tout $\underline{i} = (i_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{I}_s$, $i_k = 0$ si $k > u$.*

Démonstration. — L'inclusion $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{I}(m_0, \cdots, m_u)$ est évidente car si $s' = m_{-1} + m(\varrho) \sum_{k=0}^u (m_k - i_k) l^k$ est positif avec $0 \leqslant m_{-1} < m(\varrho)$ alors $\sum_{k=0}^u (m_k - i_k) l^k \geqslant 0$. Réciproquement il suffit de montrer que si $\sum_{k=0}^u (m_k - i_k) l^k \geqslant 0$ alors $\sum_{k=1}^u (m_k - i_k) l^{k-1} \geqslant 0$. Or on a

$$\sum_{k=1}^u (m_k - i_k) l^{k-1} \geqslant \frac{i_0 - m_0}{l} > \frac{i_0}{l} - 1 > -1$$

et le terme de gauche est un entier qui est donc positif ou nul. $\square$

3.1.4. Définitions. — *Soit $s = m_{-1} + \sum_{k=0}^u m_k m(\varrho) l^k$ avec $0 \leqslant m_{-1} < m(\varrho)$ et pour $k = 0, \cdots, u$, $0 \leqslant m_k < l$:*
- *on classe les éléments de $\mathcal{I}_s = \mathcal{I}(m_0, \cdots, m_u)$ par ordre lexicographique inverse : $\underline{1}_s = \underline{0}$ est le plus petit élément de $\mathcal{I}_s$, et le k-ème élément de $\mathcal{I}_s$ par ordre croissant sera noté $\underline{k_s}$.*

– *pour* $\underline{i} \in \mathcal{I}_s$*, on note* $\underline{i}(l) = \sum_{k=0}^{\infty} i_k l^k$ *et* $s_\varrho(\underline{i}) = s - m(\varrho)\underline{i}(l)$.

3.1.5. Proposition. — *La réduction modulo l de $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$ admet $\sharp\mathcal{I}_s$ constituants irréductibles indexés par les éléments $\underline{i} \in \mathcal{I}_s$ de telle sorte que le constituant irréductible $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ correspondant est de niveau de cuspidalité $\underline{i}$ avec les relations suivantes :*

(i) $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ est calculé à la proposition 3.1.1 ;

(ii) pour tout $\underline{i} \in \mathcal{I}_s$, on a

$$I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) = \Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_0-1}]) \boxtimes \rho_0\Big) \times \cdots \times \Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_u-1}]) \boxtimes \rho_u\Big) \times \Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s_\varrho(\underline{i})-1}]) \boxtimes \rho_{-1}\Big)$$

avec pour $i = 0, \cdots, u$,

$$\rho_i = \mathrm{St}_{m(\varrho)l^i}(\rho\{\frac{m(\varrho)l^i - s}{2}\}), \qquad \rho_{-1} = \varrho\{\frac{s - s_\varrho(\underline{i})}{2}\};$$

(iii) pour tout foncteur de Jacquet J_P l'image de $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ est égale à la somme des constituants de niveau de cuspidalité $\underline{i}$ de $r_l\Big(J_P([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big)$.

Remarque : pour tout $i = 0, \cdots, u$ on a $\rho_i\{1\} \simeq \rho_i$ de sorte que la torsion $\{n/2\}$ dans la définition de ρ_i ne dépend que de la parité de n.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur s : les cas $s < m(\varrho)$ découlent directement de [**10**] car $r_l([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ est irréductible isomorphe à $\mathrm{St}_s(\varrho)$ qui est π-superunipotent isomorphe à

$$Z_\varrho([\overrightarrow{s-1}]_\varrho) = Z_1([\overrightarrow{s-1}]_1) \boxtimes \varrho.$$

Supposons donc le résultat acquis pour tout $t < s$ et traitons le cas de s. En ce qui concerne les constituants ϱ-superunipotents, le point (i) a été prouvé à la proposition 3.1.1. Ainsi comme le niveau de cuspidalité est croissant par foncteur de Jacquet, on en déduit que pour tout parabolique P, $J_P\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big)$ contient la somme des constituants de niveau $\underline{0}$ de la réduction modulo l de $J_P\Big([\overleftarrow{s-1}]_\pi\Big)$. En outre $J_P(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi))$ contient au plus un constituant ϱ-superunipotent de sorte que s'il contenait un constituant non ϱ-superunipotent, celui-ci serait soit un sous-espace ou un quotient irréductible de sorte que par réciprocité de Frobenius ou par la deuxième formule d'adjonction, $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ serait un sous-espace ou un quotient irréductible d'une induite d'un élément non ϱ-superunipotent ce qui n'est pas. (2)

Remarquons ensuite que d'après [**12**] §V.3, les représentations $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$, définies dans l'énoncé, sont irréductibles. D'après l'hypothèse de récurrence, les images de $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_k-1}]) \boxtimes \rho_k$ et $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s_\varrho(\underline{i})-1}]) \boxtimes \rho_{-1}$ par tout foncteur de Jacquet sont connues, il en est donc de même pour $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$. Pour vérifier (iii), il suffit, par transitivité des foncteurs de Jacquet, de traiter le cas où le parabolique est de la forme $P_{h,d-h}(K)$: ainsi $J_{P_{h,d-h}}\Big(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big)$ est égal à la somme des produits tensoriels :

$$\begin{aligned} J_{h_0}\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_0-1}]) \boxtimes \rho_0\Big) \times \cdots \times J_{h_u}\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_u-1}]) \boxtimes \rho_u\Big) \times J_{h_{-1}}\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s_\varrho(\underline{i})-1}]) \boxtimes \rho_{-1}\Big) \\ \otimes J'_{h_0}\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_0-1}]) \boxtimes \rho_0\Big) \times \cdots \times J'_{h_u}\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_u-1}]) \boxtimes \rho_u\Big) \times J'_{h_{-1}}\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s_\varrho(\underline{i})-1}]) \boxtimes \rho_{-1}\Big) \end{aligned}$$

où la somme porte sur tous les $(h_{-1}, h_0, \cdots, h_u)$ tels que :
– pour tout $k = 0, \cdots, u$, on ait $0 \leqslant h_k \leqslant g i_k m(\varrho) l^k$;
– $0 \leqslant h_{-1} \leqslant s_\varrho(\underline{i}) g$;
– $h_{-1} + h_0 + \cdots + h_u = h$;

2. Pour ceux qui voudrait éviter le recours à la deuxième formule d'adjonction, on peut aussi utiliser un réseau de $[\overleftarrow{t}]_\pi$ et son réseau dual.

et où on a posé

$$J_{P_{h_k,gi_km(\varrho)l^k-h_k}(K)}\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_k-1}])\boxtimes\rho_k\Big)=J_{h_k}\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_k-1}])\boxtimes\rho_k\Big)\otimes J'_{h_k}\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_0-1}])\boxtimes\rho_0\Big)$$

lesquels sont nuls si pour $k=0,\cdots,u$ (resp. $k=-1$) h_k n'est pas de la forme $gj_km(\varrho)l^k$ (resp. $h_{-1}=j_{-1}g$) avec $0\leqslant j_k\leqslant i_k$ (resp. $0\leqslant j_{-1}\leqslant s_\varrho(\underline{i})$), et sinon, d'après l'hypothèse de récurrence égaux respectivement à

$$I_{\underline{0}}([\overleftarrow{j_k-1}])\boxtimes\rho_k\otimes I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_k-j_k-1}])\boxtimes\rho_k$$

$$(\text{resp. } I_{\underline{0}}([\overleftarrow{j_{-1}-1}])\boxtimes\rho_{-1}\{\frac{s_\varrho(\underline{i})-j_{-1}}{2}\}\otimes I_{\underline{0}}[\overleftarrow{s_\varrho(\underline{i})-j_{-1}-1}]\boxtimes\rho_{-1}\{-\frac{j_{-1}}{2}\}).$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, pour $h=tg$,

$$\sum_{t_{-1}+\sum_{k=0}^u t_km(\varrho)l^k=t} I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t_0-1}])\boxtimes\rho_0\times\cdots\times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t_{-1}-1}])\boxtimes\rho_{-1}\{\frac{s_\varrho(\underline{i})-t_{-1}}{2}\}$$

est égal à la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{s-t}{2}\}}$ tandis que

$$\sum_{t_{-1}+\sum_{k=0}^u t_km(\varrho)l^k=t} I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_0-t_0-1}])\boxtimes\rho_0\times\cdots\times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s_\varrho(\underline{i})-t_{-1}-1}])\boxtimes\rho_{-1}\{-\frac{t_{-1}}{2}\}$$

est égal à la réduction modulo l de $[\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi\{-\frac{t}{2}\}}$. En résumé tous les constituants de $J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big)$ sont de niveau de cuspidalité $\underline{i}$ et correspondent aux constituants de niveau de cuspidalité $\underline{i}$ de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{(s-t)/2\}}\otimes[\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi\{-t/2\}}$ ce qui prouve le point (iii).

Supposons désormais avoir montré par récurrence que pour tout $\underline{i}<\underline{k_s}$, $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ tel qu'il est défini ci-dessus, est un constituant de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$. Les calculs ci-dessus montrent que dans le groupe de Grothendieck, $\Psi_k:=r_l([\overleftarrow{s-1}]_\pi)-\sum_{\underline{i}<\underline{k_s}}I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ est un élément effectif du groupe de Grothendieck tel que son image par tout foncteur de Jacquet propre, est de niveau de cuspidalité supérieur ou égal à $\underline{k_s}$. Soit alors $-1\leqslant j\leqslant u$ minimal tel que ρ_j, à torsion près, appartienne au support cuspidal de $I_{\underline{k_s}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$; pour $j\geqslant 0$ (resp. $j=-1$) on note P_j le parabolique standard de groupe de Levi $GL_{(s-m(\varrho)l^j)g}\times GL_{m(\varrho)l^jg}$ (resp. $GL_{(s-1)g}\times GL_g$) de sorte que $J_{P_j}(\Psi_k)$ est égal à

$$I_{\underline{k_s}-(0,\cdots,0,1,0,\cdots)}([\overleftarrow{s-1-m(\varrho)l^j}]_\pi)\otimes\rho_j\quad(\text{resp. } I_{\underline{k_s}}([\overleftarrow{s-2}]_{\pi\{\frac{1}{2}\}})\otimes\rho_{-1}\{\frac{1-s}{2}\})$$

qui est son unique constituant de niveau de cuspidalité $\underline{k_s}$. On en déduit alors que Ψ_k contient un unique constituant π_k de niveau de cuspidalité $\underline{k_s}$ qui, par réciprocité de Frobenius, est un sous-espace de l'induite parabolique

$$I_{\underline{k_s}-(0,\cdots,0,1,0,\cdots)}([\overleftarrow{s-1-m(\varrho)l^j}]_\pi)\times\rho_j\quad(\text{resp. } I_{\underline{k_s}}([\overleftarrow{s-2}]_{\pi\{1/2\}})\times\rho_{-1}\{\frac{1-s}{2}\}).$$

En utilisant que l'image de Ψ_k par le foncteur de Jacquet associé au parabolique de Levi $GL_{(s-k_jm(\varrho)l^j)g}\times GL_{k_jm(\varrho)l^j}$ (resp. $GL_{(s-s_\varrho(\underline{i}))g}\times GL_{s_\varrho(\underline{i})g}$) admet un unique constituant tel que son deuxième facteur est de niveau de cuspidalité $(0,\cdots,0,k_j,0,\cdots)$, on obtient que π_k est nécessairement égal à $I_{\underline{k_s}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$.

Au final $r_l([\overleftarrow{s-1}]_\pi)-\sum_{\underline{i}\in\mathcal{I}_s}I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ est un élément effectif du groupe de Grothendieck dont toutes les images par les foncteurs de Jacquet propres sont nulles. Le résultat découle alors du fait que $r_l([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ ne contient aucun constituant cuspidal pour s qui n'est pas de la forme $m(\varrho)l^i$ et que sinon $\mathrm{St}_{m(\varrho)l^i}(\varrho)$ en est l'unique constituant cuspidal. $\square$

Remarque : contrairement au cas général, tous les constituants irréductibles ψ de $r_l([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ sont tels que leur niveau de cuspidalité reste constant par foncteur de Jacquet, i.e. pour tout parabolique P, le niveau de cuspidalité d'un constituant irréductible de $J_P(\psi)$ est égal à celui de ψ.

3.1.6. Définition. — Pour $k \geqslant 0$ (resp. $k=-1$), on dit que qu'une représentation de $GL_{sg}(K)$ ϱ-unipotente est de ϱ_k-niveau de cuspidalité nul si son niveau de cuspidalité $\underline{i}=(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est tel que $i_k=0$ (resp. $s_\varrho(\underline{i})=0$).

3.2. Constructions des réseaux d'induction. — Pour π une représentation irréductible entière cuspidale de $GL_g(K)$, on a vu que sa réduction modulo l, ϱ était irréductible de sorte qu'à isomorphismes près, $[\overleftarrow{0}]_\pi$ possède un unique réseau stable. Ainsi étant donné un réseau de $[\overleftarrow{t-1}]_\pi$, la surjection $[\overleftarrow{t-1}]_\pi \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_\pi \twoheadrightarrow [\overleftarrow{t}]_\pi$ induit un réseau de $[\overleftarrow{t}]_\pi$ de sorte que par récurrence on dispose d'un réseau particulier $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)$ que l'on qualifie *réseau d'induction*, des $[\overleftarrow{t-1}]_\pi$. La motivation principale pour l'étude de ces réseaux d'induction est qu'ils apparaissent dans la cohomologie des espaces de Deligne-Carayol.

3.2.1. Proposition. — *Il existe un réseau de $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$, unique à isomorphisme près, que l'on notera $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$, tel que dans son graphe $\Gamma_{RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)}$, les seules flèches sont celles qui relient $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ à $I_{\underline{i'}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$, où $\underline{k_s}=\underline{i}<\underline{(k-1)_s}=\underline{i'}$ sont des éléments consécutifs de $\mathcal{I}_s$. En outre $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) si Λ est un réseau stable de $[\overleftarrow{s}]_\pi$ tel que la surjection

$$[\overleftarrow{s-1}]_\pi \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_\pi \twoheadrightarrow [\overleftarrow{s}]_\pi$$

induise un morphisme surjectif de $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi)$ sur Λ alors $\Lambda \simeq RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s}]_\pi)$;

(ii) pour tout $1 \leqslant t \leqslant s$, l'image de $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ par le foncteur de Jacquet $J_{P_{tg,(s-t)g}}$ est isomorphe à $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{t-s}{2}\}}) \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi\{\frac{t}{2}\}})$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur s. Pour $1 \leqslant s < m(\varrho)$ on rappelle que $r_l([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ est irréductible, il n'y a donc qu'un seul réseau ; il s'agit alors simplement de vérifier (i) dans le cas $s=m(\varrho)-1$. Dans le groupe de Grothendieck, $r_l([\overleftarrow{s}]_\pi)$ est de longueur 2 avec un constituant ϱ-superunipotent et l'autre cuspidal qui ne peut donc pas être un quotient de $[\overleftarrow{s-1}]_\varrho \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_\varrho$: ainsi le réseau image de $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi)$ dans $[\overleftarrow{s}]_\pi$ définit une extension non triviale de $[\overleftarrow{s}]_\varrho$ par $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s}]_\pi)$.

Supposons avoir construit pour tout $1 \leqslant t < s$, un réseau $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)$ de $[\overleftarrow{t-1}]_\pi$ dont le graphe d'extension est comme dans l'énoncé et vérifiant (i) (resp. (ii)) pour tout $t < s-1$ (resp. $t<s$). On définit alors $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ comme le réseau image de $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-2}]_\pi) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi)$ via l'application surjective $[\overleftarrow{s-2}]_\pi \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_\pi \twoheadrightarrow [\overleftarrow{s-1}]_\pi$ et on note

$$RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) := RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l.$$

Pour tout $1 \leqslant t < s$, le foncteur de Jacquet $J_{P_{tg,(s-t)g}}$ étant exact à droite, on en déduit une application surjective

$$J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-2}]_\pi) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi)\Big) \twoheadrightarrow J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big).$$

D'après [**13**] et (ii), le membre de gauche possède une filtration de longueur 2 dont les gradués sont

– $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{s-t-2}{2}\}}) \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-t-2}]_{\pi\{-\frac{t+1}{2}\}}) \times RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_{\pi\{\frac{s-1}{2}\}})$,

– $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{\frac{s-t}{2}\}}) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_{\pi\{\frac{s-t}{2}\}}) \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi\{-t/2\}})$.

D'après l'hypothèse de récurrence et la propriété (i), la réduction modulo l de chacun de ces gradués possède un unique quotient irréductible à savoir $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t-1}]_\pi) \otimes I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s-t-1}]_\pi)$ de sorte que $J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big)$ est un quotient de l'une des deux représentations induites suivantes, le choix dépendant à priori de t :

$$J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big) \twoheadleftarrow \left\{ \begin{array}{l} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{s-t-2}{2}\}}) \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-t-2}]_{\pi\{-\frac{t+1}{2}\}}) \times RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_{\pi\{\frac{s-1}{2}\}}) \\ RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{\frac{s-t}{2}\}}) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_{\pi\{\frac{s-t}{2}\}}) \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi\{-t/2\}}) \end{array} \right. \tag{3.2.1}$$

On en déduit alors que $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ est l'unique quotient irréductible de $RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$. En effet $[\overleftarrow{s-1}]_\varrho$ est l'unique constituant cuspidal de $r_l([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ pour s de la forme $m(\varrho)l^u$ et il n'est alors pas un quotient de $RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi)$. Soit alors $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ un quotient de $RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ de sorte qu'il existe $1 \leqslant t < s$ tel que $J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big)$ soit un quotient de $J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big)$; d'après ce qui précède $J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big)$ est alors ϱ-superunipotent ce qui impose $\underline{i} = \underline{0}$.

Notons alors

$$V_1(s) = \mathrm{Ker}\Big(RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) \twoheadrightarrow I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big),$$

et supposons avoir montré par récurrence l'unicité d'une suite

$$V_{k-1}(s) \subsetneq V_{k-2}(s) \subsetneq \cdots \subsetneq V_1(s) \subsetneq V_0(s) = RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$$

telle que pour tout $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $V_i(s)$ est l'unique sous-espace stable strict de $V_{i-1}(s)$ tel que $V_{i-1}(s)/V_i(s)$ soit irréductible et qu'alors ce quotient est isomorphe à $I_{\underline{i_s}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$. Montrons alors qu'il existe un unique sous-espace stable strict $V_k(s)$ de $V_{k-1}(s)$ telle que $V_{k-1}(s)/V_k(s)$ soit irréductible et qu'alors ce quotient est isomorphe à $I_{\underline{k_s}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$. Soit $k' \geqslant 1$ tel que $\underline{(k-1)_s} < \underline{k'_{s-1}} \leqslant \underline{k_s}$ de sorte que la composée

$$\begin{aligned} V_{k'}(s-1) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi) \hookrightarrow RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-2}]_\pi) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi) \\ \twoheadrightarrow RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi) \twoheadrightarrow RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)/V_{k-1}(s) \end{aligned}$$

est nulle car par construction tous les constituants de $V_{k'}(s-1)$ sont de niveau de cuspidalité supérieur ou égal à $\underline{k'_{s-1}}$ et donc aussi ceux de $V_{k'}(s-1) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi)$. On en déduit donc une application

$$V_{k'}(s-1) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi) \to V_{k-1}(s).$$

Si $r_l([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ contient une cuspidale alors s est de la forme $m(\varrho)l^u$ et il s'agit de $[\overleftarrow{s-1}]_\varrho$. On note aussi que $[\overleftarrow{s-1}]_\varrho$ est un constituant de multiplicité 1 de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{s-2}]_\pi \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_\pi$; c'est aussi un constituant de $V_{k'}(s-1) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi)$. Ainsi si la représentation cuspidale $[\overleftarrow{s-1}]_\varrho$ était un quotient de $V_{k-1}(s)$, du fait de la surjectivité de $RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-2}]_\pi) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi) \twoheadrightarrow RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$, il serait aussi un quotient de $V_{k'}(s-1) \overrightarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{F}}_l}([\overleftarrow{0}]_\pi)$ ce qui ne se peut pas.

Soit alors $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ un quotient de $V_{k-1}(s)$ et $P_{tg,(s-t)g}$ un parabolique tel que

$$J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big) \neq 0.$$

Par construction on a $\underline{i} \geqslant \underline{k_s}$ et dans le groupe de Grothendieck $J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(V_{k-1}(s)\Big)$ est la somme des constituants de niveau de cuspidalité supérieurs ou égaux à $\underline{k_s}$ de $r_l([\overleftarrow{t-1}]_\pi) \otimes r_l([\overleftarrow{s-t-1}]_\pi)$. En outre d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à (3.2.1) montre que $J_{P_{tg,(s-t)g}}\Big(V_{k-1}(s)\Big)$ a un unique quotient irréductible, celui de plus bas niveau de cuspidalité. Il suffit alors de montrer que si $I_{\underline{i'}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ est un quotient de $V_{k-1}(s)$ alors il existe un parabolique $P_{tg,(s-t)g}(K)$ tel que $J_{N_{tg,(s-t)g}}\Big(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big) \neq 0$ et $J_{N_{tg,(s-t)g}}\Big(I_{\underline{i'}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)\Big) \neq 0$.

Posons $i_{-1} = s - m(\varrho)\sum_{k=0}^{u} i_k l^k$ et $i'_{-1} = s - m(\varrho)\sum_{k=0}^{u} i'_k l^k$; s'il existe $0 \leqslant k$ (resp. $k = -1$) tel que $i_k i'_k \neq 0$ alors $t = m(\varrho)l^k$ (resp. $t = 1$) convient : en effet on a alors

$$J_{P_{tg,(s-t)g}}(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)) = \rho_k \otimes I_{\underline{i}-(0,\cdots,1,0,\cdots)}([\overleftarrow{s-t-1}]_\pi)$$
$$(\text{resp. } \rho_{-1}\{\frac{s-1}{2}\} \otimes I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-2}]_{\pi\{-\frac{1}{2}\}}))$$

et de même pour $I_{\underline{i'}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$. Supposons donc que pour tout $k = -1, \cdots, u$, on ait $i_k i'_k = 0$ et notons $-1 \leqslant k_0 \leqslant u$ le plus petit indice k tel que $i_k \neq 0$: soit alors r tel que i'_{k_0+r} soit le premier des i'_k non nul. Quitte à échanger le rôle de $\underline{i}$ et $\underline{i'}$, on peut supposer $r > 0$ de sorte que $t = m(\varrho)l^{k_0+r}$ convient. En effet dans le cas où $k_0 \geqslant 0$ alors $l^r | \sum_{w=0}^{r-1} i_{k_0+w}l^w$ et donc $\sum_{w=0}^{r-1} i_{k_0+w}l^w \geqslant l^r$: soit d'après le lemme 3.1.3, $(j_{k_0}, \cdots, j_{k_0+r-1})$ tels que :
- pour tout $w = 0, \cdots, r-1$, $0 \leqslant j_{k_0+w} \leqslant i_{k_0+w}$ et
- $\sum_{w=0}^{r-1} j_{k_0+w}l^w = l^r$,

de sorte que $J_{P_{tg,(s-t)g}}(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi))$ admet comme constituant

$$I_{\underline{0}}([\overleftarrow{j_{k_0}-1}]) \boxtimes \rho_{k_0} \times \cdots \times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{j_{k_0+r-1}-1}]) \boxtimes \rho_{k_0+r-1} \otimes$$
$$I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_{k_0}-j_{k_0}-1}]) \boxtimes \rho_{k_0} \times \cdots \times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_{k_0+r-1}-j_{k_0+r-1}-1}]) \boxtimes \rho_{k_0+r-1}$$
$$\times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_{k_0+r}-1}]) \boxtimes \rho_{k_0+r} \times \cdots \times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{i_u-1}]) \boxtimes \rho_u$$

alors que $J_{P_{tg,(s-t)g}}(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi))$ admet $\rho_{k_0+r} \otimes I_{(i'_0,\cdots,i'_{k_0+r}-1,i'_{k_0+r+1},\cdots)}([\overleftarrow{s-t-1}]_\pi)$.

Si $k_0 = -1$ alors $i_{-1} + m(\varrho)\sum_{k=0}^{r-1} i_k l^k$ est divisible par $m(\varrho)l^r$; le reste du raisonnement est ensuite strictement identique au cas $k_0 \geqslant 0$ en prenant soin de préciser les torsions sur ρ_{-1}. □

3.2.2. Corollaire. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ et soient deux réseaux stable $R_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi)$ et $R_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{a}]_\pi)$ telle que l'on ait une surjection*

$$R_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi) \overrightarrow{\times} R_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{a}]_\pi) \twoheadrightarrow RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t+a+1}]_\pi)$$

Alors les deux réseaux en question sont isomorphes respectivement à $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi)$ et $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{a}]_\pi)$.

Démonstration. — Par application du foncteur de Jacquet $J_{P_{(t+1)g,(l+a+2)g}(K)}$, on en déduit une application surjective

$$R_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_{\pi\{-a/2\}}) \otimes R_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{a}]_{\pi\{t/2\}}) \twoheadrightarrow RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_{\pi\{-a/2\}}) \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{a}]_{\pi\{t/2\}})$$

d'où le résultat. □

4. Etude de la réduction modulo l de $LT_t(\pi, s)$

Pour π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible entière cuspidale de $GL_g(K)$, on se propose dans ce paragraphe de reprendre les résultats précédents pour $LT_t(\pi, s) := [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$. On note comme précédemment $\varrho = r_l(\pi)$ et $d = sg$.

4.1. Constituants irréductibles.

— Commençons comme précédemment par étudier les constituants ϱ-superunipotents.

4.1.1. Proposition. — *Dans le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentations admissibles de $Gl_d(K)$, pour tout $0 \leqslant t \leqslant a$, la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi$ contient une unique représentation ϱ-superunipotente que l'on notera $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi)$. Par ailleurs dans le groupe de*

Grothendieck des $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentations admissibles de $Gl_d(K)$, l'image de $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi)$ par le foncteur de Jacquet $J_{P_{(t+1)g,(a-t)g}}$ (resp. $J_{P_{(a-t+1)g,tg}}$, resp. $J_{P_{at,g}}$) contient

$$\begin{aligned} & I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}]_{\pi\{\frac{t-a}{2}\}}) \otimes [\overrightarrow{a-t-1}]_{\varrho\{\frac{t+1}{2}\}}), \\ & \qquad (\textit{resp. } [\overrightarrow{a-t}]_{\varrho\{-t/2\}} \otimes I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{\frac{a-t+1}{2}\}}) \\ & \qquad \textit{resp. } I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t-1}]_{\pi\{-1/2\}}) \otimes [\overrightarrow{0}]_{r_l(\pi\{a/2\})} + \\ & \qquad\qquad I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{a-t}]_{\pi\{1/2\}}) \otimes [\overleftarrow{0}]_{\varrho\{-a/2\}}) \end{aligned}$$

Démonstration. — Le cas $a = t$ a été traité à la proposition 3.1.1. Par ailleurs rappelons que le cas $t = 0$ découle du fait que d'après [**10**] V.9.1 (c), $r_l([\overrightarrow{a}]_\pi)$ est irréductible et ϱ-superunipotent. (3)

On raisonne par récurrence en utilisant la remarque suivante de la proposition 3.1.1. Soit $\underline{s} = (s = s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_r)$ une partition de s et $g.\underline{s} = (d = s_1 g \geqslant s_2 g \cdots \geqslant s_r g)$: si π est une représentation ϱ-superunipotente alors $J_{P_{g.\underline{s}}}(\pi)$ est non nulle et contient au moins une représentation ϱ-superunipotente. Par application du foncteur de Jacquet $J_{P_{ag,g}}$, on obtient dans le groupe de Grothendieck

$$J_{P_{ag,g}}([\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi) = [\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t-1}]_{\pi\{-1/2\}} \otimes \pi\{a/2\} + [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{a-t}]_{\pi\{1/2\}} \otimes \pi\{-a/2\}$$

de sorte que, d'après l'hypothèse de récurrence et la remarque ci-dessus, la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi$ contient un ou deux constituants ϱ-superunipotent.

4.1.2. Lemme. — *Les réseaux de $[\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi$ induits par*

$$RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi) \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{a-t-1}]_\pi \quad \textit{et} \quad [\overrightarrow{a-t}]_\pi \overleftarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)$$

sont isomorphes.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur $a-t$; le cas $a-t=0$ découle de la caractérisation des réseaux $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi)$ donnée à la proposition 3.2.1. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $a-t-1$ et traitons le cas de $a-t$. On rappelle que sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}_l[GL_{(a+1)g}(K)]}\Big([\overleftarrow{t}]_\pi \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{a-t-1}]_\pi, [\overrightarrow{a-t}]_\pi \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{t-1}]_\pi\Big) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_l$$

toute flèche non nulle induisant un isomorphisme de $[\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi$ sur lui-même. Au niveau des réseaux, d'après la réciprocité de Frobenius, on a

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Z}}_l[GL_{(a+1)g}(K)]}\Big(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi) \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{a-t-1}]_\pi, [\overrightarrow{a-t}]_\pi \overleftarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)\Big) \simeq \\ & \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Z}}_l[GL_{(a+1)g}(K)]}\Big(J_{P_{(a-t+1)g,tg}}(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi) \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{a-t-1}]_\pi), [\overrightarrow{a-t}]_{\pi\{t/2\}} \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{(t-a-1)/2\}}\Big) \end{aligned}$$

où par égalité des supports cuspidaux, ce dernier espace est

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Z}}_l[GL_{(a+1)g}(K)]}\Big(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_{\pi\{t/2\}}) \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{a-t-1}]_{\pi\{t/2\}} \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{(t-a-1)/2\}})\Big) \simeq \overline{\mathbb{Z}}_l$$

car d'après 3.2.1, $J_{P_{g,tg}}(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi)) \simeq RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{0}]_{\pi\{t/2\}} \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{-1/2\}})$, d'où le résultat. □

Pour le réseau du lemme précédent, notons ρ une sous-représentation irréductible de $r_l([\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi)$ de sorte que ρ est aussi une sous-représentation irréductible des réductions modulo l de $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi) \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{a-t-1}]_\pi$ et $[\overrightarrow{a-t}]_\pi \overleftarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)$. Par réciprocité de Frobenius, on en déduit alors que l'image de ρ par $J_{P_{(t+1)g,(a-t)g}}$ (resp. $J_{P_{(a-t+1)g,tg}}$) contient $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}]_{\pi\{(t-a)/2\}}) \otimes [\overrightarrow{a-t-1}]_{\varrho\{(t+1)/2\}}$ (resp. $[\overrightarrow{a-t}]_{\varrho\{t/2\}} \otimes I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{(t-1-a)/2\}})$) de sorte que $J_{P_{g,\cdots,g}}(\rho)$ contient $? \otimes \cdots \otimes ? \otimes \varrho\{a/2\}$ (resp. $? \otimes \cdots \otimes ? \otimes \varrho\{-a/2\}$). Ainsi $J_{P_{ag,g}}(\rho)$ contient

3. Il est aussi possible de raisonner par récurrence : pour $a = 0$, le résultat se déduit du fait que ϱ est irréductible et pour $a > 0$, la réduction modulo l de $J_{P_{ag,g}}([\overrightarrow{a}]_\pi) = [\overrightarrow{a-1}]_{\pi\{-1/2\}} \otimes [\overrightarrow{0}]_{\pi\{a/2\}}$ contient, d'après l'hypothèse de récurrence un unique constituant ϱ-superunipotent, ce qui implique le résultat.

forcément $I_{\underline{0}}\Big([\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t-1}]_{\pi\{-1/2\}}\Big) \otimes \pi\{a/2\}$ (resp. $I_{\underline{0}}\Big([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{a-t}]_{\pi\{1/2\}}\Big) \otimes \pi\{-a/2\}$) ce qui prouve l'unicité du constituant ϱ-suerunipotent de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi$. □

4.1.3. Proposition. — *La réduction modulo l de $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ admet $\sharp\mathcal{I}_{t-1}$ constituants irréductibles indexés par les éléments $\underline{i} \in \mathcal{I}_{t-1}$ de telle sorte que le constituant $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$ est de niveau de cuspidalité $\underline{i}$ isomorphe à*

$$I_{\underline{i}}([\overleftarrow{m(\varrho)\underline{i}(l)-1}]_\pi) \times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t_\varrho(\underline{i})-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi).$$

Démonstration. — Le raisonnement procède en deux temps : on montre tout d'abord que les représentations $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{m(\varrho)\underline{i}(l)-1}]_\pi) \times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t_\varrho(\underline{i})-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$, qui sont irréductibles d'après [**12**] §V.3, sont effectivement des constituants de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$. Ainsi

$$\Psi = r_l\Big([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi\Big) - \sum_{\underline{i}\in\mathcal{I}_{t-1}} I_{\underline{i}}([\overleftarrow{m(\varrho)\underline{i}(l)-1}]_\pi) \times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t_\varrho(\underline{i})-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$$

est un élément effectif du groupe de Grothendieck dont on montre dans une deuxième étape, que son image par par tout foncteur de Jacquet est nulle ; le résultat découle alors du fait que $r_l\Big([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi\Big)$ ne contient pas de cuspidales.

Pour tout $m(\varrho)\underline{i}(l) \leqslant t-1$, on a

$$[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi \hookrightarrow [\overleftarrow{t_\varrho(\underline{i})-1}, \overrightarrow{s-t}]_{\pi\{m(\varrho)\underline{i}(l)/2\}} \times [\overleftarrow{m(\varrho)\underline{i}(l)-1}]_{\pi\{-s_\varrho(\underline{i})/2\}}$$

de sorte que, de la connaissance de $J_{P_{s_\varrho(\underline{i})g, m(\varrho)\underline{i}(l)g}}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$, et de l'exactitude du foncteur de Jacquet $J_{P_{s_\varrho(\underline{i})g, m(\varrho)\underline{i}(l)g}}$, on en déduit que

$$J_{P_{s_\varrho(\underline{i})g, m(\varrho)\underline{i}(l)g}}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi) \twoheadrightarrow [\overleftarrow{t_\varrho(\underline{i})-1}, \overrightarrow{s-t}]_{\pi\{m(\varrho)\underline{i}(l)/2\}} \otimes [\overleftarrow{m(\varrho)\underline{i}(l)-1}]_{\pi\{-s_\varrho(\underline{i})/2\}}.$$

Comme la réduction modulo l commute aux foncteurs de Jacquet, et qu'il existe un réseau de $[\overleftarrow{t_\varrho(\underline{i})-1}, \overrightarrow{s-t}]_{\pi\{m(\varrho)\underline{i}(l)/2\}} \otimes [\overleftarrow{m(\varrho)\underline{i}(l)-1}]_{\pi\{-s_\varrho(\underline{i})/2\}}$ dont la réduction modulo l est semi-simple, on en déduit, par réciprocité de Frobenius, que les représentations irréductibles $\mathcal{I}_0([\overleftarrow{t_\varrho(\underline{i})-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi) \times \mathcal{I}_{\underline{i}}([\overleftarrow{m(\varrho)\underline{i}(l)-1}]_\pi)$ sont des constituant de $r_l\Big([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi\Big)$.[4]

Il s'agit désormais de montrer avec les notations ci-dessus, que pour tout parabolique P, $J_P(\Psi)$ est nul. On raisonne par l'absurde : on considère alors un parabolique P, tel que $J_P(\Psi)$ contienne un constituant de niveau de cuspidalité minimal. Par transitivité des foncteurs de Jacquet et en remarquant que ceux-ci augmente le niveau de cuspidalité, on peut supposer que le facteur de Lévi de P est de la forme $GL_{(s-t')g} \times GL_{t'g}$. Ce constituant Π_0 est alors tel que son image par J_P est à prendre parmi les constituants de la réduction modulo l de

$$[\overleftarrow{t-t'-1+a}, \overrightarrow{s-t-a}]_{\pi\{(t'-a)/2\}} \otimes [\overleftarrow{t'-a-1}]_{\pi\{(t'-s-a)/2\}} \times [\overrightarrow{a-1}]_{\pi\{(s-a)/2\}}$$

pour $0 \leqslant a \leqslant \min\{s-t, t'\}$. On remarque alors que $J_{P_{g,(s-1)g}}(\Pi_0)$ est non nulle : en effet pour $s-t-a > 0$, par réciprocité de Frobenius, Π_0 est un sous-espace d'une induite parabolique de la forme $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{t-t'-1+a}, \overrightarrow{s-t-a}]_{\pi\{?\}} \times \Pi$ où Π est une certaine représentation irréductible de $GL_{t'g}(K)$ que l'on peut écrire sous la forme d'une induite $\Pi_1 \times \Pi_2$ avec Π_1 qui est ϱ-superunipotente et Π_2 étant de ϱ_{-1}-niveau de cuspidalité nul. Ainsi comme

$$I_{\underline{i}}([\overleftarrow{t-t'-1+a}, \overrightarrow{s-t-a}]_\pi \simeq I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t"-1}, \overrightarrow{s-t-a}]_\pi \times I_{\underline{i}}([\overleftarrow{s-t'-t"-1}]_\pi),$$

Π_0 s'écrit sous la forme d'une induite irréductible d'une représentation ϱ-superunipotente, obtenue comme un sous-espace forcément ϱ-superunipotente de $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t"-1}, \overrightarrow{s-t-a}]_\pi \times \Pi_1$ avec une représentation de ϱ_{-1}-niveau de cuspidalité nul ; on en déduit donc que $J_{P_{g,(s-t'-1)g}}(\Pi_0)$ est non nulle.

4. On notera que $\varrho\{m(\varrho)\underline{i}(l)/2\} \simeq \varrho$

Pour $a=s-t$, le même argument fonctionne dès que $s-t'-m(\varrho)\underline{i}(l)>0$. Dans les cas restant, $s-t'$ est divisible par $m(\varrho)$ de sorte que

$$r_l\Big([\overleftarrow{t'-a-1}]_{\pi\{(t'-a-s)/2\}}\times[\overrightarrow{a-1}]_{\pi\{(s-a)/2\}}\Big)=r_l\Big([\overleftarrow{t'-a-1},\overrightarrow{a+1}]_{\pi\{?\}}\Big)+r_l\Big([\overleftarrow{t'-a},\overrightarrow{a-1}]_{\pi\{?+1/2\}}\Big)$$

et on se retrouve dans la situation précédente, d'où le résultat.

Ainsi pour conclure, il suffit de vérifier que $J_{P_{g,(s-1)g}}(\Psi)$ est nulle. Un constituant irréductible de $r_l\Big(J_{P_{g,(s-1)g}}([\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi)\Big)$ est de la forme

$$\varrho\{(2t-1-s)/2\}\otimes I_{\underline{i}}([\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{(t-s-1)/2\}})\times\times[\overrightarrow{s-t-1}]_{\varrho\{t/2\}}$$

qui n'apparaît qu'avec multiplicité 1. On remarque alors que celui-ci est un constituant de $J_{P_{g,(s-1)g}}(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{m(\varrho)\underline{i}(l)-1}]_\pi)\times I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t_\varrho(\underline{i})-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi)$, d'où le résultat. □

Remarque : contrairement à ce qui se passe pour $t=s$, l'image des $\mathcal{I}_{\underline{i}}([\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi)$ par les foncteurs de Jacquet J_P, n'est pas égale à la somme des constituants de niveau de cuspidalité $\underline{i}$: il ne les contient pas tous et il en contient d'autres de niveau supérieur comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : la réduction modulo $l=3$ de $[\overleftarrow{1},\overrightarrow{1}]_\pi$ dans le cas où $m(\varrho)=2$, est irréductible et donc ϱ-superunipotente ; $J_{P_{2g,g}}(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{1},\overrightarrow{1}]_\pi)$ est dans le groupe de Grothendieck égal à

$$\Big(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}\}})+[\overrightarrow{1}]_{\varrho\{-\frac{1}{2}\}}+I_{(1,0,\cdots)}([\overleftarrow{1}]_{\pi\{-\frac{1}{2}\}})\Big)\otimes\varrho\{\frac{1}{2}\}.$$

Dans ce cas on peut même préciser les extensions : en effet d'après la première et la seconde formule d'adjonction, tout sous-espace et tout quotient irréductible de $J_{P_{2g,g}}(I_{\underline{0}}([\overleftarrow{1},\overrightarrow{1}]_\pi))=\Pi\{-\frac{1}{2}\}\otimes\varrho\{\frac{1}{2}\}$ doit être ϱ-superunipotent de sorte que le graphe d'extensions Γ_Π possède deux flèches, celle reliant $[\overrightarrow{1}]_\varrho$ à $I_{(1,0,\cdots)}([\overleftarrow{1}]_\pi)$ et celle reliant $I_{(1,0,\cdots)}([\overleftarrow{1}]_\pi)$ à $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{1}]_\pi)$.

4.2. Construction de réseaux d'induction. — Comme la réduction modulo l de $[\overrightarrow{t-1}]_\pi$ est irréductible, il ne possède à isomorphisme près qu'un seul réseau stable que l'on notera encore $[\overrightarrow{t-1}]_\pi$. Ainsi l'image de $[\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi$ dans $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{s-t-1}]_\pi$ définit un réseau que l'on note $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi)$. En considérant la surjection $[\overleftarrow{t-2}]_\pi\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{s-t}]_\pi\twoheadrightarrow[\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi$ permet aussi à partir du réseau $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-2}]_\pi)$ de définir un autre réseau de $[\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi$. La proposition suivante montre que ce dernier réseau n'est autre que $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1},\overrightarrow{s-t}]_\pi)$.

4.2.1. Proposition. — *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation entière cuspidale irréductible de $GL_g(K)$ et*

$$f:[\overleftarrow{t-1}]_\pi\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{a}]_\pi\longrightarrow[\overleftarrow{t}]_\pi\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{a-1}]_\pi$$

un morphisme $GL_{(t+a+1)g}(K)$-équivariant non nul et défini sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$. Si les réseaux associés aux représentations de Steinberg généralisées sont $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)$ et $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi)$ alors f est donné par un scalaire $\lambda_f\in\overline{\mathbb{Z}}_l$ de sorte que la réduction modulo l de f est soit nulle soit d'image la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t},\overrightarrow{a}]_\pi$.

Démonstration. — Autrement dit il s'agit de montrer que les réseaux $R_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\pm}([\overleftarrow{t},\overrightarrow{a}]_\pi)$ induits respectivement par $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{a}]_\pi$ et $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi)\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{a-1}]_\pi$ sont les mêmes. D'après 3.2.1, on a sur une $\overline{\mathbb{Z}}_l$-surjection

$$RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{0}]_\pi\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{a-1}]_\pi\twoheadrightarrow RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t}]_\pi)\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{a-1}]_\pi$$

qui induit donc une $\overline{\mathbb{Z}}_l$-surjection

$$RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)\overrightarrow{\times}[\overrightarrow{a}]_\pi\twoheadrightarrow R_{\overline{\mathbb{Z}}_l,-}([\overleftarrow{t},\overrightarrow{a}]_\pi)$$

et donc un isomorphisme $R_{\overline{\mathbb{Z}}_l,+}([\overleftarrow{t},\overrightarrow{a}]_\pi)\simeq R_{\overline{\mathbb{Z}}_l,-}([\overleftarrow{t},\overrightarrow{a}]_\pi)$. □

La proposition suivante caractérise les réseaux $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$ en précisant le graphe des extensions de sa réduction modulo l.

*4.2.2. **Proposition**. — Les flèches du graphe des extensions de la réduction modulo l de $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$ sont celles qui relient deux constituants irréductibles $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$ et $I_{\underline{i'}}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$ où $\underline{i} < \underline{i'}$ sont deux éléments consécutifs de $\mathcal{I}_{t-1}$.*

Démonstration. — Notons que quelque soit le constituant irréductible de $r_l\Big([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi\Big)$, son image par $J_{P_{(s-t+1)g,(t-1)g}}$ admet un constituant de la forme $I_{\underline{i}}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{(t-s)/2\}}) \otimes [\overrightarrow{s-t-1}]_{\varrho\{t/2\}}$. Par ailleurs en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 3.2.1, on obtient, cf. 3.2.1, une surjection

$$\phi : J_{P_{tg,(s-t)g}}(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi) \twoheadrightarrow RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{(t-s)/2\}} \otimes [\overrightarrow{s-t-1}]_{\varrho\{t/2\}}$$

de sorte que si

$$(0) = V_n \subset V_{n-1} \subset \cdots \subset V_1 \subset V_0 = r_l\Big(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi\Big)$$

est une filtration dont les gradués sont irréductibles, alors

$$(0) = \phi \circ J_{P_{tg,(s-t)g}}(V_n) \subset \phi \circ J_{P_{tg,(s-t)g}}(V_{n-1}) \subset \cdots \subset \\ \phi \circ J_{P_{tg,(s-t)g}}(V_1) \subset r_l(RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi\{(t-s)/2\}} \otimes [\overrightarrow{s-t-1}]_{\varrho\{t/2\}}$$

est encore une filtration dont tous les gradués sont non nuls de sorte que, comme $\sharp\mathcal{I}_{t-1}$ est égal au nombre des constituants irréductibles de $r_l([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$ et de $r_l([\overleftarrow{t-1}]_\pi)$, tous ces gradués sont encore irréductibles. Le résultat découle alors directement de la même propriété pour $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)$. □

Remarque : $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)$ est aussi le réseau induit par $[\overrightarrow{s-t}]_\pi \overleftarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-2}]_\pi)$ et donc d'après le lemme 4.1.2 de $[\overrightarrow{s-t-1}]_\pi \overleftarrow{\times} RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}]_\pi)$. Pour le vérifier, il suffit de montrer que le graphe des extensions de la réduction modulo l est celui de $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$: pour cela on raisonne comme dans la preuve ci-dessus en utilisant $J_{P_{(s-t+1)g,(t-1)g}}$ composé avec la surjection sur $[\overrightarrow{s-t}]_{\varrho\{(t-1)/2\}} \otimes RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{(t-s-1)/2\}})$.

*4.2.3. **Corollaire**. — Soit $K^\bullet$ le complexe tel que pour $1 \leqslant i \leqslant s$,*

$$K^{d-i} = RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}([\overleftarrow{s-i}]_\pi) \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{i-2}]_\varrho$$

et K^i est nul pour les autres indices. On suppose que les flèches d_i pour $1 \leqslant i \leqslant s$ sont non nulles, entières données, d'après le lemme de Schur, par un scalaire $\lambda_i \in \overline{\mathbb{Z}}_l$ que l'on suppose en outre inversible. En notant $U^i = \operatorname{Ker} d_i / \operatorname{Im} d_{i-1}$, on a alors

$$U_i = RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}\Big([\overleftarrow{s-i}, \overrightarrow{i-1}]_\pi).$$

Le résultat précédent est motivé par le complexe de Deligne-Carayol associé aux cycles évanescents de l'espace des déformations d'un $\mathcal{O}_K$-module formel de hauteur $d = sg$: dans un récent papier, nous montrons que les hypothèses du corollaire précédent sont vérifiées.

4.3. La réduction modulo l des représentations $LT_t(\pi, s)$ sont étrangères. — L'objet de ce paragraphe est de montrer que pour $t \neq t_1$, les réductions modulo l de $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ et $[\overleftarrow{t_1-1}, \overrightarrow{s-t_1}]_\pi$ sont disjointes.

*4.3.1. **Lemme**. — Si $m_l(\varrho) \neq 2$, alors pour tout $s \geqslant 2$ et pour tout δ, $[\overrightarrow{s-1}]_{\varrho\{\delta\}}$ n'est pas un sous-quotient de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$.*

Démonstration. — D'après (2.3.2), si $\epsilon_l(\varrho) > 2$, $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{s-1}]_\pi)$ n'est pas de la forme $[\overrightarrow{s-1}]_{\varrho\{\delta\}}$. Considérons alors le cas $\epsilon_l(\varrho) = 1$ de sorte que $m_l(\varrho) = l \neq 2$ et raisonnons par l'absurde. Par application du foncteur de Jacquet $J_{P_{2g,(s-2)g}}$, on est ramené au cas $s = 2$; la contradiction découle alors du fait que pour $l \neq 2$, la réduction modulo l de $[\overleftarrow{1}]_\pi$ est irréductible isomorphe à $[\overleftarrow{1}]_\varrho$. □

4.3.2. Proposition. — *Soient $l \neq 2$ et $0 < t < a$. Alors pour tout δ, $[\overrightarrow{a}]_{\varrho\{\delta\}}$ n'est jamais isomorphe à $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi)$.*

Démonstration. — On raisonne par l'absurde. D'après la proposition 4.1.1, par application de $J_{P_{(t+1)g,(a-t)g}}$, on devrait alors avoir

$$[\overrightarrow{t}]_{\varrho\{\delta+\frac{t-a}{2}\}} \simeq I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}]_{\pi\{\frac{t-a}{2}\}}) \qquad [\overrightarrow{a-t-1}]_{\varrho\{\delta+\frac{t+1}{2}\}} \simeq [\overrightarrow{a-t-1}]_{\varrho\{\frac{t+1}{2}\}})$$

Du deuxième isomorphisme, on obtient $\delta \equiv 0 \bmod \epsilon_l(\pi)$. On en déduit alors que $[\overrightarrow{t}]_\varrho \simeq I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}]_\pi)$ de sorte que d'après le lemme précédent on a $\epsilon_l(\varrho) = 2$ (si $\epsilon_l(\varrho) = 1$ alors $m_l(\varrho) = l$ est distinct de 2 par hypothèse). Par ailleurs en appliquant $J_{P_{g,tg}}$ au premier isomorphisme, l'égalité des supports cuspidaux impose alors $t \equiv 0 \bmod \epsilon_l(\varrho)$. En considérant $J_{P^{op}_{tg,(a-t+1)g}}$, d'après (4.1.1), on obtient selon le même procédé $a \equiv 0 \bmod \epsilon_l(\varrho)$. Ainsi avec $\epsilon_l(\varrho) = 2$, on a $t \geqslant 2$ et $a - t \geqslant 2$. En appliquant le foncteur de Jacquet $J_{P_{ag,g}}$, on obtient alors que $[\overrightarrow{a-1}]_{\varrho\{-1/2\}}$ est égal soit à $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t-1}]_{\pi\{-1/2\}}$, soit à $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{a-t}]_{\pi\{1/2\}}$. La contradiction découle alors d'un raisonnement par récurrence. □

Remarque : en appliquant l'involution de Zelevinski et la dualité à la proposition précédente, on en déduit que

$$I_{\underline{0}}([\overleftarrow{a}]_{\pi^\vee\{\delta\}}) = \Big(Z_\varrho([\overrightarrow{a}]_{\varrho\{-\delta\}})\Big)^\vee$$

n'est jamais isomorphe à

$$I_{\underline{0}}([\overleftarrow{a-t}, \overrightarrow{t}]_\pi^\vee) = I_{\underline{0}}(Z_\pi([\overleftarrow{t}, \overrightarrow{a-t}]_\pi))^\vee$$

pour tout δ dès que $0 < t < a$.

4.3.3. Corollaire. — *Soient $l \neq 2$ et $0 < t < t_1 < a$; la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ et $[\overleftarrow{t_1-1}, \overrightarrow{s-t_1}]_\pi$ sont disjointes.*

Démonstration. — Considérons pour $\underline{i} \in \mathcal{I}_{t-1}$, les constituants de niveau de cuspidalité $\underline{i}$ de $[\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi$ et $[\overleftarrow{t_1-1}, \overrightarrow{s-t_1}]_\pi$. D'après la proposition 4.1.1, $J_{P_{(s-t+1)g,(t-1)g}}\Big(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_\pi)\Big)$ contient $[\overrightarrow{s-t}]_{\varrho\{(t-1)/2\}} \otimes I_{\underline{i}}([\overleftarrow{t-2}]_{\pi\{(t-1-s)/2\}})$ alors que les constituants de

$$J_{P_{(s-t+1)g,(t-1)g}}\Big(I_{\underline{i}}([\overleftarrow{t_1-1}, \overrightarrow{s-t_1}]_\pi)\Big)$$

tels que le premier terme soit ϱ-superunipotent, sont de la forme $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{a}, \overrightarrow{s-t-a}]_{\pi\{\delta\}} \otimes ?$ pour $2\delta = 2t_1 - 2a - t - 1$ et avec $t_1 - t \leqslant a \leqslant s - t$; d'après la proposition précédente $I_{\underline{0}}([\overleftarrow{a}, \overrightarrow{s-t-a}]_{\pi\{\delta\}}$ ne peut pas être isomorphe à $[\overrightarrow{s-t}]_{\varrho\{(t-1)/2\}}$ ce qui prouve le résultat. □

Références

[1] Joël Bellaïche. À propos d'un lemme de Ribet. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 109 :45–62, 2003.

[2] Joël Bellaïche and Philippe Graftieaux. Représentations sur un anneau de valuation discrète complet. *Math. Ann.*, 334(3) :465–488, 2006.

[3] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples et applications. *soumis 30 pages*, 2006.

[4] P. Boyer. Pour $l \neq 2$, la $\mathbb{F}_l$-cohomologie du modèle de Deligne-Carayol et des variétés de Shimura de Kottwitz est sans torsion. *en préparation 60 pages*, 2008.

[5] H. Carayol. Nonabelian Lubin-Tate theory. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, volume 11 of *Perspect. Math.*, pages 15–39. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[6] J.-F. Dat. v-tempered representations of p-adic groups. I. l-adic case. *Duke Math. J.*, 126(3) :397–469, 2005.

[7] J.-F. Dat. Finitude pour les représentations lisses des groupes p-adiques. *J.I.M.J.*, 2007.

[8] W. Fulton and J. Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[9] B. Leclerc, J.-Y. Thibon, and E. Vasserot. Zelevinsky's involution at roots of unity. *J. Reine Angew. Math.*, 513 :33–51, 1999.

[10] M.-F. Vignéras. *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[11] M.-F. Vignéras. Cohomology of sheaves on the building and R-representations. *Invent. Math.*, 127(2) :349–373, 1997.

[12] M.-F. Vignéras. Induced R-representations of p-adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.

[13] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of GL(n). *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.

Boyer Pascal • *E-mail :* boyer@math.jussieu.fr, Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586, université Paris 6, 175 rue du Chevaleret Paris 13