

Mauvaise réduction des variétés de Drinfel'd et conjecture de Langlands locale

par

Pascal BOYER

5 rue Cacheux 75013 Paris FRANCE
boyer@cmla.ens-cachan.fr

Table des matières

1	Enoncé d'une conjecture de Deligne-Carayol.	7
1	Le groupe de Grothendieck des représentations de $GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F$ sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$	7
1.1	Rappels sur les représentations lisses, admissibles.	7
1.2	Représentations l -adique de W_F	12
1.3	Représentations admissibles de $G \times \Gamma$	15
1.4	Définition du groupe K_{ad}	19
1.5	Description des objets irréductibles de C_{ad}	20
1.6	Les groupes $K_{GL,\Gamma}$ et $K_{GL,H,\Gamma}$	23
1.7	Induction et cuspidalité.	25
2	Correspondances de Jacquet-Langlands et de Langlands locales. .	27
2.1	Correspondance de Jacquet-Langlands locale.	27
2.2	Correspondance de Langlands locale.	29
3	La représentation locale fondamentale.	31
3.1	Les $\mathcal{O}$ -modules formels et leurs déformations d'après Drinfel'd.	31
3.2	Définition de la représentation locale fondamentale.	35
4	Enoncé du théorème principal.	39
2	$\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques, structures de niveaux, espaces de modules: rappels et compléments.	41
1	Rappels sur les $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques.	42
1.1	Algèbre à division centrale sur F	42
1.2	Définition des $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques.	42
1.3	φ -faisceaux, schémas Gr et application aux $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques.	43
1.4	Structures de niveaux en dehors de la caractéristique. . . .	47
1.5	Schéma de module, propriété.	49
1.6	Déformations des $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques.	50
2	$\mathcal{O}$ -module de Dieudonné, $\mathcal{O}$ -modules divisible et théorème de Serre-Tate.	55
2.1	Rappels sur le module de coordonnées des $\mathcal{O}$ -modules formels. .	55
2.2	$\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné et $\mathcal{O}$ -modules divisibles.	57

2.3	Modules divisibles associés à un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique.	62
2.4	Anneau universel des déformations d'un $\mathcal{O}$ -module divisible et théorème de Serre-Tate.	62
3	Extension aux niveaux divisant la caractéristique.	66
3.1	Bases de Drinfeld.	66
3.2	Représentabilité relative.	69
3.3	Anneau universel des déformations d'un $\mathcal{O}$ -module divisible muni d'une structure de niveau n et propriétés locales de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$	70
3.4	Correspondances de Hecke.	72
3	Vérification d'une conjecture de Rapoport.	79
1	φ -faisceaux sur une base S et stratification de S	79
2	Stratification de l'anneau universel des déformations d'un $\mathcal{O}$ -module divisible.	81
2.1	Définition des anneaux $E_0^{h,j,\geq h'}$	81
2.2	Composantes $\mathrm{Spec}(E_n^{h,j=h'})_A$ de $\mathrm{Spec}(E_n^{h,j=h'})$	83
3	Stratification des fibres de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$	88
3.1	Définition des strates $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h}$ pour $x \in X'$	88
3.2	Décomposition des strates dans le cas de mauvaise réduction.	89
4	Les strates non supersingulières sont induites.	91
5	Description adélique des points supersinguliers.	94
5.1	Rappels sur les φ -espaces et φ -paires.	94
5.2	Existence de points supersinguliers et dimension des strates.	96
5.3	Description adélique des points supersinguliers suivant leur (D, ∞, o)-type: rappels.	97
5.4	Unicité du (D, ∞, o)-type des points supersinguliers.	100
5.5	Description des actions de l'algèbre de Hecke, de $\mathbb{Z}$ et du Frobenius.	101
4	Preuve de la conjecture de Deligne-Carayol.	105
1	La catégorie $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ des représentations admissibles de $(D^\infty)^\times \times \Gamma_o$	105
2	Correspondance locale de Langlands d'après Laumon-Rapoport- Stuhler.	107
3	Les cycles proches pour $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$	109
3.1	Rappels sur les cycles proches.	109
3.2	Supports et germes des cycles proches de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}$	111
4	Uniformisation du complété formel le long de l'ensemble des points supersinguliers.	112
5	Calcul des coefficients $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^n)$, pour τ_o cuspidale.	115
5.1	Les strates ouvertes non supersingulières ne contiennent pas de cuspidale.	115
5.2	Suites spectrales et points supersinguliers.	116

6	La représentation locale fondamentale revisitée.	119
	Bibliographie.	123

Chapitre 1

Enoncé d'une conjecture de Deligne-Carayol.

Soit l un nombre premier. On fixe une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$.

1 Le groupe de Grothendieck des représentations de $GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F$ sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$.

1.1 Rappels sur les représentations lisses, admissibles.

Soit E un corps de caractéristique nulle. Soit G un groupe topologique unimodulaire, localement compact, totalement discontinu et séparé. On fixe une mesure de Haar, dg , sur G , que l'on supposera rationnelle sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire telle que pour tout sous-groupe compact ouvert K de G , on a $\text{vol}(K) \in \mathbb{Q}$. On note $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke de G , c'est-à-dire la $\mathbb{Q}$ -algèbre de convolution pour la mesure de Haar dg sur G , des fonctions localement constantes à support compact sur G et à valeurs dans $\mathbb{Q}$. On note $\mathcal{H}_K$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}$, formée des fonctions invariantes à droite et à gauche par K . L'élément $e_K = \text{vol}(K)^{-1} \cdot 1_K$, où 1_K est la fonction caractéristique de K , est un idempotent de $\mathcal{H}$. La sous-algèbre $\mathcal{H}_K$ est égale à $\mathcal{H}_K = e_K \cdot \mathcal{H} \cdot e_K$, et e_K est une unité de $\mathcal{H}_K$.

Soit (V, π) une représentation de G sur un E -espace vectoriel.

Définition 1.1.1 *Un vecteur $v \in V$ est dit **lisse** si son stabilisateur*

$$\{g \in G \mid \pi(g)(v) = v\}$$

*est un sous-groupe ouvert de G . La représentation (V, π) est dite **lisse** si tous ses vecteurs sont lisses.*

Soit $\text{Rep}_{E,s}(G)$ la catégorie des représentations lisses définies sur E . La catégorie $\text{Rep}_{E,s}(G)$ est abélienne.

Pour toute $\mathbb{Q}$ -algèbre $\mathcal{A}$, on note $\text{Mod}_E(\mathcal{A})$ la catégorie abélienne des $(E \otimes \mathcal{A})$ -modules à gauche. Un objet V de cette catégorie sera dit **non dégénéré** si, pour tout $v \in V$, il existe un élément a de $E \otimes \mathcal{A}$ tel que $v = a.v$. On notera $\text{Mod}_{E,\text{nd}}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_E(\mathcal{A})$ dont les objets sont les $(E \otimes \mathcal{A})$ -modules à gauche non dégénérés.

Soit (V, π) un objet de $\text{Rep}_{E,s}(G)$. Pour tout $v \in V$ et tout $f \in \mathcal{H}$, l'intégrale

$$\pi(f)(v) = f.v = \int_G f(g)\pi(g)(v)dg$$

se ramène à une somme finie; elle est donc convergente. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \text{End}(V) \\ f &\longmapsto \pi(f), \end{aligned}$$

ainsi définie, munit V d'une structure de $(E \otimes \mathcal{H})$ -module à gauche. De plus si $\alpha : (V_1, \pi_1) \rightarrow (V_2, \pi_2)$ est un morphisme de $\text{Rep}_{E,s}(G)$, alors $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$ est clairement $(E \otimes \mathcal{H})$ -linéaire.

On obtient donc un foncteur

$$\text{Rep}_{E,s}(G) \longrightarrow \text{Mod}_E(\mathcal{H}) \quad (1.1.2)$$

qui induit une équivalence de catégories entre $\text{Rep}_{E,s}(G)$ et $\text{Mod}_{E,\text{nd}}(\mathcal{H})$.

Définition 1.1.3 *La représentation (V, π) est dite **admissible** si elle est lisse et si pour tout sous-groupe ouvert compact K de G , l'espace V^K des vecteurs de V invariants sous K est de dimension finie.*

On note $\text{Rep}_{E,a}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_{E,s}(G)$ dont les objets sont les représentations admissibles de G . La catégorie $\text{Rep}_{E,a}(G)$ est abélienne. Le foncteur (1.1.2) induit une équivalence de $\text{Rep}_{E,a}(G)$ sur la catégorie $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$ des $(E \otimes \mathcal{H})$ -modules admissibles, c'est-à-dire des $(E \otimes \mathcal{H})$ -modules à gauche M non dégénérés tels que, pour tout sous-groupe compact ouvert K de G , $e_K.M$ est un E -espace vectoriel de dimension finie.

On a un foncteur exact

$$\text{Mod}_{E,\text{nd}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \text{Mod}_E(\mathcal{H}_K) \quad (1.1.4)$$

$$M \longmapsto M^K := e_K.M$$

qui envoie $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$ sur la sous-catégorie pleine $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}_K)$ de $\text{Mod}_E(\mathcal{H}_K)$, dont les objets sont les $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -modules de dimension finie sur E .

Proposition 1.1.5 (i) *Le foncteur (1.1.4) induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets irréductibles M de $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$ tels que M^K est non nul, sur l'ensemble des classes d'isomorphie des $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -modules à gauche irréductibles.*

(ii) *Si M est un objet irréductible de $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$ avec M^K non nul alors l'homomorphisme naturel*

$$\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(M) \longrightarrow \text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M^K)$$

est bijectif.

Preuve : (i) Si M est irréductible et si N^K est un $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -sous module de M^K , l'application

$$\mathcal{H}.e_K \otimes_{\mathcal{H}_K} N^K \longrightarrow M, \quad f \otimes m \longmapsto \pi(f)(v)$$

est non nulle car en considérant les vecteurs invariants sous K , on retrouve l'inclusion $N^K \hookrightarrow M^K$. Comme M est irréductible, l'application ci-dessus est surjective. D'après l'exactitude du foncteur invariant sous K , on obtient $N^K = M^K$; M^K est donc irréductible.

Soient N_K un $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module irréductible et $N := \mathcal{H}.e_K \otimes_{\mathcal{H}_K} N_K$. On considère $N_1 := \{n \in N \mid e_K.\mathcal{H}.n = (0)\}$; il s'agit du plus grand sous- $(E \otimes \mathcal{H})$ -module de N qui ne possède pas d'éléments invariants sous K . Soit N' un sous-module de N . Comme N_K est irréductible et engendre N , nécessairement $N' = N$ ou bien $N' \subset N_1$. Ainsi $N_2 := N/N_1$ est irréductible et $(N_2)^K = N_K$.

(ii) Soit M un $(E \otimes \mathcal{H})$ -module irréductible tel que $M^K \neq (0)$; M^K est donc un $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module irréductible. Tout élément non nul de $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(M)$ et de $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M^K)$ est inversible, et l'homomorphisme naturel

$$\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(M) \longrightarrow \text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M^K)$$

est injectif. De plus tout endomorphisme du $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module, M^K , induit un endomorphisme du $(E \otimes \mathcal{H})$ -module $M' := \mathcal{H}.e_K \otimes_{\mathcal{H}_K} M^K$, lequel stabilise le sous-module M'_1 défini comme ci-dessus, et donc induit un endomorphisme du $(E \otimes \mathcal{H})$ -module $M'/M'_1 \simeq M$. Cette construction définit un inverse à droite à l'homomorphisme injectif ci-dessus; c'est donc un isomorphisme. $\square$

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble de sous-groupes ouverts compacts de G , qui est un système fondamental de voisinages ouverts de l'élément neutre. Pour $K \subset K'$ deux éléments de $\mathcal{I}$, on a un morphisme de $(E \otimes \mathcal{H}_{K'})$ -modules

$$\begin{aligned} \pi_{K',K} : M^K &\longrightarrow M^{K'} \\ m &\longmapsto \frac{1}{\text{vol}(K',dk')} \int_{K'} k'm.dk' \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}_{K'}$ agit sur M^K à travers l'inclusion $\mathcal{H}_{K'} \subset \mathcal{H}_K$. Le morphisme $\pi_{K',K}$ induit alors un isomorphisme de $(E \otimes \mathcal{H}_{K'})$ -modules

$$e_{K'}.M^K \xrightarrow{\sim} M^{K'}.$$

Si $K \subset K' \subset K''$ sont des éléments de $\mathcal{I}$, on a

$$\pi_{K'',K} = \pi_{K'',K'} \circ \pi_{K',K}.$$

Proposition 1.1.6 (i) *Le foncteur $M \mapsto (M^K, \pi_{K',K})_{K,K' \in \mathcal{I}}$ induit une équivalence de la catégorie $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$ sur la catégorie*

$$2\text{-}\varprojlim_{\overleftarrow{K}} \text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}_K)$$

définie comme suit. Les objets de $2\text{-}\varprojlim_{\overleftarrow{K}} \text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}_K)$ sont les systèmes projectifs $(M_K, \pi_{K',K})$ où, pour tout élément K de $\mathcal{I}$, M_K est un objet de la catégorie $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}_K)$, où, pour toute inclusion $K \subset K'$ d'éléments de $\mathcal{I}$, $\pi_{K',K} : M_K \rightarrow M_{K'}$ est un morphisme de $(E \otimes \mathcal{H}_{K'})$ -modules, $\mathcal{H}_{K'}$ agissant sur M_K à travers l'inclusion $\mathcal{H}_{K'} \subset \mathcal{H}_K$, tel que si $K \subset K' \subset K''$ sont des éléments quelconques de $\mathcal{I}$, on a

$$\pi_{K'',K} = \pi_{K'',K'} \circ \pi_{K',K}$$

et où on suppose que $\pi_{K',K}$ induit un isomorphisme de $(E \otimes \mathcal{H}_{K'})$ -modules

$$e_{K'}.M_K \xrightarrow{\sim} M_{K'}.$$

Les flèches de $2\text{-}\varprojlim_{\overleftarrow{K}} \text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}_K)$ sont les systèmes compatibles de flèches des catégories $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}_K)$.

Un foncteur quasi-inverse est donné par

$$(M_K)_{K \in \mathcal{I}} \longmapsto \varinjlim_{\overrightarrow{K}} M_K$$

où la limite inductive est prise sur les inclusions $M_{K'} \simeq e_{K'}.M_K \subset M_K$ associées aux inclusions $K \subset K'$ dans $\mathcal{I}$.

(ii) Si M est un objet non nul de $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$ qui correspond à un système projectif $(M_K)_{K \in \mathcal{I}}$ dans l'équivalence précédente, alors M est irréductible si et seulement si M_K est irréductible en tant qu'objet de $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}_K)$, pour tout élément K de $\mathcal{I}$ tel que $M_K \neq (0)$.

Preuve : (i) Soient M un objet de $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$ et m un élément de M . Comme M est non dégénéré, il existe un sous-groupe ouvert compact K tel que m est un élément de M^K ; d'où $M \simeq \varinjlim_{\overrightarrow{K}} M^K$. En outre pour tout élément m de $\varinjlim_{\overrightarrow{K}} M_K$, il existe $K \in \mathcal{I}$ tel que $m \in M^K$; d'où $(\varinjlim_{\overrightarrow{K}} M_K)^K \simeq M_K$.

(ii) D'après la proposition 1.1.5, si M est irréductible alors tous les M^K qui sont non nuls, sont irréductibles. Réciproquement soit N un sous-module de M admissible et soit K_0 un sous-groupe ouvert compact tel que N^{K_0} est non nul. Pour tout $K \subset K_0$, N^K est alors non nul et est un sous- $\mathcal{H}_K$ -module de M^K , de sorte que $N^K = M^K$. Or on a $M = \bigcup_{K \subset K_0} M^K$ et $N = \bigcup_{K \subset K_0} N^K$ d'où $N = M$. $\square$

Pour deux corps $E \subset E'$ de caractéristique nulle, on a un foncteur d'extension des scalaires

$$\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \text{Mod}_{E',\text{ad}}(\mathcal{H}) \quad (1.1.7)$$

$$M_E \longmapsto M_{E'} := E' \otimes_E M_E$$

$$(u : M_E^1 \rightarrow M_E^2) \longmapsto (\text{Id}_{E'} \otimes_E u : E' \otimes_E M_E^1 \rightarrow E' \otimes_E M_E^2).$$

Dans la suite, E désignera une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ contenue dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$. On introduit alors la catégorie $\text{Mod}_{\text{ad}}(\mathcal{H})$ comme la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_{\bar{\mathbb{Q}}_l,\text{ad}}(\mathcal{H})$ dont les objets sont les objets M de $\text{Mod}_{\bar{\mathbb{Q}}_l,\text{ad}}(\mathcal{H})$ pour lesquels il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ (qui dépend de M), telle que M est l'image d'un objet M_E de $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$ par le foncteur d'extension des scalaires de E à $\bar{\mathbb{Q}}_l$. Pour chaque extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, on a un foncteur

$$\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \text{Mod}_{\text{ad}}(\mathcal{H}).$$

Cette famille de foncteurs est compatible aux foncteurs d'extension des scalaires car $M_E \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l = (M_E \otimes_E E') \otimes_{E'} \bar{\mathbb{Q}}_l$. On obtient donc un foncteur

$$2\text{-}\varinjlim_E \text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \text{Mod}_{\text{ad}}(\mathcal{H}). \quad (1.1.8)$$

Lemme 1.1.9 *Le foncteur (1.1.8) est une équivalence de catégories.*

Preuve : Par définition de $\text{Mod}_{\text{ad}}(\mathcal{H})$, (1.1.8) est essentiellement surjectif. Pour montrer que (1.1.8) est pleinement fidèle, on commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 1.1.10 *Pour toute inclusion de corps $E \subset E'$ (éventuellement de degré infini) dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, le morphisme naturel pour deux objets $M_{1,E}$ et $M_{2,E}$ de $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$*

$$\text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E}, M_{2,E}) \otimes_E E' \longrightarrow \text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E'}, M_{2,E'})$$

est un isomorphisme.

Preuve : Soient $M_{1,E}$ et $M_{2,E}$ des objets de $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$. D'après la proposition 1.1.6 (i), un élément de $\text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E}, M_{2,E})$ (resp. de $\text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E'}, M_{2,E'})$) correspond à la donnée d'un système projectif

$$\varphi_{E,K} \in \text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E}^K, M_{2,E}^K) \text{ (resp. } \in \text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E'}^K, M_{2,E'}^K)) \quad K \in \mathcal{I}.$$

Il suffit donc de vérifier que pour tout $K \in \mathcal{I}$, le morphisme naturel

$$\text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E}^K, M_{2,E}^K) \otimes_E E' \longrightarrow \text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E'}^K, M_{2,E'}^K)$$

est un isomorphisme. On munit $\text{Hom}_E(M_{1,E}^K, M_{2,E}^K)$ et $\text{Hom}_{E'}(M_{1,E'}^K, M_{2,E'}^K)$ d'une structure de $\mathcal{H}_K$ -module via la formule: $(h \cdot \varphi)(m_1) = h \cdot \varphi(h^{-1}m_1)$. On a alors

$$\text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E}^K, M_{2,E}^K) = (\text{Hom}_E(M_{1,E}^K, M_{2,E}^K))^{\mathcal{H}_K}$$

et

$$\text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E'}^K, M_{2,E'}^K) = (\text{Hom}_{E'}(M_{1,E'}^K, M_{2,E'}^K))^{\mathcal{H}_K}.$$

Le résultat se déduit du fait suivant. Pour V_E un E -espace vectoriel de dimension finie muni d'une structure de $\mathcal{H}_K$ -module si on pose $V_{E'} := V_E \otimes_E E'$ alors la flèche naturelle $V_E^{\mathcal{H}_K} \otimes_E E' \rightarrow V_{E'}^{\mathcal{H}_K}$ est un isomorphisme. Elle est clairement injective. Pour la surjectivité, soit $v_{E'}$ un élément de $V_{E'}^{\mathcal{H}_K}$ qui s'écrit comme une somme finie $v_{E'} = \sum_{\lambda} v_{E,\lambda} \otimes \lambda$ où les λ sont des éléments de E' . On considère une base $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ du sur-corps de degré fini de E engendré par les λ et on écrit $v_{E'} = \sum_{i=1}^n v_{E,i} \otimes \lambda_i$. Ainsi on a $v_{E'} = h \cdot v_{E'} = \sum_{i=1}^n (h \cdot v_{E,i}) \otimes \lambda_i$. Les éléments λ_i pour $1 \leq i \leq n$ formant une famille libre sur E , on a bien $h \cdot v_{E,i} = v_{E,i}$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$; d'où le résultat. $\square$

Soient deux objets M_1 et M_2 de $\text{Mod}_{\text{ad}}(\mathcal{H})$. On choisit une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ telle qu'il existe deux objets $M_{1,E}$ et $M_{2,E}$ de $\text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H})$ pour lesquels $M_i = M_{i,E} \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l$ pour $i = 1, 2$. Soit alors u un élément de $\text{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}_l \otimes \mathcal{H}}(M_1, M_2)$. D'après le lemme précédent pour $E' = \bar{\mathbb{Q}}_l$, on a

$$\text{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}_l \otimes \mathcal{H}}(M_1, M_2) \simeq \text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E}, M_{2,E}) \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l.$$

Ainsi il existe une extension finie E' de E dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ telle que u appartienne à $\text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E'}, M_{2,E'})$. $\square$

1.2 Représentations l -adique de W_F .

Soit F un corps local non archimédien, d'égale caractéristique p , pour p un nombre premier différent de l . Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de F , π une uniformisante, k son corps résiduel de cardinal q et $|\cdot|$ la valeur absolue de F normalisée par $|\pi| = 1/q$. Notons I_F le groupe d'inertie de $G_F = \text{Gal}(\bar{F}/F)$. On rappelle qu'alors W_F est défini par le diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & I_F & \longrightarrow & W_F & \xrightarrow{\deg} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & I_F & \longrightarrow & G_F & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0,
\end{array}$$

la topologie de W_F étant telle que I_F , avec sa topologie de Krull, est un sous-groupe ouvert de W_F , et que W_F/I_F est isomorphe à $\mathbb{Z}$ muni de la topologie discrète. On fixe un élément Fr de W_F tel que $\deg(\text{Fr}) = 1$.

Pour E une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, on note $R_W(E)$ la catégorie des représentations continues de W_F sur un E -espace vectoriel de dimension finie, $GL(V_E)$ étant muni de la topologie l -adique. Pour $E \subset E'$ une extension de corps, on a un foncteur d'extension des scalaires de E à E'

$$\begin{aligned}
R_W(E) &\longrightarrow R_W(E') \\
V_E &\longmapsto V_{E'} := V_E \otimes_E E'.
\end{aligned}$$

On introduit la sous-catégorie pleine R_W de la catégorie des représentations de W_F sur un $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel de dimension finie dont les objets V_l sont ceux pour lesquels il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ (qui dépend de V_l), telle que V_l est l'image d'un objet V_E de $R_W(E)$ par le foncteur d'extension des scalaires de E à $\bar{\mathbb{Q}}_l$. Les objets de R_W sont par définition **les représentations l -adique**. Pour chaque extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, on a un foncteur

$$R_W(E) \longrightarrow R_W, \quad V_E \longmapsto \bar{\mathbb{Q}}_l \otimes_E V_E.$$

Cette famille de foncteur est compatible aux foncteurs d'extension des scalaires et on obtient un foncteur

$$2\text{-}\varinjlim_E R_W(E) \longrightarrow R_W. \quad (1.2.1)$$

Lemme 1.2.2 *Le foncteur (1.2.1) est une équivalence de catégories.*

Preuve : Par définition de R_W , le foncteur (1.2.1) est essentiellement surjectif. Pour deux objets $V_{1,l}$ et $V_{2,l}$ de R_W , soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ telle qu'il existe deux objets $V_{1,E}$ et $V_{2,E}$ de $R_W(E)$ avec $V_{i,E} \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l = V_{i,l}$ pour $i = 1, 2$. Comme $V_{i,l}$ est un espace vectoriel de dimension finie, on peut reprendre la démonstration du lemme 1.1.10 et on obtient:

$$\text{Hom}_{R_W}(V_{1,l}, V_{2,l}) \simeq \text{Hom}_{R_W(E)}(V_{1,E}, V_{2,E}) \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l.$$

Ainsi pour tout élément u de $\text{Hom}_{R_W}(V_{1,l}, V_{2,l})$, il existe une extension finie E' de E telle que u soit un élément de $\text{Hom}_{R_W(E')}(V_{1,E'}, V_{2,E'})$.

□

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$. Soit (σ_E, V_E) une représentation continue de W_F sur un E -espace vectoriel V_E de

dimension finie. On cite un théorème de Grothendieck dont on pourra trouver une preuve dans [31].

Théorème 1.2.3 (Grothendieck) *Il existe un sous-groupe ouvert U de I_F , distingué dans $\text{Gal}(\bar{F}/F)$, tel que la restriction de σ_E à U est unipotente.*

Corollaire 1.2.4 *Si la représentation σ_E est irréductible, il existe un sous-groupe ouvert U de I_F , distingué dans $\text{Gal}(\bar{F}/F)$, tel que la restriction de σ_E à U est triviale.*

Preuve : D'après le théorème 1.2.3, soit U un sous-groupe ouvert de I_F , distingué dans $\text{Gal}(\bar{F}/F)$, tel que la restriction de σ_E à U est unipotente. Pour tout élément u de U , soit V'_E le sous-espace propre de $\sigma_E(u)$. De l'égalité pour tout élément w de W_F ,

$$\sigma_E(u)\sigma_E(w^{-1}) = \sigma_E(w^{-1})\sigma_E(u)^{q^{\deg(w)}},$$

on en déduit que V'_E est un sous-espace stable de V_E . D'après l'irréductibilité de σ_E , on a alors $V'_E = V_E$. Ainsi pour tout élément u de U , $\sigma_E(u)$ est la matrice identité.

□

Si V_E est de dimension n alors $\Lambda^n \sigma_E$ est un caractère continu de W_F que l'on peut considérer comme un caractère ξ_E du plus grand quotient abélien W_F^{ab} de W_F . D'après la théorie locale du corps de classe abélien, W_F^{ab} est isomorphe à $F^\times$. Le caractère $\xi_E : F^\times \rightarrow E$ est appelé le caractère central de σ_E . La donnée de ξ_E est équivalente à la donnée du couple $(\xi'_E, \xi_E(\pi))$, où $\xi'_E : \mathcal{O}^\times \rightarrow E^\times$ est continu et, d'après le corollaire 1.2.4, est d'ordre fini. Le caractère ξ_E est donc d'ordre fini si et seulement si $\xi_E(\pi)$ est une racine de l'unité.

Proposition 1.2.5 *Soit σ_E une E -représentation continue de W_F , irréductible et de caractère central d'ordre fini. Il existe une base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de V_E et un corps de nombre E_0 , tels que pour tout élément w de W_F , la matrice de $\sigma_E(w)$ dans la base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est à coefficients dans E_0 .*

Preuve : Soit U un sous-groupe ouvert de I_F distingué dans $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ tel que la restriction de σ_E à U est triviale. Le groupe I_F/U étant fini, une puissance du Frobenius, Fr^m , y agit trivialement par conjugaison. L'élément Fr^m de W_F est donc central dans W_F/U et d'après le lemme de Schur, $\sigma_E(\text{Fr}^m)$ est scalaire: $\sigma_E(\text{Fr}^m) = \mu \cdot \text{Id}$. En prenant le produit extérieur n -ème, on obtient $\mu^n = \xi_E(\pi)^m$ et μ est une racine de l'unité. Il existe donc un entier m' tel que $\sigma_E(\text{Fr}^{m'})$ est trivial. Ainsi la représentation σ_E se factorise à travers $(W_F/U)/(\text{Fr}^{m'})^\mathbb{Z}$, qui est fini d'après la suite exacte

$$0 \rightarrow I_F/U \rightarrow (W_F/U)/(\text{Fr}^{m'})^\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m'\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Or pour un groupe fini, toute représentation de dimension finie est définie sur un corps de nombre, d'où le lemme. $\square$

Soit $(\sigma_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ une représentation complexe continue de dimension n de W_F . On définit comme précédemment son caractère central $\xi_{\mathbb{C}} : F^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$. La donnée de $\xi_{\mathbb{C}}$ est équivalente à la donnée du couple $(\xi'_{\mathbb{C}}, \xi_{\mathbb{C}}(\pi))$, où $\xi'_{\mathbb{C}} := \xi_{\mathbb{Q}\mathcal{O}^{\times}} : \mathcal{O}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ est continu et se factorise donc par un quotient fini. On définit l'élément $s(\sigma_{\mathbb{C}})$ de $\mathbb{C}/\frac{2\pi i\mathbb{Z}}{\log(q)}$ par $\xi_{\mathbb{C}}(\pi) = q^{-s(\sigma_{\mathbb{C}})}$. Le caractère $\xi_{\mathbb{C}}$ est alors d'ordre fini si et seulement si $s(\sigma_{\mathbb{C}})$ appartient à $\frac{2\pi i\mathbb{Z}}{\log q}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Proposition 1.2.6 *Si la représentation complexe $\sigma_{\mathbb{C}}$ est irréductible et de caractère central d'ordre fini, il existe une base (e_i) de $V_{\mathbb{C}}$ et un corps de nombre E_0 tel que pour tout élément w de W_F , la matrice de $\sigma_{\mathbb{C}}(w)$ dans la base (e_i) est à coefficients dans E_0 .*

Preuve : En effet par continuité il existe un sous-groupe ouvert U de I_F distingué dans $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ tel que la restriction de $\sigma_{\mathbb{C}}$ à U soit triviale. Le reste de la preuve est identique à celle de la proposition 1.2.5. $\square$

On fixe un isomorphisme de corps: $\iota : \bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}$. On peut, via ι , passer des représentations l -adique aux représentations complexes. En effet, on a la proposition suivante qui résulte des propositions 1.2.5 et 1.2.6.

Proposition 1.2.7 *L'application qui à une représentation l -adique ρ_l associe la représentation complexe $\iota \circ \rho_l$, établit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations l -adiques irréductibles de W_F , de caractère central d'ordre fini, sur l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations complexes continues irréductibles de W_F , de caractère central d'ordre fini.*

Remarque : Pour une représentation complexe $\sigma_{\mathbb{C}}$ de W_F et un nombre complexe s , on note $\sigma_{\mathbb{C}}(s)$ la représentation $|\cdot|^s \sigma_{\mathbb{C}}$. Le caractère central de $\rho_{\mathbb{C}}(s)$ est le caractère $\xi_{\mathbb{C}}(ns)$ associé au couple $(\xi'_{\mathbb{C}}, s(\xi_{\mathbb{C}}) + n \cdot s)$, de sorte que la représentation $\sigma_{\mathbb{C}}(-s_{\mathbb{C}}/n)$ est de caractère central d'ordre fini. Quitte à tordre les représentations complexes par un caractère, on peut donc toujours se ramener au cas des représentations de caractère central d'ordre fini.

Dans la suite de ce chapitre, on pose $\Gamma := W_F$.

1.3 Représentations admissibles de $G \times \Gamma$.

Dans cette section, on va combiner les définitions et les résultats de 1.1 et 1.2 pour définir la notion de représentation admissible de $G \times \Gamma$, où G est un groupe du type de ceux de (1.1) et Γ est comme en (1.2), le groupe de Weil du corps F .

On reprend les notations de (1.1) et de (1.2). On désignera par E une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ contenue dans une clôture algébrique fixée $\bar{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$.

Définition 1.3.1 *On appellera représentation admissible de $G \times \Gamma$ sur E toute représentation Π de $G \times \Gamma$ sur un E -espace vectoriel V_E telle que:*

- (Π, V_E) est admissible en tant que représentation de G ;
- pour tout sous-groupe ouvert compact K de G , l'action de Γ sur le E -espace vectoriel de dimension finie $(V_E)^K$ est continue au sens de 1.2.

Soit $C_{\text{ad}}(E)$ la catégorie dont les objets sont les représentations admissibles de $G \times \Gamma$ sur E et dont les morphismes sont les morphismes entre E -représentations de $G \times \Gamma$. La catégorie $C_{\text{ad}}(E)$ est abélienne.

Remarque : D'après le paragraphe 1.1, la catégorie $C_{\text{ad}}(E)$ est équivalente à la catégorie des $(E \otimes \mathcal{H})$ -modules admissibles M_E , munis d'une action de Γ compatible à la structure de $(E \otimes \mathcal{H})$ -module, tels que, pour tout sous-groupe ouvert compact K de G , la représentation de Γ sur le E -espace vectoriel de dimension finie $e_K.M_E$, est continue. On notera encore $C_{\text{ad}}(E)$ cette nouvelle catégorie et on utilisera pour désigner les objets de $C_{\text{ad}}(E)$, la notation M_E ou (Π, V_E) selon que l'on se place du point de vue des modules ou des représentations. On introduit de la même manière la catégorie $C_{\text{ad},K}(E)$ des $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -modules non dégénérés de dimension finie en tant qu'espace vectoriel sur E , munis d'une action continue de Γ compatible à la structure de $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module.

Comme au paragraphe 1.1, pour $K \subset K'$ deux éléments de $\mathcal{I}$, on a un morphisme de $(E \otimes \mathcal{H}_{K'})$ -modules qui commute à l'action de Γ

$$\begin{aligned} \pi_{K',K} : M_E^K &\longrightarrow M_E^{K'} \\ m &\longmapsto \frac{1}{\text{vol}(K', dk')} \int_{K'} k' m. dk' \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}_{K'}$ agit sur M_E^K à travers l'inclusion $\mathcal{H}_{K'} \subset \mathcal{H}_K$. Le morphisme $\pi_{K',K}$ induit alors un isomorphisme de $(E \otimes \mathcal{H}_{K'})$ -modules qui commute à l'action de Γ

$$e_{K'}.M_E^K \xrightarrow{\sim} M_E^{K'}.$$

Si $K \subset K' \subset K''$ sont des éléments de $\mathcal{I}$, on a

$$\pi_{K'',K} = \pi_{K'',K'} \circ \pi_{K',K}.$$

Proposition 1.3.2 (i) *Le foncteur*

$$M_E \longrightarrow (M_E^K, \pi_{K',K})_{K,K' \in \mathcal{I}}$$

établit une équivalence de catégories de $C_{\text{ad}}(E)$ sur la catégorie

$$2\text{-}\varprojlim_K C_{\text{ad},K}(E)$$

définie comme suit. Les objets de $2\text{-}\varprojlim_{\overline{K}} C_{\text{ad},K}(E)$ sont les systèmes projectifs $(M_{E,K}, \pi_{K',K})_{K,K' \in \mathcal{I}}$ où, pour tout élément K de $\mathcal{I}$, $M_{E,K}$ est un objet de la catégorie $C_{\text{ad},K}(E)$, où, pour toute inclusion $K \subset K'$ d'éléments de $\mathcal{I}$, $\pi_{K',K} : M_{E,K} \rightarrow M_{E,K'}$ est un morphisme de $(E \otimes \mathcal{H}_{K'})$ -modules qui commute à l'action de Γ , $\mathcal{H}_{K'}$ agissant sur $M_{E,K}$ à travers l'inclusion $\mathcal{H}_{K'} \subset \mathcal{H}_K$, tel que si $K \subset K' \subset K''$ sont des éléments quelconques de $\mathcal{I}$, on a

$$\pi_{K'',K} = \pi_{K'',K'} \circ \pi_{K',K}$$

et où on suppose que $\pi_{K',K}$ induit un isomorphisme de $(E \otimes \mathcal{H}_{K'})$ -modules

$$e_{K'}.M_{E,K} \xrightarrow{\sim} M_{E,K'},$$

qui commute à l'action de Γ . Un foncteur quasi-inverse est donné par

$$(M_{E,K})_{K \in \mathcal{I}} \longrightarrow \varinjlim_{\overline{K}} M_{E,K}$$

pour les inclusions $M_{E,K'} \simeq e_{K'}.M_{E,K} \subset M_{E,K}$ associées à $K \subset K'$.

(ii) Si M_E est un objet non nul de $C_{\text{ad}}(E)$, alors il est irréductible si et seulement si M_E^K l'est pour tout élément K de $\mathcal{I}$ tel que M_E^K est non nul.

(iii) Pour tout élément K de $\mathcal{I}$, l'application $M_E \mapsto M_E^K$ induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets irréductibles de $C_{\text{ad}}(E)$ tels que M_E^K est non nul, dans l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets irréductibles de $C_{\text{ad},K}(E)$.

(iv) Si M_E est un objet non nul, irréductible de $C_{\text{ad}}(E)$, et si K est un sous-groupe ouvert compact élément de $\mathcal{I}$ tel que M_E^K est non nul, alors $\text{End}_{C_{\text{ad}}(E)}(M_E)$ est isomorphe à $\text{End}_{C_{\text{ad},K}(E)}(M_E^K)$; c'est donc une algèbre à division de dimension finie sur E .

Preuve : (i) C'est exactement la même preuve que celle de la proposition 1.1.6.

(ii) Soit M_E un $(E \otimes \mathcal{H})$ -module muni de l'action de Γ , qui ne possède pas de sous- $(E \otimes \mathcal{H})$ -module stable sous l'action de Γ et soit M_E^K le $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module muni d'une action de Γ qui lui correspond. Soit alors N_K un sous- $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module de M_E^K stable sous l'action de Γ . Ainsi $N := \mathcal{H}.N_K$ est un sous- $(E \otimes \mathcal{H})$ -module de M_E qui est stable sous l'action de Γ et tel que $N^K = N_K$. Ainsi N est soit nul soit égal à M_E et donc N_K est soit nul, soit égal à M_E^K .

(iii) Soit N_K un $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module muni d'une action compatible de Γ , irréductible. Soient $N := \mathcal{H}.e_K \otimes_{\mathcal{H}_K} N_K$, $N_1 := \{n \in N \mid e_K.\mathcal{H}.n = 0\}$ et $N_2 := N/N_1$. Soit N' un sous- $(E \otimes \mathcal{H})$ -module muni d'une action compatible de Γ , de N . Comme N_K est irréductible et engendre N , on a $N' = N$ ou $N' \subset N_1$. De plus on a $N_2^K \simeq N_K$, d'où le résultat.

(iv) L'injection naturelle $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_E) \hookrightarrow \text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M_E^K)$ est Γ -linéaire et est une bijection. Ainsi on a $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_E)^\Gamma \simeq \text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M_E^K)^\Gamma$.

□

Pour une extension $E \subset E'$, on a un foncteur d'extension des scalaires

$$\begin{aligned} C_{\text{ad}}(E) &\longrightarrow C_{\text{ad}}(E') \\ M_E &\longrightarrow M_{E'} := M_E \otimes_E E'. \end{aligned}$$

On introduit la catégorie C_{ad} comme la sous-catégorie pleine des $(\bar{\mathbb{Q}}_l \otimes \mathcal{H})$ -modules admissibles munis d'une action compatible de Γ dont les objets M sont ceux pour lesquels il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ (qui dépend de M), telle que M est l'image d'un objet M_E de $C_{\text{ad}}(E)$ par le foncteur d'extension des scalaires de E à $\bar{\mathbb{Q}}_l$. Pour chaque extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, on a un foncteur

$$C_{\text{ad}}(E) \longrightarrow C_{\text{ad}}. \quad (1.3.3)$$

Cette famille de foncteurs est compatible aux foncteurs d'extension des scalaires et on obtient donc un foncteur

$$2\text{-}\varinjlim_E \text{Mod}_{E,\text{ad}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \text{Mod}_{\text{ad}}(\mathcal{H}). \quad (1.3.4)$$

Lemme 1.3.5 *Le foncteur (1.3.4) est une équivalence de catégories.*

Preuve : Par définition de C_{ad} , le foncteur (1.3.4) est essentiellement surjectif. D'après la proposition 1.3.2, on a un lemme analogue au lemme 1.1.10.

Lemme 1.3.6 *Soient $E \subset E'$ une extension de corps et $M_{1,E}$ et $M_{2,E}$ deux objets de $C_{\text{ad}}(E)$. Le morphisme naturel*

$$\text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E}, M_{2,E})^\Gamma \otimes_E E' \longrightarrow \text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E'}, M_{2,E'})^\Gamma$$

est un isomorphisme.

Preuve : Un élément φ de $\text{Hom}_{C_{\text{ad}}(E)}(M_{1,E}, M_{2,E})$ (resp. un élément φ_E de $\text{Hom}_{C_{\text{ad}}(E')}(M_{1,E'}, M_{2,E'})$) correspond, d'après la proposition (1.3.2 (i)), à la donnée d'un système projectif pour $K \in \mathcal{I}$

$$\varphi_{E,K} \in \text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E}^K, M_{2,E}^K)^\Gamma \quad (\text{resp. } \varphi_{E',K} \in \text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E'}^K, M_{2,E'}^K)^\Gamma).$$

Or $M_{1,E'}^K = M_{1,E}^K \otimes_E E'$ et $M_{2,E'}^K = M_{2,E}^K \otimes_E E'$ sont des E' -espaces vectoriels de dimension finie. Ainsi les injections naturelles

$$\text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E}^K, M_{2,E}^K)^\Gamma \otimes_E E' \hookrightarrow \text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}_K}(M_{1,E'}^K, M_{2,E'}^K)^\Gamma$$

sont en fait des bijections, comme on l'a déjà noté dans la preuve du lemme (1.1.10). L'injection naturelle

$$\text{Hom}_{C_{\text{ad}}(E)}(M_{1,E}, M_{2,E}) \otimes_E E' \hookrightarrow \text{Hom}_{C_{\text{ad}}(E')}(M_{1,E'}, M_{2,E'})$$

est alors surjective. $\square$

Soient deux objets M_1 et M_2 de C_{ad} . On choisit une extension finie E de $\mathbb{Q}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$ telle qu'il existe deux objets $M_{1,E}$ et $M_{2,E}$ de $C_{\text{ad}}(E)$ tels que $M_i = M_{i,E} \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}$ pour $i = 1, 2$. Soit u un élément de $\text{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{H}}(M_1, M_2)^\Gamma$. Le lemme précédent pour $E' = \bar{\mathbb{Q}}$ donne l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{H}}(M_1, M_2)^\Gamma \simeq \text{Hom}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E}, M_{2,E})^\Gamma \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}.$$

Ainsi il existe une extension finie E' de E dans $\bar{\mathbb{Q}}$ telle que u appartienne à $\text{Hom}_{E' \otimes \mathcal{H}}(M_{1,E'}, M_{2,E'})^\Gamma$. $\square$

On définit aussi $C_{\text{ad},K}$ la catégorie 2-limite du système des catégories $C_{\text{ad},K}(E)$ sur le système inductif des extensions finies E de $\mathbb{Q}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Les catégories C_{ad} et $C_{\text{ad},K}$ sont abéliennes.

1.4 Définition du groupe K_{ad} .

Notons $K_{\text{ad},K}$ le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne $C_{\text{ad},K}$. Pour tout $K \subset K'$, le foncteur exact $M_K \mapsto (M_K)^{K'}$ induit un homomorphisme $K_{\text{ad},K} \rightarrow K_{\text{ad},K'}$. On pose

$$K_{\text{ad}} := \varprojlim_{K \in \mathcal{I}} K_{\text{ad},K}.$$

Lemme 1.4.1 *Le groupe K_{ad} est naturellement isomorphe au groupe abélien des sommes formelles*

$$\sum \lambda_M \cdot [M]$$

où $[M]$ décrit l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets irréductibles M de C_{ad} , et (λ_M) décrit l'ensemble des familles d'entiers telles que pour tout élément K de $\mathcal{I}$ il n'y ait qu'un nombre fini de $[M]$ pour lesquels $M^K \neq 0$ et $\lambda_M \neq 0$.

Preuve : Les représentations associées aux objets de $C_{\text{ad},K}$ étant de dimension finie, le groupe de Grothendieck $K_{\text{ad},K}$ est le groupe abélien libre de générateurs les objets irréductibles de $C_{\text{ad},K}$. La proposition 1.3.2 permet alors de conclure. $\square$

Tout objet (Π, V) de C_{ad} a une classe associée $[(\Pi, V)]$ dans K_{ad} :

$$[(\Pi, V)] = \sum \lambda_M \cdot [M]$$

où λ_M est la multiplicité de M^K dans V^K pour K n'importe quel sous-groupe compact tel que $M^K \neq 0$; en effet, d'après l'exactitude du foncteur $M_K \mapsto (M_K)^{K'}$, cette multiplicité ne dépend pas du compact K .

Remarque : Le groupe K_{ad} n'est pas le groupe de Grothendieck de la catégorie C_{ad} .

1.5 Description des objets irréductibles de C_{ad} .

Dans toute catégorie abélienne, et donc en particulier dans $C_{\text{ad}}(E)$, on a les notions d'objets simples (ou irréductibles), isotypiques et semi-simples.

Définition 1.5.1 *Soit (Π_E, V_E) un objet irréductible de $C_{\text{ad}}(E)$, on dira qu'il est **absolument irréductible** si son image $(\Pi_E \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l, V_E \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l)$ dans la catégorie C_{ad} par le foncteur (1.3.3) est irréductible. Un objet **absolument isotypique** de $C_{\text{ad}}(E)$ (resp. $C_{\text{ad},K}(E)$) est un objet tel que son image dans la catégorie C_{ad} (resp. $C_{\text{ad},K}$) par le foncteur (1.3.3) est isotypique.*

De la même façon, une représentation σ_E (resp. π_E) de Γ (resp. de G) définie sur une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, sera dite absolument irréductible si la $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation $\sigma_E \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l$ (resp. $\pi_E \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l$) est irréductible.

Remarque : Si M_E est un $(E \otimes \mathcal{H})$ -module semi-simple, $M_E \simeq M_1^{m_1} \times \cdots \times M_r^{m_r}$, alors $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_E) \simeq M_{m_1}(\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_1)) \times \cdots \times M_{m_r}(\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_r))$. Le module M_E est isotypique (resp. absolument isotypique) si et seulement si $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(M_E)$ est une algèbre simple (resp. centrale simple sur E) (cf. [3]).

Proposition 1.5.2 (i) *Soit $(\sigma_E, V_{E,\sigma_E})$ (resp. (π_E, V_{E,π_E})) une représentation semi-simple de Γ (resp. de G), définie sur une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$, continue au sens de (1.2) (resp. π_E admissible). Le produit tensoriel*

$$(\pi_E, V_{E,\pi_E}) \otimes (\sigma_E, V_{E,\sigma_E})$$

définit un objet semi-simple de $C_{\text{ad}}(E)$ et

$$\text{End}_{C_{\text{ad}}(E)}(V_{E,\pi_E} \otimes V_{E,\sigma_E}) \simeq \text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(V_{E,\pi_E}) \otimes \text{End}_E(V_{E,\sigma_E})^\Gamma.$$

De plus si V_{E,σ_E} et V_{E,π_E} sont absolument irréductibles alors $V_{E,\pi_E} \otimes V_{E,\sigma_E}$ est un objet absolument irréductible de $C_{\text{ad}}(E)$.

(ii) *Soit (Π_E, V_E) un objet absolument irréductible de $C_{\text{ad}}(E)$, il existe alors une extension finie E' de E dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ et des représentations absolument irréductibles $(\sigma_{E'}, V_{E',\sigma_{E'}})$ et $(\pi_{E'}, V_{E',\pi_{E'}})$ de Γ et G définies sur E' , avec $\sigma_{E'}$ continue et $\pi_{E'}$ admissible, telles que l'image de (Π_E, V_E) dans la catégorie $C_{\text{ad}}(E')$ par extension des scalaires de E à E' , est isomorphe au produit tensoriel*

$$(\pi_{E'}, V_{E',\pi_{E'}}) \otimes (\sigma_{E'}, V_{E',\sigma_{E'}}).$$

De plus le couple

$$((\sigma_{E'} \otimes_{E'} \bar{\mathbb{Q}}_l, V_{E',\sigma_{E'}} \otimes_{E'} \bar{\mathbb{Q}}_l), (\pi_{E'} \otimes_{E'} \bar{\mathbb{Q}}_l, V_{E',\pi_{E'}} \otimes_{E'} \bar{\mathbb{Q}}_l))$$

est unique.

Preuve : (i) De l'égalité $(V_{E,\pi_E} \otimes V_{E,\sigma_E})^K = V_{E,\pi_E}^K \otimes V_{E,\sigma_E}$, on en déduit que $V_{E,\pi_E} \otimes V_{E,\sigma_E}$ est un objet de $C_{\text{ad}}(E)$.

Notons D_{σ_E} (resp. D_{π_E}) l'algèbre à division de dimension finie sur E des endomorphismes Γ -linéaires (resp. G -linéaires) de V_{E,σ_E} (resp. de V_{E,π_E}). On peut alors écrire

$$V_{E,\pi_E} \otimes_E V_{E,\sigma_E} \simeq (V_{E,\sigma_E} \otimes_E D_{\pi_E}) \otimes_{D_{\pi_E}} V_{E,\pi_E}$$

et tout sous-espace de $V_{E,\pi_E} \otimes_E V_{E,\sigma_E}$ stable sous l'action de $G \times \Gamma$ est de la forme $W \otimes V_{E,\pi_E}$ où W est un sous-espace de $(V_{E,\sigma_E} \otimes_E D_{\pi_E})$ stable sous les actions de Γ et de D_{π_E} . On écrit encore

$$\begin{aligned} V_{E,\sigma_E} \otimes_E D_{\pi_E} &\simeq (V_{E,\sigma_E} \otimes_{D_{\sigma_E}} D_{\sigma_E}) \otimes_E D_{\pi_E} \\ &\simeq V_{E,\sigma_E} \otimes_{D_{\sigma_E}} (D_{\sigma_E} \otimes_E D_{\pi_E}) \end{aligned}$$

et W est de la forme $W' \otimes V_{E,\sigma_E}$ où W' est un sous-espace de $(D_{\sigma_E} \otimes_E D_{\pi_E})$ stable sous les actions de D_{σ_E} et D_{π_E} . Or $D_{\sigma_E} \otimes_E D_{\pi_E}$ est une algèbre semi-simple puisque D_{σ_E} et D_{π_E} le sont, et $V_{E,\pi_E} \otimes V_{E,\sigma_E}$ est un objet semi-simple de $C_{\text{ad}}(E)$.

L'isomorphisme

$$\text{End}_{C_{\text{ad}}(E)}(V_{E,\pi_E} \otimes V_{E,\sigma_E}) \simeq \text{End}_{E \otimes \mathcal{H}}(V_{E,\pi_E}) \otimes \text{End}_E(V_{E,\sigma_E})^\Gamma$$

découle de l'exactitude du foncteur $\otimes_E$ en chacune des deux variables. Si $V_{E,\sigma_E} \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l$ et $V_{E,\pi_E} \otimes_E \bar{\mathbb{Q}}_l$ sont irréductibles alors D_{σ_E} et D_{π_E} sont isomorphes à E , et $V_{E,\pi_E} \otimes V_{E,\sigma_E}$ est absolument irréductible.

(ii) Comme toujours le principe est, grâce à l'admissibilité de Π_E , de se ramener en dimension finie où un résultat analogue est connu (cf. [3]).

- Soit (Π_E, V_E) un objet absolument irréductible de $C_{\text{ad}}(E)$.
- Soit K un élément de $\mathcal{I}$ tel que V_E^K est non nul. D'après la proposition 1.1.6, V_E^K est irréductible et $\text{End}_{C_{\text{ad},K}(E)}(V_E^K) \simeq \text{End}_{C_{\text{ad}}(E)}(V_E) \simeq E$. Le $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module V_E^K est donc absolument irréductible. Soit $\tilde{V}_{\sigma,E}$ un sous-espace vectoriel de V_E^K qui est irréductible en tant que représentation de Γ . Soit $\tilde{V}_{\pi,E,K}$ un sous $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module irréductible de $\text{Hom}_\Gamma(\tilde{V}_{\sigma,E}, V_E^K)$. On obtient ainsi une application non nulle

$$\tilde{V}_{\pi,E,K} \otimes \tilde{V}_{\sigma,E} \longrightarrow V_E^K$$

qui est surjective d'après l'irréductibilité de V_E^K .

- Notons C_1 et C_2 (resp. d_1 et d_2) les centres respectifs (resp. les dimensions respectives, sur E) des algèbres $\text{End}_\Gamma(\tilde{V}_{\sigma,E})$, et $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(\tilde{V}_{\pi,E,K})$. En reprenant la preuve de (i), $\tilde{V}_{\pi,E,K} \otimes \tilde{V}_{\sigma,E}$ est semi-simple et $\text{End}_{C_{\text{ad},K}(E)}(\tilde{V}_{\pi,E,K} \otimes \tilde{V}_{\sigma,E})$ est isomorphe à

$$\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(\tilde{V}_{\pi,E,K}) \otimes \text{End}_\Gamma(\tilde{V}_{\sigma,E}).$$

On obtient alors que E est un quotient de $C_1 \otimes C_2$ et donc $C_1 = C_2 = E$. Ainsi $\tilde{V}_{\pi,E,K} \otimes \tilde{V}_{\sigma,E}$ est absolument isotypique et donc isomorphe à une puissance de V_E^K qui n'est autre que $d_1.d_2$. On obtient alors

$$(V_E^K)^{d_1.d_2} \simeq \tilde{V}_{\pi,E,K} \otimes \tilde{V}_{\sigma,E}.$$

Il existe une extension finie E' de E telle que les algèbres centrales simples $\text{End}_\Gamma(\tilde{V}_{\sigma,E})$ et $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(\tilde{V}_{\pi,E,K})$ se scindent sur E' et on a

$$\tilde{V}_{\sigma,E} \otimes_E E' \simeq d_1.V_{E',\sigma_{E'}}$$

$$\tilde{V}_{\pi,E,K} \otimes_E E' \simeq d_2.V_{E',\pi_{E'},K}$$

où $V_{E',\sigma_{E'}}$ est un objet absolument irréductible de $R_W(E')$ et où $V_{E',\pi_{E'},K}$ est un $E' \otimes \mathcal{H}_K$ -module absolument irréductible. Comme V_E^K est absolument irréductible, des isomorphismes

$$(V_{E',\pi_{E'},K})^{d_2} \otimes V_{E',\sigma_{E'}}^{d_1} \simeq d_1.d_2.V_{E',\pi_{E'},K} \otimes V_{E',\sigma_{E'}}$$

et

$$(V_E^K)^{d_1.d_2} \simeq \tilde{V}_{\sigma,E} \otimes \tilde{V}_{\pi,E,K}$$

on en déduit

$$V_{E'}^K \simeq V_{E',\pi_{E'},K} \otimes V_{E',\sigma_{E'}}.$$

En outre cette décomposition est unique à isomorphisme près car $\tilde{V}_{\pi,E,K} \otimes V_{\sigma,E}$ est isotypique en tant que représentation de Γ de type $V_{\sigma,E}$ tout comme V_E^K . De même $\tilde{V}_{\pi,E,K} \otimes V_{\sigma,E}$ en tant que $\mathcal{H}_K$ -module est isotypique de type $\tilde{V}_{\pi,E,K}$ tout comme V_E^K .

- D'après le point (i) de la proposition (1.1.5), il existe une unique représentation irréductible, admissible $V_{E',\pi_{E'}}$ de G telle que

$$V_{E',\pi_{E'}}^K \simeq V_{E',\pi_{E'},K}.$$

Ainsi $V_{E',\pi_{E'}} \otimes V_{E',\sigma_{E'}}$ et $V_{E'}$ sont des objets irréductibles de $C_{\text{ad}}(E')$ tels que leurs images par le foncteur (1.1.4) relativement au groupe K , sont isomorphes. D'après le point (iii) de la proposition (1.3.2) $V_{E'}$ est alors isomorphe à $V_{E',\pi_{E'}} \otimes V_{E',\sigma_{E'}}$.

□

En résumé on a la description suivante du groupe K_{ad} associé à la catégorie C_{ad} .

Corollaire 1.5.3 *Le groupe K_{ad} est isomorphe au groupe abélien des sommes formelles*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{T}_G, \sigma \in \mathcal{T}_\Gamma} \lambda_{\pi \otimes \sigma}[\pi \otimes \sigma]$$

où $\mathcal{T}_\Gamma$ désigne l'ensemble des représentants des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles l -adique de Γ (cf. 1.2), $\mathcal{T}_G$ l'ensemble des représentants des classes d'isomorphismes des représentations admissibles, irréductibles de G , et $\lambda_{\pi \otimes \sigma}$ décrit l'ensemble des familles d'entiers telles que pour tout élément K de $\mathcal{I}$, il n'y ait qu'un nombre fini de couples $(\sigma, \pi) \in \mathcal{T}_\Gamma \times \mathcal{T}_G$ pour lesquels $(\pi \otimes \sigma)^K \neq (0)$ et $\lambda_{\pi \otimes \sigma} \neq 0$.

1.6 Les groupes $K_{GL, \Gamma}$ et $K_{GL, H, \Gamma}$.

Soient h un entier strictement positif et $D_{F, h}$ une algèbre à division centrale sur F d'invariant $1/h$. On note H le groupe $D_{F, h}^\times$. Les groupes $GL_h(F) \times \Gamma$ et $GL_h(F) \times H \times \Gamma$ sont des groupes du type de ceux considérés en (1.3). On introduit les algèbres de Hecke $\mathcal{H}_{GL}$ de $GL_h(F)$ et $\mathcal{H}_H$ de H , par rapport à des mesures de Haar rationnelles sur $\mathbb{Q}$. On désignera par $\mathcal{H}$ le produit tensoriel de ces algèbres de Hecke. L'ensemble $\mathcal{I}$ des sous-groupes ouverts compacts K de $GL_h(F) \times H$ de la forme $K_1 \times K_2$, pour K_1 (resp. K_2) un sous-groupe ouvert compact de $GL_h(F)$ (resp. de H), forme un système fondamental de voisinages de l'élément neutre de $GL_h(F) \times H$. Soit K un élément de $\mathcal{I}$, on a alors $\mathcal{H}_K \simeq \mathcal{H}_{GL, K_1} \otimes \mathcal{H}_{H, K_2}$. On notera respectivement $C_{GL, \Gamma}$ et $C_{GL, H, \Gamma}$ les catégories des représentations admissibles de $GL_h(F) \times \Gamma$ et $GL_h(F) \times H \times \Gamma$. Notons $\mathcal{T}_{GL}$ (resp. $\mathcal{T}_H$) l'ensemble des représentants des classes d'isomorphismes des représentations admissibles, irréductibles de $GL_h(F)$ (resp. de H). On rappelle que $\mathcal{T}_\Gamma$ désigne l'ensemble des représentants des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles l -adique de W_F . Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_l$.

Lemme 1.6.1 (i) Soient respectivement π_E et ρ_E des E -représentations admissibles semi-simples de $GL_h(F)$ et H . Le produit tensoriel $\pi_E \otimes_E \rho_E$ est une E -représentation admissible, semi-simple de $GL_h(F) \times H$. De plus si π_E et ρ_E sont absolument irréductibles, il en est de même de $\pi_E \otimes_E \rho_E$.

(ii) Soit Π_E une E -représentation admissible de $GL_h(F) \times H$, absolument irréductible. Il existe une extension finie E' de E , un élément $\pi_{E'}$ de $\mathcal{T}_{GL}$ et un élément $\rho_{E'}$ de $\mathcal{T}_H$ définis sur E' tels que

$$\Pi_E \otimes_E E' \simeq \pi_{E'} \otimes_{E'} \rho_{E'}.$$

Le couple $(\pi_{E'} \otimes_{E'} \bar{\mathbb{Q}}_l, \rho_{E'} \otimes_{E'} \bar{\mathbb{Q}}_l)$ est unique à isomorphisme près.

Preuve : (i) La preuve est identique à celle du point (i) de la proposition 1.5.2.

(ii) On note M le $(E \otimes \mathcal{H})$ -module associé à Π_E . Soient respectivement K_1 et K_2 des sous-groupes ouverts compacts de $GL_h(F)$ et de H tels que $M^K \neq (0)$

($K = K_1 \times K_2$). D'après [3] il existe un $(E \otimes \mathcal{H}_{K_1}^1)$ -module irréductible M_{1,K_1} , un $(E \otimes \mathcal{H}_{K_2}^2)$ -module irréductible M_{2,K_2} et une surjection $M_{1,K_1} \otimes M_{2,K_2} \longrightarrow M^K$. On reprend rapidement la preuve du point (ii) de la proposition 1.5.2. Le $(E \otimes \mathcal{H}_K)$ -module $M_{1,K_1} \otimes M_{2,K_2}$ est semi-simple. Son algèbre des endomorphismes est isomorphe au produit tensoriel

$$\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_{K_1}^1}(M_{1,K_1}) \otimes_E \text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_{K_2}^2}(M_{2,K_2}).$$

Soient C_1 et C_2 les centres respectifs des algèbres simples $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_{K_1}^1}(M_{1,K_1})$ et $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_{K_2}^2}(M_{2,K_2})$. Le centre de $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_K}(M^K)$ est égal à E et est un quotient de $C_1 \otimes_E C_2$. D'où on a $C_1 = C_2 = E$ et $M_{1,K_1} \otimes M_{2,K_2}$ est absolument isotypique, isomorphe à une puissance de M^K d'ordre le produit des dimensions de algèbres centrales simples $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_{K_1}^1}(M_{1,K_1})$ et $\text{End}_{E \otimes \mathcal{H}_{K_2}^2}(M_{2,K_2})$. On considère une extension finie E' de E telle que les algèbres centrales simples $\text{End}_{E' \otimes \mathcal{H}_{K_1}^1}(M_{1,K_1})$ et $\text{End}_{E' \otimes \mathcal{H}_{K_2}^2}(M_{2,K_2})$ se scindent sur E' . Ainsi il existe un $(E' \otimes \mathcal{H}_{K_1}^1)$ -module absolument irréductible M'_{1,K_1} et un $(E' \otimes \mathcal{H}_{K_2}^2)$ -module absolument irréductible M'_{2,K_2} tels que

$$M^K \otimes_E E' \simeq M'_{1,K_1} \otimes_{E'} M'_{2,K_2}.$$

D'après la proposition 1.1.5, il existe un $(E' \otimes \mathcal{H}^1)$ -module irréductible M'_1 et un $(E' \otimes \mathcal{H}^2)$ -module irréductible M'_2 tels que

$$(M'_1)^{K_1} \simeq M'_{1,K_1} \quad (M'_2)^{K_2} \simeq M'_{2,K_2}.$$

Le $(E' \otimes \mathcal{H})$ -module $M'_1 \otimes M'_2$ est absolument irréductible et toujours d'après la proposition 1.1.5 on doit avoir

$$M \otimes_E E' \simeq M'_1 \otimes M'_2.$$

L'unicité de cette écriture découle du fait que $M^K \otimes_E E'$ en tant que $(E' \otimes \mathcal{H}^1)$ -module est isotypique de type M'_{1,K_1} . □

Notons $K_{GL,\Gamma}$ et $K_{GL,H,\Gamma}$ les groupes du paragraphe 1.4 associés respectivement aux catégories $C_{GL,\Gamma}$ et $C_{GL,H,\Gamma}$.

Proposition 1.6.2 (i) *Le groupe $K_{GL,\Gamma}$ est isomorphe au groupe abélien des sommes formelles*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{T}_{GL}, \sigma \in \mathcal{T}_\Gamma} \lambda_{\pi \otimes \sigma} [\pi \otimes \sigma]$$

où $\lambda_{\pi \otimes \sigma}$ décrit l'ensemble des familles d'entiers telles que, pour tout sous-groupe compact ouvert K de $GL_h(F)$, il n'y ait qu'un nombre fini de couples $(\pi, \sigma) \in \mathcal{T}_{GL} \times \mathcal{T}_\Gamma$ pour lesquels $(\pi \otimes \sigma)^K \neq (0)$ et $\lambda_{\sigma \otimes \pi} \neq 0$.

(ii) Le groupe $K_{GL,H,\Gamma}$ est isomorphe au groupe abélien des sommes formelles

$$\sum_{\pi \in \mathcal{T}_{GL}, \rho \in \mathcal{T}_H, \sigma \in \mathcal{T}_\Gamma} \lambda_{\pi \otimes \rho \otimes \sigma} [\pi \otimes \rho \otimes \sigma]$$

où $\lambda_{\pi \otimes \rho \otimes \sigma}$ décrit l'ensemble des familles d'entiers telles que, pour tout élément K de $\mathcal{I}$, il n'y ait qu'un nombre fini de triplets $(\pi, \rho, \sigma) \in \mathcal{T}_{GL} \times \mathcal{T}_H \times \mathcal{T}_\Gamma$ pour lesquels $(\pi \otimes \rho \otimes \sigma)^K \neq (0)$ et $\lambda_{\pi \otimes \rho \otimes \sigma} \neq 0$.

Pour tout élément $[V]$ de $K_{GL,\Gamma}$ (resp. de $K_{GL,H,\Gamma}$) et tout couple (π, σ) (resp. tout triplet (π, ρ, σ)) comme ci-dessus, on notera et on appellera **multiplicité de $\pi \otimes \sigma$ (resp. de $\pi \otimes \rho \otimes \sigma$) dans $[V]$** , l'entier $\lambda_{\pi \otimes \rho \otimes \sigma}$ intervenant dans l'écriture en somme formelle de $[V]$ dans le groupe $K_{GL,\Gamma}$ (resp. $K_{GL,H,\Gamma}$) (cf. la proposition ci-dessus). Pour tout sous-groupe compact K tel que $(\pi \otimes \sigma)^K$ (resp. $(\pi \otimes \rho \otimes \sigma)^K$) est non nul, l'entier $\lambda_{\pi \otimes \sigma}$ (resp. $\lambda_{\pi \otimes \rho \otimes \sigma}$) est la multiplicité usuelle de $(\pi \otimes \sigma)^K$ (resp. de $\pi \otimes \rho \otimes \sigma$) dans $[V^K]$.

1.7 Induction et cuspidalité.

Soient P un sous-groupe parabolique de $G = GL_h(F)$, N le radical unipotent de P et M un sous-groupe de Levi de P .

- Soit (π, V) une représentation lisse de G . La restriction de π à M le long de P est la représentation lisse $\text{Res}_P^G(\pi)$ définie comme suit. Son espace est le quotient $W : = V/V(N)$ où $V(N)$ est le sous-espace vectoriel de V engendré par les éléments

$$\pi(n)(v) - v \quad v \in V, \quad n \in N.$$

L'action de M sur W est induite par l'homomorphisme

$$\delta_P^{-1/2}(-) \otimes \pi|_M : M \longrightarrow \text{Aut}(V).$$

- Soit maintenant (ρ, W) une représentation lisse de M . La représentation induite de ρ à G le long de P est la représentation lisse $\text{Ind}_P^G(\rho)$ définie comme suit. Son espace est l'espace vectoriel

$$V = \{f : G \rightarrow W \mid f(pg) = \delta_P(p)^{1/2} \rho(p) f(g) \quad \forall p \in P \quad \forall g \in G$$

$$\text{et tel que } \exists K \text{ compact ouvert tel que } f(gk) = f(g) \quad \forall k \in K\}$$

sur lequel on définit l'action de G par translation à droite.

Si les représentations π et ρ sont admissibles, il en est de même des représentations $\text{Res}_P^G(\pi)$ et $\text{Ind}_P^G(\rho)$ (cf. [24] Appendice D). Le foncteur Ind_P^G de $\text{Rep}_s(M)$ dans $\text{Rep}_s(G)$ est exact et est l'adjoint à droite du foncteur de restriction (réciprocité de Frobenius).

Pour P un sous-groupe parabolique de G et M un sous-groupe de Levi de P , on étend sans peine les notions de restriction et d'induction aux représentations admissibles de $G \times \Gamma$ et $M \times \Gamma$ que l'on note respectivement $\text{Res}_{P \times \Gamma}^{G \times \Gamma}$ et $\text{Ind}_{P \times \Gamma}^{G \times \Gamma}$. Le foncteur $\text{Ind}_{P \times \Gamma}^{G \times \Gamma}$ de la catégorie $C_{M \times \Gamma}$ sur $C_{G \times \Gamma}$ est exact et est l'adjoint à droite du foncteur de restriction $\text{Res}_{P \times \Gamma}^{G \times \Gamma}$.

On peut comme au paragraphe 1.4, introduire le groupe K_{GL} associé à la catégorie des représentations admissibles de $GL_h(F)$. Le groupe K_{GL} est isomorphe au groupe abélien des sommes formelles $\sum_{\pi \in \mathcal{T}_{GL}} \lambda_\pi [\pi]$ où λ_π décrit l'ensemble des familles d'entiers telles que, pour tout sous-groupe compact ouvert K de $GL_h(F)$, il n'y ait qu'un nombre fini d'éléments π de $\mathcal{T}_{GL}$ pour lesquels $\pi^K \neq (0)$. Pour $[V]$ un élément de K_{GL} et π un élément de $\mathcal{T}_{GL}$, on définit alors la multiplicité de π dans $[V]$ comme l'entier λ_π intervenant dans l'écriture en somme formelle de $[V]$.

Une représentation lisse irréductible (π, V) de $GL_h(F)$ est **cuspidale** si, pour tout sous-groupe parabolique propre P de $GL_h(F)$ et toute représentation ρ d'un Levi M de P , la multiplicité de π dans $\text{Ind}_P^G \rho$ est nulle. On a alors le lemme suivant.

Lemme 1.7.1 *Soient π une représentation admissible irréductible de $GL_h(F)$ et σ une représentation l -adique irréductible de Γ . Soit V une représentation admissible de $GL_h(F) \times \Gamma$ (V est un objet de $C_{GL \times \Gamma}$). On suppose que*

- π est cuspidale;
- il existe un sous-groupe parabolique P de $GL_h(F)$, un sous-groupe de Levi M de P et une représentation W de $M \times \Gamma$ telle que

$$V = \text{Ind}_{P \times \Gamma}^{G \times \Gamma} W.$$

On a alors

$$\lambda_{\pi \otimes \sigma}(V) = 0.$$

2 Correspondances de Jacquet-Langlands et de Langlands locales.

2.1 Correspondance de Jacquet-Langlands locale.

Soit $\mathcal{A}_{GL_h(F)}$ (resp. $\mathcal{A}_H$) l'ensemble des classes d'équivalence des représentations complexes admissibles, irréductibles de $GL_h(F)$ (resp. de $D_{F,h}^\times$) de caractère central d'ordre fini. On note $\mathcal{A}_{GL}^0$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{GL_h(F)}$ constitué des représentations cuspidales.

Soit π un élément de $\mathcal{A}_{GL_h(F)}$. Pour tout élément f de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$, l'opérateur $\pi(f)$ est de rang fini et admet donc une trace $\Theta_\pi(f)$. Soit $GL_h(F)_{\text{rss}}$ l'ouvert de $GL_h(F)$ formé des éléments réguliers semi-simples, i.e. des éléments dont le polynôme caractéristique est séparable et à racines (dans une clôture algébrique de F) deux à deux distinctes. La restriction de la distribution invariante $f \mapsto \Theta_\pi(f)$ à cet ouvert est donné par une fonction invariante localement constante que l'on notera encore Θ_π .

Soit ρ un élément de $\mathcal{A}_H$. L'espace sous-jacent à ρ est de dimension finie et pour tout élément δ de $D_{F,h}^\times$, on peut donc former la trace $\Theta_\rho(\delta)$ de $\rho(\delta)$.

On dira que δ correspond à un élément semi-simple γ de $GL_h(F)$ si le polynôme caractéristique réduit de δ coïncide au polynôme caractéristique de γ . Si γ est un élément semi-simple de $GL_h(F)$ qui correspond à un élément δ de $D_{F,h}^\times$, γ est alors automatiquement elliptique. Cette correspondance se décrit comme suit. Soient δ un élément de $D_{F,h}^\times$ et r le degré de l'extension $F[\delta]$ de F ; r divise h . Soient A la matrice compagnon associée au polynôme minimal de δ et γ la matrice diagonale par blocs où les blocs sont tous égaux à A . L'élément δ correspond à γ . On remarquera que la classe de conjugaison définie par γ ne dépend que de la classe de conjugaison de δ .

Par définition, on dit que ρ **correspond à π par la correspondance locale de Jacquet-Langlands** si pour tout élément γ de $GL_h(F)_{\text{rss}}$ et tout élément δ de $D_{F,h}^\times$ correspondant à γ , on a

$$\Theta_\pi(\gamma) = (-1)^{h-1} \Theta_\rho(\delta).$$

Dans [18] (Appendice), Henniart montre que pour tout élément π de $\mathcal{A}_{GL}^0$, il existe un unique élément ρ de $\mathcal{A}_H$ qui correspond à π au sens de la définition ci-dessus, on le notera $\mathfrak{J}_F(\pi)$.

Cette correspondance purement locale sera en fait exploitée dans un contexte global. Plus précisément, choisissons un corps global F et une place o de F telle que F_o soit le corps local précédemment noté F (c'est possible). Soient ∞ une place de F distincte de la place o et S un ensemble fini de places contenant les places o et ∞ . Soit D une algèbre centrale simple sur F de dimension h^2 décomposée en dehors de S , telle qu'en toute place x de S , l'invariant de D_{F_x} est $\frac{\varepsilon_x}{h}$ avec

$\varepsilon_x = \pm 1$. On suppose de plus que D_{F_o} est isomorphe à $D_{F,h}$. On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et on pose $D_{\mathbb{A}} := \mathbb{A} \otimes_F D$.

Soit $L_{\text{cusp}}(GL_h(F) \backslash GL_h(\mathbb{A}))$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions

$$\varphi : GL_h(F) \backslash GL_h(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que:

- $\exists K_\varphi \subset GL_h(\mathbb{A})$ un sous-groupe compact ouvert tel que $\varphi(gk) = \varphi(g)$, $\forall g \in GL_h(F) \backslash GL_h(\mathbb{A})$, $\forall k \in K_\varphi$;
- pour tout radical unipotent N d'un sous-groupe parabolique propre P de $GL_h(F)$ on a $\int_{N(F) \backslash N_{\mathbb{A}}} \varphi(n g) dn = 0$, $\forall g \in GL_h(F) \backslash GL_h(\mathbb{A})$.

Le groupe $GL_h(\mathbb{A})$ agit sur cet espace par translation à droite. Les représentations automorphes cuspidales de $GL_h(\mathbb{A})$ sont précisément les sous-représentations irréductibles de $L_{\text{cusp}}(GL_h(F) \backslash GL_h(\mathbb{A}))$.

De même soit $L(D^\times \backslash D_{\mathbb{A}}^\times)$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions $\varphi : D^\times(F) \backslash D_{\mathbb{A}}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\left| \begin{array}{l} \exists K_\varphi \subset D_{\mathbb{A}}^\times \text{ un sous-groupe compact ouvert tel que} \\ \varphi(gk) = \varphi(g), \forall g \in D^\times \backslash D_{\mathbb{A}}^\times, \forall k \in K_\varphi. \end{array} \right.$$

Le groupe $D_{\mathbb{A}}^\times$ agit sur cet espace vectoriel par translation à droite. Une représentation automorphe de $D_{\mathbb{A}}^\times$ est par définition une sous-représentation irréductible de $L(D^\times \backslash D_{\mathbb{A}}^\times)$.

On fixe deux places v_1 et v_2 de F , qui n'appartiennent pas à S .

Lemme 2.1.1 (cf. [23] lemme 15.10) *Soit π_o une représentation cuspidale de $GL_h(F_o)$, de caractère central d'ordre fini. Il existe une représentation automorphe cuspidale Π de $GL_h(\mathbb{A})$ telle que*

$$\Pi_o \simeq \pi_o \quad \Pi_\infty \simeq St_\infty$$

$$\Pi_v \text{ est cuspidale } \forall v \in (S \setminus \{\infty\}) \cup \{v_1, v_2\},$$

où St_∞ désigne la représentation de Steinberg de $GL_h(F_\infty)$.

Henniart dans [18] Appendice (A-4), établit la correspondance de Jacquet-Langlands locale, pour les cuspidales. En modifiant très légèrement la preuve de ce résultat, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.1.2 (cf. [18] Appendice (A-4)) *Soit π_o une représentation cuspidale de $GL_h(F_o)$, de caractère central d'ordre fini. Soit Π une représentation automorphe cuspidale de $GL_h(\mathbb{A})$ qui vérifie les hypothèses du lemme ci-dessus. Il existe alors une unique représentation automorphe, à isomorphisme près, τ de $D_{\mathbb{A}}^\times$ telle que*

$$\forall v \notin S \quad \Pi_v \simeq \tau_v.$$

On a alors

$$\tau_\infty \simeq 1_\infty \quad \text{et} \quad \forall x \in S \quad \tau_x = \mathfrak{I}_{F_o}(\Pi_x),$$

en particulier on a $\tau_o = \mathfrak{I}_{F_o}(\pi_o)$. De plus la multiplicité $m(\tau)$ de τ dans $L(D^\times \backslash D_\mathbb{A}^\times)$ est égale à 1.

Preuve : En utilisant la formule des traces simples de Deligne-Kazhdan, exactement comme dans [18], on arrive à l'égalité

$$\prod_{v \in S} \Theta_{\Pi_v} = \sum_{\tau \in \mathcal{A}(\Pi)} m(\tau) \prod_{v \in S} \Theta_{\tau_v},$$

où $\mathcal{A}(\Pi)$ est l'ensemble des représentations automorphes τ de $D_\mathbb{A}^\times$ telles que $\tau^S \simeq \Pi^S$. Pour tout $v \in S \setminus \{\infty\}$, Π_v est cuspidale, et d'après loc. cit., la correspondance de Jacquet-Langlands locale donne l'égalité

$$\Theta_{\Pi_v} = (-1)^{h-1} \Theta_{\mathfrak{I}_{F_v}(\Pi_v)}.$$

De plus Θ_{St_∞} est égale à $(-1)^{h-1} \Theta_{1_\infty}$. De l'égalité $\sum_{v \in S} \varepsilon_v \in h\mathbb{Z}$, on en déduit que le cardinal de S a la même parité que h . On obtient donc l'égalité suivante

$$\prod_{v \in S} \Theta_{\mathfrak{I}_{F_v}(\Pi_v)} = \sum_{\tau \in \mathcal{A}(\Pi)} m(\tau) \prod_{v \in S} \Theta_{\tau_v},$$

où désormais toutes les représentations qui interviennent sont des représentations de $\prod_{v \in S} D_v^\times$. La proposition découle alors de l'indépendance des caractères sur $\prod_{v \in S} D_v^\times$. □

2.2 Correspondance de Langlands locale.

Pour tout ce qui concerne ce paragraphe, on renvoie à la présentation du sujet dans [20]. Pour tout entier $d \geq 1$, $\mathcal{G}_F^0(d)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations l -adique irréductibles de dimension d de W_F , de caractère central d'ordre fini (ou de manière équivalente, l'ensemble des classes d'équivalence des représentations complexes irréductibles et admissibles de $GL_d(F)$). L'isomorphisme du corps de classe $W_F^{\text{ab}} \simeq F^\times$ normalisé de façon à faire correspondre aux Frobenius géométriques, les uniformisantes de F , induit une bijection de $\mathcal{A}_{GL_1(F)}^0$ sur $\mathcal{G}_F^0(1)$. Pour tout entier $d \geq 1$ et pour tout élément $\pi \in \mathcal{A}_{GL_d(F)}$, Godement et Jacquet définissent les facteurs $L(\pi)$ et $\varepsilon(\pi)$ (le facteur ε dépend du choix d'un caractère additif de F). Jacquet-Piatetski Shapiro associent à toute paire $(\pi, \pi') \in \mathcal{A}_{GL_d(F)} \times \mathcal{A}_{GL_{d'}(F)}$, les facteurs $L(\pi, \pi')$ et $\varepsilon(\pi, \pi')$. De la même façon

si σ est un élément de $\mathcal{G}_F^0(d)$ (resp. $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G}_F^0(d) \times \mathcal{G}_F^0(d')$), on a des facteurs $L(\sigma)$ et $\varepsilon(\sigma)$ (resp. $L(\sigma, \sigma')$ et $\varepsilon(\sigma, \sigma')$) (cf. [33]).

Théorème 2.2.1 (cf. [23] théorème (15.7) **correspondance de Langlands locale**) *Il existe une unique suite d'applications bijectives $(\mathfrak{L}_{d,F})_d$ de $\mathcal{A}_{GL_d(F)}^0$ dans $\mathcal{G}_F^0(d)$ telle que:*

– pour tout $\pi, \pi' \in \mathcal{A}_{GL_d(F)}^0$, on a

$$L(\mathfrak{L}_{d,F}(\pi) \otimes \mathfrak{L}_{d',F}(\pi')) = L(\pi \otimes \pi');$$

– pour tout $\pi \in \mathcal{A}_{GL_d(F)}^0$, on a

$$\mathfrak{L}_{d,F}(\check{\pi}) = \check{\mathfrak{L}}_{d,F}(\pi).$$

De plus cette suite d'application vérifie les propriétés suivantes:

– pour tout $\pi \in \mathcal{A}_{GL_d(F)}^0$ et $\pi' \in \mathcal{A}_{GL_{d'}(F)}^0$ on a

$$L(\mathfrak{L}_{d,F}(\pi) \otimes \mathfrak{L}_{d',F}(\pi')) = L(\pi \otimes \pi')$$

$$\varepsilon(\mathfrak{L}_{d,F}(\pi) \otimes \mathfrak{L}_{d',F}(\pi')) = \varepsilon(\pi \otimes \pi');$$

– pour tout $\pi \in \mathcal{A}_{GL_d(F)}^0$, le déterminant de $\mathfrak{L}_{d,F}(\pi)$ correspond au caractère central de π par la théorie du corps de classe;

– pour tout $\pi \in \mathcal{A}_{GL_d(F)}^0$ et pour tout caractère d'ordre fini ξ de $F^\times$, on a

$$\mathfrak{L}_{d,F}(\pi \otimes \xi) = \mathfrak{L}_{d,F}(\pi) \otimes \mathfrak{L}_{1,F}(\xi \circ \det).$$

Remarque : Le théorème ci-dessus est obtenu via l'étude de la cohomologie du schéma de module des $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques (cf. chapitre 4 paragraphe 2). La correspondance de Langlands locale ne sera utilisé dans ce texte, que sous la forme du théorème 2.5 du chapitre 3, du à Laumon, Rapoport et Stulher.

3 La représentation locale fondamentale.

Dans cette partie on rappelle comment Deligne et Carayol construisent une représentation l -adique, dite locale fondamentale, du groupe $GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F$ et on énonce la conjecture de Deligne-Carayol que l'on prouvera au chapitre 4.

3.1 Les $\mathcal{O}$ -modules formels et leurs déformations d'après Drinfel'd.

On reprend dans cette partie des définitions et des résultats présents dans [11].

3.1.1 Définition et propriétés des $\mathcal{O}$ -modules formels.

Soit R un anneau. Un **groupe formel** (commutatif) sur R est par définition, une série formelle $f \in R[[x, y]]$ telle que

$$f(x, y) = f(y, x), \quad f(x, 0) = x, \quad f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z).$$

Un homomorphisme d'un groupe formel f vers un groupe formel g , est une série formelle $\varphi \in R[[x]]$ telle que

$$\varphi(f(x, y)) = g(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Les endomorphismes du R -groupe formel f , forment une R -algèbre notée $\text{End } f$. Pour tout groupe formel f sur R , on note $D : \text{End } f \rightarrow R$ l'homomorphisme canonique $\varphi \mapsto \varphi'(0)$.

EXEMPLE - Le groupe additif est la série formelle

$$f(x, y) = x + y.$$

Si R est de caractéristique p , on note τ l'endomorphisme de Frobenius qui correspond à la série $\varphi(x) = x^p$. L'anneau des endomorphismes du groupe additif est alors l'anneau non commutatif $R\{\{\tau\}\}$ muni de la loi de commutation $\tau.r = r^p.\tau$, pour tout élément r de R .

Soient $\mathcal{O}$ un anneau et R une $\mathcal{O}$ -algèbre. On note $\gamma : \mathcal{O} \rightarrow R$ l'homomorphisme naturel. Un **$\mathcal{O}$ -module formel** sur R est un couple (f, ψ) où f est un groupe formel sur R et ψ est un homomorphisme de $\mathcal{O}$ vers $\text{End } f$, tel que $D \circ \psi = \gamma$. On notera encore ψ_a l'endomorphisme $\psi(a)$ de $\text{End } f$. Une **isogénie** du groupe formel (f, ψ) est un endomorphisme φ du groupe formel f qui vérifie de plus pour tout élément $a \in \mathcal{O}$, $\psi_a(\varphi(x)) = \varphi(\psi_a(x))$.

EXEMPLE - Le $\mathcal{O}$ -module additif est le couple (f, ψ) où

$$f(x, y) = x + y \text{ et, } \forall a \in \mathcal{O}, \psi_a(x) = a.x.$$

Un $\mathcal{O}$ -module formel sur R tronqué en degré n , est une paire (f, ψ) où f appartient à $R[[x, y]]/(x, y)^n$ et où pour tout élément a de $\mathcal{O}$, ψ_a appartient à $R[[x]]/(x^n)$; les relations entre f et les ψ_a , pour $a \in \mathcal{O}$, sont les relations modulo $\deg n$, qui proviennent de la définition de $\mathcal{O}$ -module formel.

Considérons le foncteur de la catégorie des $\mathcal{O}$ -algèbres dans la catégorie des ensembles qui à une $\mathcal{O}$ -algèbre R associe l'ensemble des $\mathcal{O}$ -modules formels sur R . Ce foncteur est représenté par une algèbre $\Lambda_{\mathcal{O}}$ de générateurs les coefficients indéterminés des séries f et $(\psi_a)_{a \in \mathcal{O}}$, les relations étant celles requises pour que (f, ψ) soit un $\mathcal{O}$ -module formel. L'algèbre $\Lambda_{\mathcal{O}}$ est naturellement munie d'une graduation: $\Lambda_{\mathcal{O}} = \bigoplus_n \Lambda_{\mathcal{O}}^n$. L'ensemble des $\mathcal{O}$ -modules formels sur R tronqués en degré n est canoniquement isomorphe à l'ensemble des homomorphismes de $\mathcal{O}$ -modules $\psi : \bigoplus_{k=0}^{n-1} \Lambda_{\mathcal{O}}^k \longrightarrow R$ tels que $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$ et $\psi(1) = 1$. Les éléments de la forme ab pour a et b appartenant à $\Lambda_{\mathcal{O}}$ avec $\deg a > 1$ et $\deg b > 1$, engendrent un idéal homogène que l'on note $D_{\mathcal{O}} = \bigoplus_n D_{\mathcal{O}}^n$. L'ensemble des homomorphismes de $\mathcal{O}$ -modules $\Lambda_{\mathcal{O}}^n/D_{\mathcal{O}}^n \longrightarrow R$ est isomorphe à l'ensemble des homomorphismes de $\mathcal{O}$ -modules $\psi : \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_{\mathcal{O}}^k \longrightarrow R$ tels que $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$, la restriction de ψ à $\bigoplus_{k=0}^{n-1} \Lambda_{\mathcal{O}}^k$ étant fixée à l'avance. Ce dernier ensemble est en bijection avec l'ensemble des $\mathcal{O}$ -modules formels sur R tronqués en degré n , tels que leur réduction en degré $(n-1)$ soit fixée à l'avance.

Dans la suite, $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des entiers d'un corps F local complet, d'égale caractéristique p . On choisit une uniformisante π et on note $\kappa = \mathcal{O}/(\pi)$ le corps résiduel, de cardinal q . On pourra trouver les preuves des résultats suivants dans [11].

Soient (f, ψ) et $(\tilde{f}, \tilde{\psi})$ deux $\mathcal{O}$ -modules formels sur R tronqués en degré $(n+1)$ tels que

$$(f, \psi) \equiv (\tilde{f}, \tilde{\psi}) \pmod{\deg n}.$$

Il existe alors un élément r de R tel que:

- si n n'est pas une puissance de q , on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &\equiv \tilde{f}(x, y) + r[(x + y)^n - x^n - y^n], \\ \psi_a(x) &\equiv \tilde{\psi}_a(x) + r(a^n - a)x^n; \end{aligned}$$

- si n est une puissance de q , on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \tilde{f}(x, y) + r/\pi[(x + y)^n - x^n - y^n], \\ \psi_a(x) &= \tilde{\psi}_a(x) + r/\pi(a^n - a)x^n. \end{aligned}$$

On fixe (f, ψ) un $\mathcal{O}$ -module formel sur R tronqué en degré n et à $(\tilde{f}, \tilde{\psi})$, un $\mathcal{O}$ -module formel sur R tronqué en degré n tel que $(f, \psi) \equiv (\tilde{f}, \tilde{\psi}) \pmod{\deg(n-1)}$, on lui associe l'élément r de R défini ci-dessus. On construit ainsi un morphisme injectif de $\mathcal{O}$ -modules $\mathcal{O} \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{O}}^n/D_{\mathcal{O}}^n$.

Proposition 3.1.1.1 *Le morphisme de $\mathcal{O}$ -modules $\mathcal{O} \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{O}}^n/D_{\mathcal{O}}^n$ défini ci-dessus, est un isomorphisme.*

Considérons l'anneau de polynôme $\mathcal{O}[g_2, g_3, \dots]$ en les indéterminées $g_2, g_3, \dots$ muni de la graduation $\deg g_i = i - 1$. Soit n'importe quel morphisme d'algèbre graduée $\psi : \mathcal{O}[g_2, g_3, \dots] \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{O}}$ tel que pour tout $i \geq 2$, l'image de $\psi(g_i)$ dans $\Lambda_{\mathcal{O}}^i/D_{\mathcal{O}}^i \simeq \mathcal{O}$ est inversible.

Proposition 3.1.1.2 *Le morphisme ψ est un isomorphisme d'algèbres graduées*

$$\mathcal{O}[(g_i)_i] \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathcal{O}}.$$

La preuve de cette proposition découle de la proposition suivante.

Proposition 3.1.1.3 *Pour tout F -module formel (f, ψ) , il existe un unique isomorphisme s de (f, ψ) vers le module additif tel que $s'(0) = 1$. On obtient ainsi*

$$\Lambda_F \simeq F[c_2, c_3, \dots]$$

où les c_i sont les coefficients de l'isomorphisme $s = x + \sum_{i=2}^{\infty} c_i x^i$, $\deg c_i = i - 1$.

Soient κ' un sur-corps de κ et (f, ψ) un $\mathcal{O}$ -module formel sur κ' . Le groupe formel f étant isomorphe au groupe additif, on supposera que $f(x, y) = x + y$. Si φ est un endomorphisme non nul de (f, ψ) , il existe alors un entier h et une série formelle Φ tels que $\varphi(x) = \Phi(x^{q^h})$. L'entier h est appelé **la hauteur** de φ . La hauteur d'un $\mathcal{O}$ -module formel sur κ' est par définition la hauteur de l'endomorphisme ψ_{π} .

Lemme 3.1.1.4 *Il existe des $\mathcal{O}$ -modules formels de hauteur arbitraire.*

Preuve : Le $\mathcal{O}$ -module formel sur κ' associé à un homomorphisme $\lambda : \Lambda_{\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O}[(g_i)_i] \longrightarrow \kappa'$ tel que $\lambda(g_{q^h-1}) \neq 0$ et $\lambda(g_i) = 0$ pour $i < q^h - 1$, est de hauteur h . □

Un $\mathcal{O}$ -module formel (f, ψ) de hauteur h est dit *normal* si les conditions suivantes sont satisfaites:

- $\psi_{\pi}(x) = x^{q^h}$,
- $f \in \mathbb{F}_{q^h}[[x, y]]$, $\psi_a(x) \in \mathbb{F}_{q^h}[[x]]$ pour $a \in \mathcal{O}$,
- $f(x, y) \equiv x + y \pmod{\deg q^h}$; $\psi_a(x) \equiv ax \pmod{\deg q^h}$.

Lemme 3.1.1.5 (cf. [11]) *Tout $\mathcal{O}$ -module formel de hauteur h sur $\bar{\kappa}$ est isomorphe à un $\mathcal{O}$ -module formel de hauteur h , normal.*

Proposition 3.1.1.6 *Tous les $\mathcal{O}$ -modules formels de hauteur h sur une clôture séparable de κ sont isomorphes. L'anneau des endomorphismes d'un tel $\mathcal{O}$ -module formel est isomorphe à l'anneau des entiers d'une algèbre à division centrale $D_{F,h}$ sur F , d'invariant $1/h$.*

Dans la suite, tous les $\mathcal{O}$ -modules formels (sur $\bar{\kappa}$) considérés seront normaux. En particulier, pour un tel $\mathcal{O}$ -module formel (f, ψ) de hauteur h , l'action de la puissance h -ème du Frobenius de κ sur le groupe formel f est égale à l'action de π .

3.1.2 Déformations des $\mathcal{O}$ -modules formels.

Soit $\mathcal{O}^{nr}$ l'extension non ramifiée maximale de $\mathcal{O}$ et $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$ la complétion de $\mathcal{O}^{nr}$. On considère la catégorie C dont les objets sont les $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$ -algèbres locales complètes noethériennes, de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa} = \hat{\mathcal{O}}^{nr}/(\pi)$. Les morphismes de C sont les homomorphismes locaux de $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$ -algèbres. Soit $(\bar{f}, \bar{\psi})$ un $\mathcal{O}$ -module formel sur $\bar{\kappa}$, de hauteur h , normal et R un objet de C .

Une **déformation** de $(\bar{f}, \bar{\psi})$ définie sur R est un $\mathcal{O}$ -module formel (f, ψ) sur R tel que sa réduction modulo l'idéal maximal de R est $(\bar{f}, \bar{\psi})$. Des déformations (f_1, ψ_1) et (f_2, ψ_2) de $(\bar{f}, \bar{\psi})$ définies sur R sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme entre ces deux $\mathcal{O}$ -modules formels sur R , induisant l'identité sur $(\bar{f}, \bar{\psi})$.

Proposition 3.1.2.1 (cf. [11]) *Le foncteur de la catégorie C dans la catégorie des ensembles qui à un objet R de C associe l'ensemble des déformations à isomorphisme près, de $(\bar{f}, \bar{\psi})$ définies sur R , est représenté par l'algèbre $D_0^h \simeq \hat{\mathcal{O}}^{nr}[[t_1, \dots, t_{h-1}]]$.*

Remarque : Si $(\bar{f}, \bar{\psi})$ correspond à l'application $\mathcal{O}[g_2, g_3, \dots] \simeq \Lambda_{\mathcal{O}} \rightarrow \bar{\kappa}$ tel que l'image de g_i est nulle pour $i < q^h - 1$, alors la déformation universelle $\mathcal{O}[g_2, g_3, \dots] \rightarrow \hat{\mathcal{O}}^{nr}[[t_1, \dots, t_{h-1}]]$ est telle que l'image de g_i est nulle pour i qui n'est pas de la forme $q^j - 1$ et l'image de g_{q^j-1} est t_j pour $1 \leq j \leq h - 1$.

Soit R un objet de la catégorie C , d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit (f, ψ) une déformation d'un $\mathcal{O}$ -module formel $(\bar{f}, \bar{\psi})$ de hauteur h , définie sur R . L'idéal $\mathfrak{m}$ est alors muni d'une structure de $\mathcal{O}$ -module via la formule:

$$\forall m \in \mathfrak{m}, \forall a \in \mathcal{O}, \quad a.m = \psi_a(m).$$

Une **structure de niveau n** sur (f, ψ) , au sens de Drinfel'd, est un homomorphisme de $\mathcal{O}$ -modules

$$\iota_n : (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h \longrightarrow \mathfrak{m}$$

tel que $\psi_{\pi}(x)$ est divisible par $\prod_{\alpha \in (\pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h} (x - \iota_n(\alpha))$.

Une **déformation de niveau n** de $(\bar{f}, \bar{\psi})$, définie sur R , est par définition une déformation (f, ψ) définie sur R et munie d'une structure de niveau n .

Proposition 3.1.2.2 *Le foncteur qui à un objet R de C associe l'ensemble des déformations de niveau n de $(\bar{f}, \bar{\psi})$ à isomorphisme près, est représenté par un anneau D_n^h tel que:*

- D_n^h est régulier,
- pour $m \leq n$, le morphisme $D_m^h \rightarrow D_n^h$ est fini et plat.

On rappelle que l'on a

$$\mathcal{D}_{F,h} = \{\delta \in \bar{\kappa}\{\{\tau\}\} / \forall a \in \mathcal{O} \delta \bar{\psi}_a = \bar{\psi}_a \delta\}$$

et

$$D_{F,h} = \{\delta \in \bar{\kappa}((\tau)) / \forall a \in \mathcal{O} \delta \bar{\psi}_a = \bar{\psi}_a \delta\}.$$

Pour tout entier n , on a sur D_n^h une action naturelle de $GL_h(\mathcal{O})$ et de $\mathcal{D}_{F,h}^\times$ que l'on définit sur la déformation universelle de niveau n , $((f, \psi), \iota_n)$, comme suit.

- Soit δ un élément de $\mathcal{D}_{F,h}^\times \subset \bar{\kappa}\{\{\tau\}\} \subset D_n\{\{\tau\}\}$. L'image de $((f, \psi), \iota_n)$ par δ est le couple

$$((\delta \circ f \circ \delta^{-1}, \delta \circ \psi \circ \delta^{-1}), \delta \circ \iota_n).$$

- Soit g un élément de $GL_h(\mathcal{O})$. Son action à droite (par g^{-1}) sur $(\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$ définit un isomorphisme

$$g : (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h \xrightarrow{(\times g^{-1})} (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h.$$

L'image de $((f, \psi), \iota_n)$ par g est le couple

$$((f, \psi), \iota_n \circ g).$$

Le sous-groupe

$$K_{h,n} := \text{Ker} (GL_h(\mathcal{O}) \longrightarrow GL_h(\mathcal{O}/(\pi^n)))$$

de $GL_h(\mathcal{O})$ agit trivialement sur D_n^h . On remarque que les actions de $GL_h(\mathcal{O})$ et de $\mathcal{D}_{F,h}^\times$ sur D_n^h , commutent et sont compatibles aux morphismes de restriction du niveau $D_m^h \longrightarrow D_n^h$, pour tout couple d'entiers (n, m) tels que $m \leq n$.

Le but du paragraphe suivant est de construire, à partir de cette représentation de $GL_h(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,h}^\times$, une représentation de $GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F$.

3.2 Définition de la représentation locale fondamentale.

On fixe un caractère d'ordre fini ξ de $F^\times$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et on note ξ' sa restriction à $\mathcal{O}^\times$.

3.2.1 Cohomologie évanescence des algèbres D_n^h .

Fixons tout d'abord un entier $n \geq 1$. Pour tout entier $i \geq 0$, on considère la cohomologie l -adique

$$\Psi_n^{h,i} := H^i \left(\text{Spec}(D_n^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\text{nr}}} \overline{\hat{F}^{\text{nr}}}), \bar{\mathbb{Q}}_\ell \right).$$

La $\widehat{F}^{\text{nr}}$ -algèbre $D_n^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \widehat{F}^{\text{nr}}$ étant de dimension $h - 1$, d'après [31] I-4.2., si i est strictement supérieur à $h - 1$, $\Psi_n^{h,i}$ est nul. On rappelle que $\text{Gal}(\widehat{F}^{\text{nr}}/\widehat{F}^{\text{nr}})$ est isomorphe à $\text{Gal}(\bar{F}/F^{\text{nr}})$. En particulier $\text{Gal}(\bar{F}/F^{\text{nr}})$ agit naturellement sur le $\bar{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel de dimension finie $\Psi_n^{h,i}$. De plus, les actions géométriques de $\mathcal{D}_{F,h}^\times$ et $GL_h(\mathcal{O})$ sur D_n^h , définies dans la section précédente, induisent, pour tout $i \geq 0$, une action de $GL_h(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,h}^\times$ sur $\Psi_n^{h,i}$ qui commute à l'action de $\text{Gal}(\bar{F}/F^{\text{nr}})$.

On note $\Psi_n^{h,i}(\xi')$ le quotient de $\Psi_n^{h,i}$ sur lequel le centre $\mathcal{O}^\times \subset GL_h(\mathcal{O})$ agit par ξ' . On remarque alors qu'un élément z de $\mathcal{O}^\times$, vu comme élément du centre $\mathcal{O}^\times \subset \mathcal{D}_{F,h}^\times$, agit sur $\Psi_n^{h,i}(\xi')$ via le scalaire $\xi'(z)^{-1}$. On pose

$$\Psi^{h,i}(\xi') = \varinjlim_n \Psi_n^{h,i}(\xi')$$

où les flèches de transition sont induites par les morphismes de restriction du niveau $D_m^h \longrightarrow D_n^h$ ($m \leq n$). Le $\bar{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel $\Psi^{h,i}(\xi')$ est muni d'une action du groupe produit $GL_h(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,h}^\times \times \text{Gal}(\bar{F}/F^{\text{nr}})$ et pour tout entier n , on a un isomorphisme $(GL_h(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,h}^\times \times \text{Gal}(\bar{F}/F^{\text{nr}}))$ -équivariant

$$(\Psi^{h,i}(\xi'))^{K_{h,n}} \simeq \Psi_n^{h,i}(\xi').$$

3.2.2 Correspondances de Hecke.

On note $\text{rn} : D_{F,h}^\times \rightarrow F^\times$ la norme réduite et $\text{cl} : W_F \twoheadrightarrow W_F^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} F^\times$ le morphisme de la théorie du corps de classe. On fixe un élément τ de W_F dont l'image dans $F^\times$ est l'uniformisante π .

Soit

$$\mathfrak{P} \subset GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F$$

le noyau de l'application

$$\begin{aligned} GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F &\longrightarrow \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \\ (g, \delta, w) &\longmapsto \text{val}(\det(g^{-1}).\text{rn}(\delta).\text{cl}(w)). \end{aligned}$$

Le sous-groupe $\mathfrak{P}$ contient $GL_h(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,h}^\times \times \text{Gal}(\bar{F}/F^{\text{nr}})$. Dans une première étape, on rappelle comment Deligne et Carayol prolongent l'action du groupe $GL_h(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,h}^\times \times \text{Gal}(\bar{F}/F^{\text{nr}})$ sur $\Psi^{h,i}(\xi')$, au sous-groupe $\mathfrak{P}$.

On considère les éléments de $GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F$ qui sont de la forme:

- a) $(z_1, z_2, 1)$ pour $z_1, z_2 \in F^\times$, où l'on identifie $F^\times$ respectivement au centre de $GL_h(F)$ et de $D_{F,h}^\times$;
- b) $(g^{-1}, \delta^{-1}, 1)$ avec $g \in M_h(\mathcal{O}) \cap GL_h(F)$, $\delta \in D_{F,h}^\times$ et $\text{val}(\det g) = \text{val}(\text{rn}(\delta))$;

- c) $(g^{-1}, 1, \tau^{-r})$ avec $g \in M_h(\mathcal{O}) \cap GL_h(F)$ et $r = \text{val}(\det g)$.

Ces éléments constituent un ensemble générateur de $\mathfrak{P}$. On rappelle les actions de ces éléments sur $\Psi^{h,i}(\xi')$ et on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on obtient ainsi une action de $\mathfrak{P}$ sur $\Psi^{h,i}(\xi')$.

- *Eléments du type a*): A l'élément $(z_1, z_2, 1)$, on associe l'endomorphisme $\xi(z_1 z_2^{-1}) \text{Id}$ de $\Psi^{h,i}(\xi')$.

Pour les éléments de type b) et c), nous utiliserons la proposition suivante.

Proposition 3.2.2.1 (cf. [11]) *Soit R une $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$ -algèbre locale complète de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa}$. Soit (f, ψ) un $\mathcal{O}$ -module formel défini sur R et muni d'une structure de niveau n , ι_n . Soit $P \subset (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$ un sous-module. On définit*

$$\alpha(X) := \prod_{p \in P} f(X, \iota_n(p)).$$

Il existe alors un unique $\mathcal{O}$ -module formel (f_P, ψ_P) défini sur R tel que

$$\alpha \circ f(X, Y) = f_P(\alpha(X), \alpha(Y)) \text{ et } \forall a \in \mathcal{O}, \alpha \circ \psi_a(X) = \psi_{P,a}(\alpha(X)).$$

Si m est un entier tel que le morphisme naturel

$$\theta : (\pi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h \longrightarrow (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h / P$$

est injectif, alors l'homomorphisme $\iota_n \circ \theta$ de $(\pi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$ dans l'idéal maximal de R est une structure de niveau m sur f_P que l'on note $\iota_{P,m}$.

Soit g un élément de $M_h(\mathcal{O})$ de déterminant non nul. On choisit des entiers n et m tels que le noyau de l'application

$$g : (F/\mathcal{O})^h \longrightarrow (F/\mathcal{O})^h$$

est contenu dans $(\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$ et tels que l'image de $(\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$ par g contienne $(\pi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$. Soit alors $((f, \psi), \iota_n)$ la déformation universelle de niveau n de $(\bar{f}, \bar{\psi})$. Soit $(f_{\text{Ker } g}, \psi_{\text{Ker } g})$ le $\mathcal{O}$ -module formel de la proposition ci-dessus, associé à $\text{Ker } g$, muni de sa structure de niveau m , $\iota_{\text{Ker } g, m}$

- *Eléments du type b*): On vérifie que la quasi-isogénie

$$(\bar{f}, \bar{\psi}) \xrightarrow{\delta^{-1}} (\bar{f}, \bar{\psi}) \longrightarrow (\bar{f}_{\text{Ker } g}, \bar{\psi}_{\text{Ker } g})$$

est un isomorphisme. En considérant $(f_{\text{Ker } g}, \psi_{\text{Ker } g})$ comme une déformation de niveau m de $(\bar{f}, \bar{\psi})$, définie sur D_n^d , on obtient alors un morphisme $[g, \delta] : D_m^h \longrightarrow D_n^h$. A l'élément $(g^{-1}, \delta^{-1}, 1)$, on associe la correspondance

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spec } D_n^h & \\ \swarrow c_1 & & \searrow c_2 \\ \text{Spec } D_m^h & & \text{Spec } D_m^h \end{array}$$

où c_2 est induit par $[g, \delta]$ et c_1 est le morphisme de restriction du niveau. Cette correspondance définit, pour tout i , un endomorphisme du $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel $\Psi_m^{h,i}(\xi')$ et donc un endomorphisme de $\Psi^{h,i}(\xi')$.

- *Eléments du type c*): La quasi-isogénie

$$(\bar{f}, \bar{\psi})^{\tau^r} \xrightarrow{\tau^{-r}} (\bar{f}, \bar{\psi}) \longrightarrow (\bar{f}_{\text{Ker } g}, \bar{\psi}_{\text{Ker } g})$$

est un isomorphisme. On obtient alors un morphisme $[g, r] : D_m^{h,(r)} \longrightarrow D_n^h$, où $D_m^{h,(r)}$ est la $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -algèbre associée aux déformations de $(\bar{f}, \bar{\psi})^{\tau^r}$, c'est-à-dire le produit tensoriel $D_m^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}, \alpha} \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ où α est la puissance r -ème de l'inverse du relèvement canonique $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ du Frobenius de κ . A l'élément $(g^{-1}, 1, \tau^{-r})$, on associe alors la correspondance

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spec } D_n^h & \\ c_1 \swarrow & & \searrow c_2 \\ \text{Spec } D_m^h & & \text{Spec } D_m^{h,(r)} \xleftarrow{\sim} \text{Spec } D_m^h \end{array}$$

où c_2 est induit par $[g, r]$ et c_1 est le morphisme de restriction du niveau. Cette correspondance définit, pour tout i , un endomorphisme de $\Psi^{h,i}(\xi')$.

Remarque : Le $\mathcal{O}$ -module formel $(\bar{f}, \bar{\psi})$ défini sur $\bar{\kappa}$ (dont D_n^h représente les déformations) étant choisi normal, l'action de la puissance h -ème du Frobenius de κ sur $\bar{f}$ est égale à $\bar{\psi}_\pi$. L'action de $(\pi^{-1}, 1, \tau^{-h})$ sur D_n^h est alors triviale.

Remarque : Les groupes $GL_h(F) \times \{1\} \times \{1\}$ et $\{1\} \times D_{F,h}^\times \times \{1\}$ sont contenus dans $\mathfrak{P}$. Un élément z du centre $F^\times$ de $GL_h(F)$ (resp. de $D_{F,h}^\times$) agit sur $\Psi^{h,i}(\xi')$ par le scalaire $\xi(z)$ (resp. $\xi^{-1}(z)$). L'espace $\Psi^{h,i}(\xi')$ ainsi muni de l'action de $\mathfrak{P}$ sera noté $\Psi^{h,i}(\xi)$.

3.2.3 La représentation locale fondamentale.

Le quotient $(GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F) / \mathfrak{P}$ étant fini, on pose pour tout entier i ,

$$\mathcal{U}^{h,i}(\xi) := \text{Ind}_{\mathfrak{P}}^{GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F} \Psi^{h,i}(\xi).$$

Lemme 3.2.3.1 *Pour tout i , les représentations $\mathcal{U}^{h,i}(\xi)$ sont admissibles au sens de la définition 1.3.1 et constituent donc des objets de la catégorie $C_{GL,H,\Gamma}$.*

Définition 3.2.3.2 *La représentation $\mathcal{U}^{h,h-1}(\xi)$ est appelée la représentation locale fondamentale associée au caractère d'ordre fini ξ ; on la notera $\mathcal{U}_h(\xi)$.*

4 Enoncé du théorème principal.

Théorème 4.1 *Soient ξ un caractère d'ordre fini de $F^\times$, π une représentation irréductible admissible cuspidale de $GL_h(F)$ de caractère central ξ , ρ une représentation irréductible admissible de $D_{F,h}^\times$ et σ une représentation irréductible l -adique de W_F . Alors la multiplicité $\lambda_{\pi \otimes \rho \otimes \sigma}(\mathcal{U}^{h,i}(\xi))$ de la représentation irréductible $\pi \otimes \rho \otimes \sigma$ de $GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times W_F$ dans la représentation $\mathcal{U}^{h,i}(\xi)$, est nulle si $i \neq h - 1$ et sinon elle est donnée par*

$$\lambda_{\pi \otimes \rho \otimes \sigma}(\mathcal{U}_h(\xi)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho = \mathfrak{I}_F(\tilde{\pi}) \text{ et } \sigma = \mathfrak{L}_{h,F}(\pi) \\ 0 & \text{si } \rho \neq \mathfrak{I}_F(\tilde{\pi}) \text{ ou } \sigma \neq \mathfrak{L}_{h,F}(\pi), \end{cases}$$

où $\tilde{\pi}$ est la représentation contragrédiente de π .

Remarque : D'après la définition de l'action de $GL_h(F) \times D_{F,h}^\times \times \Gamma$ sur $\mathcal{U}^{h,i}(\xi)$, si $\lambda_{\pi \otimes \rho \otimes \sigma}(\mathcal{U}^{h,i}(\xi)) \neq 0$ pour un triplet (π, ρ, σ) de $\mathcal{T}_{GL} \times \mathcal{T}_H \times \mathcal{T}_\Gamma$ alors le caractère central de π (resp. de ρ) est ξ (resp. ξ^{-1}).

Chapitre 2

$\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques, structures de niveaux, espaces de modules: rappels et compléments.

Notations.

Soit X une courbe projective, irréductible, lisse et géométriquement connexe, sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. On notera F le corps des fonctions de X et $|X|$ l'ensemble des points fermés de X .

Pour x un élément de $|X|$ on note:

- F_x le complété x -adique de F ,
- $\mathcal{O}_x$ l'anneau des entiers de F_x ,
- π_x une uniformisante de $\mathcal{O}_x$,
- $\kappa(x)$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_x$,
- $\deg(x)$ le degré de $\kappa(x)$ sur $\mathbb{F}_q$,
- $v_x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation de F_x , telle que $v_x(\pi_x) = 1$.

On notera $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F . Pour tout ensemble $T \subset |X|$, on note $\mathbb{A}^T$ l'anneau des adèles en dehors de l'ensemble de places T et $\mathbb{A}_T$ l'anneau des adèles sur l'ensemble de places T .

Tous les schémas considérés sont des schémas sur $\mathbb{F}_q$. Si Y, Z sont de tels schémas, $Y \times Z$ désignera leur produit sur $\mathbb{F}_q$. On utilisera une notation similaire pour le produit tensoriel sur $\mathbb{F}_q$. Pour tout schéma S , on désigne par Frob_S l'endomorphisme de Frobenius de S , qui est l'identité sur l'ensemble sous-jacent et l'élévation à la puissance q sur le faisceau structural $\mathcal{O}_S$.

Tout au long de ce chapitre et du suivant, dans les paragraphes qui traiteront de questions locales, $\mathcal{O}$ désignera un anneau local d'égale caractéristique p , de corps des fractions F (à nouveau). On fixe une uniformisante π de $\mathcal{O}$. On note κ le corps résiduel $\mathcal{O}/(\pi)$ et q' son cardinal.

1 Rappels sur les $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques.

On reprend pour l'essentiel les définitions et résultats de [23].

1.1 Algèbre à division centrale sur F .

Fixons D une algèbre à division centrale sur F de dimension finie d^2 et une $\mathcal{O}_X$ -algèbre $\mathcal{D}$, localement libre de rang d^2 en tant que $\mathcal{O}_X$ -module dont la fibre générique est D . Il existe alors un ensemble fini de places $\text{Bad} \subset |X|$ tel que, pour tout $x \in |X| \setminus \text{Bad}$, $D \otimes F_x$ est isomorphe à $M_d(F_x)$ par un isomorphisme qui envoie $\mathcal{D}_x$ sur $M_d(\mathcal{O}_x)$. On supposera que pour toute place x de Bad , D_x est une algèbre à division et que $\mathcal{D}_x$ est l'ordre maximal dans D_x .

1.2 Définition des $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques.

Fixons une place ∞ de X , n'appartenant pas à Bad . *Pour simplifier, on supposera dans la suite que ∞ est rationnelle sur le corps des constantes $\mathbb{F}_q$ de X .*

Soit S un schéma. Un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique sur S est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}_i & \xrightarrow{j_i} & \mathcal{E}_{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \nearrow t_i & & & \\ \cdots & \longrightarrow & {}^\tau\mathcal{E}_i & \xrightarrow{{}^\tau j_i} & {}^\tau\mathcal{E}_{i+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

où:

- $\mathcal{E}_i$ est un $\mathcal{D}_{X \times S}$ -module à droite localement libre de rang 1, et donc un $\mathcal{O}_{X \times S}$ -module localement libre de rang d^2 ;
- ${}^\tau\mathcal{E}_i$ est égal à $(\text{Id}_X \times \text{Frob}_S)^*\mathcal{E}_i$;
- j_i et t_i sont des injections $\mathcal{D}_{X \times S}$ -linéaires;
- $\mathcal{E}_{i+d} \simeq \mathcal{E}_i(\infty) := \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\infty)$ et le composé $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}_{i+d}$ est induit par l'injection canonique $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X(\infty)$;

- $(pr_S)_*(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ est un $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang d où $pr_S : X \times S \rightarrow S$ est la projection canonique. De manière équivalente, $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ est isomorphe, comme $\mathcal{O}_{X \times S}$ -module, à l'image directe $(i_\infty)_*(\Gamma_{\infty,i})$ d'un $\mathcal{O}_S$ -module $\Gamma_{\infty,i}$, localement libre de rang d , par la section ∞ :

$$(i_\infty) : S \longrightarrow X \times S \quad s \longmapsto (\infty, s);$$

- l'image directe de $\text{Coker } t_i$ est un $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang d . Le support de $\text{Coker } t_i$ est disjoint de $(\{\infty\} \cup \text{Bad}) \times S$. De manière équivalente, $\text{Coker } t_i$ est isomorphe, comme $\mathcal{O}_{X \times S}$ -module, à l'image directe $(i_{0,i})_*(\Gamma_{0,i})$ d'un $\mathcal{O}_S$ -module $\Gamma_{0,i}$, localement libre de rang d , par la section

$$(i_{0,i}) : S \xrightarrow{(i_{0,i}, id_S)} X \times S$$

induite par un morphisme $i_{0,i} : S \rightarrow X$ tel que $i_{0,i}(S) \subset |X'|$.

Remarque : Les inclusions $\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}_{i+1}$ étant des isomorphismes sur $(X \setminus \{\infty\}) \times S$ et le support de $\text{Coker } t_i$ étant disjoint de $\infty \times S$, on en déduit que la donnée des morphismes $(t_i)_i$ est équivalente à la donnée d'un seul t_i . Les morphismes $i_{0,i}$ sont indépendants de i ; on le note i_0 , le zéro du $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique.

Notations: Dans la suite on notera un tel $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique sous la forme $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$. Lorsque $i_0(S)$ est un point fermé o de X' , on dira que $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est de pure caractéristique o . On notera alors Γ_o et i_o pour Γ_0 et i_0 .

1.3 φ -faisceaux, schémas Gr et application aux $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques.

On commence par rappeler la définition du foncteur Gr de Drinfel'd (cf. [14]).

1.3.1 Rappels sur les φ -faisceaux et sur le foncteur Gr .

Soit S un $\mathbb{F}_q$ -schéma.

Définition 1.3.1.1 (cf. [14]) *Un φ -faisceau sur S est un faisceau $\mathcal{F}$, en $\mathcal{O}_S$ -module, localement libre de rang fini et muni d'une application $\mathcal{O}_S$ -linéaire*

$$\varphi : \text{Frob}_S^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Soit $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ le fibré vectoriel associé à $\mathcal{F}^*$, c'est-à-dire

$$\mathbb{V}(\mathcal{F}) = \text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}^*)).$$

Le morphisme φ (resp. Frob_S) induit une application linéaire (resp. q -linéaire) entre S -schémas

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\varphi) : \mathbb{V}(\mathcal{F}) &\longrightarrow \text{Frob}_S^* \mathbb{V}(\mathcal{F}), \\ (\text{resp. } \text{Frob}_S : \mathbb{V}(\mathcal{F}) &\longrightarrow \text{Frob}_S^* \mathbb{V}(\mathcal{F})). \end{aligned}$$

Définition 1.3.1.2 On définit le S -schéma $Gr(\mathcal{F})$ comme le fibré vectoriel associé à l'ensemble

$$\{u \in \mathcal{F}^* \mid u(\varphi(x)) = u(x)^q \ \forall x \in \mathcal{F}\},$$

c'est-à-dire

$$Gr(\mathcal{F}) := \text{Ker}(\mathbb{V}(\varphi) - \text{Frob}_S).$$

Proposition 1.3.1.3 (cf. [14]) - Pour tout φ -faisceau $\mathcal{F}$, le S -schéma $Gr(\mathcal{F})$ est fini et localement libre; si $\mathcal{F}$ est de rang n alors $Gr(\mathcal{F})$ est d'ordre égal à q^n .

- Le faisceau $\text{Lie}^* Gr(\mathcal{F})$ (l'image inverse du faisceau $\Omega_{Gr(\mathcal{F})/S}^1$ relativement à la section nulle $0_S : S \longrightarrow Gr(\mathcal{F})$) est canoniquement isomorphe au conoyau du morphisme $\varphi : \text{Frob}_S^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$.

Preuve : Les questions étant de nature locale, on suppose $S = \text{Spec } R$ affine et $\mathcal{F}$ libre de rang n sur S . On fixe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathcal{F} \simeq R^n$, et on note $(m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les coefficients de la matrice de l'application $\varphi : \text{Frob}_S^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ dans cette base, c'est-à-dire

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n (x_i e_i) \otimes \lambda_i \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j} x_i^q \lambda_i \right) e_j,$$

avec $(x_i e_i) \otimes 1 = e_i \otimes x_i^q$.

Soit $(e_i)^*_{1 \leq i \leq n}$ la base de $\mathcal{F}^*$ duale de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$; on a

$$(e_{i_0} \otimes 1)^* \left(\sum_{i=1}^n (x_i e_i) \otimes \lambda_i \right) = \lambda_{i_0} x_{i_0}^q.$$

L'application $\varphi^* : \mathcal{F}^* \longrightarrow \text{Frob}_S^* \mathcal{F}^*$ est alors donnée par une matrice que l'on écrit sous la forme $(m_{i,i'}^*)_{1 \leq i,i' \leq n}$ telle que

$$\varphi^*(e_{i_0}^*) = \sum_{i,k} m_{i,i_0}^* (e_i \otimes 1)^*.$$

On calcule les $m_{i,i'}^*$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \varphi^*(e_{i_0}^*) \left(\sum_{i=1}^n (x_i e_i) \otimes \lambda_i \right) &= e_{i_0}^* \left(\varphi \left(\sum_{i=1}^n (x_i e_i) \otimes \lambda_i \right) \right) \\ &= e_{i_0}^* \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{i'=1}^n \lambda_{i'} x_{i'}^q m_{i,i'} \right) e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^q m_{i_0,i} \end{aligned}$$

La matrice de φ^* dans la base $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est ainsi la transposée de la matrice $(m_{i,i'})_{1 \leq i, i' \leq n}$ et le S -schéma $Gr(\mathcal{F})$ est le sous-schéma fermé de $\mathbb{G}_{a,R}^n$, défini par le système d'équations

$$x_j^q - \sum_{i=1}^n m_{j,i} x_i = 0 \quad 1 \leq j \leq n;$$

d'où la proposition. □

1.3.2 Définition des schémas $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$.

Soient S un schéma et $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur S . On fixe une place o de X' et on note r le degré de l'extension $\kappa(o)$ sur $\mathbb{F}_q$.

Equivalence de Morita: Dans les lignes qui suivent, on décrit l'équivalence de Morita appliquée aux $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques en la place o . On introduit des notations que nous utiliserons largement dans toute la suite. Le $(\mathcal{O}_o \boxtimes \mathcal{O}_S)$ -module localement libre de rang d^2 , $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{O}_o$ est indépendant de i ; on le note $\mathcal{E}_o$. On fixe un isomorphisme $\mathcal{D}_o \simeq \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$ et on désigne par $E_{1,1}$ l'idempotent de $\mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$ associé au premier vecteur de base. Soit $\mathcal{F}_o$ le $(\mathcal{O}_o \boxtimes \mathcal{O}_S)$ -module localement libre de rang d défini par $E_{1,1}\mathcal{E}_o$. Par équivalence de Morita, on a $\mathcal{E}_o \simeq \mathcal{F}_o^d$ où l'action de $\mathcal{D}_o$ est donnée par l'action naturelle de $\mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$. Les morphismes t_i étant $\mathcal{D}_o$ -équivariant, ils induisent un morphisme $t'_o : {}^\tau \mathcal{F}_o \rightarrow \mathcal{F}_o$.

Pour tout entier n , on note $\mathcal{F}_{o,n} := \mathcal{F}_o \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n$. L'image directe de $\mathcal{F}_{o,n}$ relativement à la projection $\text{Spec } \mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n \times S \rightarrow S$, muni de l'application $\mathcal{O}_S$ -linéaire induite par $t'_{o,n}$, est alors un φ -faisceau sur S ; on le notera encore $(\mathcal{F}_{o,n}, t'_{o,n})$.

Définition 1.3.2.1 Soit $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$, le S -schéma associé par le foncteur Gr du paragraphe précédent, au φ -faisceau $(\mathcal{F}_{o,n}, t'_{o,n})$. On définit alors

$$Gr_o(\mathcal{F}_o) := \varinjlim_n Gr(\mathcal{F}_{o,n}).$$

D'après le paragraphe précédent, on a la proposition suivante.

Proposition 1.3.2.2 Pour tout entier n , $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ est un S -schéma fini d'ordre q^{rnd} , en $\mathcal{O}_o$ -modules tel que:

- il existe un entier N tel que, en tant que S -schéma en $\kappa(o)$ -espaces vectoriels ($\kappa(o) \subset \mathcal{O}_o$), $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ peut, localement pour la topologie étale sur S , s'injecter dans $\mathbb{G}_a^N$;

– la suite de S -schémas en $\mathcal{O}_o$ -modules

$$0 \longrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \xrightarrow{i_n} Gr(\mathcal{F}_{o,n+1}) \xrightarrow{\pi_o^n} Gr(\mathcal{F}_{o,n+1})$$

est exacte.

Dans la suite de ce paragraphe, on donne une expression explicite de $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$.

Proposition 1.3.2.3 *Il existe un recouvrement ouvert de S par des schémas affines $\text{Spec } R \rightarrow S$ tels que le $\text{Spec } R$ -schéma en $\mathcal{O}_o$ -module, $Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \times_S \text{Spec } R$ s'écrit*

$$\text{Spec } R[(x_i^k)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 0 \leq k < n}}] / ({}^t_n A'_o X - X^q), \quad (1.3.2.4)$$

où ${}_n A'_o$ est une matrice par blocs de la forme (resp. X est le vecteur colonne)

$$\begin{pmatrix} A'_{o,0} & 0 & \dots & 0 \\ A'_{o,1} & A'_{o,0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ A'_{o,n-1} & \dots & A'_{o,1} & A'_{o,0} \end{pmatrix}, \quad (\text{resp. } \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_d^0 \\ x_1^1 \\ \vdots \\ x_d^{n-1} \end{pmatrix})$$

les matrices $A'_{o,k}$ étant de taille $d \times d$, et où $({}^t_n A'_o X - X^q)$ désigne l'idéal de $R[(x_i^k)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 0 \leq k < n}}]$ engendré par les nd polynômes qui constituent les composantes du vecteur colonne ${}^t_n A'_o X - X^q$. Dans l'écriture de la formule 1.3.2.4, on retrouve la structure de $\mathcal{O}_o$ -module où l'action de π_o est donnée par

$$x_i^k \longrightarrow x_i^{k+1} \text{ pour } k < n-1 \quad \text{et } x_i^{n-1} \longrightarrow 0.$$

L'injection $Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \hookrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n+1})$ est donnée par la surjection:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &\longrightarrow R_n \\ x_i^k &\mapsto x_i^k, \\ x_i^n &\mapsto 0 \end{aligned}$$

avec $R_n := R[(x_i^k)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 0 \leq k < n}}] / ({}^t_n A'_o X - X^q)$.

Preuve : Le $(\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} R)$ -module $M'_o := \mathcal{F}_o \otimes_{(\mathcal{O}_o \otimes_{\kappa(o)} R)} (\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} R)$ est libre de rang d ; on en fixe une base $(m_i)_{1 \leq i \leq d}$. On identifie $\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} R$ à $R[[T]]$. L'application $t'_o : {}^\tau \mathcal{F}_o \rightarrow \mathcal{F}_o$ induit une application $R[[T]]$ -linéaire ${}^\tau M'_o \rightarrow M'_o$ que l'on

note encore t'_o . On définit la matrice $A'_o = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ à coefficients dans $R[[T]]$ telle que $t'_o(1 \otimes m_i) = \sum_{j=1}^d a'_{i,j} m_j$. On a alors

$$\forall (b_i)_{1 \leq i \leq d} \in R^d, \quad t'_o\left(\left(\sum_{i=1}^d b_i \cdot m_i\right) \otimes 1\right) = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d a'_{i,j} b_i^q\right) m_j.$$

On écrit la matrice A'_o sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} A'_{o,n} \cdot T^n$ où $A'_{o,n}$ est une matrice à coefficients dans R . On introduit également la matrice ${}_n A'_o$ qui est une matrice par blocs $({}_n A'_o(k, k'))_{1 \leq k, k' \leq n}$ où chaque bloc est de taille $d \times d$ et ${}_n A'_o(k, k') = A'_{o, k-k'}$ si $k - k'$ est positif et nulle sinon:

$${}_n A'_o = \begin{pmatrix} A'_{o,0} & 0 & \dots & 0 \\ A'_{o,1} & A'_{o,0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ A'_{o,n-1} & \dots & A'_{o,1} & A'_{o,0} \end{pmatrix}.$$

Le résultat découle alors de la preuve de la proposition 1.3.1.3. □

1.4 Structures de niveaux en dehors de la caractéristique.

On pose $A = \Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}_X)$. Soient S un schéma et $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur S , de caractéristique $i_0 : S \rightarrow X'$. Soit I un idéal de A tel que $i_0(S) \cap V(I)$ est vide. Dans [23], une I -structure de niveau sur un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur S est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{I \times S}$ -modules à droite

$$\tilde{t}_I : \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{I \times S}$$

tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tau \mathcal{E}_{I \times S} & \xrightarrow{t_{I \times S}} & \mathcal{E}_{I \times S} \\ & \nwarrow \tau \tilde{t}_I \quad \nearrow \tilde{t}_I & \\ & \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S & \end{array}$$

Remarque : Pour $I = \prod_x \mathfrak{m}_x^{n_x}$, la donnée d'une I -structure de niveau est équivalente à la donnée de $\mathfrak{m}_x^{n_x}$ -structures de niveaux $\tilde{t}_{x, n_x}$, pour $x \in V(I)$. Dans le cas où o appartient à $i_0(S)$, avec cette définition, il n'existe pas de $\mathfrak{m}_o^n$ -structure de niveau car $t_{\mathfrak{m}_o^n \times S}$ n'est plus un isomorphisme.

Dans le cas où o est une place de X' ($o \notin i_0(S)$), on choisit un isomorphisme $\mathcal{D}_o \simeq \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$. Soit, comme au paragraphe précédent, $\mathcal{F}_{o,n}$ le $(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n \boxtimes \mathcal{O}_S)$ -module localement libre de rang d , tel que $\mathcal{E}_{o,n} \simeq \mathcal{F}_{o,n}^d$ où l'action de $\mathcal{D}_{o,n} := \mathcal{D}_{\mathfrak{m}_o^n}$

est donnée par l'action naturelle de $\mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$ sur les d facteurs. L'isomorphisme $\tilde{\iota}_{o,n}$ fournit alors un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_o^n \times S}$ -modules:

$$\tilde{\iota}'_{o,n} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{o,n}$$

tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} {}^\tau\mathcal{F}_{o,n} & \xrightarrow{t'_{o,n}} & \mathcal{F}_{o,n} \\ & \nwarrow \tau\tilde{\iota}'_{o,n} \quad \nearrow \tilde{\iota}'_{o,n} & \\ & (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \boxtimes \mathcal{O}_S & \end{array}$$

Le foncteur

$$\begin{aligned} Sch/S &\longrightarrow \mathcal{O}_o\text{-module} \\ T/S &\longmapsto \text{Ker}(H^0(T, t'_{o,n} - \text{Id})) \end{aligned}$$

est représenté par le schéma $G_{o,n}$, qui, localement pour la topologie étale sur S , est de la forme

$$\text{Spec } R[(x_i^k)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 0 \leq k < n}}] / ({}_nA'_o({}^\tau X) - X)$$

(cf. la preuve de la proposition 1.3.2.3). L'isomorphisme $\tilde{\iota}'_{o,n}$ fournit alors un isomorphisme de S -schémas en $\mathcal{O}_o$ -modules

$$(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \times S \xrightarrow{\sim} G_{o,n}. \quad (1.4.1)$$

On rappelle que l'on a aussi défini le S -schéma $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ qui localement pour la topologie étale sur S , est donné par

$$\text{Spec } R[(x_i^k)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 0 \leq k < n}}] / ({}_nA'_o X - {}^\tau X).$$

Comme o n'appartient pas à $i_0(S)$, la matrice ${}_nA'_o$ est inversible. Ainsi l'ensemble des isomorphismes 1.4.1 est en bijection avec l'ensemble des isomorphismes de S -schémas en $\mathcal{O}_o$ -modules

$$(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \times S \xrightarrow{\sim} Gr(\mathcal{F}_{o,n}).$$

La donnée d'un tel isomorphisme est équivalente à la donnée d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_o$ -modules

$$\iota'_{o,n} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_o \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^*$$

tel que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}_o \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^* & \xrightarrow{t_{o,n}^*} & {}^\tau(\mathcal{F}_o \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^* \\ & \nwarrow \iota'_{o,n} \quad \nearrow \tau\iota'_{o,n} & \\ & (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d & \end{array}$$

L'isomorphisme $\iota'_{o,n}$ fournit alors un isomorphisme de $\mathcal{D}_o$ -modules $\mathcal{D}_{o,n} \boxtimes \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{E}_o^* \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n$ tel que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{|\mathfrak{m}_o^n \times S}^* & \xrightarrow{t_{|\mathfrak{m}_o^n \times S}^*} & {}^\tau \mathcal{E}_{|\mathfrak{m}_o^n \times S}^* \\ & \swarrow \iota_{o,n} \quad \searrow \tau_{\iota_{o,n}} & \\ & \mathcal{D}_{o,n} \boxtimes \mathcal{O}_S & \end{array}$$

On introduit alors la définition suivante de I -structure de niveau.

Définition 1.4.2 *Soit I un idéal de A tel que $V(I) \cap i_0(S)$ est vide. Une I -structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)/S$, est un isomorphisme de $\mathcal{D}_I$ -modules à droite $\iota_I : \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{E}_I^*$ tel que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{|I \times S}^* & \xrightarrow{t_{|I \times S}^*} & {}^\tau \mathcal{E}_{|I \times S}^* \\ & \swarrow \iota_I \quad \searrow \tau_{\iota_I} & \\ & \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S & \end{array}$$

C'est cette définition que l'on généralisera dans le cas de mauvaise réduction (cf. paragraphe 3).

Remarque : Cette définition bien que différente de celle donnée dans [23], donne les même champs classifiant et on peut reprendre tous les résultats de loc. cit., en oubliant cette différence.

1.5 Schéma de module, propreté.

Soient I un idéal non nul de A et $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ la catégorie fibrée sur la catégorie des $\mathbb{F}_q$ -schémas, dont les objets sont les $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques munis d'une I -structure de niveau, et les morphismes sont les isomorphismes entre deux tels objets.

Proposition 1.5.1 (cf. [23]) *Pour tout idéal I de A , $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ est représentable par un champ algébrique (au sens de Deligne-Mumford) $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$, lisse et de dimension relative $d - 1$ sur $X' \setminus V(I)$.*

Le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ via la formule:

$$[n](\mathcal{E}_i, j_i, t_i) = (\mathcal{E}_{i+n}, j_{i+n}, t_{i+n}).$$

Les auteurs de [23] montrent que si $I \neq A$ alors $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z})$ est une réunion disjointe de schémas de type fini qui sont de plus quasi-projectif.

Remarque : Le foncteur qui à $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i) \in \text{ob}(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}(S))$ associe le morphisme $i_0 : S \rightarrow X$ définit un morphisme de champs (ou de schémas si $I \neq A$)

$$\text{zéro} : \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I} \rightarrow X$$

qui se factorise à travers $X' \setminus V(I) \subset X$.

Remarque : Pour des idéaux I, J tels que $V(I) \subset V(J) \subset X'$, on a des morphismes de champs algébriques

$$r_{J,I} : \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J} \rightarrow \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$$

en restreignant à I la J -structure de niveau. Le morphisme $r_{J,I}$ est appelé le morphisme de restriction du niveau de J à I . Le diagramme suivant est alors commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J} & \xrightarrow{\text{zéro}} & X' \setminus V(J) \\ r_{J,I} \downarrow & & \downarrow Id \\ \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I} & \xrightarrow{\text{zéro}} & X' \setminus V(I) \end{array}$$

Citons deux résultats de [23] et qui nous seront utiles par la suite.

Lemme 1.5.2 *Le morphisme $r_{J,I}$ est étale.*

Proposition 1.5.3 *Le morphisme $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}) \rightarrow X' \setminus V(I)$ est propre.*

1.6 Déformations des $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques.

Dans [23], les auteurs montrent que $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I} \rightarrow X' \setminus V(I)$ est lisse de dimension relative $d - 1$. Dans l'optique de prouver le théorème de Serre-Tate, nous allons redémontrer ce résultat en étudiant directement les déformations des $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques.

Soient S le spectre d'un anneau local R artinien et $\bar{S} \subset S$ le sous-schéma fermé défini par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul. Soit $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur $\bar{S}$, de caractéristique $\bar{i}_0 : \bar{S} \rightarrow X$. Soit $o \in |X'|$, l'image par $\bar{i}_o := \bar{i}_0$, du point fermé de $\bar{S}$; R est donc une $\mathcal{O}_o$ -algèbre telle que l'image de π_o est nilpotente. On note $\tilde{i}_o$ le morphisme $\bar{S} \xrightarrow{(\bar{i}_o, id)} X \times \bar{S}$. On a alors la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow {}^\tau \bar{\mathcal{E}}_0 \xrightarrow{\bar{i}_0} \bar{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow (\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \longrightarrow 0 \quad (1.6.1)$$

où $\bar{\Gamma}_o$ est un $\bar{R}$ -module libre de rang d . On cherche à relever $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ en un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ défini sur S . On montrera en fait que ce problème revient à relever la suite exacte 1.6.1

Proposition 1.6.2 *Il n'y a pas d'obstruction à relever le $\mathcal{D}_{X \times \bar{S}}$ -module à droite localement libre de rang d , $\bar{\mathcal{E}}_i$. L'ensemble des relèvements est un tore sous le groupe*

$$\text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S}^1(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_R \mathfrak{m}).$$

Preuve : D'après les résultats de [21], l'obstruction à relever le $\mathcal{D}_{X \times \bar{S}}$ -module à droite localement libre de rang d , $\mathcal{E}_i$, se trouve dans le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^2(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$. Lorsque cette obstruction est nulle, l'ensemble des relèvements est alors un tore sous le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$. La proposition découle alors du lemme suivant. $\square$

Lemme 1.6.3 *Le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^2(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$ est trivial.*

Preuve : Comme $\bar{\mathcal{E}}_i$ est un $(\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}})$ -module localement libre de rang 1, les faisceaux $\text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^n(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$ sont nuls pour $n \geq 1$. Comme $\bar{S}$ est le spectre d'une algèbre artiniennne, $X \times \bar{S}$ est de dimension 1 et la suite spectrale locale-globale pour les Ext^n , donne la nullité de $\text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^2(\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$. $\square$

Proposition 1.6.4 *Il n'y a pas d'obstruction à relever le $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ ci-dessus, en un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ défini sur $\text{Spec } R$ tel que sa réduction modulo $\mathfrak{m}$ redonne $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$. L'ensemble des relèvements est un tore sous le groupe*

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_o \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1(\bar{\Gamma}_o, \bar{\mathcal{E}}_{1,o} \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}),$$

lequel, après équivalence de Morita, est isomorphe à $\text{Ext}_{\mathcal{O}_o \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1(\bar{R}, \bar{\mathcal{F}}_{1,o} \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$.

Preuve : (i) Soit r un élément de R . Comme $\mathfrak{m}^2 = (0)$, l'image de r par le morphisme Frobenius ne dépend que de la classe de r modulo $\mathfrak{m}$. En d'autres termes, le morphisme $\text{Frob}_S : S \rightarrow S$ se factorise par $\bar{S}$:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\text{Frob}_S} & S \\ & \searrow \text{Frob}_{S,\bar{S}} & \uparrow \\ & & \bar{S} \end{array} \cdot$$

Ainsi pour tout i , les ${}^\tau \mathcal{E}_i$ d'un éventuel relèvement $\mathcal{E}_i$ de $\bar{\mathcal{E}}_i$, sont donnés par:

$${}^\tau \mathcal{E}_i = (\text{Id}_X \times \text{Frob}_{S,\bar{S}})^*(\bar{\mathcal{E}}_i).$$

De la même façon, les applications ${}^\tau j_i$ sont indépendantes du relèvement j_i et sont données par

$${}^\tau j_i = (\text{Id}_X \times \text{Frob}_{S,\bar{S}})^*(j_i).$$

(ii) Considérons la suite exacte longue associée au foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bullet, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$ et à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow {}^\tau \bar{\mathcal{E}}_0 \longrightarrow \bar{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow (\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \longrightarrow 0;$$

soit

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}} \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}} (\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \longrightarrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}} (\tau \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right) \longrightarrow \\
\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 (\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 (\tau \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^2 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right).
\end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \tau \bar{\mathcal{E}}_0 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} & \longrightarrow & \tau \bar{\mathcal{E}}_0 & \longrightarrow & \tau \bar{\mathcal{E}}_0 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f_1 & & \downarrow f & & \downarrow f_0 \\
0 & \longrightarrow & \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{E}}_1 & \longrightarrow & \bar{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow 0
\end{array}$$

est qu'il existe une extension $\mathcal{E}_1$ de $\bar{\mathcal{E}}_1$ par $\bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}$ telle que l'extension $\mathcal{E}_1 * f_0$ de $\tau \bar{\mathcal{E}}_0$ par $\bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}$ est égale à $f_1 * \tau \bar{\mathcal{E}}_0$. L'obstruction à cette existence est liée à la non surjectivité de l'application

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 (\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 (\tau \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$$

et se situe donc dans le groupe

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^2 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right).$$

Le même argument que celui de la preuve du lemme 1.6.3 donne la nullité de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^2 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right)$, ainsi que l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right) \simeq H^1(X \times \bar{S}, \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right)).$$

Le faisceau $(\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o)$ étant concentré au point o , on a alors

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_o\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 (\bar{\Gamma}_o, \bar{\mathcal{E}}_{1,o} \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}). \quad (1.6.4)$$

(iii) On a donc construit $\mathcal{E}_1$ ainsi que l'application $t_0 : \tau \bar{\mathcal{E}}_0 \rightarrow \mathcal{E}_1$ qui relève l'application $\bar{t}_0$. En outre pour tout i , on connaît les $\mathcal{D}_{X \times S}$ -modules $\tau \mathcal{E}_i$ et les applications τj_i . Les places o et ∞ étant distinctes, il existe alors un unique diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}_i & \xrightarrow{j_i} & \mathcal{E}_{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & & \nearrow t_i & & & \\
\cdots & \longrightarrow & \tau \mathcal{E}_i & \xrightarrow{\tau j_i} & \tau \mathcal{E}_{i+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

qui contienne la ligne

$$\dots \tau \mathcal{E}_i \xrightarrow{\tau j_i} \tau \mathcal{E}_{i+1} \dots$$

ainsi que la diagonale $\tau \mathcal{E}_0 \xrightarrow{t_0} \mathcal{E}_1$. Clairement pour tout i , $\mathcal{E}_i$ est un $\mathcal{D}_{X \times S}$ -module à droite localement libre de rang 1 et j_i, t_i sont des injections $\mathcal{D}_{X \times S}$ -linéaires. La condition de périodicité $\mathcal{E}_{i+d} \simeq \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\infty)$ découle de la périodicité des $\tau \mathcal{E}_i$. Pour tout i , on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \tau \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow 0$$

et d'après le lemme de Nakayama, $(pr_S)_*(\mathcal{F}_i)$ est un R -module libre de rang d , soit $\mathcal{F}_i = (\tilde{i}_o)_*(\Gamma_{o,i})$ où $\Gamma_{o,i}$ est un R -module libre de rang d . De la même façon on a pour tout i , une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow \mathcal{G}_i \rightarrow 0$$

où $(pr_S)_*(\mathcal{G}_i)$ est un R -module libre de rang d , soit $\mathcal{G}_i = (\tilde{i}_\infty)_*(\Gamma_{\infty,i})$, où $\Gamma_{\infty,i}$ est un R -module libre de rang d . Finalement, le diagramme $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique qui est une déformation de $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$.

(iv) Calculons l'espace des relèvements. Tout d'abord l'ensemble des classes d'isomorphie des extensions $\mathcal{E}_1$ telles que $\mathcal{E}_1 * f_0 = f_1 * \tau \mathcal{E}_0$ est un toreur sous

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right) / \mathrm{Im} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}(\tau \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \right).$$

L'extension $\mathcal{E}_1$ étant fixé l'ensemble des classes d'isomorphie des applications $t_0 : \tau \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_1$ est donné par:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}(\tau \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) / \mathrm{Im} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \right).$$

Ce dernier ensemble est par ailleurs isomorphe à $\mathrm{Im} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}(\tau \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \right)$. Ainsi l'ensemble des relèvements du $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ est un toreur sous $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right)$, qui d'après 1.6.4 est isomorphe à

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_o \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1(\bar{\Gamma}_o, \bar{\mathcal{E}}_{1,o} \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}).$$

□

Corollaire 1.6.5 $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},A}$ est lisse sur $\mathbb{F}_q$, de dimension d .

Preuve : On considère un point géométrique de la fibre en o de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},A}$ ($\bar{R} = \bar{\kappa}(o)$). L'ensemble de ses relèvements est un toreur sous $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_o \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1(\bar{\kappa}(o), \bar{\mathcal{F}}_{1,o} \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$ lequel groupe, après complétion, est isomorphe à

$$\mathrm{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}}}^1(\bar{\kappa}(o), (\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}})^d).$$

On applique le foncteur $\text{Hom}(\bullet, \hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}})$ à la suite exacte courte:

$$0 \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}} \xrightarrow{\pi_o} \hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}} \rightarrow \bar{\kappa}(o) \rightarrow 0$$

ce qui donne la suite exacte longue suivante

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Hom}_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}}(\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}/(\pi_o), (\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}})^d) \rightarrow \text{Hom}_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}}(\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}, (\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}})^d) \xrightarrow{\pi_o} \\ &\text{Hom}_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}}(\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}, (\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}})^d) \longrightarrow \text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}}^1(\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}/(\pi_o), (\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}})^d) \longrightarrow \text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}}^1(\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}, (\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}})^d) \end{aligned}$$

Or comme $\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}$ est un $\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}$ module projectif on a $\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}}^1(\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}, (\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}})^d) = 0$ d'où

$$\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}}^1(\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}/(\pi_o), (\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}})^d) \simeq (\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}/(\pi_o))^d = \bar{\kappa}(o)^d.$$

□

Corollaire 1.6.6 *L'application tangente au morphisme $\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, A} \rightarrow \text{Spec } A$ en un point fermé de la fibre en o est donnée par le morphisme*

$$\text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), (\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right) \quad (1.6.7)$$

Ce morphisme est surjectif et $\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, A} \rightarrow \text{Spec } A$ est lisse de dimension relative $d-1$. L'anneau local de $\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, A}$ en un point géométrique de la fibre en o est alors isomorphe à

$$\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}[[t_2, \dots, t_d]] \simeq \bar{\kappa}(o)[[t_1, \dots, t_d]],$$

où t_1 est une uniformisante de $\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}$.

Preuve : En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{D} \otimes \bar{R}} \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bullet \right)$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}^\tau \bar{\mathcal{E}}_0 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \longrightarrow \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \longrightarrow (\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \longrightarrow 0,$$

on en déduit que le conoyau de l'application 1.6.7 est un quotient du groupe

$$\text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^2 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), {}^\tau \bar{\mathcal{E}}_0 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right).$$

Par un argument identique à celui du point (ii) de la preuve de la proposition 1.6.4 montre que ce dernier groupe est nul, d'où le corollaire.

□

Remarque : On rappelle aussi que d'après le lemme 1.5.2, le morphisme de restriction du niveau est étale en dehors du niveau. Ainsi les résultats précédents sont valides pour $\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, I}$ et o n'appartenant pas à $V(I)$.

2 $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné, $\mathcal{O}$ -modules divisible et théorème de Serre-Tate.

Soit $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur le spectre S d'un anneau local artinien B , de caractéristique $i_0 : S \rightarrow X$. Soit alors le point fermé o de X' , image par i_0 du point fermé de S . Le but de ce paragraphe est de construire le $\mathcal{O}_o$ -module divisible $Gr_o(\mathcal{F}_{o,0}) \rightarrow \text{Spec } B$ associé à $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ et de démontrer le théorème de Serre-Tate pour les $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques. Dans un premier temps, on rappelle des résultats locaux sur les $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné et les $\mathcal{O}$ -modules divisibles.

2.1 Rappels sur le module de coordonnées des $\mathcal{O}$ -modules formels.

Dans ce paragraphe, B est une $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de π est nilpotente. On suppose que κ est un sur-corps de $\mathbb{F}_q$ et on note r le degré de cette extension ($q' = q^r$). On reprend les résultats de [16] à la précision près que dans ce travail, un $\mathcal{O}$ -module formel sur B est un groupe formel lisse X sur B **de dimension 1**, muni d'une action de $\mathcal{O}$ telle que l'action induite sur $\text{Lie } X$ coïncide avec celle provenant de la structure de B -module de $\text{Lie } X$ (cf. chapitre 1 paragraphe 3.1.1).

Soit X un $\mathcal{O}$ -module formel sur B . On considère le B -module

$$M_X = \text{Hom}(X, \mathbb{G}_{a,B}),$$

lequel est muni par functorialité d'une action de $\mathcal{O}$. Soient

$$\begin{array}{ccc} \text{Frob}_q : B \longrightarrow B & (\text{resp. } \text{Frob}_{q^r} : B \longrightarrow B) \\ x \longmapsto x^q & x \longmapsto x^{q^r} \end{array}$$

le morphisme de Frobenius de la $\mathbb{F}_q$ -algèbre (resp. $\mathbb{F}_{q^r}$ -algèbre) B , et τ_q (resp. τ_{q^r}) l'isogénie de Frobenius

$$\mathbb{G}_{a,B} \longrightarrow \text{Frob}_{q,*} \mathbb{G}_{a,B} \quad (\text{resp. } \mathbb{G}_{a,B} \longrightarrow \text{Frob}_{q^r,*} \mathbb{G}_{a,B}).$$

La multiplication à gauche par τ_q sur M_X est Frob_q -semi-linéaire et induit donc un morphisme

$$F : \text{Frob}_q^* M_X \longrightarrow M_X.$$

Via cette application F , on peut considérer M_X comme un $B[[\tau_q]]$ -module localement libre de rang 1 ($= \dim X$). Le $(\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} B)$ -module M_X est muni de deux actions de κ . Celles-ci induisent une graduation

$$M_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M_{X,i}$$

avec

$$M_{X,i} = \{m \in M_X / (\lambda^{q^i} \otimes 1)m = (1 \otimes \lambda)m\}.$$

La multiplication à gauche par τ_q est de degré 1 pour cette graduation et induit des morphismes B -linéaires: $F_{q,i} : \text{Frob}_q^* M_{X,i} \longrightarrow M_{X,i+1}$. Pour tout $n \geq 0$, on note $F_{q^n,i} : (\text{Frob}_q^n)^* M_{X,i} \longrightarrow M_{X,i+n}$, le morphisme

$$F_{q,i+n-1} \circ \text{Frob}_q^* F_{q,i+n-2} \circ \cdots \circ (\text{Frob}_q^{n-1})^* F_{q,i}$$

induit par la multiplication à gauche par τ_q^n . Les deux actions de κ sur $(\text{Lie } X)^\vee = \bigoplus_{i=0}^{r-1} \text{Coker } F_{q,i}$ coïncident et le B -module gradué $(\text{Lie } X)^\vee$ est donc concentré en degré zéro. Le morphisme $F_{q,i}$ est injectif et les morphismes $F_{q,i}$ ($0 \leq i \leq r-2$) sont des isomorphismes. Le B -module gradué $M_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M_{X,i}$, muni du Frobenius

$$\bigoplus F_{q,i} : \text{Frob}_q^* \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M_{X,i} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M_{X,i}$$

s'identifie au B -module gradué $\bigoplus_{i=0}^{r-1} (\text{Frob}_q^i)^* M_{X,0}$, muni du Frobenius

$$F_0 := \text{Frob}_q^* \left(\bigoplus_{i=0}^{r-1} (\text{Frob}_q^i)^* M_{X,0} \right) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{r-1} (\text{Frob}_q^i)^* M_{X,0}$$

$$(m_0, \dots, m_{r-1}) \longmapsto (F(m_{r-1}), m_0, \dots, m_{r-2}).$$

Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ une isogénie de $\mathcal{O}$ -modules formels. Le morphisme $M(\varphi)$ est un morphisme de modules gradués. Les morphismes

$$F_{q,i} : (\text{Frob}_q^i)^* \text{Coker } M(\varphi)_0 \longrightarrow \text{Coker } M(\varphi)_i$$

sont des isomorphismes et les modules localement libres $\text{Coker } M(\varphi)_i$ sont donc tous de même rang. En résumé, se donner (M_X, F) est équivalent à se donner $(M_{X,0}, F_0)$.

De plus $M_{X,0}$ est un $B[[\tau_{q^r}]]$ -module localement libre de rang 1 et s'identifie à la limite projective des B -modules $\text{Coker } F_{q^{rm},0} \simeq B[[\tau_{q^r}]]/B[[\tau_{q^r}]] \cdot \tau_{q^r}^m$. Il résulte du fait que l'image de l'uniformisante π de $\mathcal{O}$ dans B est nilpotente, que l'action de $\pi \otimes 1 \in \mathcal{O} \otimes_\kappa B$ sur $\text{Coker } F_{q^{rm},0}$ est nilpotente. Le séparé complété $\mathcal{O} \hat{\otimes}_\kappa B$ de $\mathcal{O} \otimes_\kappa B$ pour la topologie $\pi \otimes 1$ -adique, agit donc encore sur $M_{X,0}$.

Définition 2.1.1 *Le foncteur module des coordonnées sur B est le foncteur M_B qui à un $\mathcal{O}$ -module formel X sur B , associe le $(\mathcal{O} \hat{\otimes}_\kappa B)$ -module $M_{X,0} \otimes_{(\mathcal{O} \otimes_\kappa B)} (\mathcal{O} \hat{\otimes}_\kappa B)$ muni du Frobenius F_0 .*

On note i le morphisme structural de la $\mathcal{O}$ -algèbre B et Γ le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \hat{\otimes}_\kappa B &\longrightarrow B \\ a \hat{\otimes} b &\longmapsto i(a).b \end{aligned}$$

Soit $\text{Mod}\mathcal{C}(B)$ la sous-catégorie pleine de celle des $(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B)$ -modules localement libres et munis d'un Frobenius

$$F : (\text{Id}_{\mathcal{O}}\hat{\otimes}_\kappa \text{Frob}_{q^r})^* M \longrightarrow M,$$

formée des objets tels que:

- il existe un B -module localement libre de rang 1, ω tel que

$$\text{Coker } F = \Gamma_*(\omega);$$

- il existe un entier n tel que le morphisme

$$F^n : (\text{Id}_{\mathcal{O}}\hat{\otimes}_\kappa \text{Frob}_{q^r}^n)^* M/\pi M \longrightarrow M/\pi M$$

est le morphisme nul.

Théorème 2.1.2 (cf. [16]) *Le foncteur module des coordonnées M_B , de la catégorie des $\mathcal{O}$ -modules formels ($\dim X = 1$) sur B , dans la catégorie $\text{Mod}\mathcal{C}(B)$, est une anti-équivalence de catégories.*

Remarque : Il suffit de remarquer dans [16], que $M_{X,0}$ est un $B[[\tau_{q^r}]]$ -module localement libre de rang celui de $\text{Coker } F$. Le B -module ω est donné par $(\text{Lie } X)^\vee$.

On rappelle aussi que la formation de M_B est compatible au changement de base, d'où la proposition suivante.

Proposition 2.1.3 (cf. [16]) *Soient X un $\mathcal{O}$ -module formel sur B , C une B -algèbre et $X \otimes_B C$, le $\mathcal{O}$ -module formel sur C obtenu par extension des scalaires, on a alors l'isomorphisme*

$$M_C(X \otimes_B C) \simeq (\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa C) \otimes_{(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B)} M_B(X).$$

Remarque : Le foncteur quasi-inverse est G_B tel que pour tout B -algèbre R :

$$G_B(M, F)(R) = \{g \in \text{Hom}_B(M, R) \mid g(F(m)) = g(m)^{q^r}, \forall m \in M\}.$$

2.2 $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné et $\mathcal{O}$ -modules divisibles.

Soit B une $\mathcal{O}$ -algèbre locale d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ nilpotent. Comme au paragraphe précédent, soit q^r le cardinal de κ . On note Frob_κ le morphisme de Frobenius de la $\mathbb{F}_{q^r}$ -algèbre B (noté Frob_{q^r} au paragraphe précédent).

2.2.1 $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné sur un corps κ' .

Pour tout ce qui concerne ce paragraphe, on renvoie à [24]. On fixe une clôture algébrique $\bar{\kappa}$ de κ et soit κ' un sur-corps de κ inclus dans $\bar{\kappa}$. On note $\mathcal{O}_{\kappa'}$ la complétion de l'extension non ramifiée de $\mathcal{O}$ de corps résiduel κ' et $F_{\kappa'}$ son corps des fractions. Soit

$$\sigma \in \text{Gal}(F_{\kappa'}/F)$$

le relèvement canonique du Frobenius arithmétique de κ'/κ .

Définition 2.2.1.1 *Un F -module de Dieudonné sur κ' est un $F_{\kappa'}$ -module N , de rang fini, muni d'une application σ -linéaire bijective: $F : N \longrightarrow N$.*

Un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné sur κ' est un $\mathcal{O}_{\kappa'}$ -module libre, M , de rang fini, muni d'une application σ -linéaire injective: $F : M \longrightarrow M$ telle que le conoyau de F est de longueur finie sur $\mathcal{O}_{\kappa'}$, c'est-à-dire de dimension finie en tant que κ' -espace vectoriel; le rang de (M, F) est le rang de M en tant que $\mathcal{O}_{\kappa'}$ -module.

Un morphisme entre $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné (resp. F -modules de Dieudonné) sur κ' est une application linéaire qui commute avec F .

EXEMPLE - Soient r, s deux entiers positifs premiers entre eux. On pose

$$M_{r,s} = (\mathcal{O}_{\kappa'})^r$$

et

$$F_{r,s}(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } i = 1, \dots, r-1, \\ \pi^s e_1 & \text{si } i = r, \end{cases}$$

où $(e_1, \dots, e_r)$ est la base canonique de $M_{r,s}$, et où on étend $F_{r,s}$ à $M_{r,s}$ par σ -linéarité; $(M_{r,s}, F_{r,s})$ est un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné sur κ' de rang r .

Proposition 2.2.1.2 (cf. [24]) *Soit (M, F) un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné sur κ' . Il existe une unique décomposition*

$$(M, F) = (M^{et}, F^{et}) \oplus (M^c, F^c)$$

où (M^{et}, F^{et}) et (M^c, F^c) sont des $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné sur κ' tels que

$$F^{et}(M^{et}) = M^{et}$$

et

$$(F^c)^n(M^c) \subset \pi M^c$$

pour un entier n assez grand.

On a le lemme suivant sur les $\mathcal{O}_{\kappa'}$ -modules de Dieudonné "cyclique".

Lemme 2.2.1.3 *Soit (M^c, F^c) un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné sur κ' tel que F^c est topologiquement nilpotent et $\text{Coker } F^c$ est de dimension 1. Il existe alors une uniformisante π' de $\mathcal{O}_{\kappa'}$ et une base $(e_i)_{1 \leq i \leq h}$ tel que $F^c(e_i) = e_{i+1}$ pour $1 \leq i < h$ et $F^c(e_h) = \pi' e_1$.*

Remarque : Classiquement, l'application σ -linéaire F peut aussi être considérée comme un morphisme de Frobenius du $(\mathcal{O} \hat{\otimes}_{\kappa} \kappa')$ -module M :

$$F : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_{\kappa} \text{Frob}_{\kappa})^* M \longrightarrow M.$$

2.2.2 $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné sur une $\mathcal{O}$ -algèbre locale artinienne.

Comme précédemment, on note i le morphisme structural de la $\mathcal{O}$ -algèbre B et Γ le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \hat{\otimes}_{\kappa} B &\longrightarrow B \\ a \hat{\otimes} b &\longmapsto i(a).b \end{aligned}$$

Définition 2.2.2.1 *Un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné de rang d sur B est un $(\mathcal{O} \hat{\otimes}_{\kappa} B)$ -module M , libre de rang d , muni d'un morphisme de Frobenius*

$$F : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_{\kappa} \text{Frob}_{\kappa})^* M \longrightarrow M$$

tel que $\text{Coker } F \simeq \Gamma_(\omega)$ où ω est un B -module libre de type fini. Le Frobenius F sera dit topologiquement nilpotent s'il existe un entier n pour lequel*

$$F^n : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_{\kappa} \text{Frob}_{\kappa}^n)^* M / \pi M \longrightarrow M / \pi M$$

est le morphisme nul.

Remarque : Soit (M, F) un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné tel que F est topologiquement nilpotent. Soit A la matrice de F dans une certaine base. Il existe alors un entier n tel que $A^{(\tau^n A)} \cdots (\tau^n A)$ appartienne à $\mathbb{M}_h((\pi \mathcal{O}) \hat{\otimes}_{\kappa} \kappa')$.

Proposition 2.2.2.2 *Soit (M, F) un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné sur B . Il existe des $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné sur B , (M^{et}, F^{et}) , (M^c, F^c) et une suite exacte:*

$$0 \longrightarrow (M^{et}, F^{et}) \longrightarrow (M, F) \longrightarrow (M^c, F^c) \longrightarrow 0$$

tels que $F^{et} : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_{\kappa} \text{Frob}_{\kappa})^ M^{et} \longrightarrow M^{et}$ est bijectif, et $F^c : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_{\kappa} \text{Frob}_{\kappa})^* M^c \longrightarrow M^c$ est topologiquement nilpotent.*

Preuve : Soient $\kappa' := B/\mathfrak{m}$ et $(\bar{M}, \bar{F}) := (M, F) \otimes_B B/\mathfrak{m}$ qui est alors un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné sur κ' . D'après la proposition 2.2.1.2, on a $\bar{M} = \bar{M}^{et} \oplus \bar{M}^c$, le morphisme de Frobenius $\bar{F}$ étant donné par une matrice $\bar{Q}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^c & 0 \\ 0 & \bar{A}^{et} \end{pmatrix}$$

où $\bar{A}^{et}$ est inversible et $\bar{A}^c$ topologiquement nilpotente. Si P est une matrice de passage, la matrice de F dans la nouvelle base est alors donnée par $P^{-1}Q({}^\tau P)$. La proposition découle alors du lemme suivant.

Lemme 2.2.2.3 *Soient R une $\mathcal{O}$ -algèbre locale artinienne et $\bar{R}$ le quotient de R défini par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul. On suppose qu'il existe une base de M telle que la matrice $Q \otimes_R \bar{R}$ de $F \otimes_R \bar{R}$ dans $M \otimes_R \bar{R}$, est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^c & 0 \\ \bar{A}^{ext} & \bar{A}^{et} \end{pmatrix}$$

où $\bar{A}^{et}$ est inversible et $\bar{A}^c$ topologiquement nilpotent. Il existe alors une matrice de passage P de la forme $Id + P'$ où P' est une matrice à coefficients dans $\mathfrak{m}$, telle que $P^{-1}Q({}^\tau P)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A^c & 0 \\ A^{ext} & A^{et} \end{pmatrix}$$

avec A^{et} inversible et A^c topologiquement nilpotent.

Preuve : Comme $\mathfrak{m}$ est de carré nul, on en déduit que pour toute matrice P' à coefficient dans $\mathfrak{m}$, la matrice ${}^\tau(I_d + P')$ est la matrice identité. On cherche donc une matrice P' à coefficients dans $\mathfrak{m}$, telle que $(I_d + P')Q$ soit de la forme indiquée. On écrit Q sous la forme

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix},$$

où la matrice Q_4 est inversible. En prenant $P' = \begin{pmatrix} Id & -Q_2Q_4^{-1} \\ 0 & Id \end{pmatrix}$, $P = I_d + P'$, la matrice $P^{-1}Q({}^\tau P)$ est de la forme désirée. □

2.2.3 $\mathcal{O}$ -module divisible associé à un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné: compléments sur le module de coordonnées.

Définition 2.2.3.1 (cf [11]) *Un $\mathcal{O}$ -module divisible sur une $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -algèbre locale R , complète noethérienne et de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa}$, est un couple (G, ψ) où G est un schéma formel en groupe sur $\text{Spec } R$, muni d'un homomorphisme $\psi : \mathcal{O} \longrightarrow \text{End } G$, tel que G^c est un $\mathcal{O}$ -module formel sur R et*

$$G/G^c \simeq \text{Spf } R \times (F/\mathcal{O})^j$$

pour un certain entier j

Soit $\text{Mod } \mathcal{B}(B)$ la sous-catégorie pleine de celle des $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné sur B , telle que

$$\text{Coker } F \simeq \Gamma_*(\omega)$$

où ω est un B -module libre ω de rang 1, ou 0.

Proposition 2.2.3.2 *Le foncteur M_B induit une anti-équivalence de catégorie, de la catégorie des $\mathcal{O}$ -modules divisibles sur B , dans la catégorie $\text{Mod } \mathcal{B}(B)$ qui prolonge l'équivalence du théorème 2.1.2.*

Preuve : On commence par une proposition sur les $\text{Spec } B$ -schémas en groupes.

Proposition 2.2.3.3 *(cf. [16]) Soient G_1, G_2, G_3 des $\text{Spec } B$ -schémas en groupes finis, plats, de présentation finie, qui, localement pour la topologie f.p.q.c. sur $\text{Spec } B$, se plongent dans $\mathbb{G}_{a,B}^N$, pour un certain entier N . On suppose que l'on a la suite exacte*

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{u} G_2 \xrightarrow{v} G_3 \longrightarrow 1$$

(ce qui signifie que u est un noyau de v dans la catégorie des schémas en groupes affines commutatifs et que v est plat surjectif). On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_{G_3} \longrightarrow M_{G_2} \longrightarrow M_{G_1} \longrightarrow 0.$$

Ainsi d'après le théorème 2.1.2, pour montrer la proposition, il suffit de montrer que M_B établit une équivalence de catégorie des $\mathcal{O}$ -modules divisibles étales sur $\text{Spec } B$ ($G^c = 0$), dans la catégorie des $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné (M, F) tels que $M^c = 0$. Le résultat découle alors de la proposition suivante.

□

Proposition 2.2.3.4 *(cf. [24] proposition (2.4.11)) Les foncteurs contravariants $G_{\kappa'}$ et $M_{\kappa'}$ entre la catégorie des $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné (M, F) sur κ' tels que $\text{Coker } F$ est nul ou de dimension 1 (en tant que κ' -espace vectoriel), et la catégorie des $\mathcal{O}$ -modules divisibles G sur κ' , sont quasi-inverses l'un de l'autre. De plus $G_{\kappa'}(M, F)$ est étale (resp. connexe) si et seulement si $M^c = 0$ (resp. $M^{\text{ét}} = 0$).*

Remarque : Un $\mathcal{O}$ -module divisible sur $\bar{\kappa}'$ est ici un $\mathcal{O}$ -module divisible G sur κ' au sens de [24], tel que si G^c est non nul alors il est de dimension 1; ce qui explique la condition supplémentaire sur la dimension de $\text{Coker } F$ par rapport à l'énoncé tel que l'on peut le trouver dans [24].

2.3 Modules divisibles associés à un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique.

Soient o une place de X' et r le degré de $\kappa(o)$ sur $\mathbb{F}_q$. Soit $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique sur une $\mathcal{O}_o$ -algèbre locale artinienne B . On fixe un isomorphisme $\mathcal{D}_o \simeq \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$ et soit $\mathcal{F}_o$ le $(\mathcal{O}_o \otimes_{\mathbb{F}_q} B)$ -module libre de rang d tel que $\mathcal{E}_o \simeq \mathcal{F}_o^d$ où l'action de $\mathcal{D}_o$ est donnée par l'action naturelle de $\mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$ (cf. paragraphe 1.3.2). Avec les notations du paragraphe 2.1, soit $\mathcal{F}_{o,0}$ le $(\mathcal{O}_o \otimes_{\kappa(o)} B)$ -module associé, muni du Frobenius $t'_{o,0}$ déduit du morphisme $t'_o : {}^\tau \mathcal{F}_o \rightarrow \mathcal{F}_o$.

Définition 2.3.1 *Le $\mathcal{O}_o$ -module de Dieudonné sur B associé à $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est le couple (M_o, F_o) où*

$$M_o := \mathcal{F}_{o,0} \otimes_{(\mathcal{O}_o \otimes_{\kappa(o)} B)} (\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} B)$$

et $F_o : (Id_{\mathcal{O}_o} \hat{\otimes}_{\kappa(o)} \text{Frob}_{\kappa(o)})^* M_o \longrightarrow M_o$ est le morphisme de Frobenius induit par $t'_{o,0}$.

L'image directe de $\text{Coker } t'_o$ étant un B -module libre de rang 1 (cf. le paragraphe 1.2), on a alors la proposition suivante.

Proposition 2.3.2 *Le $\mathcal{O}_o$ -module de Dieudonné (M_o, F_o) associé à $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$, est un objet de $\text{Mod } \mathcal{B}(B)$. Le $\mathcal{O}_o$ -module divisible sur B associé au $\mathcal{O}_o$ -module de Dieudonné (M_o, F_o) selon la proposition 2.2.3.2, est la limite inductive*

$$Gr_o(\mathcal{F}_{o,0}) := \varinjlim_n Gr(\mathcal{F}_{o,n,0})$$

des $\text{Spec } B$ -schémas en $\mathcal{O}_o$ -modules $Gr(\mathcal{F}_{o,n,0})$ associés aux φ -faisceaux $\mathcal{F}_{o,n,0} := \mathcal{F}_{o,0} \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n$ par le foncteur Gr du paragraphe 1.3.1.

On notera $Gr^c(\mathcal{F}_{o,n,0})$ le $\mathcal{O}_o$ -module formel sur B associé à (M_o^c, F_o^c) .

2.4 Anneau universel des déformations d'un $\mathcal{O}$ -module divisible et théorème de Serre-Tate.

Les calculs du paragraphe 1.6 laissent à penser que déformer un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique est un problème de nature locale en la caractéristique du $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique. Le but de cette section est de prouver l'analogue du théorème de Serre-Tate, pour les $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques (cf le corollaire 2.4.2.2).

2.4.1 Déformations des $\mathcal{O}$ -modules de Dieudonné.

Soit $(\bar{M}, \bar{F})$ un objet de la catégorie $\text{Mod } \mathcal{B}(\bar{\kappa})$; $\bar{M}$ est alors un $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -module libre $\bar{M}$, muni d'un Frobenius $\bar{F} : (Id_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \text{Frob}_{\bar{\kappa}})^* \bar{M} \longrightarrow \bar{M}$. Soit R une $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -algèbre locale complète noethérienne, de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa}$, telle que

le morphisme structural $i : \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \longrightarrow R$ est un homomorphisme local de $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -algèbres. Une déformation (M, F) sur R de $(\bar{M}, \bar{F})$, est un $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} R$ -module libre M , muni d'un morphisme de Frobenius $F : (\text{Id}_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \text{Frob}_{\kappa})^* M \longrightarrow M$, tel que la réduction de (M, F) modulo l'idéal maximal de R est égale à $(\bar{M}, \bar{F})$. Des résultats de Drinfel'd (cf [11]) et de la proposition 2.2.3.2, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.1.1 *Soit $(\bar{M}, \bar{F})$ un objet de la catégorie $\text{Mod } \mathcal{B}(\bar{\kappa})$, de rang $h+j$ où $h \geq 1$ est le rang de $\bar{M}^c$. Le foncteur qui à une $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -algèbre locale R , complète noethérienne et de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa}$, associe l'ensemble des déformations sur R de $(\bar{M}, \bar{F})$ à isomorphisme près, est représenté par l'algèbre $E_0^{h,j} \simeq D_0^h[[d_1^0, \dots, d_j^0]]$ où $D_0^h \simeq \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}[[a_2, \dots, a_h]]$ représente les déformations de $(\bar{M}^c, \bar{F}^c)$.*

Dans le but de décrire la déformation universelle, on redémontre directement ce résultat. Soient B une $\mathcal{O}$ -algèbre locale artiniennne, $\bar{B}$ le quotient de B défini par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul et $(\bar{M}, \bar{F})$ un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné défini sur $\bar{B}$. On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \tau \bar{M} \xrightarrow{\bar{F}} \bar{M} \longrightarrow \bar{N} \longrightarrow 0$$

où $\bar{N}$ est de la forme $\bar{\Gamma}_*(\bar{\omega})$ avec $\bar{\omega}$ un $\bar{B}$ -module libre de type fini. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \bar{B}}(\bullet, \bar{M} \otimes_{\bar{B}} \mathfrak{m})$ à cette suite exacte, de manière analogue à la preuve de la proposition 1.6.4, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.4.1.2 *Il n'y a pas d'obstruction à déformer $(\bar{M}, \bar{F})$ en un $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné défini sur B . L'espace des relèvements est alors un toreur sous le groupe*

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \bar{B}}^1(\bar{N}, \bar{M} \otimes_{\bar{B}} \mathfrak{m})$$

lequel est isomorphe à

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \bar{B}}(\tau \bar{M}, \bar{M} \otimes_{\bar{B}} \mathfrak{m}) / (\text{Hom}_{\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \bar{B}}(\bar{M}, \bar{M} \otimes_{\bar{B}} \mathfrak{m})) \circ \bar{F}.$$

On peut alors démontrer directement le corollaire 2.4.1.1 et donner la déformation universelle de $(\bar{M}, \bar{F})$.

Proposition 2.4.1.3 *La déformation universelle de $(\bar{M}, \bar{F})$ sur $E_0^{h,j}$ est le couple $(M_{\text{univ}}, F_{\text{univ}})$, où M_{univ} est un $(\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}[[a_2, \dots, a_{h+j}]])$ -module libre de rang $h+j$ ($a_{h+i} = d_i^0$ pour $1 \leq i \leq j$), muni d'un morphisme de Frobenius $F_{\text{univ}} : (\text{Id}_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \text{Frob}_{\kappa})^* M_{\text{univ}} \longrightarrow M_{\text{univ}}$, dont la matrice dans une certaine base est*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \pi' \otimes 1 - 1 \otimes \pi' & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & a_2 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & a_h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{h+1} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{j+h} & b_{j,1} & \cdots & b_{j,j} \end{pmatrix},$$

où π' est une uniformisante de $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ et où la matrice des $(b_{k,l})_{1 \leq k, l \leq j}$ est un relèvement de la matrice inversible de $\bar{F}^{\text{et}}$.

Preuve : Le $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné $(\bar{M}^c, \bar{F}^c)$ étant cyclique, on choisit une base de $\bar{M}$ telle que la matrice de $\bar{F}$ dans cette base soit de la forme:

$$\begin{pmatrix} A^c & 0 \\ 0 & A^{\text{et}} \end{pmatrix}$$

avec

$$A^c = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \pi' \\ 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix},$$

où π' est une uniformisante de $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ (cf. le lemme 2.2.1.3). Soit alors (M, F) une déformation sur R de $(\bar{M}, \bar{F})$. Le morphisme structural $i : \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \rightarrow R$ étant un homomorphisme local de $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -algèbres, la proposition précédente montre alors, par récurrence sur r , qu'il existe une base de M dans laquelle la matrice de F modulo $\mathfrak{m}^r$ ($\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R), est de la forme indiquée; par continuité, la proposition en découle. $\square$

2.4.2 Théorème de Serre-Tate.

Soient S le spectre d'un anneau R local artinien, et $\bar{S} \subset S$ le sous-schéma fermé défini par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul. Soit $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur $\bar{R}$, de caractéristique $i_0 : \bar{S} \rightarrow X'$. Soient alors le point fermé o de X' , image par $i_0 : = i_0$ du point fermé de $\bar{S}$ et $(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$ le $(\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} \bar{R})$ -module de Dieudonné associé à ce $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique.

Proposition 2.4.2.1 *L'application qui à une déformation $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ définie sur R de $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ associe la déformation (M_o, F_o) définie sur R de $(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$, est un isomorphisme entre les deux espaces de déformation.*

Preuve : Avec les notations des paragraphes précédents, on rappelle que l'on a la suite exacte

$$0 \rightarrow {}^\tau \bar{\mathcal{E}}_0 \longrightarrow \bar{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow (\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \rightarrow 0$$

et que $(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$ est donné par le couple $(\mathcal{F}_{o,0}, t'_{o,0})$ obtenu à partir de $(\mathcal{F}_o, t'_o)$ par la construction du paragraphe 2.1. On fixe une déformation $(\mathcal{E}_i^0, j_i^0, t_i^0)$ et soit (M_o^0, F_o^0) la déformation de $(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$ qui lui correspond. Par rapport à ces points bases, les déformations de $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ (resp. de $(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$) sont en bijection avec le groupe

$$\text{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right) \quad (\text{resp. } \text{Ext}_{\mathcal{O}_o \otimes \bar{R}}^1 (\text{Coker } \bar{F}_o, \mathcal{F}_{o,0} \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})).$$

L'application de la proposition induit alors le morphisme canonique (localisation, équivalence de Morita puis complétion)

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S}^1 \left((\tilde{i}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \right) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_o \otimes \bar{R}}^1 (\mathrm{Coker} \bar{F}_o, \mathcal{F}_{o,0} \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}),$$

qui, comme on l'a déjà remarqué au paragraphe 1.6, est un isomorphisme; d'où la proposition. □

D'après la proposition 2.2.3.2, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.2.2 (*Serre-Tate*) *L'application qui à une déformation $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ définie sur R de $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ associe la déformation $Gr_o(\mathcal{F}_{o,0})$ définie sur R de $Gr_o(\bar{\mathcal{F}}_{o,0})$ est un isomorphisme entre les deux espaces de déformation.*

3 Extension aux niveaux divisant la caractéristique.

Dans cette partie S désigne un schéma arbitraire. Soient $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur S , de caractéristique $i_0 : S \rightarrow X'$ et I un idéal de A . Dans le cas où $V(I) \cap i_0(S)$ est vide, au paragraphe 1.4 on a rappelé la définition de I -structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$. Le but de cette partie est, en reprenant les idées de Drinfel'd (cf. [11]), d'étendre cette définition sans aucune restriction sur l'idéal I .

3.1 Bases de Drinfeld.

3.1.1 Cas des $\mathcal{O}$ -modules divisibles: rappels.

On reprend les résultats de Drinfel'd donnés dans [11] dont on pourra trouver une présentation dans [5]. Soient R une $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -algèbre locale complète, noethérienne, de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa}$ et G un $\mathcal{O}$ -module divisible (G^c est de dimension 1) sur R de hauteur $d = h + j$ (i.e. le $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné associé (M, F) est de rang d et (M^c, F^c) est de rang h (cf. 2.2.3.2)). On note G_n le $\text{Spec } R$ -schéma en groupe des points de $\mathfrak{m}^n$ -torsion. Si P est un point de $G_n(R)$, on note $[P]$ le sous-schéma fermé de G_n qu'il définit. Pour (P_i) une famille finie de tels points, on note $\sum [P_i]$ le sous-schéma de G_n défini par l'idéal produit des idéaux définissant les $[P_i]$.

Définition 3.1.1.1 *Une base de Drinfel'd de niveau n sur G est un homomorphisme de $\mathcal{O}$ -modules*

$$\iota_n : (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^d \longrightarrow G_n(R)$$

tel que le sous-schéma $\sum_{\alpha \in (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^d} [\iota_n(\alpha)]$ de G_n coïncide avec G_n .

- Dans le cas où $G = (f, \psi)$ est un $\mathcal{O}$ -module formel sur R (de dimension 1) de hauteur h , la donnée d'une base de Drinfel'd de niveau n sur G est la donnée d'un homomorphisme

$$\iota_n : (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^h \longrightarrow \mathfrak{N} = G(R)$$

où $\mathfrak{N}$ est l'idéal maximal de R muni de la structure de $\mathcal{O}$ -module déduite de G , tel que les séries formelles

$$\psi_\pi(X) \text{ et } \prod_{\alpha \in (\mathfrak{m}^{-1}/\mathcal{O})^h} (X - \iota_n(\alpha))$$

se déduisent l'une de l'autre par multiplication par une unité de $R[[X]]$. En particulier si $R = \bar{\kappa}$, un tel homomorphisme est forcément trivial.

- Dans le cas général, G est une extension de $(F/\mathcal{O})^j$ par G^c . On a ainsi une suite exacte

$$0 \longrightarrow G_n^c(R) \longrightarrow G_n(R) \longrightarrow (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^j.$$

Le morphisme ι_n est alors une base de Drinfel'd si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- le composé $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{j+h} \xrightarrow{\iota_n} G_n(R) \longrightarrow (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^j$ est surjectif; son noyau K est alors un facteur direct dans $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^d$, isomorphe à $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^h$;
- la restriction de ι_n à K est une base de Drinfel'd sur G_n^c .

Remarque : Soit (M, F) le module des coordonnées $M_R(G)$ du $\mathcal{O}$ -module divisible G . Pour tout élément z de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^d$, on considèrera $\iota_n(z)$ comme un élément m^* de M_n^* ($M_n := M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$), tel que $m^* \circ F = (m^*)^{q'}$, où q' est le cardinal de κ .

3.1.2 Structures de niveaux en les places de mauvaise réduction.

Soient $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur S et o une place de X' telle que o appartient à $i_0(S)$. Un isomorphisme $\mathcal{D}_o \simeq \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$ étant fixé, soit $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ le S -schéma en $\mathcal{O}_o$ -module associé à $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ (cf. paragraphe 1.3.2). Comme dans le paragraphe précédent, si P est un R -point d'un schéma Y , on note $[P]$ le sous- R -schéma de Y qu'il définit. Pour (P_i) une famille finie de tels points, on note $\sum[P_i]$ le sous-schéma de Y défini par le faisceau d'idéaux produit des faisceaux d'idéaux définissant les $[P_i]$.

Définition 3.1.2.1 Une $\mathfrak{m}_o^n$ -structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)/S$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}_o$ -modules

$$\iota'_{o,n} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n})(S)$$

tel que le sous-schéma $\sum_{z \in (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d} [\iota'_{o,n}(z)]$ de $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ coïncide avec $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$. Une structure de niveau infinie locale en o sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est un système inductif $\iota'_{o,\infty} = \varinjlim_n \iota'_{o,n}$ où pour tout n , $\iota'_{o,n}$ est une $\mathfrak{m}_o^n$ -structure de niveau.

Remarque : Si S est le spectre d'une $\mathcal{O}_o$ -algèbre locale artinienne B , avec les notations du paragraphe 2.1, la donnée du morphisme $\iota'_{o,n} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n})(S)$ est équivalente à la donnée du morphisme $\iota'_{o,n,0} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n,0})(S)$. Le morphisme $\iota_{o,n,0}$ est alors une structure de niveau n sur $Gr(\mathcal{F}_{o,n,0})$ au sens du paragraphe précédent.

Remarque : Soient S un schéma, $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur S et $\iota'_{o,n}$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_o$ -modules $(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n})(S)$. Pour tout élément z de $(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d$, $\iota'_{o,n}(z)$ est un élément de $\mathcal{F}_{o,n}^*$ tel que

$$\varphi_{o,n}^*(\iota'_{o,n}(z)) = \iota'_{o,n}(z)^q.$$

Le morphisme $\iota'_{o,n}$ fournit un homomorphisme de $\mathcal{O}_o$ -modules $(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow \mathcal{F}_{o,n}^*$ que l'on note encore $\iota'_{o,n}$ tel que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d & \xrightarrow{\iota'_{o,n}} & \mathcal{F}_{o,n}^* \\ & \searrow \tau \iota'_{o,n} & \swarrow \varphi_{o,n}^* \\ & \tau \mathcal{F}_{o,n}^* & \end{array}$$

On voit ainsi que cette définition généralise celle du paragraphe 1.4. Précisons un peu plus cette généralisation.

Soient $i_0 : S \rightarrow X$ le morphisme zéro et S^o l'ouvert $i_0^{-1}(\text{Spec } \kappa(o))$.

Proposition 3.1.2.2 *Si le morphisme $\iota'_{o,n}$ est une $\mathfrak{m}_o^n$ -structure de niveau, alors $\iota'_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o)$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_o$ -modules*

$$(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \boxtimes \mathcal{O}_S(S^o) \longrightarrow (\mathcal{F}_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o))^*.$$

Preuve : Le morphisme $\iota'_{o,n}$ étant une $\mathfrak{m}_o^n$ -structure de niveau définie sur S , le sous-schéma $\sum_{z \in (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d} [\iota'_{o,n}(z)] \times_S S^o$ de $Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \times_S S^o$ coïncide avec $Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \times_S S^o$. Le schéma $Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \times_S S^o$ étant fini étale sur S^o , on en déduit que les éléments $(\iota'_{o,n}(z) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o))_{z \in (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d}$ forment une base de $(\mathcal{F}_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o))^*$, d'où la proposition. □

Réciproquement on a la proposition suivante.

Proposition 3.1.2.3 *On suppose que S est un schéma intègre et que S^o est un ouvert non vide de S . Si l'homomorphisme de $\mathcal{O}_o$ -modules $\iota'_{o,n} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n})(S)$ induit un isomorphisme*

$$\iota'_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o) : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \boxtimes \mathcal{O}_S(S^o) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o))^*,$$

alors $\iota'_{o,n}$ est une $\mathfrak{m}_o^n$ -structure de niveau.

Preuve : On note $\mathfrak{A}$ le faisceau d'anneau de $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ et $\mathfrak{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathfrak{A}$ sous-jacent au S -schéma $\sum_{z \in (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d} [\iota'_{o,n}(z)]$. Par hypothèse $\mathfrak{I} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^o}$ est le sous-faisceau nul de $\mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^o}$ et comme S est intègre on en déduit que $\mathfrak{I}$ est le sous-faisceau nul de $\mathfrak{A}$, d'où la proposition. □

On notera $\iota_{o,n} : \mathcal{D}_{o,n} \longrightarrow \mathcal{E}_{o,n}^*$ le morphisme induit par $\iota'_{o,n}$ (équivalence de Morita).

3.2 Représentabilité relative.

3.2.1 Deux lemmes généraux sur les bases de Drinfel'd.

Soient S un schéma et Z/S un S -schéma fini. Pour $S' \rightarrow S$ un S -schéma, on note $B_{Dr}(S')$ l'ensemble des familles de sections $P_1, \dots, P_N$ de $Z(S')$ telles que $\sum_{i=1}^N [P_i]$ en tant que sous-schéma de Z coïncide avec Z .

Lemme 3.2.1.1 B_{Dr} est un faisceau sur le gros site étale $(Sch/S)_{et}$.

Preuve : Soient $S'_2 \rightarrow S'_1$ un morphisme étale de S -schémas et $(P_1, \dots, P_N)$ un élément de $B_{Dr}(S'_1)$. Si $\mathcal{I}$ désigne le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{Z \times_S S'_1}$ produit des faisceaux d'idéaux définissant les $[P_i]$, alors $\mathcal{I}$ est nul. Ainsi $\mathcal{I}(S'_2)$ est nul et $(P_1 \times_{S'_1} S'_2, \dots, P_N \times_{S'_1} S'_2)$ appartient à $B_{Dr}(S'_2)$. L'application B_{Dr} se prolonge alors en un foncteur de la catégorie $(Sch/S)_{et}$ dans la catégorie des ensembles et constitue donc un préfaisceau. De même soit $(S_i)_i$ un recouvrement ouvert d'un S -schéma S' . Pour tout i , soit $(P_1^i, \dots, P_n^i)$ un élément de $B_{Dr}(S_i)$ tel que l'on ait la condition de recollement. Soient $P_1, \dots, P_N$ des sections de $Z(S')$ telles que pour tout i et j , $P_j \times_{S'} S_i$ est la section P_j^i de $Z(S_i)$. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{Z \times_S S'}$ associé à $\sum_{i=1}^N [P_i]$. D'après les hypothèses, pour tout i , $\mathcal{I}(S_i)$ est nul dans $\mathcal{O}_{Z \times_S S'}(S_i)$. Ainsi $\mathcal{I}$ est le sous-faisceau nul de $\mathcal{O}_{Z \times_S S'}$ ce qui montre que B_{Dr} est un faisceau. □

Soient Z un S -schéma fini et $P_1, \dots, P_N$ des S -points de Z .

Lemme 3.2.1.2 Il existe un sous-schéma fermé S_0 de S vérifiant la condition suivante: pour tout morphisme $S' \rightarrow S$, le sous-schéma

$$\sum_{i=1}^N [P_i \times_S S']$$

de $Z \times_S S'$ coïncide avec $Z \times_S S'$, si et seulement si le morphisme de S' dans S se factorise par S_0 .

Preuve : D'après le lemme précédent, on se ramène à supposer $S = \text{Spec } R$ affine et Z libre sur $\text{Spec } R$ et à ne considérer que des $S' = \text{Spec } R'$ affines. On choisit un isomorphisme $\mathcal{O}_Z \simeq R^m$ et on note J l'idéal de $\mathcal{O}_Z$ définissant le sous-schéma $\sum_{i=1}^N [P_i]$ de Z . On choisit un système de générateurs (f_i) du sous- R -module de R^m sous-jacent à J . Pour R' une R -algèbre, le sous-schéma $\sum_{i=1}^N [P_i \times_R R']$ coïncide avec $Z \times_R R'$ si et seulement si l'idéal $J \otimes_R R'$ de $\mathcal{O}_Z \otimes_R R'$ est nul. Cela équivaut au fait que toutes les composantes des f_i aient une image nulle dans R' . La conclusion du lemme est donc satisfaite par le sous-schéma S_0 de S défini par l'idéal engendré par les composantes des f_i . □

3.2.2 Définition de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ au dessus de X' .

Pour tout idéal I de A , on note $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ la catégorie fibrée sur la catégorie des $\mathbb{F}_q$ -schémas, dont les objets sont les $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques munis d'une I -structure de niveau. Les morphismes de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}(S)$ sont les isomorphismes entre deux tels objets. Par rapport au paragraphe 1.5, le morphisme caractéristique permet de définir le morphisme zéro de catégorie fibrée: $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I} \longrightarrow X'$.

Proposition 3.2.2.1 *Pour tout idéal I de A , le morphisme $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I} \longrightarrow \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},A}$ est relativement représentable.*

Preuve : Soient $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur T et $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ le T -schéma en $\mathcal{O}_o$ -modules qui lui est associé. Soit $\iota_{o,n,\text{univ}}$ l'homomorphisme universel sur $S := \text{Hom}_{(\mathcal{O}_o \otimes \mathcal{O}_S) - \text{mod}}((\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d, Gr(\mathcal{F}_{o,n}))$. Le foncteur de la catégorie des T -schémas dans celle des ensembles qui à un T -schéma T' , associe l'ensemble des $\mathfrak{m}_o^n$ -structures de niveaux définis sur T' de $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$, est alors représenté par le sous-schéma fermé S_0 de S du lemme 3.2.1.2. □

Ainsi d'après la proposition 1.5.1, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.2.2 *Pour tout idéal I de A , $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ est représentable par un champ algébrique au sens de Deligne-Mumford, $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$, de dimension relative $d - 1$ sur X' , lisse sur $X' \setminus V(I)$.*

Corollaire 3.2.2.3 *Si $V(I)$ contient au moins deux éléments alors $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ est un schéma sur X' .*

Preuve : D'après la proposition 1.5.1, $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ est un schéma sur $X' \setminus V(I)$ dès que $V(I)$ n'est pas vide. Si o et o' sont des places distinctes de $V(I)$, on note I^o (resp. $I^{o'}$) l'idéal de A tel que $I = I^o \mathfrak{m}_o^{n_o}$ (resp. $I = I^{o'} \mathfrak{m}_{o'}^{n_{o'}}$) avec $o \notin V(I^o)$ (resp. $o' \notin V(I^{o'})$). Soit, d'après la proposition ci-dessus, $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I})_o$ le $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I^o}$ -schéma sur $X' \setminus V(I^o)$ (resp. $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I})_{o'}$ le $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I^{o'}}$ -schéma sur $X' \setminus V(I^{o'})$) correspondant aux $\mathfrak{m}_o^{n_o}$ -structures de niveaux (resp. aux $\mathfrak{m}_{o'}^{n_{o'}}$ -structures de niveaux). Les schémas $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I})_o$ et $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I})_{o'}$ coïncident sur $X' \setminus V(I)$ et définissent donc un schéma sur $(X' \setminus V(I)) \cup (\{o, o'\} \cap X')$. □

3.3 Anneau universel des déformations d'un $\mathcal{O}$ -module divisible muni d'une structure de niveau n et propriétés locales de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$.

On reprend ce qui a été fait au paragraphe 2.4 en y ajoutant les structures de niveaux.

3.3.1 Déformation des $\mathcal{O}$ -modules divisibles avec structure de niveau, selon Drinfel'd.

On rappelle que C est la catégorie dont les objets sont les $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$ -algèbres locales complètes noethériennes dont le corps résiduel est isomorphe à $\bar{\kappa}$. Les morphismes de C sont les homomorphismes locaux de $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$ -algèbres.

Théorème 3.3.1.1 (cf. [11]) *Soit G un $\mathcal{O}$ -module divisible sur $\bar{\kappa}$, de hauteur $h + j$ ($h \geq 1$ étant la hauteur de G^c), muni d'une base de Drinfel'd de niveau n , ι_n . Le foncteur qui à un objet R de C associe l'ensemble des déformations sur R du couple (G, ι_n) est représentable par l'anneau $E_n^G = E_n^{h,j}$. L'anneau $E_n^{h,j}$ est régulier et pour $m \leq n$, le morphisme naturel $E_m^{h,j} \rightarrow E_n^{h,j}$ est fini et plat.*

Pour la preuve, on renvoie à [11]. Donnons simplement quelques précisions qui nous seront utiles par la suite. Au premier chapitre 3.1.2, on donne E_n^G dans le cas où G est un $\mathcal{O}_o$ -module formel. Dans ce cas on note cet anneau D_n^h où h est la hauteur de G^c . L'anneau D_n^h est régulier et les morphismes $D_m^h \rightarrow D_n^h$ sont finis et plats. Drinfel'd montre alors que $E_n^{h,j} = D_n^h[[d_1^n, \dots, d_j^n]]$.

3.3.2 Retour sur le théorème de Serre-Tate.

Soient S le spectre d'un anneau local artinien R et $\bar{S} \subset S$ le sous-schéma fermé défini par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul ($\bar{R} = R/\mathfrak{m}$). Soient I un idéal de A et $((\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i), \bar{\iota}_I)$ un $\bar{R}$ -point de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$, de caractéristique $i_0 : \bar{S} \rightarrow X'$. Soient o le point fermé de X' , image par $i_o : = i_0$ du point fermé de $\bar{S}$, et $(Gr_o(\bar{\mathcal{F}}_{o,0}), \bar{\iota}'_{o,n,0})$, le $\mathcal{O}_o$ -module divisible muni de sa structure de niveau n associé, où n est la multiplicité de o dans I .

D'après la proposition 2.4.2, on sait que déformer $(((\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i), \bar{\iota}_I) (I = \mathfrak{m}_o^n I')$, est équivalent à déformer le $\mathcal{O}_o$ -module divisible, $Gr_o(\bar{\mathcal{F}}_{o,0})$. Par définition $\iota_{o,n}$ est égale à $\iota'_{o,n}$ qui d'après le paragraphe 2.1 est équivalente à la donnée de $\iota'_{o,n,0}$, d'où le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.2.1 (du théorème de Serre-Tate 2.4.2) *L'application qui à une déformation $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I)$, définie sur R , de $((\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i), \bar{\iota}_I)$ associe la déformation $(Gr_o(\mathcal{F}_{o,0}), \iota'_{o,n,0})$ de $(Gr_o(\bar{\mathcal{F}}_{o,0}), \bar{\iota}'_{o,n,0})$, est un isomorphisme entre les deux espaces de déformation.*

3.3.3 Propriétés locales.

Soient o une place de X' et I' un idéal de A tel que o n'appartient pas à $V(I')$. Soient x un point de la fibre spéciale $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'} \otimes_A \bar{\kappa}(o)$ et y un point de la fibre spéciale $\widehat{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'} \otimes_A \bar{\kappa}(o)}$ tels que $r_{I', \mathfrak{m}_o^n, I'}(y) = (x)$. On note $(\widehat{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'}})_{(x)}$ (resp .

$(\widehat{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'.\mathfrak{m}_0^n}})_{(y)}$) le complété de l'hensélisé de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'}$ en x (resp. de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'.\mathfrak{m}_0^n}$ en y). D'après le théorème de Serre-Tate ci-dessus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\widehat{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'.\mathfrak{m}_0^n}})_{(y)} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Spec} E_n^{h,j} \\ \downarrow r_{I',\mathfrak{m}_0^n,I'} & & \downarrow \\ (\widehat{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'}})_{(x)} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Spec} E_0^{h,j} \end{array}$$

où $h + j$ (resp. h) est la hauteur de $Gr_o(\mathcal{F}_{o,0})$ (resp. $Gr_o^c(\mathcal{F}_{o,0})$).

Proposition 3.3.3.1 *Pour tout idéal I de A , $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ est régulier. Pour tous les idéaux I, J de A tels que $J \subset I$, le morphisme de restriction du niveau*

$$r_{J,I} : \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J} \longrightarrow \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$$

est fini et plat.

Preuve : On rappelle les critères généraux de platitude suivant (cf. [25]). Soit $A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneau. Alors B est un A -module plat si et seulement si pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de A et tout idéal premier P de B au dessus de $\mathcal{P}$, B_P est un $A_{\mathcal{P}}$ -module plat, ce qui est équivalent au fait que $\hat{B}_P$ est un $\hat{A}_{\mathcal{P}}$ -module plat. La proposition découle alors du théorème 3.3.1.1. $\square$

De la finitude du morphisme $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},A}/\mathbb{Z})$ et de la propriété de $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},A}/\mathbb{Z}) \rightarrow X'$, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 3.3.3.2 *Pour tout idéal I de A , le morphisme $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}) \rightarrow X'$ est propre.*

3.4 Correspondances de Hecke.

3.4.1 Algèbre de Hecke globale.

On peut identifier $\mathcal{D}$ à une collection d'ordres $\mathcal{D}_x \subset D \otimes F_x$ telle que pour toute place x de X , il existe une F -base N telle que $\mathcal{D}_x = \mathcal{O}_x.N$. On fixe alors les notations suivantes:

- $D_{\mathbb{A}}^{\times} = D^{\times} \otimes_F \mathbb{A}$;
- pour tout sous-ensemble fini $T \subset |X|$, $(D^T)^{\times} = D^{\times} \otimes_F \mathbb{A}^T$;
- $K := \mathcal{D}^{\times} = \prod_{x \in |X|} \mathcal{D}_x^{\times}$, soit $K = \varprojlim_I N_I^{\times}$;
- $K^T := (\mathcal{D}^T)^{\times} = \prod_{x \in |X| \setminus T} \mathcal{D}_x^{\times} \subset (D^T)^{\times}$, soit $K^T = \varprojlim_{I \cap T = \emptyset} N_I^{\times}$;

– pour un idéal I de A , on note K_I le noyau de l'homomorphisme surjectif

$$K \longrightarrow N_I^\times.$$

De la même façon pour I un idéal de A tel $V(I) \cap T$ est vide, on définit

$$K_I^T := \text{Ker} (K^T \longrightarrow (N_I^T)^\times).$$

Par exemple, on note $K_{x,0} = (\mathcal{D}_x)^\times$ et $K_{x,n} = \text{Ker} (\mathcal{D}_x^\times \rightarrow (\mathcal{D}_x/\mathfrak{m}_x^n \mathcal{D}_x)^\times)$.

Remarque : Le groupe K (resp. K^T) est un sous-groupe ouvert compact de $D_\mathbb{A}^\times$ (resp. $(D^T)^\times$) et K_I (resp. K_I^T) est un sous-groupe ouvert compact d'indice fini dans K (resp. K^T).

Le groupe localement compact $D_\mathbb{A}^\times$ (resp. $(D^T)^\times$) étant unimodulaire, soit $dg_\mathbb{A}$ (resp. $dg_\mathbb{A}^T$) la mesure de Haar sur $D_\mathbb{A}^\times$ (resp. $(D^T)^\times$) qui donne le volume 1 au sous-groupe K (resp. K^T). De même pour tout élément x de T , K_x étant un sous-groupe ouvert compact de $D_x^\times$, on considère dg_x la mesure de Haar sur $D_x^\times$ pour laquelle K_x est de volume 1. On a

$$dg_\mathbb{A} = dg_\mathbb{A}^T \times \prod_{x \in T} dg_x.$$

Définition 3.4.1.1 On appelle algèbre de Hecke de $D_\mathbb{A}^\times$ (resp. $(D^T)^\times$, resp. $D_x^\times$) et on note $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^T$, resp. $\mathcal{H}_x$) la $\mathbb{Q}$ -algèbre de convolution pour la mesure $dg_\mathbb{A}$ (resp. $dg_\mathbb{A}^T$, resp. dg_x) des fonctions localement constantes à support compact de $D_\mathbb{A}^\times$ (resp. $(D^T)^\times$, resp. $D_x^\times$) dans $\mathbb{Q}$.

Pour tout idéal I de A (resp. de A tel que $V(I) \cap T$ est vide), on note $\mathcal{H}_I$ (resp. $\mathcal{H}_I^T$) la sous-algèbre de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{H}^T$) des fonctions invariantes à gauche et à droite par K_I (resp. K_I^T).

Remarque : On a $\mathcal{H} = \mathcal{H}^T \times \prod_{x \in T} \mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_I^T \times \prod_{x \in T} \mathcal{H}_x$. De plus $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^T$) est la réunion filtrante des $\mathcal{H}_I$ (resp. $\mathcal{H}_I^T$).

3.4.2 Correspondances géométriques de Hecke.

L'objet de ce paragraphe est de définir les correspondances géométriques associées aux éléments de l'algèbre de Hecke de $(D^\infty)^\times$. On note

$$\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}} := \varprojlim_I \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$$

où la limite est prise sur tous les idéaux I de A .

Une section de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}$ sur un schéma S est la donnée d'un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ sur S et de structures de niveaux locales pour tout $x \neq \infty$,

$$\iota_x = \varinjlim_n \iota_{x,n}$$

où pour x n'appartenant pas à Bad , $\iota_{x,n}$ est induit (équivalence de Morita) par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_x$ -modules

$$\iota'_{x,n} : (\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n)^d \longrightarrow \text{Gr}(\mathcal{F}_{x,n_x})(S)$$

tel que $\sum_{z \in (\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n)^d} [\iota'_{x,n}(z)]$ en tant que sous-schéma de $\text{Gr}(\mathcal{F}_{x,n_x})$, coïncide avec $\text{Gr}(\mathcal{F}_{x,n})$, et pour x un élément de Bad , l'homomorphisme de $\mathcal{D}_x$ -modules à droite

$$\iota_{x,n_x} : \mathcal{D}_{x,n_x} \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_x^* \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n$$

est tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{|\mathfrak{m}_x^n \times S}^* & \xrightarrow{\iota_{|\mathfrak{m}_x^n \times S}^*} & {}^\tau \mathcal{E}_{|\mathfrak{m}_x^n \times S}^* \\ & \swarrow \iota_{x,n}^d & \nearrow \tau \iota_{x,n}^d \\ & \mathcal{D}_{x,n} \boxtimes \mathcal{O}_S & \end{array}$$

a) *Action naturelle de $(\mathcal{D}^\infty)^\times$ sur $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}$* : Soient g un élément de $(\mathcal{D}^\infty)^\times$ et $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota)$ un S -point de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}$. L'image par g de ce S -point est le couple $((\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1), \iota^1)$ défini comme suit:

$$(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1) = (\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$$

et

$$\iota_x^1 = \iota_x \circ g_x,$$

où $\mathcal{D}_x^\times$ agit à droite sur $\mathcal{D}_{x,n_x}$. On a alors

$$\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I} = (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}})^{K_I}. \quad (3.4.2.1)$$

b) *Action de $F^\times \backslash (\mathbb{A}^\infty)^\times$ sur $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}$* : On note $\text{Pic}_{X,o,n}(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur X munis d'une $\mathfrak{m}_o^n$ -structure de niveau

$$\psi_{o,n} : \mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \otimes (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n).$$

Pour un idéal I de A , soit $\text{Pic}_{X,I} := \prod_{x \in V(I)} \text{Pic}_{X,x,n_x}$, où n_x est la multiplicité de x dans I . Soit

$$\text{Pic}_{X,\infty}(\mathbb{F}_q) = \varprojlim_I \text{Pic}_{X,I}(\mathbb{F}_q)$$

où la limite est prise sur tous les idéaux I de A . On a un isomorphisme

$$\text{Pic}_{X,\infty}(\mathbb{F}_q) \simeq F^\times \backslash (\mathbb{A}^\infty)^\times,$$

où, à l'idèle de composante en x égale à une uniformisante π_x et toutes les autres composantes triviales, correspond le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(-x)$ muni de structures de niveaux locales nulles en dehors de la place x , et ι_x est donnée par la

multiplication par π_x . L'action de $F^\times \backslash (\mathbb{A}^\infty)^\times$ sur $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}$ sera donné, via l'isomorphisme ci-dessus, par l'action de $\text{Pic}_{X,\infty}(\mathbb{F}_q)$.

Soient donc I un idéal de A , o une place de X différente de la place ∞ et n_o la multiplicité de o dans I . Soit $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I)$ le $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique, muni de la I -structure de niveau universelle sur $S := \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$. Son image par l'élément $(\mathcal{L}, \psi_{o,n})$ de $\text{Pic}_{X,o,n}$, pour $n \geq n_o$, est le couple $((\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1), \iota_I^1)$ tel que

$$(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1) = (\mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}, j_i \otimes_{\mathcal{O}_S} \text{Id}_{\mathcal{L}}, t_i \otimes_{\mathcal{O}_S} \text{Id}_{\mathcal{L}}), \quad \iota_{x,n_x}^1 = \iota_{x,n_x} \text{ pour } x \neq \infty, o,$$

ι'_{o,n_o} étant défini comme suit. L'isomorphisme $\psi_{o,n_o} := \psi_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_o/(\pi_o^n)} \mathcal{O}_o/(\pi_o^{n_o})$ induit un isomorphisme $\mathcal{E}_{o,n_o} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{o,n_o}^1$ qui définit un isomorphisme de S -schémas $Gr(\mathcal{F}_{o,n_o}) \xrightarrow{\sim} Gr(\mathcal{F}_{o,n_o}^1)$. L'application $\iota_{o,n_o}^{1'}$ est alors définie par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Gr(\mathcal{F}_{o,n_o})(S) \\ & \nearrow \iota'_{o,n_o} & \uparrow \simeq \\ (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^{n_o})^d & \xrightarrow{\iota_{o,n_o}^{1'}} & Gr(\mathcal{F}_{o,n_o}^1)(S) \end{array}$$

D'après la proposition 3.1.2.2, $\iota'_{o,n_o} \times_{X'} (X' \setminus \{o\})$ est un isomorphisme. Ainsi $\iota_{o,n_o}^{1'} \times_{X'} (X' \setminus \{o\})$ est aussi un isomorphisme et d'après la proposition 3.1.2.3 (S étant régulier), $\iota_{o,n_o}^{1'}$ est une $\mathfrak{m}_o^{n_o}$ -structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1)$.

Remarque : Si z est un élément de $(\mathbb{A}^\infty)^\times$, son action telle que l'on vient de la définir correspond à l'action de l'élément diagonal z^{-1} dans $(\mathcal{D}^\infty)^\times$ (compatibilité entre a) et b)).

c) *Action du semi-groupe* $\Gamma := (D^\infty)^\times \cap \mathcal{D}^\infty$ *sur* $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}$: Le but est d'étendre les actions précédentes, c'est-à-dire qu'il faut que l'action de $(\mathcal{D}^\infty)^\times \subset \Gamma$ soit donnée par a) et que l'action de $F^\times \backslash (\mathbb{A}^\infty)^\times = \Gamma \cap (\mathbb{A}^\infty)^\times$ soit donnée par b). On procède place par place. Soient S un schéma et $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota)$ un S -point de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}$ de zéro i_0 .

c1) *Action de* $D_x^\times \cap \mathcal{D}_x$ *pour* $x \notin i_0(S)$: La limite inductive $\iota_x = \varinjlim_n \iota_{x,n}$ fournit un isomorphisme $\mathcal{D}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_x^*$ que l'on note encore ι_x tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_x \boxtimes \mathcal{O}_S & \xrightarrow{\iota_x} & \mathcal{E}_x^* \\ & \searrow \tau \iota_x & \downarrow t_x^* \\ & & \tau \mathcal{E}_x^* \end{array}$$

Soit g_x un élément de $D_x^\times \cap \mathcal{D}_x$. L'action de g_x^{-1} sur $\mathcal{D}_x$ est donnée par la multiplication à droite par g_x . On obtient donc (via ι_x) un endomorphisme de $\mathcal{E}_x^*$, que l'on note $[g_x]^*$, et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
& \mathcal{D}_x \boxtimes \mathcal{O}_S & \xrightarrow{\iota_x} & \mathcal{E}_x^* & \\
& \searrow \times g_x & \searrow \tau \iota_x & \downarrow t_x^* & \\
& & & \tau \mathcal{E}_x^* & \\
& & \searrow [g_x]^* & \downarrow \tau [g_x]^* & \\
\mathcal{D}_x \boxtimes \mathcal{O}_S & \xrightarrow{\iota_x} & \mathcal{E}_x^* & & \\
& \searrow \tau \iota_x & \downarrow t_x^* & & \\
& & \tau \mathcal{E}_x^* & &
\end{array}$$

On note $((\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1), \iota^1)$ l'image de $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota)$ par g_x^{-1} , laquelle est définie par les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}_i^1 & \xrightarrow{\alpha_i} & \mathcal{E}_x \\
\beta_i \downarrow & & \downarrow [g_x] \\
\mathcal{E}_i & \longrightarrow & \mathcal{E}_x
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\tau \mathcal{E}_i & \xrightarrow{t_i} & \mathcal{E}_i \\
\uparrow \tau \beta_i & & \uparrow \beta_i \\
\tau \mathcal{E}_i^1 & \xrightarrow{t_i^1} & \mathcal{E}_i^1
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}_i & \xrightarrow{j_i} & \mathcal{E}_{i+1} \\
\uparrow \beta_i & & \uparrow \beta_{i+1} \\
\mathcal{E}_i^1 & \xrightarrow{j_i^1} & \mathcal{E}_{i+1}^1
\end{array}$$

Le morphisme $\alpha_i \otimes \text{Id} : \mathcal{E}_i^1 \longrightarrow \mathcal{E}_o$ est un isomorphisme $\mathcal{D}_o$ -équivariant. On définit alors le morphisme $\iota_{o,n}^1 : \mathcal{D}_{o,n} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_{o,n}^1)^*$ comme le composé $(\alpha_i \otimes \text{Id})^{-1} \circ \iota_{o,n}$.

Remarque : Si g_x est un élément de $\mathcal{D}_x^\times$ alors $[g_x]$ est un isomorphisme et on retrouve l'action définie en a). De même si g_x est un élément de $\mathcal{O}_x \cap F_x^\times$, alors $\mathcal{E}_i^1 = \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{O}_X(g_x^{-1})$ et on reconnaît l'action définie en b).

c2) *Action de $D_o^\times \cap \mathcal{D}_o$ pour $o \in i_0(S)$:* Soit g_o un élément de $D_o^\times \cap \mathcal{D}_o$. On pose $S = \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}$ et $S^o := i_0^{-1}(\text{Spec}(A \setminus \{o\}))$. D'après c1), g_o^{-1} définit un morphisme $S^o \longrightarrow S^o$ et donc un morphisme $S^o \longrightarrow S$. On veut montrer que ce morphisme que l'on note $[g_o]^o$ se prolonge en un morphisme $[g_o] : S \longrightarrow S$. Le schéma S^o étant ouvert dans S , il y est dense et un tel prolongement est forcément unique. Il suffit alors de montrer que pour tout recouvrement ouvert $S = \cup U_i$, le morphisme $[g_o]^o \times_{S^o} U_i^o : U_i^o \longrightarrow U_i$ se prolonge en un morphisme $[g_o]_i : U_i \longrightarrow U_i$, la condition de recollement étant automatique d'après l'unicité du prolongement. Soit donc $U = \text{Spec } R$ un ouvert de S et R^o le localisé de R correspondant à U^o . Le schéma S étant régulier, R est intègre et s'injecte dans R^o . On note $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ le $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique universel sur R . Le morphisme $\iota_o = \varinjlim_n \iota_{o,n}$ fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}_o \boxtimes R & \xrightarrow{\iota_o} & \mathcal{E}_o^* \\
& \searrow \tau_{\iota_o} & \downarrow t_o^* \\
& & \tau \mathcal{E}_o^*
\end{array}$$

tel que d'après la proposition 3.1.2.2,

$$\iota_o \otimes_R R^o : \mathcal{D}_o \boxtimes R^o \longrightarrow \mathcal{E}_o^* \otimes_R R^o$$

est un isomorphisme. Comme dans le cas c1), on définit l'endomorphisme $[g_o]^*$ de $\mathcal{E}_o^* \otimes_R R^o$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}_o \boxtimes R^o & \xrightarrow{\iota_o^d \otimes_R R^o} & \mathcal{E}_o^* \otimes_R R^o \\
\downarrow \times g_o & & \downarrow [g_o]^* \\
\mathcal{D}_o \boxtimes R^o & \xrightarrow{\iota_o^d \otimes_R R^o} & \mathcal{E}_o^* \otimes_R R^o.
\end{array}$$

Soit r un élément de R tel que $[g_o \otimes r]^*$ est défini sur $\mathcal{E}_o^*$. On définit alors $(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1)$ via $[g_o \otimes r]^*$ comme dans c1). Le morphisme α_i induit un isomorphisme $\mathcal{F}_o^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_o$ et on définit $\iota_{o,n}^{1'} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow (\mathcal{F}_{o,n}^1)^*$ comme l'application induite par le composé $(\alpha_i \otimes \text{Id})^{-1} \circ \iota_{o,n}$. Le morphisme $\iota_{o,n}' \times_R R^o$ étant un isomorphisme, il en est de même de $\iota_{o,n}^{1'} \times_R R^o : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \boxtimes R^o \longrightarrow (\mathcal{F}_{o,n}^1 \otimes_R R^o)^*$. Ainsi d'après la proposition 3.1.2.3, $\iota_{o,n}^{1'}$ est une $\mathfrak{m}_o^n$ -structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1)$. Il suffit alors montrer que $\mathcal{E}_i^1 \otimes_R R^o$ est isomorphe à $\mathcal{E}_i' \otimes_R R^o$ tel qu'il est défini par c1). Pour cela il suffit de vérifier que dans c1), pour définir $\mathcal{E}_i'$, on aurait pu prendre $g_x \otimes r$ au lieu de g_x . Cette propriété découle du lemme suivant.

Lemme 3.4.2.2 *Soient $\mathcal{E}_i'$ et $\tilde{\mathcal{E}}_i'$ définis par la commutativité des diagrammes suivants*

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathcal{E}}_i' & \longrightarrow & \mathcal{E}_{i,o} \\
\downarrow \tilde{g}' & & \downarrow r.g \\
\mathcal{E}_i & \longrightarrow & \mathcal{E}_{i,o}
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}_i' & \longrightarrow & \mathcal{E}_{i,o} \\
\downarrow g' & & \downarrow g \\
\mathcal{E}_i & \longrightarrow & \mathcal{E}_{i,o}
\end{array}$$

où $\mathcal{E}_i$ est un $\mathcal{O}_{X \times \text{Spec } R}$ -module localement libre de rang fini et où g est un morphisme de $\mathcal{O}_{X \times \text{Spec } R}$ -module. Alors $\mathcal{E}_i'$ et $\tilde{\mathcal{E}}_i'$ sont isomorphes.

Preuve : On a $\mathcal{E}_i' \simeq \text{Im } g' \subset \mathcal{E}_i$, $\tilde{\mathcal{E}}_i' \simeq \text{Im } \tilde{g}' \subset \mathcal{E}_i$ et $\text{Im } \tilde{g}' \simeq r. \text{Im } g'$. L'anneau R étant intègre, pour tout $\mathcal{O}_{X \times \text{Spec } R}$ -module localement libre de rang fini $\mathcal{F}$, le morphisme $\mathcal{F} \longrightarrow r.\mathcal{F} \quad m \longmapsto r.m$ est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $r.\mathcal{F}$, d'où le lemme. □

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ces définitions sont compatibles et définissent une action de $(D^\infty)^\times$ sur $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}$.

Correspondance de Hecke: Soient $K^\infty \subset (D^\infty)^\times$ un sous-groupe compact ouvert, et g^∞ un élément de $(D^\infty)^\times$. Les actions définies ci-dessus donnent une correspondance géométrique sur X' :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}/(K^\infty \cap g^{\infty,-1}K^\infty g^\infty) & \\
 c_1 \swarrow & & \searrow c_2 \\
 \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}/K^\infty & & \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}/K^\infty \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & X' &
 \end{array}$$

où le morphisme c_1 (resp c_2) est induit par l'inclusion $(K^\infty \cap g^{\infty,-1}K^\infty g^\infty) \subset K^\infty$ (resp $(K^\infty \cap g^{\infty,-1}K^\infty g^\infty) \xrightarrow{Ad(g^\infty)} K^\infty$). Les morphismes c_1, c_2 sont finis, et étales au dessus des places x de X' telles que g_x appartienne à $\mathcal{D}_x^\times$.

Chapitre 3

Vérification d'une conjecture de Rapoport.

Pour tout idéal I de A , on a vu que $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ est de dimension relative $d - 1$ sur X' , lisse au dessus de $X' \setminus V(I)$. Pour x une place de X' , on note $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}$ la fibre de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ en x , c'est-à-dire $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x} := \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I} \times_{X'} \text{Spec } \kappa(x)$. Le but de ce chapitre est de donner une stratification de ces fibres, notamment pour les places x de $V(I)$.

1 φ -faisceaux sur une base S et stratification de S .

Soient S un schéma et (V, φ) , un φ -faisceau sur S , c'est-à-dire que V est un $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang fini n , muni d'une application $\mathcal{O}_S$ -linéaire

$$\varphi : \text{Frob}_S^* V \longrightarrow V.$$

Soient $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de φ dans cette base,

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n r_i \otimes v_i\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} r_i^q v_j.$$

Si $(v'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une autre base de V et si P est la matrice de passage de $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ à $(v'_i)_{1 \leq i \leq n}$, la matrice de φ dans la nouvelle base $(v'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est donnée par $M' = P^{-1}M({}^\tau P)$. Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq n$, on définit

$$M^{!h} := M({}^\tau M) \cdots ({}^{\tau^{h-1}} M).$$

Pour $q \leq n$, on note $\mathcal{F}_n^q$ l'ensemble des parties à q éléments de $\{1, \dots, n\}$. Pour I et J deux éléments de $\mathcal{F}_n^q$ et M une matrice carré d'ordre n , on note M_{IJ} la

matrice carré d'ordre q extraite de M , constituée des éléments $m_{i,j}$ pour $i \in I$ et $j \in J$.

Proposition 1.1 *Soient (V, φ) un φ -faisceau sur S , $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V et M est la matrice de φ dans cette base. Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq n$, soit $S^{\geq h}$ le sous-schéma fermé de S sous-jacent au faisceau d'idéaux engendré, pour tous les entiers i tels que $1 \leq i \leq h$, par les déterminants*

$$\det(M_{I,J}^{!i})$$

des matrices d'ordre $(n - i + 1)$ extraites de la matrice $M^{!i}$, I et J décrivant $\mathcal{F}_n^{n-i+1}$. Cette définition est indépendante du choix de la base $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V et pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq n$, $S^{\geq h}$ est un sous-schéma fermé de $S^{\geq h-1}$ (où l'on a posé $S^{\geq 0} = S$).

Preuve : Soient deux bases $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(v'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V et M, M' les matrices de φ relativement à ces bases. On note P la matrice de passage de $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ à $(v'_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a alors $M' = P^{-1}M({}^tP)$. On rappelle la formule de Cauchy-Binet.

Lemme 1.2 *(formule de Cauchy-Binet) Soit A un anneau commutatif. Pour tous $X, Y \in \mathbb{M}_n(A)$, pour tout entier $q \leq n$ et pour tous $L, H \in \mathcal{F}_n^q$, on a l'égalité*

$$\det(YX)_{LH} = \sum_{K \in \mathcal{F}_n^q} \det Y_{LK} \cdot \det X_{KH}.$$

On note $\mathfrak{I}$ (resp. $\mathfrak{I}'$) le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_S$ engendré par les éléments $\det(M_{I,J}^{!i})$ (resp. $\det(M_{I,J}'^{!i})$) pour tous les entiers i tels que $1 \leq i \leq n$ et tous les éléments I et J de $\mathcal{F}_n^{n-i+1}$. La formule de Cauchy-Binet montre alors que $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$ et le schéma $S^{\geq h}$ est donné par le faisceau d'idéaux $\mathfrak{I}$. □

2 Stratification de l'anneau universel des déformations d'un $\mathcal{O}$ -module divisible.

2.1 Définition des anneaux $E_0^{h,j,\geq h'}$.

Soit $(M, F) = (M_{h,1}, F_{h,1}) \oplus (M_{j,0}, F_{j,0})$ le $\mathcal{O}$ -module de Dieudonné sur $\bar{\kappa}$ défini au paragraphe 2.2.1, c'est-à-dire tel que la matrice de F dans la base canonique de $M = (\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}})^d$, s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \pi & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le paragraphe 2.4.1 du chapitre 2, la déformation universelle $(M_{\text{univ}}^c, F_{\text{univ}}^c)$ de $(M_{h,1}, F_{h,1})$ est définie sur $D_0^h = \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}[[a_2, \dots, a_h]]$; M_{univ}^c est un $(\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} D_0^h)$ -module libre de rang h , muni d'un morphisme de Frobenius

$$F_{\text{univ}}^c : (\text{Id}_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \text{Frob}_{\kappa})^* M_{\text{univ}}^c \longrightarrow M_{\text{univ}}^c$$

dont la matrice dans une certaine base (que l'on notera $(e_i)_{1 \leq i \leq h}$), est

$$A_{\text{univ}}^c \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \pi \otimes 1 - 1 \otimes \pi \\ 1 & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_h \end{pmatrix}.$$

Quant à la déformation universelle $(M_{\text{univ}}, F_{\text{univ}})$ de (M, F) , elle est définie sur la D_0^h -algèbre $E_0^{h,j} \simeq D_0^h[[d_1^0, \dots, d_j^0]]$. La matrice A_{univ} de F_{univ} dans une certaine base (que l'on notera $(e_i)_{1 \leq i \leq h+j}$) est

$$\begin{pmatrix} A_{\text{univ}}^c & 0 \\ A_{\text{ext}} & I_j \end{pmatrix},$$

où A_{ext} a toutes ses colonnes nulles sauf la h -ème qui est égale à

$$\begin{pmatrix} a_{h+1} \\ \vdots \\ a_{j+h} \end{pmatrix},$$

où, pour $1 \leq i \leq j$, on a posé $a_{i+h} = d_i^0$.

Pour tout entier n , on pose

$$(M_{\text{univ},n}, F_{\text{univ},n}) := (M_{\text{univ}}, F_{\text{univ}}) \otimes_{(\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\mathbb{K}}} E_0^{h,j})} (\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} / (\pi^n) \hat{\otimes}_{\bar{\mathbb{K}}} E_0^{h,j})$$

$$(M_{\text{univ},n}^c, F_{\text{univ},n}^c) := (M_{\text{univ}}^c, F_{\text{univ}}^c) \otimes_{(\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\mathbb{K}}} D_0^h)} (\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} / (\pi^n) \hat{\otimes}_{\bar{\mathbb{K}}} D_0^h).$$

On considère alors $(M_{\text{univ},1}, F_{\text{univ},1})$ (resp. $(M_{\text{univ},1}^c, F_{\text{univ},1}^c)$) comme un φ -faisceau sur $E_0^{h,j}$ (resp. sur D_0^h) de rang $h+j$ (resp. h). Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, on notera $E_0^{h,j,\geq h'}$ (resp. $D_0^{h,\geq h'}$) l'anneau $(E_0^{h,j})^{\geq h'}$ (resp. $(D_0^h)^{\geq h'}$) défini au paragraphe précédent.

Proposition 2.1.1 *Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, on a*

$$D_0^{h,\geq h'} := \begin{cases} D_0^h & h' = 0 \\ D_0^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \bar{\mathbb{K}} & h' = 1 \\ (D_0^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \bar{\mathbb{K}}) / (a_2, \dots, a_{h'}) & 2 \leq h' \leq h \\ 0 & h' > h. \end{cases}$$

Preuve : La matrice $(A_{\text{univ},1}^c)^{!h'}$ associée à $F_{\text{univ},1}^c$, dans la base $(e_i \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \bar{\mathbb{K}})_{1 \leq i \leq h}$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_{h',h-h'} & * \\ 1_{h-h'} & * \end{pmatrix}$$

De plus la $(h-h'+1)$ -ème colonne de $(A_{\text{univ},1}^c)^{!h'}$ est la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix}$

($a_1 = -1 \otimes \pi$). Pour tous les entiers i, j compris entre 1 et h , on note $m_{i,j}$ le coefficient de la i -ème ligne et j -ème colonne de $(A_{\text{univ},1}^c)^{!h'}$. On a alors

$$\forall 1 \leq i \leq h' \leq j \leq h \quad m_{i,j} \in (a_1, \dots, a_i),$$

où $(a_1, \dots, a_i)$ désigne l'idéal de D_0^h engendré par $a_1, \dots, a_i$.

□

Proposition 2.1.2 *Pour tout entier $h' > h$, $E_n^{h,j,\geq h'}$ est nul et pour $0 \leq h' \leq h$, on a*

$$E_0^{h,j,\geq h'} = E_0^{h,j} \otimes_{D_0^h} D_0^{h,\geq h'} \simeq D_0^{h,\geq h'} [[d_1^0, \dots, d_j^0]].$$

En particulier $E_n^{h,j,\geq 1}$ est égal à $E_n^{h,j} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \bar{\mathbb{K}}$.

Preuve : Pour tout h' , la matrice $(A_{\text{univ},1})^{!h'}$, dans la base $(e_i \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \bar{\mathbb{K}})_{1 \leq i \leq h+j}$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} (A_{\text{univ},1}^c)^{!h'} & 0 \\ A_{\text{ext},h'} & I_j \end{pmatrix}.$$

Ainsi $E_0^{h,j,\geq h'}$ est nul pour $h' > h$. Pour $h' \leq h$, demander la nullité de tous les mineurs d'ordre $h + j - h' + 1$ de $(A_{\text{univ},1})^{!h'}$ est équivalent à demander la nullité de tous les mineurs d'ordre $h - h'$ de $(A_{\text{univ},1}^c)^{!h'}$, d'où la proposition. $\square$

Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, on pose

$$(M_{\text{univ}}^{=h'}, F_{\text{univ}}^{=h'}) := (M_{\text{univ}}, F_{\text{univ}}) \otimes_{(\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} E_0^{h,j})} (\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} E_0^{h,j,=h'}).$$

Corollaire 2.1.3 *Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, $(M_{\text{univ}}^{=h'}, F_{\text{univ}}^{=h'})$ admet le dévissage*

$$0 \longrightarrow (M_{\text{univ}}^{=h',et}, F_{\text{univ}}^{=h',et}) \longrightarrow (M_{\text{univ}}^{=h'}, F_{\text{univ}}^{=h'}) \longrightarrow (M_{\text{univ}}^{=h',c}, F_{\text{univ}}^{=h',c}) \longrightarrow 0$$

où $M_{\text{univ}}^{=h',et}$ (resp. $M_{\text{univ}}^{=h',c}$) est un $(\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} E_0^{h,j,=h'})$ -module libre de rang constant égal à $j + h - h'$ (resp. h') et $F_{\text{univ}}^{=h',et} : (Id_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \text{Frob}_{\kappa}})^* M_{\text{univ}}^{=h',et} \longrightarrow M_{\text{univ}}^{=h',et}$ est bijectif (resp. $F_{\text{univ}}^{=h',c} : (Id_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \text{Frob}_{\kappa}})^* M_{\text{univ}}^{=h',c} \longrightarrow M_{\text{univ}}^{=h',c}$ est topologiquement nilpotent).

Preuve : Le résultat découle de la forme de la matrice $A_{\text{univ}} \otimes_{E_0^{h,j}} E_0^{h,j,=h'}$ donnée ci-dessus et du fait que l'élément $a_{h'+1}$ de $E_0^{h,j,=h'}$ est inversible. $\square$

En termes de $\mathcal{O}$ -modules divisibles, la situation se décrit comme suit. Soit $G^{h,j}$ le $\mathcal{O}$ -module divisible universel sur $\text{Spec } E_0^{h,j}$. Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, soit $G^{h,j,\geq h'}$ la restriction de $G^{h,j}$ au fermé

$$\text{Spec}(E_0^{h,j,\geq h'}) \hookrightarrow \text{Spec}(E_0^{h,j}).$$

Sur l'ouvert

$$\text{Spec}(E_0^{h,j,=h'}) \hookrightarrow \text{Spec}(E_0^{h,j,\geq h'}),$$

$G^{h,j,=h'} = G^{h,j,h'} \times_{\text{Spec}(E_0^{h,j,h'})} \text{Spec}(E_0^{h,j,=h'})$ admet le dévissage

$$0 \longrightarrow (G^{h,j,=h'})^c \longrightarrow G^{h,j,=h'} \longrightarrow (G^{h,j,=h'})^{et} \longrightarrow 0$$

où $(G^{h,j,=h'})^{et}$ est étale et $(G^{h,j,=h'})^c$ est, en tout point fermé de $\text{Spec } E_0^{h,j,=h'}$, un $\mathcal{O}$ -module formel de hauteur h' .

2.2 Composantes $\text{Spec}(E_n^{h,j,=h'})_A$ de $\text{Spec}(E_n^{h,j,=h'})$.

Pour tout entier n positif, on définit $D_n^{h,\geq h'}$ et $E_n^{h,j,\geq h'}$ par changement de base

$$D_n^{h,\geq h'} := D_0^{h,\geq h'} \otimes_{D_0^h} D_n^h, \quad E_n^{h,j,\geq h'} := E_0^{h,j,\geq h'} \otimes_{E_0^{h,j}} E_n^{h,j}.$$

Pour tout n , $E_n^{h,j}$ est isomorphe à $D_n^h[[d_1^n, \dots, d_j^n]]$, en tant que D_n^h -algèbre (cf. le paragraphe 3.3.1), d'où

$$E_n^{h,j,\geq h'} \simeq D_n^{h,\geq h'}[[d_1^n, \dots, d_j^n]].$$

Remarque : Avec ces notations on a

$$E_n^{h,j,\geq 1} = E_n^{h,j} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\text{nr}}} \bar{\kappa} \simeq (D_n^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\text{nr}}} \bar{\kappa})[[d_1^n, \dots, d_j^n]].$$

Lemme 2.2.1 *Pour tous les entiers positifs m, n tels que $m \leq n$, le morphisme de restriction du niveau*

$$E_m^{h,j,\geq h'} \longrightarrow E_n^{h,j,\geq h'}$$

est fini et plat.

On munit (M, F) d'une structure de niveau n , ι_n tel que le noyau $A_{1 \rightarrow h} \subset (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j}$ de ι_n est engendré par les h -premiers vecteurs de la base canonique. Après le changement de base $E_0^{h,j} \longrightarrow E_n^{h,j}$, $(M_{\text{univ}}, F_{\text{univ}})$ est muni d'une structure de niveau n universelle, $\iota_{n,\text{univ}}$ qui relève ι_n . Pour tout élément z de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j}$, $\iota_{n,\text{univ}}(z)$ est un élément m^* de $(M_{\text{univ},n})^*$ tel que $m^* \circ F_{\text{univ}} = (m^*)^{q'}$, où q' est le cardinal de κ (la condition de Drinfel'd s'exprime sur le $\mathcal{O}$ -module divisible universel sur $E_n^{h,j}$). On considère alors le morphisme $\iota_{n,\text{univ}}^{=h',et}$:

$$(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j} \times \text{Spec } E_n^{h,j,=h'} \longrightarrow \{m^* \in (M_{\text{univ},n}^{=h',et})^* \mid m^* \circ F_{\text{univ}}^{=h',et} = (m^*)^{q'}\},$$

qui à un élément z de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j}$ associe la restriction de $\iota_{n,\text{univ}}(z)$ à $M_{\text{univ},n}^{=h',et}$. D'après le corollaire 2.1.3,

$$\{m^* \in (M_{\text{univ},n}^{=h',et})^* \mid m^* \circ F_{\text{univ}}^{=h',et} = (m^*)^{q'}\}$$

est un faisceau en $\mathcal{O}$ -modules sur $\text{Spec } E_n^{h,j,=h'}$, de fibre $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j-h'}$. La condition sur $\iota_{n,\text{univ}}$ d'être une structure de niveau n , entraîne que $\iota_{n,\text{univ}}^{=h',et}$ est surjectif (cf. le paragraphe 3.1.1). Le noyau K de $\iota_{n,\text{univ}}^{=h',et}$ est alors un sous- $(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ -module facteur direct de rang h' dans $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j} \times \text{Spec } E_n^{h,j,=h'}$ contenu dans $A_{1 \rightarrow h}$. Si $h' \geq 1$, il est donc de la forme

$$\coprod_{A \in \mathfrak{P}(h+j, h', n, A_{1 \rightarrow h})} \{A\} \times \text{Spec}(E_n^{h,j,=h'})_A$$

où $\mathfrak{P}(h+j, h', n)$ est l'ensemble des facteurs directs de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j}$ de rang h' contenu dans $A_{1 \rightarrow h}$.

Rappels: Pour tous les entiers positifs $s \leq t$, l'ensemble des facteurs directs de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^t$ de rang s est en bijection avec l'ensemble quotient

$$GL_t(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{t,s,n}$$

où $P_{t,s,n}$ est le sous-groupe parabolique de $GL_t(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ associé aux s premiers vecteurs $e_1, \dots, e_s$ de la base canonique. Cette bijection associe à un élément $\bar{g}$ de $GL_t(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{t,s,n}$, le $(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ -module engendré par les $e_i \cdot g^{-1}$ pour $1 \leq i \leq s$, où g est un élément quelconque de $GL_t(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ dans la classe de $\bar{g}$.

En ce qui concerne $E_n^{h,j=h'}$, un élément A de $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h',n}$ est considéré comme un sous-module de $A_{1 \rightarrow h}$.

Proposition 2.2.2 *Pour tous les entiers n, j et h' tel que $1 \leq h' \leq h$, on a*

$$\text{Spec}(E_n^{h,j=h'}) = \coprod_{A \in GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h',n}} \text{Spec}(E_n^{h,j=h'})_A.$$

De plus tous les $\text{Spec}(E_n^{h,j=h'})_A$ sont isomorphes et sont permutés sous l'action naturelle de $P_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$.

Proposition 2.2.3 *Pour tout élément z de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{j+h}$, dans $E_n^{h,j=h'}$ on a*

$$\iota_{n,\text{univ}}^{h',\text{et}}(z) = 0 \iff (\iota_{n,\text{univ}}^{h'}(z))^{(q')^{nh'}} = 0.$$

Preuve : Pour $0 \leq k \leq n-1$, soit $f_{ni+k} = (\pi^k \otimes 1)e_i$, où $(e_i)_{1 \leq i \leq j+h}$ est la base de M_{univ} adaptée à F_{univ} (cf le début du paragraphe précédent). La matrice $A_{\text{univ},n}^{h'}$ de $F_{\text{univ}}^{h'}$, dans la base $(f_i)_{1 \leq i \leq n(j+h)}$ de $M_{\text{univ},n}^{h'}$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

où B est inversible de rang $n(j+h-h')$ et $A^{!nh'}$ est nulle (cf. le corollaire 2.1.3). De même on écrit $\iota_{n,\text{univ}}^{h'}(z)$ sous la forme $(\alpha \mid \beta)$. La matrice ligne associée à $(\iota_{n,\text{univ}}^{h'})^{(q')^{nh'}}$ est alors égale à $(\alpha \mid \beta)(A_{\text{univ}}^{h'})^{!nh'} = (\beta C' \mid \beta B^{!nh'})$.

□

Lemme 2.2.4 *Soient h'_1, h'_2 des entiers tels que $h'_1 \leq h'_2$ et A_1 un élément de $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h'_1,n}$. Pour A_2 un élément de $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h'_2,n}$, $\text{Spec}(E_n^{h,j=h'_2})_{A_2}$ est dans l'adhérence de $\text{Spec}(E_n^{h,j=h'_1})_{A_1}$ si et seulement si $A_1 \subset A_2$.*

Pour $j = 0$, en accord avec les notations précédentes, on pose $(D_n^{h,=h'})_A = (E_n^{h,0,=h'})_A$. La décomposition de la proposition 2.2.2 et l'isomorphisme $E_n^{h,j \geq h'} \simeq D_n^{h, \geq h'}[[d_1^n, \dots, d_j^n]]$, donne la proposition suivante.

Proposition 2.2.5 *Pour tout élément A de $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h',n}$, on a*

$$\text{Spec}(E_n^{h,j=h'})_A = \text{Spec} \left((D_n^{h,=h'})_A \hat{\times}_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}} [[d_1^n, \dots, d_j^n]] \right).$$

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq h$, on note e_i le i -ème vecteur de la base canonique de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^h$ et u_i l'élément de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_n^h$ de D_n^h , correspondant à $\iota_n(e_i)$.

Proposition 2.2.6 (cf [11]) *Les éléments $u_1, \dots, u_h$ constituent un système local régulier de paramètres locaux pour l'anneau régulier D_n^h .*

Le morphisme naturel

$$\bar{\kappa}[[u_1, \dots, u_h]] \longrightarrow D_n^{h, \geq 1} = D_n^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\text{nr}}} \bar{\kappa},$$

est donc surjectif. On note $\widehat{\mathbb{A}}_{(0)}^h$ le schéma $\text{Spec } \bar{\kappa}[[u_1, \dots, u_h]]$. Pour tout élément A de $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h, h', n}$, soit $\text{Spec}(D_n^{h, \geq h'})_A$ l'adhérence de $\text{Spec}(D_n^{h, = h'})_A$ dans $\text{Spec } D_n^{h, \geq h'}$. On peut alors décrire l'image de $\text{Spec}(D_n^{h, \geq h'})_A$ dans $\widehat{\mathbb{A}}_{(0)}^h$ par un certain nombre d'équations. Pour illustration, prouvons la proposition suivante, où $(D_n^{h, \geq h'})_{A, \text{red}}$ est le réduit de $(D_n^{h, \geq h'})_A$.

Proposition 2.2.7 *Pour tout élément A de $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h, h', n}$, on choisit des éléments*

$$(\lambda_i^j)_{1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq h'} \in \mathcal{O},$$

tels que pour tout j , l'idéal $(\lambda_1^j, \dots, \lambda_h^j)$ de $\mathcal{O}$ est égal à $\mathcal{O}$ et tels que les éléments

$$v_i = \lambda_1^i u_1 + \dots + \lambda_h^i u_h \quad 1 \leq i \leq h$$

de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^h$, forment une base de A . L'image de $\text{Spec}(D_n^{h, \geq h'})_{A, \text{red}}$ dans $\widehat{\mathbb{A}}_{(0)}^h$ est alors donnée par $\text{Spec } \bar{\kappa}[[u_1, \dots, u_h]]/\mathfrak{I}_A$ où $\mathfrak{I}_A$ est l'idéal de $\bar{\kappa}[[u_1, \dots, u_h]]$ engendré par les h' éléments

$$1 \leq j \leq h' \quad \bar{\lambda}_1^j u_1 + \dots + \bar{\lambda}_h^j u_h.$$

En particulier les $\text{Spec}(D_n^{h, \geq h'})_{A, \text{red}}$ sont lisses sur $\bar{\kappa}$ et les $\text{Spec}(D_n^{h, \geq h'})_A$ (A décrivant $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h, h', n}$) constituent les composantes irréductibles de $\text{Spec } D_n^{h, \geq h'}$.

Preuve : En reprenant les notations du premier chapitre, soit (F, f_λ) le $\mathcal{O}$ -module formel de hauteur h universel avec

$$F(X, Y) = X + Y + \dots \text{ et pour tout } \lambda \in \mathcal{O}_o, f_\lambda(X) = i(\lambda)X + \dots$$

où i est l'injection naturelle $\mathcal{O} \rightarrow D_0^h$. On note $\mathfrak{I}_A$ l'idéal de $\bar{\kappa}[[u_1, \dots, u_h]]$ engendré par les h' éléments

$$F\left(f_{\lambda_1^j}(u_1), \dots, F(f_{\lambda_{h-1}^j}(u_{h-1}), f_{\lambda_h^j}(u_h)) \dots\right),$$

de sorte que $\text{Spec}(D_n^{h, \geq h'})_A \hookrightarrow \text{Spec } \bar{\kappa}[[u_1, \dots, u_h]]/\mathfrak{J}_A$. Pour tout j tel que $1 \leq j \leq h'$, les équations

$$F\left(f_{\lambda_1^j}(u_1), F(f_{\lambda_2^j}(u_2), \dots, F(f_{\lambda_{h-1}^j}(u_{h-1}), f_{\lambda_h^j}(u_h)) \dots)\right) = 0.$$

s'écrivent sous la forme

$$\bar{\lambda}_1^j u_1 + \dots + \bar{\lambda}_h^j u_h + \text{termes de degré } > 1.$$

La matrice $(h \times h')$ des $(\bar{\lambda}_i^j)_{1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq h'}$ étant de rang h' , l'idéal $\mathfrak{J}_A$ de $\bar{\kappa}[[u_1, \dots, u_h]]$ est alors engendré par les h' éléments

$$1 \leq j \leq h' \quad \bar{\lambda}_1^j u_1 + \dots + \bar{\lambda}_h^j u_h.$$

Le schéma $\text{Spec}(D_n^{h, \geq h'})_{A, \text{red}}$ étant de dimension $h - h'$, il est donc isomorphe à $\text{Spec } \bar{\kappa}[[u_1, \dots, u_h]]/\mathfrak{J}_A \simeq \text{Spec } \bar{\kappa}[[w_1, \dots, w_{h-h'}]]$, d'où la proposition. $\square$

Remarque : En particulier l'intersection entre deux composantes $\text{Spec}(D_n^{h, =h'})_{A_1}$ et $\text{Spec}(D_n^{h, =h'})_{A_2}$ est caractérisée par l'intersection $A_1 \cap A_2$.

3 Stratification des fibres de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$.

On applique ce qui précède au cas des $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques. Pour éviter les problèmes de champs, on supposera dans la suite que l'idéal I de A est tel que $V(I)$ contienne au moins deux points fermés distincts.

3.1 Définition des strates $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h}$ pour $x \in X'$.

Soient S le schéma $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ et $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ le $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique universel défini sur S , muni de sa I -structure de niveau, ι_I . Soit x une place de X' et $q_x = \text{card } \kappa(x)$. Pour tout i , les fibres $\mathcal{E}_{i,x}$ sont isomorphes et après équivalence de Morita, l'application $t'_{i,x} : {}^r\mathcal{F}_{i,x} \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1,x}$ permet de considérer $\mathcal{F}_{i,x} \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x)$ comme un φ -faisceau sur S de rang d (cf. le paragraphe 1.3.2 du chapitre 2).

Définition 3.1.1 *Pour tout entier h tel que $0 \leq h \leq d$, on définit $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h}$ comme le sous-schéma fermé $S^{\geq h}$ introduit dans la proposition 1.1. On définit aussi l'ouvert $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\leq h}$ de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h}$ comme le complémentaire de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h+1}$ dans $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h}$.*

Avec les notations introduites, on a donc

$$\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq d} = \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\leq d} \text{ et } \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq 1} = \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}.$$

Remarque : Dans le cas où $V(I)$ contient moins de deux éléments, on peut définir $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}^{\geq h}$ et $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}^{\leq h}$ de la manière suivante. Soit J un idéal de A contenu dans I et tel que $V(J)$ contienne au moins deux éléments. On définit $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h}$ comme l'image $r_{J,I}(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J,x}^{\geq h})$ où $r_{J,I}$ est le morphisme de restriction du niveau de J à I (cette image ne dépend pas du choix de l'idéal J).

Proposition 3.1.2 *Soit z un point géométrique de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\leq h}$. L'entier h est alors la hauteur du $\mathcal{O}_o$ -module formel $Gr_x^c(\mathcal{F}_x)$ associé et pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, l'isomorphisme du théorème de Serre-Tate*

$$(\widehat{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}})_z \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(E_n^{h,d-h})$$

où n est la multiplicité de x dans I , induit un isomorphisme

$$(\widehat{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}})_z \times_{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}} \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h'} \simeq \text{Spec } E_n^{h,j,\geq h'}.$$

D'après le lemme 2.2.1, on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.3 *Pour tous les idéaux I, J de A tels que $J \subset I$, le morphisme de restriction du niveau sur la h -ième strate $r_{J,I} : \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J,x}^{\geq h} \longrightarrow \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h}$ est fini et plat.*

3.2 Décomposition des strates dans le cas de mauvaise réduction.

Soient o une place de $V(I)$ et n la multiplicité de o dans I . Soit $\iota'_{o,n}$ la $\mathfrak{m}_o^n$ -structure de niveau universelle sur $S := \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$. Pour tout $z \in (\mathfrak{m}_o^n/\mathcal{O}_o)^d$, $\iota'_{o,n}(z)$ est un élément m^* de $\mathcal{F}_{o,n}^*$ tel que $m^* \circ F_o = (m^*)^q$. La proposition 2.2.3 motive la définition suivante.

Définition 3.2.1 Soit A un élément de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h,n}$. On définit le sous-schéma fermé $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^h)_A$ de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^h$, comme le lieu d'annulation des sections $\iota'_{o,n}(a)^{q^{nh}}$ de $\mathcal{F}_{o,n}^* \times_S S^h$, pour a décrivant A .

Proposition 3.2.2 Soient A_h un élément de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h,n}$ et z un point géométrique de $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^h)_{A_h}$. Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$ et pour tout élément A de $GL_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{h,h',n}$ (on considère A comme un sous-module de A_h), l'isomorphisme de la proposition 3.1.2 induit l'isomorphisme

$$(\widehat{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}})_z \times_{\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}} (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{h'})_A \simeq \text{Spec}(E_n^{h,d-h,h'})_A.$$

On a alors la décomposition de la h -ème strate

$$\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^h = \coprod_{A \in GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h,n}} (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^h)_A.$$

Preuve : A tout point géométrique z de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^h$ est associé un élément A de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h,n}$ tel que z est un point géométrique de $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^h)_A$. La proposition découle alors de la proposition 2.2.3 et du théorème de Serre-Tate. En effet imposer que $\iota'_{o,n}(a)^{q^{nh}}$ est nulle vu comme élément de $\mathcal{F}_{o,n}^*$ est équivalent à imposer que $\iota'_{o,n,0}(a)^{q^{rnh}}$ est nulle vu comme élément de $\mathcal{F}_{o,n,0}^*$, où r est le degré de $\kappa(o)$ sur $\mathbb{F}_q$ (cf le paragraphe 2.1 du chapitre 2). $\square$

Ces définitions sont compatibles aux morphismes de restriction du niveau, c'est-à-dire que pour $n \geq n'$ et $A_0 \in GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^{n'})/P_{d,h',n}$, on a

$$r_{I'\mathfrak{m}_o^n, I'\mathfrak{m}_o^{n'}}^{-1} \left((\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'\mathfrak{m}_o^{n'}}^{h'})_{A_0} \right) = \coprod_{A \in \mathfrak{G}(A_0, n)} (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I'\mathfrak{m}_o^n}^{h'})_A,$$

où $\mathfrak{G}(A_0, n)$ est l'ensemble des éléments A de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h',n}$ qui ont pour image A_0 modulo $\mathfrak{m}_o^{n'}$.

Remarque : Dans le cas où $I = \mathfrak{m}_o^n$, on définit $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h})_A$ comme l'image $r_{J,I,o}((\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J,o}^{\geq h})_A)$ où J est un idéal de A contenu dans I et tel que $V(J)$ contienne au moins deux éléments.

Lemme 3.2.3 Soient h_1, h_2 des entiers tels que $h_1 \leq h_2$ et A_1 un élément de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h_1,n}$. Pour A_2 un élément de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h_2,n}$, le schéma $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h_2})_{A_2}$ est dans l'adhérence de $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h_1})_{A_1}$ si et seulement si $A_1 \subset A_2$.

On note $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h})_A$ l'adhérence schématique de $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\leq h})_A$ dans $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h}$. D'après la proposition 2.2.7, le réduit de $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h})_A$ est lisse sur $\text{Spec } \bar{k}(o)$. De manière identique à ce qui est fait pour les courbes elliptiques (cf. [22]), il est possible de décrire les équations des anneaux locaux de $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h})_A$. Les intersections entre deux composantes $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h_1})_{A_1}$ et $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h_2})_{A_2}$, sont caractérisées par $A_1 \cap A_2$.

4 Les strates non supersingulières sont induites.

On a vu que les stratifications des fibres $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}$ introduites dans les deux paragraphes précédents sont compatibles aux morphismes de restriction du niveau $r_{J,I}$. En ce qui concerne les correspondances de Hecke, on a les deux propositions suivantes.

Proposition 4.1 *Les stratifications $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,x}^{\geq h}$ définies dans les paragraphes précédents, sont compatibles aux correspondances de Hecke*

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J} & \\ c_1 \swarrow & & \searrow c_2 \\ \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I} & & \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I} \end{array}$$

c'est-à-dire qu'en tant que sous-schémas fermés de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J}$, on a

$$c_2^{-1}(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}^{\geq h}) = c_1^{-1}(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}^{\geq h}) = \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J}^{\geq h}.$$

Preuve : Soit g un élément de $(D^\infty)^\times$. Si $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est le $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique universel sur $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J}$, alors $(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1) = c_2((\mathcal{E}_i, j_i, t_i))$ est, d'après le paragraphe 3.4.2, isomorphe à $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$. Il suffit alors de remarquer que le sous-schéma fermé $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h}$ (resp. $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J,o}^{\geq h}$) est le lieu où $t_o^1 \otimes_{\mathcal{O}_o} \kappa(o)$ (resp. $t_o \otimes_{\mathcal{O}_o} \kappa(o)$) est de rang inférieur ou égal à $d - h$. □

On note P_h le parabolique de GL_d associé aux h -premiers vecteurs. Avec les notations précédentes, on a $P_{d,h,n} = P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$.

Proposition 4.2 *Si $I = \mathfrak{m}_o^n I'$ avec $o \notin V(I')$, alors pour tout élément A de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h,n}$, les correspondances de Hecke associées aux éléments de $A^{-1}P_h(F_o)A$ agissent sur $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h})_A$, c'est-à-dire*

$$c_2^{-1}((\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}^{\geq h})_A) = c_1^{-1}((\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}^{\geq h})_A) = \coprod_{A' \in \mathfrak{G}(A,m)} (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J}^{\geq h})_{A'},$$

où $J = I'\mathfrak{m}_o^m$ avec m assez grand (cf. la preuve) et où $\mathfrak{G}(A,m)$ est l'ensemble des éléments A' de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^m)/P_{d,h,m}$ qui ont pour image A modulo $\mathfrak{m}_o^n$.

Preuve : Soit g_o un élément de $GL_d(F_o) \cap \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$. Le morphisme c_2 du paragraphe 3.4.2, qui correspond à l'action de g_o^{-1} , est défini comme suit. Les idéaux I et J sont tels que $I = I'\mathfrak{m}_o^n$ et $J = I'\mathfrak{m}_o^m$ avec $o \notin V(I')$, où m est tel que le noyau de l'application $g_o : (F_o/\mathcal{O}_o)^d \rightarrow (F_o/\mathcal{O}_o)^d$ est contenu dans $(\mathfrak{m}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d$ et l'image de $(\mathfrak{m}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d$ par g_o contient $(\mathfrak{m}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$. Soit $(\mathcal{E}_{i,\text{univ}}, j_{i,\text{univ}}, t_{i,\text{univ}})$ le $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique universel sur $S := \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J}$ muni de sa $\mathfrak{m}_o^m$ -structure de niveau

universelle $\iota'_{o,m,\text{univ}}$. Il existe alors un recouvrement ouvert de S par des ouverts affines $\text{Spec } R_i$ et des éléments r_i de R_i tels que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{m}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d & \xrightarrow{\iota'_{o,m,\text{univ}}} & \mathcal{F}_{o,m,\text{univ}} \otimes R_i \\ g_o \downarrow & & \downarrow [g_o \otimes r_i] \\ (\mathfrak{m}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d & \xrightarrow{\iota'_{o,m,\text{univ}}} & \mathcal{F}_{o,m,\text{univ}} \otimes R_i. \end{array}$$

Le $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique $(\mathcal{E}'_i, j'_i, t'_i)$ défini par le morphisme c_2 (cf. le paragraphe 3.4.2) est tel que $\mathcal{F}'_o \times_S \text{Spec } R_i$ est isomorphe à l'image $[g_o \otimes r_i](\mathcal{F}_{o,\text{univ}} \times_S \text{Spec } R_i)$ et la structure de niveau n sur $(\mathcal{E}'_i, j'_i, t'_i)$ est définie sur chaque ouvert $\text{Spec } R_i$, par la composée

$$(\mathfrak{m}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \otimes R_i \xrightarrow{g_o \otimes r_i} (\mathfrak{m}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \times \text{Spec } R_i \longrightarrow \mathcal{F}'_{o,n} \otimes R_i$$

où la deuxième application est donnée par la restriction de $\iota_{o,m,\text{univ}} \times_S \text{Spec } R_i$ à $(\mathfrak{m}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \times \text{Spec } R_i$. La proposition se déduit alors immédiatement de cette description et de la proposition 3.2.2. $\square$

Proposition 4.3 *Soient o une place de X' . Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq d$, l'action de $GL_d(F_o)$ sur $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},o}^{\overline{h}}$ se décrit à partir de l'action de $P_h(F_o)$ sur $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},o}^{\overline{h}})_{\overline{1}} = \varprojlim_I (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\overline{h}})_{\overline{1}}$ comme l'induite*

$$\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},o}^{\overline{h}} = \text{Ind}_{P_h(F_o)}^{GL_d(F_o)} (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},o}^{\overline{h}})_{\overline{1}}.$$

Preuve : On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.4 *Soient V un κ -espace vectoriel muni d'une action d'un groupe G et P un sous-groupe de G . On suppose que V se décompose comme une somme directe de sous-espaces vectoriels*

$$V = \bigoplus_{\bar{g} \in G/P} V_{\bar{g}}$$

telle que pour tout élément g' de G , on a

$$g'(V_{\bar{g}}) \subset V_{\bar{g}g'} \quad \forall \bar{g} \in G/P.$$

On a alors une bijection G -équivariante

$$V = \text{Ind}_P^G(V_{\overline{1}}).$$

Preuve : (du lemme) A un élément $(v_{\bar{g}})_{\bar{g} \in G/P}$ on associe la fonction

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow V_{\bar{1}} \\ g &\mapsto g.v_{\bar{g}^{-1}}. \end{aligned}$$

L'espace vectoriel V est alors isomorphe à l'ensemble

$$\{f : G \longrightarrow V_{\bar{1}} \mid \forall g \in G \forall p \in P \ f(pg) = p.f(g)\},$$

d'où le lemme. □

On applique ce lemme avec $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\bar{h}}$ muni de l'action de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$ où n est la multiplicité de o dans I . Le sous-espace $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\bar{h}})_{\bar{1}}$ est stable sous l'action de $P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$ et on a

$$\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\bar{h}} = \text{Ind}_{P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)}^{GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)} ((\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\bar{h}})_{\bar{1}}).$$

La stratification étant compatible aux morphismes de restriction du niveau, en passant à la limite on obtient

$$\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},o}^{\bar{h}} = \text{Ind}_{P_h(\mathcal{O}_o)}^{GL_d(\mathcal{O}_o)} (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},o}^{\bar{h}})_{\bar{1}}.$$

D'après la proposition 4.2, $P_h(F_o)$ agit sur $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},o}^{\bar{h}})_{\bar{1}}$. La décomposition d'Iwasawa $GL_d(F_o)/P_h(F_o) \simeq GL_d(\mathcal{O}_o)/P_h(\mathcal{O}_o)$ et le lemme précédent, donnent alors le résultat. □

5 Description adélique des points supersinguliers.

Soient o une place de X' et $\bar{\kappa}(o)$ une clôture algébrique de $\kappa(o)$. Dans cette section, on montre que l'ensemble des points supersinguliers $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^d(\bar{\kappa}(o))$ est non vide. On en déduit alors que les strates $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\geq h}$ sont non vides et purement de dimension $d - h$ (résultat conjecturé par Rapoport). On donne ensuite une description adélique de cet ensemble de points supersinguliers et on décrit les actions des correspondances de Hecke de $(D^\infty)^\times$.

5.1 Rappels sur les φ -espaces et φ -paires.

On présente dans ce paragraphe un certain nombre de résultats dont on pourra trouver les preuves dans [23]. Par rapport au paragraphe 2.2.1 du chapitre 2, pour toute place x de F , un F_x -module de Dieudonné sur $\bar{\kappa}(o)$ est ici un $F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)$ -module et non un $F_x \hat{\otimes}_{\kappa(x)} \bar{\kappa}(o)$ -module: classiquement les deux points de vue sont équivalents (cf. le paragraphe 2.1 du chapitre 2).

Définition 5.1.1 *Un φ -espace (V, φ) sur $\bar{\kappa}(o)$, est un $F \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ -espace vectoriel V de dimension finie, muni d'une application $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \text{Frob}_q$ -semi-linéaire bijective,*

$$\varphi : V \longrightarrow V.$$

A un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ de caractéristique o défini sur $\bar{\kappa}(o)$, on associe un φ -espace (V, φ) et un homomorphisme de F -algèbre

$$\lambda : D^{op} \longrightarrow \text{End}(V, \varphi)$$

de la façon suivante. Soit V la fibre générique de $\mathcal{E}_0$. Via les morphismes j_i , on peut identifier V à la fibre générique de $\mathcal{E}_i$ pour tout i . Les applications t_i induisent alors une application bijective $F \otimes \text{Frob}_q$ -semi-linéaire $\varphi : V \longrightarrow V$ et (V, φ) est un φ -espace sur $\bar{\kappa}(o)$. L'action de D sur V commute avec φ et fournit le morphisme λ . Le triplet (V, φ, λ) est appelé **la fibre générique** du $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$. Deux $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques sont dits isogènes si leurs fibres génériques sont isomorphes.

Si x est une place de F , on considère le F_x -module de Dieudonné $(V_x, \varphi_x) := (F_x \hat{\otimes}_F V, F_x \hat{\otimes}_F \varphi)$ muni du morphisme de F_x -algèbre $\lambda_x : D_x^{op} \longrightarrow \text{End}(V_x, \varphi_x)$. On pose $M_x = H^0(\text{Spec}(\mathcal{O}_x \hat{\otimes} \bar{\kappa}(o)), \mathcal{E}_0)$, qui est un $\mathcal{D}_x$ -réseau de V_x stable sous $\lambda_x(D_x^{op})$.

Proposition 5.1.2 *(cf. [23]) La construction ci-dessus définit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes des $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques sur $\bar{\kappa}(o)$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes des paires*

$$((V, \varphi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|})$$

où (V, φ) est un φ -espace de rang d^2 sur $F \otimes \bar{\kappa}(o)$, $\lambda : D^{op} \rightarrow \text{End}(V, \varphi)$ est un morphisme de F algèbre et $(M_x)_{x \in |X|}$ est une collection de $\mathcal{D}_x$ -réseaux des F_x -modules de Dieudonné $(V_x, \varphi_x) = (F_x \hat{\otimes}_F V, F_x \hat{\otimes}_F \varphi)$ qui vérifient les propriétés suivantes:

- (i) si $x = \infty$, on a

$$\varphi_\infty(M_\infty) \supset M_\infty,$$

$$\varphi_\infty^d(M_\infty) = \pi_\infty^{-1} M_\infty,$$

$$\dim_{\bar{\kappa}(o)}(\varphi_\infty(M_\infty)/M_\infty) = d,$$

(où l'on a supposé pour simplifier que $\deg(\infty) = 1$);

- (ii) si $x = o$, on a

$$\pi_o M_o \subset \varphi_o(M_o) \subset M_o,$$

le $\kappa(o) \otimes \bar{\kappa}(o)$ -module $M_o/\varphi_o(M_o)$ est de longueur d et il est supporté par la composante connexe de $\text{Spec}(\kappa(o) \otimes \bar{\kappa}(o))$ qui correspond à l'inclusion $\kappa(o) \hookrightarrow \bar{\kappa}(o)$;

- (iii) si $x \neq o, \infty$, on a

$$\varphi_x(M_x) = M_x;$$

- (iv) toute base du $F \otimes \bar{\kappa}(o)$ -espace vectoriel V appartient et engendre le $\mathcal{O}_x \hat{\otimes} \bar{\kappa}(o)$ -sous-module M_x de V_x pour presque toutes les places $x \neq o, \infty$ de F .

Définition 5.1.3 Une φ -paire $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ est un couple formé d'une F -algèbre $\tilde{F}$, commutative de dimension finie et d'un élément $\tilde{\Pi} \in \tilde{F}^\times \otimes \mathbb{Q}$ qui satisfait à la propriété suivante: pour toute F -sous-algèbre propre F' de $\tilde{F}$, $\tilde{\Pi}$ n'appartient pas à $F'^\times \otimes \mathbb{Q} \subset \tilde{F}^\times \otimes \mathbb{Q}$.

A tout φ -espace (V, φ) , Drinfeld associe une φ -paire (cf. [23]).

Proposition 5.1.4 (cf. [23]) Soit $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ la φ -paire associée au φ -espace (V, φ) . On a alors les propriétés suivantes:

- (i) $\tilde{F}$ est un corps et $[\tilde{F} : F]$ divise d ;
- (ii) $F_\infty \otimes_F \tilde{F}$ est un corps et si $\tilde{\infty}$ est l'unique place de $\tilde{F}$ divisant ∞ , on a l'égalité $\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\tilde{\Pi}) = -[\tilde{F} : F]/d$;
- (iii) il existe une unique place $\tilde{o} \neq \tilde{\infty}$ de $\tilde{F}$ telle que $\tilde{o}(\tilde{\Pi}) \neq 0$; de plus $\tilde{o}$ divise o ;
- (iv) on a l'égalité $h = d[\tilde{F}_{\tilde{o}} : F_o]/[\tilde{F} : F]$, où h est l'indice de la strate à laquelle $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ appartient.

Corollaire 5.1.5 *L'algèbre $\text{End}(V, \varphi, \lambda)$ est une algèbre à division centrale sur $\tilde{F}$ de dimension $(d/[\tilde{F} : F])^2$ dont les invariants sont donnés comme suit:*

$$\text{inv}_{\tilde{x}}(\text{End}(V, \varphi, \lambda)) = \begin{cases} [\tilde{F} : F]/d & \text{si } \tilde{x} = \tilde{\infty} \\ -[\tilde{F} : F]/d & \text{si } \tilde{x} = \tilde{o} \\ [\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x] \text{inv}_x(D) & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout place x de F et toute place $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$ divisant x .

Définition 5.1.6 *Un (D, ∞, o) -type est une φ -paire $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ telle que:*

- (i) $\tilde{F}$ est un corps et $[\tilde{F} : F]$ divise d ;
- (ii) $F_{\infty} \otimes_F \tilde{F}$ est un corps et si $\tilde{\infty}$ est l'unique place de $\tilde{F}$ divisant ∞ , on a

$$\deg(\tilde{\infty})\tilde{o}(\tilde{\Pi}) = -[\tilde{F} : F]/d;$$

- (iii) il existe une unique place $\tilde{o} \neq \tilde{\infty}$ de $\tilde{F}$ telle que $\tilde{o}(\tilde{\Pi}) \neq 0$; de plus $\tilde{o}$ divise o ;
- (iv) pour toute place x de F et toute place $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$ divisant x , on a

$$(d[\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x]/[\tilde{F} : F]) \text{inv}_x(D) \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 5.1.7 (cf. [23]) *L'application composée*

$$(\mathcal{E}_i, j_i, t_i) \longmapsto (V, \varphi, \lambda) \longmapsto (\tilde{F}, \tilde{\Pi}),$$

qui à un $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur $\bar{\kappa}(o)$ associe son (D, ∞, o) -type, induit une bijection de l'ensemble des classes d'isogénie des $\mathcal{D}$ -faisceaux elliptiques définis sur $\bar{\kappa}(o)$ sur l'ensemble des classes d'isomorphismes des (D, ∞, o) -types.

5.2 Existence de points supersinguliers et dimension des strates.

Proposition 5.2.1 *Pour tout idéal I , la strate $\mathcal{E}l_{X, \mathcal{D}, I, o}^{\geq d}$ est non vide.*

Preuve : D'après le théorème 5.1.7, il suffit de montrer qu'il existe un (D, ∞, o) -type associé à des points supersinguliers ($h = d$). Les points de la jacobienne de X , à valeurs dans un corps fini, étant tous d'ordre fini, soit m un entier strictement positif tel que $m \cdot [o - \deg(o)\infty] = 0$ ($\deg \infty = 1$). Il existe alors un élément f de F tel que $\infty(f) = -\deg(o)m$, $o(f) = m$ et $x(f) = 0$ pour toute place x de F distincte des places o et ∞ . On pose $\tilde{\Pi}_F = f \otimes 1 / \deg(o)md$ de sorte que le couple $(F, \tilde{\Pi})$ est un (D, ∞, o) -type correspondant à des points supersinguliers. $\square$

Remarque : On verra au paragraphe 5.4, qu'à isomorphisme près, le couple $(F, \tilde{\Pi}_F)$ construit ci-dessus, est le seul (D, ∞, o) -type associé à des points supersinguliers.

Proposition 5.2.2 (Conjecture de Rapoport) *Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq d$, les strates $\mathcal{E}ll_{X,D,I,x}^{\geq h}$ sont non vides, purement de dimension $d - h$ et lisses sur $\kappa(x)$ si $x \notin V(I)$.*

Preuve : Pour tout h , $\mathcal{E}ll_{X,D,I,x}^{\geq h}$ contient $\mathcal{E}ll_{X,D,I,x}^{\geq d}$ qui est non vide d'après la proposition précédente. Soient alors z un point géométrique de $\mathcal{E}ll_{X,D,I,x}^{\geq h}$ et $h' \geq h$ tel que z appartient à $\mathcal{E}ll_{X,D,I,x}^{=h'}$. D'après la proposition 3.1.2, l'anneau local $(\widehat{\mathcal{E}ll_{X,D,I,x}^{\geq h}})_z$ est isomorphe à $\text{Spec}(E_n^{h',d-h',\geq h})$ où n est la multiplicité de x dans I . L'anneau $E_n^{h',d-h',\geq h}$ est de dimension $d - h$, d'où la proposition. $\square$

5.3 Description adélique des points supersinguliers suivant leur (D, ∞, o) -type: rappels.

On commence par citer une proposition dont on pourra trouver la preuve dans [23] (proposition (B.10)).

Proposition 5.3.1 *Supposons que (V_x, φ_x) est un F_x -module de Dieudonné isomorphe à $(N_{x,d,1}, \varphi_{x,d,1})$, c'est-à-dire*

$$N_{x,d,1} = (F_x \hat{\otimes}_{\kappa(x)} \bar{\kappa}(o))^d \quad \varphi_{x,d,1}(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & i = 1, \dots, d-1 \\ \pi_x e_1 & i = d \end{cases}$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est la base canonique de $N_{x,d,1}$. L'ensemble des réseaux M de V_x tels que

$$\varphi_x(M) \subset M \quad (\text{resp. } M \subset \varphi_x(M))$$

est un espace principal homogène sur $\mathbb{Z}$ où un élément m de $\mathbb{Z}$ agit par

$$M \mapsto \varphi_x^m(M).$$

De plus tout réseau de cet ensemble vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x^n(M) \subset \pi_x M \\ \dim_{\bar{\kappa}(o)}(M/\varphi_x(M)) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{resp. } \left\{ \begin{array}{l} M \subset \pi_x \varphi_x^n(M) \\ \dim_{\bar{\kappa}(o)}(\varphi_x(M)/M) = 1 \end{array} \right.)$$

pour toute uniformisante π_x de $\mathcal{O}_x$ et pour un certain entier n .

Remarque : L'action naturelle du groupe multiplicatif de $\text{End}(V_x, \varphi_x)$ sur l'ensemble des réseaux M de V_x tels que

$$\varphi_x(M) \subset M \quad (\text{resp. } M \subset \varphi_x(M))$$

peut être décrite de la manière suivante. On a un homomorphisme de groupe

$$\begin{aligned} \text{End}(V_x, \varphi_x)^\times &\xrightarrow{\text{rn}} F_x^{\times \deg(x)x(-)} \mathbb{Z}, \\ (\text{resp. } \text{End}(V_x, \varphi_x)^\times &\xrightarrow{\text{rn}} F_x^{\times -\deg(x)x(-)} \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

où rn est la norme réduite. Un élément δ de $\text{End}(V_x, \varphi_x)^\times$ envoie le réseau M sur le réseau $\varphi_x^m(M)$ où

$$m = \deg(x)x(\text{rn}(\delta)) \quad (\text{rep. } m = -\deg(x)x(\text{rn}(\delta))).$$

Soit (V, φ, λ) un φ -espace muni d'une action de D qui a pour (D, ∞, o) -type, $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ et soit $\Delta = \text{End}(V, \varphi, \lambda)$. On note $\mathcal{Y}_x$ l'ensemble des $\mathcal{D}_x$ -réseaux de $V_x : = F_x \hat{\otimes}_F V$ qui satisfont la propriété 5.1.2 (i) si $x = \infty$, 5.1.2 (ii) si $x = o$ et 5.1.2 (iii) si $x \neq \infty, o$. Soit

$$\mathcal{Y}_0^{\infty, o} \subset \prod_{x \neq o, \infty} \mathcal{Y}_x$$

l'ensemble des familles de réseaux qui satisfont la condition supplémentaire 5.1.2 (iv). On a une action naturelle de $\Delta^\times$ sur l'ensemble

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{A}, 0} : = \mathcal{Y}_\infty \times \mathcal{Y}_0^{\infty, o} \times \mathcal{Y}_o,$$

et d'après le théorème 5.1.7, on a une bijection naturelle

$$\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, o}(\bar{\kappa}(o))_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})} \xrightarrow{\sim} \Delta^\times \backslash \mathcal{Y}_{\mathbb{A}, 0}.$$

Les auteurs de [23] donnent une description plus explicite que l'on rappelle ci-après dans le cas $h = d$ (points supersinguliers):

- l'algèbre Δ vérifie les propriétés du corollaire 5.1.5 avec $h = d$;
- soit $(M_x \subset V_x)_{x \neq \infty, o}$ un point base de $\mathcal{Y}_0^{\infty, o}$. On considère alors le produit restreint $(V^{\infty, o}, \varphi^{\infty, o})$ des (V_x, φ_x) par rapport aux M_x pour $x \neq \infty, o$. D'après la propriété 5.1.2 (iv) ce produit restreint est indépendant du choix du point base et d'après la propriété 5.1.2 (iii), l'application canonique

$$(V^{\infty, o})^{\varphi^{\infty, o}} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o) \longrightarrow V^{\infty, o}$$

est bijective. Clairement, $(V^{\infty, o})^{\varphi^{\infty, o}}$ est un $D^{\infty, o}$ -module à droite libre de rang 1, on en fixe une base. On obtient de cette façon une action à gauche de $(D^{\infty, o})^\times$ sur $\mathcal{Y}_0^{\infty, o}$ qui est transitive, d'où un isomorphisme

$$\mathcal{Y}_0^{\infty, o} \xrightarrow{\sim} (D^{\infty, o})^\times / (\mathcal{D}^{\infty, o})^\times;$$

$\Delta^\times$ agit à gauche sur cet ensemble via l'inclusion $\Delta^\times \hookrightarrow (D^{\infty, o})^\times$ que l'on obtient en identifiant $\mathbb{A}^{\infty, o} \otimes_F \Delta^\times$ au centralisateur de $\mathbb{A}^{\infty, o} \otimes_F \tilde{F} \hookrightarrow D^{\infty, o}$;

- on a une décomposition de Morita

$$(V_\infty, \varphi_\infty) = (V'_\infty, \varphi'_\infty)^d$$

et $\mathcal{Y}_\infty$ s'identifie à l'ensemble des réseaux M'_∞ de V'_∞ tels que

$$\begin{cases} M'_\infty \subset \varphi'_\infty(M'_\infty) \\ (\varphi'_\infty)^d(M'_\infty) = \pi_\infty^{-1} M'_\infty \\ \dim_{\bar{\kappa}(o)}(\varphi'_\infty(M'_\infty)/M'_\infty) = 1 \end{cases}$$

(par hypothèse $\deg(\infty) = 1$). D'après la proposition 5.3.1, l'ensemble $\mathcal{Y}_\infty$ est un ensemble principal homogène sous l'action de $\mathbb{Z}$ (un élément m de $\mathbb{Z}$ envoie M'_∞ sur $\varphi_\infty^m(M'_\infty)$),

$$\mathcal{Y}_\infty \simeq \mathbb{Z}$$

et $\Delta^\times$ y agit par l'application composée

$$\Delta^\times \xrightarrow{\text{m}} F_\infty^\times \xrightarrow{-\infty(-)} \mathbb{Z};$$

- on a à nouveau une équivalence de Morita $(V_o, \varphi_o) = (V'_o, \varphi'_o)^d$ et on identifie $\mathcal{Y}_o$ à l'ensemble des réseaux M'_o de V'_o tels que

$$\begin{cases} \pi_o M'_o \subset \varphi'_o(M'_o) \subset M'_o \\ \dim_{\bar{\kappa}(o)}(M'_o/\varphi'_o(M'_o)) = 1 \end{cases}$$

où le support de $M'_o/\varphi'_o(M'_o)$ est la composante connexe de

$$\text{Spec}(\kappa(o) \otimes \bar{\kappa}(o)) \subset \text{Spec}(\mathcal{O}_o \otimes \bar{\kappa}(o))$$

qui correspond à l'inclusion $\kappa(o) \hookrightarrow \bar{\kappa}(o)$. D'après la proposition 5.3.1, l'ensemble $\mathcal{Y}_o$ est alors un espace principal homogène sous $\mathbb{Z}$ où un élément m de $\mathbb{Z}$ envoie M'_o sur $(\varphi'_o)^{m \cdot \deg(o)}(M'_o)$ (le terme $\deg(o)$ provient de la condition sur le support). Ainsi $\Delta^\times$ agit sur $\mathcal{Y}_o$ par l'application composée

$$\Delta^\times \xrightarrow{\text{m}} F_o^\times \xrightarrow{o(-)} \mathbb{Z}.$$

Finalement pour un (D, ∞, o) -type de points supersinguliers ($h = d$), on a la description ensembliste

$$\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, o}(\bar{\kappa}(o))_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})} \xrightarrow{\sim} \Delta^\times \backslash Y_{\mathbb{A}}$$

où l'on a posé

$$Y_{\mathbb{A}} = ((D^{\infty, o})^\times / (\mathcal{D}^{\infty, o})^\times) \times \mathcal{Y}_\infty \times \mathcal{Y}_o.$$

A niveau fini, si I est un idéal de A , on a

$$\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, I, o}(\bar{\kappa}(o))_{(\tilde{F}, \tilde{\Pi})} \xrightarrow{\sim} \Delta^\times \backslash Y_{\mathbb{A}, I},$$

où l'on a posé

$$Y_{\mathbb{A}, I} = ((D^{\infty, o})^\times / K_I^{\infty, o}) \times \mathcal{Y}_\infty \times \mathcal{Y}_o.$$

5.4 Unicité du (D, ∞, o) -type des points supersinguliers.

Dans la preuve de la proposition 5.2.1, on a construit un (D, ∞, o) -type correspondant à des points supersinguliers. Le but de cette section est de montrer qu'à isomorphisme près ce couple est unique.

Proposition 5.4.1 *Tous les points supersinguliers sont dans une même classe d'isogénie.*

Preuve : Soit $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ un (D, ∞, o) -type d'un point supersingulier. D'après 5.1.4, la φ -paire $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ vérifie les propriétés suivantes:

- (i) $\tilde{F}$ est un corps et $[\tilde{F} : F]$ divise d ;
- (ii) $F_\infty \otimes_F \tilde{F}$ est un corps et si ∞ est l'unique place de $\tilde{F}$ divisant ∞ , on a $\deg(\infty)\tilde{\infty}(\tilde{\Pi}) = -[\tilde{F} : F]/d$;
- (iii) $F_o \otimes_F \tilde{F}$ est un corps et si $\tilde{o}$ est l'unique place de $\tilde{F}$ divisant o , on a $\deg(\tilde{o})\tilde{o}(\tilde{\Pi}) = [\tilde{F} : F]/d$ et $\tilde{o}$ est l'unique place $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$ telle que $\tilde{x}(\tilde{\Pi}) \neq 0$;
- (iv) pour toute place x de F et toute place $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$ divisant x , on a

$$(d[\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x]/[\tilde{F} : F]) \operatorname{inv}_x(D) \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi on peut considérer $\tilde{F}$ comme une F -sous-algèbre de $\bar{D}$. En outre d'après le corollaire 5.1.5 l'algèbre Δ associée au (D, ∞, o) -type, $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$, est une algèbre à division centrale sur $\tilde{F}$ de dimension $(d/[\tilde{F} : F])^2$ dont les invariants sont donnés comme suit

$$\operatorname{inv}_{\tilde{x}}(\operatorname{End}(V, \varphi, \lambda)) = \begin{cases} [\tilde{F} : F]/d & \text{si } \tilde{x} = \infty \\ -[\tilde{F} : F]/d & \text{si } \tilde{x} = \tilde{o} \\ [\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x] \operatorname{inv}_x(D) & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout place x de F et toute place $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$ divisant x . Ainsi on peut identifier Δ au centralisateur de $\tilde{F}$ dans $\bar{D}$. Montrons que $\tilde{F} = F$ et donc que $\Delta = \bar{D}$. Pour cela on rappelle les lemmes suivant sur les φ -paires.

Lemme 5.4.2 *Si $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ est une φ -paire et si N est un entier non nul tel que $\tilde{\Pi}^N \in \tilde{F}^\times$, alors $\tilde{F} = F[\tilde{\Pi}^N]$.*

Preuve : Soit $F' = F[\tilde{\Pi}^N] \subset \tilde{F}$, alors $\tilde{\Pi} \in F'^\times \otimes \mathbb{Q}$, d'où $\tilde{F} = F'$. □

Lemme 5.4.3 *Si $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ est une φ -paire, alors $\tilde{F}$ est une F -algèbre étale.*

Preuve : Il suffit de vérifier que $\tilde{F} = F[\tilde{F}^p]$. Si on pose $F' = F[\tilde{F}^p]$ alors F' est une F -sous-algèbre de $\tilde{F}$ et $\tilde{\Pi}^p \in F'^{\times} \otimes \mathbb{Q}$ et $\tilde{\Pi} \in F'^{\times} \otimes \mathbb{Q}$, d'où $F' = \tilde{F}$. $\square$

fin de la preuve de la proposition: Soit σ un F -automorphisme de $\tilde{F}$ et soit N un entier tel que $\tilde{\Pi}^N$ appartient à $\tilde{F}^{\times}$. Comme $\tilde{o}$ et $\tilde{\infty}$ sont les seules places $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$ telles que $\tilde{x}(\tilde{\Pi}^N) \neq 0$ et comme $\sigma(\tilde{\infty}) = \tilde{\infty}$ et $\sigma(\tilde{o}) = \tilde{o}$, les éléments $\tilde{\Pi}^N$ et $\sigma(\tilde{\Pi}^N)$ de $\tilde{F}^{\times}$ ont les mêmes valuations en toutes les places $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$. Ainsi $\tilde{\Pi}^N/\sigma(\tilde{\Pi}^N)$ appartient à $\mathbb{F}_q^{\times}$ et est une racine de l'unité. Il existe donc un entier $N' \geq N$ tel que $\tilde{\Pi}^{N'} = \sigma(\tilde{\Pi}^{N'})$. Or d'après le lemme précédent on a $\tilde{F} = F[\tilde{\Pi}^N] = F[\tilde{\Pi}^{N'}]$, d'où σ est l'identité. L'extension $\tilde{F}/F$ étant séparable, on en déduit $\tilde{F} = F$. $\square$

Finalement pour tout idéal I de A , $\mathcal{E}l_{X,\mathcal{D},I,o}^d(\bar{\kappa}(o))$ est en bijection avec le quotient

$$\bar{D}^{\times} \setminus [(\bar{D}^{\infty,o})^{\times} / K_I^{\infty,o} \times \mathcal{Y}_{\infty} \times \mathcal{Y}_o].$$

5.5 Description des actions de l'algèbre de Hecke, de $\mathbb{Z}$ et du Frobenius.

Nous avons montré précédemment que les correspondances géométriques associées aux éléments de l'algèbre de Hecke de $(D^{\infty})^{\times}$, agissent sur l'ensemble des points supersinguliers. Le but de ce paragraphe est de décrire ces actions dans la description ensembliste du paragraphe précédent.

- Un élément n de $\mathbb{Z}$ agit sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ par translation sur les indices i (cf. le paragraphe 1.5 du chapitre 2). Ainsi l'image d'un élément

$$((V, \varphi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|}, (\alpha_x)_{x \in |X| \setminus \{\infty\}})$$

de $Y_{\mathbb{A},I}$ sous l'action de n est

$$((V, \varphi, \lambda), (\varphi_{\infty}^n(M_{\infty}), (M_x)_{x \in |X| \setminus \{\infty\}}, (\alpha_x)_{x \in |X|}).$$

Dans la description adélique

$$\mathcal{E}l_{X,\mathcal{D},I,o}^d(\bar{\kappa}(o)) \simeq \bar{D}^{\times} \setminus [(\bar{D}^{\infty,o})^{\times} / K_I^{\infty,o} \times \mathcal{Y}_{\infty} \times \mathcal{Y}_o],$$

un élément m de $\mathbb{Z}$ y opère par translation de valeur m sur la composante $\mathcal{Y}_{\infty} \simeq \mathbb{Z}$.

- De la même façon, le Frobenius géométrique en o envoie

$$((V, \varphi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|}, (\alpha_x)_{x \in |X| \setminus \{\infty\}})$$

sur

$$((V, \varphi, \lambda), (M'_x)_{x \in |X|}, (\alpha'_x)_{x \in |X| \setminus \{\infty\}})$$

avec

$$(M'_x, \alpha'_x) = \begin{cases} (M_x, \alpha_x) & \forall x \neq \infty, o \\ (\varphi_o^{\deg(o)}(M_o), \varphi_o^{\deg(o)} \alpha_o) & x = o \end{cases}$$

et $M'_\infty = \varphi_\infty^{\deg(o)}(M_\infty)$. Dans la description adélique de $\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, I, o}^{\bar{d}}(\bar{\kappa}(o))$ précédente, le Frobenius géométrique en o y agit par la translation de vecteur $(\deg(o), 1)$ sur le facteur $\mathcal{Y}_\infty \times \mathcal{Y}_o$.

- Soient I un idéal de A et y un élément de $V(I)$ distinct de o , de multiplicité n'_y dans I . Soient g_y un élément de $D_y^\times \cap \mathcal{D}_y$ et J un idéal de A tel que

$$K_J^{\infty, o} \subset K_I^{\infty, o} \cap g_y K_I^{\infty, o} g_y^{-1}.$$

On note n_y la multiplicité de y dans J . La correspondance de Hecke

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, J, o} & \\ c_1 \swarrow & & \searrow c_2 \\ \mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, I, o} & & \mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, I, o} \end{array}$$

associée à g_y^{-1} (cf. le paragraphe 3.4.2 du chapitre 2) se décrit comme suit au niveau des points supersinguliers. Soit $((V, \varphi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|}, (\alpha_x)_{x \in V(J)})$ un élément de $\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, J, o}^{\bar{d}}(\bar{\kappa}(o))$. On a un isomorphisme

$$\alpha_y : \mathcal{D}_{y, n_y} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_y^{n_y} M_y^{\varphi_y} \backslash M_y^{\varphi_y}.$$

A l'élément g_y^{-1} qui opère sur $\mathcal{D}_{y, n_y}$ par multiplication à droite par g_y , est associé une application $[g_y] : V_y \longrightarrow V_y$ telle que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{y, n_y} & \xrightarrow{\alpha_y} & \mathfrak{m}_y^{n_y} M_y^{\varphi_y} \backslash M_y^{\varphi_y} \\ g_y \downarrow & & \downarrow [g_y] \\ \mathcal{D}_{y, n_y} & \xrightarrow{\alpha_y} & \mathfrak{m}_y^{n_y} M_y^{\varphi_y} \backslash M_y^{\varphi_y}. \end{array}$$

L'image $c_2(((V, \varphi, \lambda), (M_x)_{x \in |X|}, (\alpha_x)_{x \in V(J)}))$ est le triplet

$$((V, \varphi, \lambda), (M'_x)_{x \in |X|}, (\alpha'_x)_{x \in V(J)})$$

défini comme suit. Pour $x \neq y$, on a $M'_x = M_x$ et $\alpha'_x = \alpha_x$ et pour y , M'_y est l'image $[g_y](M_y)$ et α'_y est donnée par la composée

$$\mathcal{D}_{y, n'_y} \xrightarrow{g_y} \mathcal{D}_{y, n'_y} \longrightarrow \mathfrak{m}_y^{n'_y} M'_y{}^{\varphi_y} \backslash M'_y{}^{\varphi_y}$$

où la deuxième application est la restriction de α_y à $\mathcal{D}_{y, n'_y}$. En termes de la description adélique du paragraphe précédent, cette correspondance s'écrit

$$\begin{array}{ccc} \bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}^{\infty, o})^\times / K_J^{\infty, o} \times \mathcal{Y}_\infty \times \mathcal{Y}_o] & & \\ \downarrow c_1 & \searrow c_2 & \\ \bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}^{\infty, o})^\times / K_I^{\infty, o} \times \mathcal{Y}_\infty \times \mathcal{Y}_o] & & \bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}^{\infty, o})^\times / K_I^{\infty, o} \times \mathcal{Y}_\infty \times \mathcal{Y}_o] \end{array}$$

où c_1 est induit par l'inclusion $K_J^{\infty,o} \subset K_I^{\infty,o}$ et c_2 est induit par la multiplication à droite de g_y sur $D_y^\times$.

- Pour tout idéal I de A , l'action d'un élément g_o de $GL_d(F_o)$ sur $\bar{D}^\times \backslash \mathcal{Y}_{\mathbb{A}_I}^\infty$ est donnée par son action sur $\mathcal{Y}_o \simeq \mathbb{Z}$. Le groupe $PSL_d(F_o)$ étant simple, l'endomorphisme de $\mathbb{Z}$ associé à g_o est la translation de valeur $-k \cdot \text{val}(\det(g_o))$, pour un certain entier k . De plus si g_o est l'élément du centre π_o , alors d'après la $\mathcal{O}_o$ -linéarité de la structure de niveau, on a $[\pi_o](M'_o) = M'_o \pi_o^{-1}$, d'où $k = 1$.

En définitive, pour tout idéal I de A , $\text{Sing}_I(\bar{\kappa}(o)) := (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\bar{d}}/\mathbb{Z})(\bar{\kappa}(o))$ est en bijection avec le quotient

$$\bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}^{\infty,o})^\times / K_I^{\infty,o} \times \mathbb{Z}],$$

le Frobenius géométrique en o agissant par la translation de vecteur 1 sur la composante $\mathbb{Z}$.

La correspondance de Hecke associée à un élément g^∞ de $(D^\infty)^\times$

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J,o}^{\bar{d}}/\mathbb{Z})(\bar{\kappa}(o)) & \\ c_1 \swarrow & & \searrow c_2 \\ (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\bar{d}}/\mathbb{Z})(\bar{\kappa}(o)) & \longleftarrow & (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\bar{d}}/\mathbb{Z})(\bar{\kappa}(o)) \end{array}$$

où J est un idéal de A tel que $K_J^{\infty,o} \subset K_I^{\infty,o} \cap (g^{\infty,o})^{-1} K_I^{\infty,o} g^{\infty,o}$, induit une correspondance

$$\begin{array}{ccc} \bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}^{\infty,o})^\times / K_J^{\infty,o} \times \mathbb{Z}] & & \\ c_1 \downarrow & \searrow c_2 & \\ \bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}^{\infty,o})^\times / K_I^{\infty,o} \times \mathbb{Z}] & \longleftarrow & \bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}^{\infty,o})^\times / K_I^{\infty,o} \times \mathbb{Z}] \end{array}$$

où c_1 est induit par l'inclusion $K_J^{\infty,o} \subset K_I^{\infty,o}$ et c_2 est induit par la multiplication à droite de $(g^{\infty,o})^{-1}$ sur $(D^{\infty,o})^\times$ et la translation de valeur $-\text{val}(\det(g_o))$ sur $\mathbb{Z}$.

En passant à la limite sur tous les idéaux I de A , $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},o}^{\bar{d}}/\mathbb{Z})(\bar{\kappa}(o))$, que l'on note $\text{Sing}(\bar{\kappa}(o))$, est alors isomorphe au quotient

$$\bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}^{\infty,o})^\times / (\mathcal{D}^{\infty,o})^\times \times \mathbb{Z}],$$

l'action d'un élément g^∞ de $(D^{\infty,o})^\times$ étant donnée par la multiplication à droite de $(g^{\infty,o})^{-1}$ sur $(D^{\infty,o})^\times$ et par la translation de valeur $-\text{val}(\det(g_o))$ sur la composante $\mathbb{Z}$.

Chapitre 4

Preuve de la conjecture de Deligne-Carayol.

Afin de prouver la conjecture de Deligne-Carayol (cf. le théorème 4.1), on fixe un corps global F et *deux places ∞, o de F rationnelles sur le corps des constantes $\mathbb{F}_q$ de X , telles que F_o est isomorphe au corps local F du premier chapitre.* On choisit comme au paragraphe 1.1 du chapitre 2, une algèbre à division centrale D sur F de dimension finie d^2 dont les invariants sont donnés comme suit:

$$\text{inv}_x(D) = \begin{cases} 1/d & x = x_1 \\ -1/d & x = x_2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où x_1 et x_2 sont deux places de F distinctes des places ∞, o ($\text{Bad} = \{x_1, x_2\}$). Soit $\mathcal{D}$ un faisceau d'ordres maximaux de D sur le modèle projectif lisse X de F . On fixe deux places x_3, x_4 de F distinctes des places ∞, o, x_1, x_2 . Dans la suite I désignera un idéal de $A = \Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}_X)$ variable mais tel que $V(I)$ contient les places x_3 et x_4 .

Nous allons dans un premier temps énoncer le résultat de [23] qui décrit la cohomologie de la fibre générique des schémas de modules $(\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, I}/\mathbb{Z})$. A partir de ce résultat de nature globale, nous étudierons la cohomologie des cycles proches associée à la spécialisation de $(\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, I}/\mathbb{Z})$ en o , notamment lorsque $o \in V(I)$. Nous montrerons que la représentation locale fondamentale introduite au premier chapitre, intervient dans ces cycles proches et que le résultat global de [23] permet de décrire sa partie cuspidale.

1 La catégorie $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ des représentations admissibles de $(D^\infty)^\times \times \Gamma_o$.

Dans le premier chapitre, on a introduit pour un corps local F , la catégorie $C_{GL, \Gamma}$ des représentations admissibles de $GL_h(F) \times \Gamma$ au sens de la définition

1.3, où Γ désigne le groupe de Weil de F . A cette catégorie $C_{GL,\Gamma}$ correspond le groupe $K_{GL,\Gamma}$ dont la description est donnée dans la proposition 1.6.2 du premier chapitre. De manière analogue, pour le corps global F , on introduit la catégorie $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ des représentations admissibles de $(D^\infty)^\times \times \Gamma_o$ où Γ_o désigne le groupe de weil de F_o . On note $K_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ le groupe associé à cette catégorie.

Proposition 1.1 *Le groupe $K_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ est isomorphe au groupe abélien des sommes formelles*

$$\sum_{\tau^\infty \in \mathcal{T}_{2, glob}^\infty, \sigma_o \in \mathcal{T}_{1, o}} \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o} [\tau^\infty \otimes \sigma_o]$$

où $\mathcal{T}_{1, o}$ désigne l'ensemble des représentations continues, irréductibles de Γ_o , $\mathcal{T}_{2, glob}^\infty$ est l'ensemble des représentations admissibles, irréductibles de $(D^\infty)^\times$ et $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}$ décrit l'ensemble des familles d'entiers telles que pour tout sous-groupe compact ouvert K de $(D^\infty)^\times$, il n'y ait qu'un nombre fini de couples $(\tau^\infty, \sigma_o) \in \mathcal{T}_{2, glob}^\infty \times \mathcal{T}_{1, o}$, pour lesquels $(\tau^\infty \otimes \sigma_o)^K \neq (0)$ et $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o} \neq 0$.

Avec les notations du premier chapitre ($D_o^\times \simeq GL_d(F_o)$), on a un foncteur $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o} \longrightarrow C_{GL,\Gamma}$. Pour un objet M de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$, π_o une représentation admissible irréductible de $GL_d(F_o)$ et σ_o une représentation l -adique irréductible de Γ_o , on notera $\lambda_{\pi_o \otimes \sigma_o}(M)$, la multiplicité dans $K_{GL,\Gamma}$ associée à l'image de M dans la catégorie $C_{GL,\Gamma}$. On a alors l'égalité numérique

$$\lambda_{\pi_o \otimes \sigma_o}(M) = \sum_{\Pi^\infty \in \mathcal{A}_{glob}^\infty(\pi_o)} \lambda_{\Pi^\infty \otimes \sigma_o}(M), \quad (1.2)$$

où $\mathcal{A}_{glob}^\infty(\pi_o)$ est l'ensemble des représentations admissibles irréductibles Π^∞ de $(D^\infty)^\times$ telles que $(\Pi^\infty)_o \simeq \pi_o$. En particulier si $\lambda_{\pi_o \otimes \sigma_o}(M)$ est nul alors $\lambda_{\Pi^\infty \otimes \sigma_o}(M)$ est nul pour tout élément Π^∞ de $\mathcal{A}_{glob}^\infty(\pi_o)$.

2 Correspondance locale de Langlands d'après Laumon-Rapoport-Stuhler.

Soient $\eta = \text{Spec } F$ le point générique de X et $\bar{F}$ une clôture algébrique de F . On considère les groupes de cohomologie l -adique

$$H_{\eta, I}^n = H^n((\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, I}/\mathbb{Z}) \times_{X'} \text{Spec } \bar{F}, \bar{\mathbb{Q}}_l).$$

Pour tout entier n , $H_{\eta, I}^n$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel de dimension finie qui possède une $\mathbb{Q}_l$ -structure. En fait les $H_{\eta, I}^n$ sont nuls sauf pour $0 \leq n \leq 2d - 2$. Sur chaque $H_{\eta, I}^n$, on a une action de $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ qui est définie sur $\mathbb{Q}_l$ et qui est continue pour la topologie de Krull sur $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ et la topologie l -adique sur $H_{\eta, I}^n$. On choisit une clôture algébrique $\bar{F}_o$ de F_o contenant $\bar{F}$ et on considère un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{F} & \subset & \bar{F}_o & \supset & \bar{\mathcal{O}}_o & \rightarrow & \bar{\kappa}(o) \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ F & \subset & F_o & \supset & \mathcal{O}_o & \rightarrow & \kappa(o) \end{array}$$

où $\bar{\mathcal{O}}_o$ est la normalisation de $\mathcal{O}_o$ dans $\bar{F}_o$ et $\bar{\kappa}(o)$ est le corps résiduel de $\bar{\mathcal{O}}_o$. On note

$$H_{\eta_o, I}^n := H^n((\mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}, I}/\mathbb{Z}) \times_{X'} \text{Spec } \bar{F}_o, \bar{\mathbb{Q}}_l).$$

D'après le théorème de changement de base propre, on a, pour tout n , un isomorphisme canonique de $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espaces vectoriels

$$H_{\eta, I}^n \simeq H_{\eta_o, I}^n$$

qui est compatible à l'action de $\text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{Gal}(\bar{F}_o/F_o)$.

Soit g^∞ un élément de $(D^\infty)^\times$, la correspondance de Hecke (cf. le paragraphe 3.4.2 du chapitre 2) qui lui est associée

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}}/(\mathbb{Z} \times (K_I^\infty \cap g^{\infty, -1} K_I^\infty g^\infty)) & & \\ \downarrow c_1 & \searrow c_2 & \\ \mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}}/(\mathbb{Z} \times K_I^\infty) & \rightarrow & \mathcal{E}ll_{X, \mathcal{D}}/(\mathbb{Z} \times K_I^\infty) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X' \end{array}$$

définit des actions compatibles de $\mathcal{H}_I^\infty$ sur $H_{\eta, I}^n$ et sur $H_{\eta_o, I}^n$, définies sur $\mathbb{Q}$ et qui commutent aux actions des groupes de Galois. On considère les limites directes

$$H_\eta^n := \varinjlim_I H_{\eta, I}^n \text{ et } H_{\eta_o}^n := \varinjlim_I H_{\eta_o, I}^n,$$

où la limite est prise sur tous les idéaux stricts I de A tels que $V(I)$ contienne les places x_3, x_4 et où les morphismes de transition sont induits par les morphismes

de restriction du niveau $r_{J,I}$. Ces $\bar{\mathbb{Q}}$ -espaces vectoriels $H_\eta^n \simeq H_{\eta_o}^n$ sont alors munis d'actions compatibles de $(D^\infty)^\times$. Les morphismes de transitions étant injectifs, pour tout idéal I , on considère respectivement $H_{\eta,I}^n$ et $H_{\eta_o,I}^n$ comme des sous-espaces vectoriels de H_η^n et $H_{\eta_o}^n$. On a ainsi

$$H_{\eta,I}^n = (H_\eta^n)^{K_I^\infty} \quad H_{\eta_o,I}^n = (H_{\eta_o}^n)^{K_I^\infty},$$

où respectivement l'action de $\mathcal{H}_I^\infty$ sur $H_{\eta,I}^n$ et $H_{\eta_o,I}^n$, coïncide avec l'action induite de $\mathcal{H}_I^\infty$ sur les vecteurs de H_η^n et $H_{\eta_o}^n$ invariants sous K_I^∞ .

Dans la suite, on remplacera l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{F}_o/F_o)$ sur $H_{\eta_o,I}^n$ par l'action du groupe de Weil Γ_o . Comme $H_{\eta_o,I}^n$ est de dimension finie, on en déduit le lemme suivant.

Lemme 2.1 *La représentation $H_{\eta_o}^n$ de $(D^\infty)^\times \times \Gamma_o$ est un objet de la catégorie $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$.*

On note $[H_{\eta_o}^n]$ l'image de $H_{\eta_o}^n$ dans le groupe $K_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ et pour $\tau^\infty \in \mathcal{T}_{2, \text{glob}}^\infty$ et $\sigma_o \in \mathcal{T}_{1, o}$, soit $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^n)$ la multiplicité de $\tau^\infty \otimes \sigma_o$ dans $H_{\eta_o}^n$.

Soit St_∞ la représentation de Steinberg de $D_\infty^\times$.

Théorème 2.2 ([23]) *Si τ^∞ est une représentation admissible, irréductible de D^∞ , de dimension infinie, pour laquelle il existe un entier n et une représentation σ_o , continue, irréductible de Γ_o telle que $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^n) \neq (0)$ alors $n = d - 1$ et $St_\infty \otimes \tau^\infty$ est une représentation automorphe de $D_\mathbb{A}^\times / \pi_\infty^\mathbb{Z}$.*

Soit π_o une représentation irréductible, cuspidale de $GL_d(F_o)$, de caractère central d'ordre fini. On rappelle le lemme suivant de [23] dont nous avons fait mention au paragraphe 2.1 du premier chapitre.

Lemme 2.3 (cf. [23]) *Il existe une sous-représentation cuspidale Π de*

$$L_{\text{cusp}}(GL_d(F)F_\infty^\times \backslash GL_d(\mathbb{A})),$$

telle que $\Pi_\infty \simeq St_\infty$, $\Pi_o \simeq \pi_o$, et Π_{x_i} est cuspidale, irréductible, admissible pour $i = 1, \dots, 4$.

Proposition 2.4 (cf. [18]) *Soit Π un élément de $L_{\text{cusp}}(GL_d(F)F_\infty^\times \backslash GL_d(\mathbb{A}))$ vérifiant les hypothèses du lemme ci-dessus. Il existe alors un et un seul à isomorphisme près, élément τ de $L(D^\times F_\infty^\times \backslash D_\mathbb{A}^\times)$ tel que*

$$\tau_y \simeq \Pi_y \quad \forall y \neq x_1, x_2.$$

De plus la multiplicité $m(\tau)$ de τ dans $L(D^\times F_\infty^\times \backslash D_\mathbb{A}^\times)$ est égale à 1.

Théorème 2.5 (cf. [23]) *Soit τ comme dans la proposition ci-dessus. On a alors*

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^{d-1}) = \begin{cases} 0 & \sigma_o \neq \mathfrak{L}_{d, F_o}(\pi_o) \\ 1 & \sigma_o = \mathfrak{L}_{d, F_o}(\pi_o), \end{cases}$$

où $\mathfrak{L}_{d, F_o}$ désigne la correspondance locale de Langlands (cf. paragraphe 2.2 du premier chapitre).

3 Les cycles proches pour $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$.

Dans la suite on notera $\mathcal{M}_I$ le schéma $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}) \times_{X'} \text{Spec } \mathcal{O}_o$. Comme précédemment, $\mathcal{M}_{I,o}$ désigne la fibre en o de $\mathcal{M}_I$ et on note $\mathcal{M}_{I,\bar{o}} := \mathcal{M}_{I,o} \otimes_{\kappa(o)} \bar{\kappa}(o)$.

3.1 Rappels sur les cycles proches.

Pour tout ce qui concerne ces rappels, on se référera à [32]. Pour tout idéal I ($\{x_3, x_4\} \subset V(I)$), les schémas $\mathcal{M}_I$ sont de type fini et propres sur $\text{Spec } \mathcal{O}_o$. On considère le complexe des cycles proches (resp. des cycles évanescents) $R\Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)$ (resp. $R\Phi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)$) sur $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}$, muni de son action de Γ_o qui relève l'action du Frobenius en o sur $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}$.

Propriétés des $R^i\Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)$:

- pour tout i , les faisceaux $R^i\Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)$ et $R^i\Phi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)$ appartiennent à $D_c^b(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}, \bar{\mathbb{Q}}_l)$;
- si o n'appartient pas à $V(I)$, $\mathcal{M}_I$ est lisse sur $\text{Spec } \mathcal{O}_o$ et donc les $R^i\Phi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)$ sont tous nuls;
- pour tout point géométrique $\bar{z}$ de $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}$, la fibre de $R^i\Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)$ en ce point, est égale à

$$H^i(\mathcal{M}_{I,(\bar{z})} \otimes_{F_o^{nr}} \bar{F}_o, \bar{\mathbb{Q}}_l),$$

où $\mathcal{M}_{I,(\bar{z})}$ est l' hensélisé strict de $\mathcal{M}_I$ en $\bar{z}$.

- Pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq d$, on a

$$\dim \text{Supp } R^i\Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l) \leq d - 1 - i.$$

On note $\widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{z})}}$ le complété de $\mathcal{M}_{I,(\bar{z})}$.

Lemme 3.1.1 (*Berkovich cf. [1]*) *Pour tout entier i et tout point géométrique $\bar{z}$ de $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}$, le morphisme de restriction*

$$H^i(\mathcal{M}_{I,(\bar{z})} \otimes_{F_o^{nr}} \bar{F}_o, \bar{\mathbb{Q}}_l) \longrightarrow H^i(\widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{z})}} \otimes_{F_o^{nr}} \bar{F}_o, \bar{\mathbb{Q}}_l)$$

est un isomorphisme

On pose

$$EV_{o,I}^i := \mathbb{H}^i(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}, R\Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)).$$

Le morphisme de schéma $\mathcal{M}_I \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_o$ étant propre, on en déduit un isomorphisme Γ_o -équivariant

$$H_{\eta_o,I}^i \simeq EV_{o,I}^i \tag{3.1.2}$$

Les $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espaces vectoriels $EV_{o,I}^i$ sont munis d'une action de $\mathcal{H}_I^\infty$ que l'on définit comme suit. Si $(\mathcal{M}_J, c_1, c_2)$ est une correspondance géométrique sur $\mathcal{M}_I$ associée à un élément de $\mathcal{H}_I^\infty$, on rappelle qu'alors c_1 et c_2 sont finis et la correspondance cohomologique associée est définie par la composée des trois applications ci-dessous obtenues d'après les propriétés de fonctorialité de $R\Psi_{\eta_o}$:

- $c_1^* R\Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l) \longrightarrow R\Psi_{\eta_o}(c_1^*(\bar{\mathbb{Q}}_l))$, par changement de base;
- $R\Psi_{\eta_o}(c_1^*(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \longrightarrow R\psi_{\eta_o}(c_2^!(\bar{\mathbb{Q}}_l))$, que l'on obtient par fonctorialité de $R\Psi_{\eta_o}$ à partir de l'adjointe de la flèche

$$\bar{\mathbb{Q}}_l \longrightarrow c_{1,*} c_1^!(\bar{\mathbb{Q}}_l) = c_{1,*} c_2^!(\bar{\mathbb{Q}}_l).$$

En effet le morphisme $f : \mathcal{M}_I \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_q$ étant lisse, on a $f^!(\bar{\mathbb{Q}}_l) = f^*(\bar{\mathbb{Q}}_l(d)[2d])$ (cf. [28] exposé XVIII). Comme $f \circ c_1 = f \circ c_2$, on a alors $c_1^! \circ f^! = c_2^! \circ f^!$ et $c_1^!(\bar{\mathbb{Q}}_l)$ est isomorphe à $c_2^!(\bar{\mathbb{Q}}_l)$;

- $R\Psi_{\eta_o}(c_2^!(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \longrightarrow c_2^! R\Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)$, par changement de base.

Cette action est définie sur $\mathbb{Q}_l$ et commute à l'action de Γ_o . L'isomorphisme 3.1.2 est alors $\mathcal{H}_I^\infty \times \Gamma_o$ -équivariant. La limite directe sur le système inductif paramétré par les idéaux I de A , les morphismes de transition étant induits par les morphismes de restriction du niveau $r_{J,I}$,

$$EV_o^i = \varinjlim_I EV_{o,I}^i,$$

est alors muni d'une action de $\mathcal{H}^\infty$, définie sur $\mathbb{Q}_l$ et commutant à l'action de Γ_o . Les morphismes de transition étant injectifs, pour tout idéal I de A , on considère $EV_{o,I}^i$ comme un sous-espace vectoriel de EV_o^i et on a

$$EV_{o,I}^i = (EV_o^i)^{K_I^\infty},$$

où l'action de $\mathcal{H}_I^\infty$ sur $EV_{o,I}^i$, correspond à l'action induite de $\mathcal{H}_I^\infty$ sur les vecteurs de EV_o^i invariants sous K_I^∞ . L'isomorphisme 3.1.2 fournit un isomorphisme $(D^\infty)^\times \times \Gamma_o$ -équivariant

$$H_{\eta_o}^i \simeq EV_o^i \tag{3.1.3}$$

Pour tout idéal I , les $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espaces vectoriels $EV_{o,I}^i$ étant de dimension finie, on a le lemme suivant.

Lemme 3.1.4 *Pour tout entier i , EV_o^i , en tant qu'objet de la catégorie $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$, est isomorphe à $H_{\eta_o}^i$.*

3.2 Supports et germes des cycles proches de $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}$.

Proposition 3.2.1 *Le support de $R^i\Psi_{\eta_o}$ est contenu dans la $i+1$ -ème strate $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq i+1}$ de $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}$. De plus si $\bar{z}$ est un point géométrique de $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{\geq i+1}$, la fibre de $R^i\Psi_{\eta_o}$ en $\bar{z}$ est donnée par*

$$\Psi_n^{i,i-1} = H^{i-1}(\mathrm{Spec}(D_n^i \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\bar{o}}^{\mathrm{nr}}} \hat{F}^{\mathrm{nr}}), \bar{\mathbb{Q}}_l).$$

Preuve : Pour tout entier i , on a $\dim \mathrm{Supp}(R^i\Psi_{\eta_o}) \leq d-1-i$. D'après le lemme 3.1.1, pour tout point géométrique $\bar{z}$ de $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{\geq h}$, la fibre de $R^i\Psi_{\eta_o}$ en $\bar{z}$ est égale à $H^i(\widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{z})}} \otimes_{F_o^{\mathrm{nr}}} \bar{F}_o, \bar{\mathbb{Q}}_l)$. D'après le théorème de Serre-Tate, $\widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{z})}}$ est isomorphe à

$$\mathrm{Spec} \left(D_n^h \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}(o)} \bar{\kappa}(o)[[t_1, \dots, t_{d-h}]] \right).$$

Cette fibre ne dépend ainsi que de la strate à laquelle $\bar{z}$ appartient. Les strates $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h}$ étant de dimension $d-h$, on en déduit que le support de $R^i\Psi_{\eta_o}$ est inclus dans $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq i+1}$. De plus d'après le théorème de changement de base lisse en cohomologie étale, la cohomologie de $D_n^h \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}(o)} \bar{\kappa}(o)[[t_1, \dots, t_{d-h}]]$ est la même que celle de D_n^h .

□

4 Uniformisation du complété formel le long de l'ensemble des points supersinguliers.

Le but de ce paragraphe est de décrire $\widehat{\mathcal{M}_{I,\text{Sing}}}$, le complété formel de

$$\mathcal{M}_I = (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}) \times_{X'} \text{Spec } \mathcal{O}_o$$

le long des points supersinguliers. De manière équivalente, cela revient à décrire le complété formel de $\mathcal{M}_I \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o^{\text{nr}}$ le long de $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^d$ muni de l'action du Frobenius en o .

Soit G_o un $\mathcal{O}_o$ -module formel normal sur $\bar{\kappa}(o)$, de hauteur d . On note D_n^d son anneau des déformations universelles. Pour tout entier m , on pose

$$D_n^{d,(m)} = D_n^d \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}, \alpha} \hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}$$

où α est la puissance m -ème de l'inverse du relèvement canonique $\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}$ du Frobenius de $\kappa(o)$. On rappelle (cf. le paragraphe 3.2.2 du premier chapitre) que $D_n^{d,(m)}$ est l'anneau des déformations universelles de $\text{Frob}_o^m(G_o)$. L'action du sous-groupe $\mathfrak{P}$ de $GL_d(F_o) \times \bar{D}_o^\times \times \Gamma_o$ sur $\varinjlim_n \text{Spec } D_n^d$, donnée au paragraphe 3.2.2 du premier chapitre, peut s'interpréter en disant que

$$\coprod_{m \in \mathbb{Z}} \varinjlim_n \text{Spec } D_n^{d,(m)}$$

est muni d'une action $GL_d(F_o) \times \bar{D}_o^\times \times \text{Frob}_o^{\mathbb{Z}}$. L'action de Frob_o est alors donné par les isomorphismes canoniques d'anneaux (et non de $\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}$ -algèbre)

$$\text{Spec } D_n^{d,(m)} \xrightarrow{\sim} \text{Spec } D_n^{d,(m+1)}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

A tout élément g_o (resp. δ_o) de $GL_d(F_o)$ (resp. de $\bar{D}_o^\times$) est associé un isomorphisme

$$\varinjlim_n \text{Spec } D_n^{d,(m)} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_n \text{Spec } D_n^{d,(m+r)}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

où $r = -\text{val}(\det g_o)$ (resp. $r = \text{val}(\text{rn}(\delta_o))$). Le $\mathcal{O}_o$ -module formel G_o étant choisi normal, $(\pi_o^{-1}, 1, \text{Frob}_o^{-d})$ agit trivialement.

Proposition 4.1 *Pour tout idéal I de A , on a un isomorphisme*

$$\widehat{\mathcal{M}_{I,\text{Sing}}} \xrightarrow{\sim} \bar{D}^\times \setminus \left[(D^{\infty,o})^\times / K_I^{\infty,o} \times \coprod_{m \in \mathbb{Z}} \text{Spec } D_n^{d,(m)} \right]. \quad (4.2)$$

compatible à l'action de Frob_o ainsi qu'aux morphismes de restriction du niveau.

Preuve : D'après le paragraphe 5.4 du chapitre précédent, il existe un seul (D, ∞, o) -type pour les points supersinguliers, $(F, \tilde{\Pi}_F)$ (cf. la proposition 5.2.1 du chapitre précédent). Soit alors (V, φ, λ) , un φ -espace muni d'une action de D qui a $(F, \tilde{\Pi}_F)$ pour (D, ∞, o) -type (cf. le paragraphe 5.3 du chapitre précédent). On note $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}, I}^\infty = \mathcal{Y}_I^{\infty, o} \times \mathcal{Y}_o$ (cf loc. cit.), l'ensemble, pour toutes les places x de F , des $\mathcal{D}_x$ -réseaux M_x de V_x muni d'une structure de niveau α_{x, n_x} ($I = \prod_x \mathfrak{m}_x^{n_x}$), qui vérifient les conditions (i)-(iv) de la proposition 5.1.2 du chapitre précédent. L'ensemble des points supersinguliers $\text{Sing}_I(\bar{\kappa}(o))$ est alors isomorphe à $\bar{D}^\times \backslash \mathcal{Y}_{\mathbb{A}, I}^\infty$ où $\bar{D} = \text{End}(V, \varphi)$ (cf. le paragraphe 5.5 du chapitre précédent).

On fixe un point base $s_0 = (M_x(s_0), \alpha_x(s_0))_{x \in |X|}$ de $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}, I}^\infty$ tel que le $\mathcal{O}_o$ -module formel G_o associé au $\mathcal{D}_o$ -réseau $M_o(s_0)$ est normal. Le choix de ce point base donne un isomorphisme

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{A}, I}^\infty \simeq (D^{\infty, o})^\times / K_I^{\infty, o} \times \mathbb{Z}.$$

On note $(\bar{\mathcal{E}}_i(s_0), \bar{j}_i(s_0), \bar{t}_i(s_0))$ le $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique défini sur $\bar{\kappa}(o)$, muni d'une I -structure de niveau $\bar{t}_I(s_0)$, tel que pour tout place x de F , $\mathcal{E}_{0, x}(s_0) = M_x(s_0)$ et $\iota_x(s_0) = \alpha_x(s_0)$. Pour un point supersingulier $\bar{s}$ et $s = (\bar{d}^{\infty, o}, m)$ un élément de $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}, I}^\infty$ dans la classe de $\bar{s}$, on a un isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{M}_{I, (\bar{s})}} \longrightarrow \text{Spec } D_n^{d, (m)},$$

(n est la multiplicité de o dans I), donné par le théorème de Serre-Tate en considérant $\widehat{\mathcal{M}_{I, (\bar{s})}}$ comme représentant les déformations de

$$(\bar{d}^{\infty, o}, \text{Frob}_o^m)((\bar{\mathcal{E}}_i(s_0), \bar{j}_i(s_0), \bar{t}_i(s_0)), \iota_I(s_0)).$$

On obtient alors un isomorphisme

$$\coprod_{s \in \mathcal{Y}_{\mathbb{A}, I}^\infty} \widehat{\mathcal{M}_{I, (\bar{s})}} \longrightarrow (D^{\infty, o})^\times / K_I^{\infty, o} \times \coprod_{m \in \mathbb{Z}} \text{Spec } D_n^{d, (m)}, \quad (4.3)$$

compatible à l'action de Frob_o et aux morphismes de restriction du niveau. L'action de $\bar{D}_o^\times$ sur le membre de droite de 4.3 permet de définir une action de $\bar{D}_o^\times$ sur le membre de gauche de 4.3 de sorte que l'action de $\bar{D}^\times \subset \bar{D}_o^\times$ ainsi définie, relève l'action de $\bar{D}^\times$ sur $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}, I}^\infty$. L'isomorphisme 4.2 découle alors de l'isomorphisme $\widehat{\mathcal{M}_{I, \text{Sing}}} \simeq \coprod_{x \in \text{Sing}_I(\bar{\kappa}(o))} \widehat{\mathcal{M}_{I, (x)}}$. □

Proposition 4.4 *En passant à la limite sur tous les idéaux I de A , les isomorphismes 4.2 donnent un isomorphisme $(D^\infty)^\times$ -équivariant*

$$\varinjlim_I \widehat{\mathcal{M}_{I, \text{Sing}}} \xrightarrow{\sim} \bar{D}^\times \backslash \left[(D^{\infty, o})^\times / (\mathcal{D}^{\infty, o})^\times \times \coprod_{m \in \mathbb{Z}} \varinjlim_n \text{Spec } D_n^{d, (m)} \right], \quad (4.5)$$

où $(D^{\infty, o})^\times$ opère à droite sur $(D^{\infty, o})^\times / (\mathcal{D}^{\infty, o})^\times$.

Preuve : L'isomorphisme de l'énoncé est clairement $(D^{\infty,o})^\times$ -équivariant. Soit donc g_o un élément de $GL_d(F_o) \cap \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$. L'action de g_o sur le membre de droite de 4.5 (resp. sur le membre de gauche de 4.5) donne pour tout m des morphismes $g_o^{drt}(m)$ (resp. $g_o^{gch}(m)$)

$$\varinjlim_n \text{Spec } D_n^{d,(m)} \longrightarrow \varinjlim_n \text{Spec } D_n^{d,(m+r)}$$

où $r = -\text{val}(\det g_o)$. Il faut vérifier que, pour tout m , $g_o^{gch}(m) = g_o^{drt}(m)$. Un point base s_0 de $\mathcal{Y}_{\mathbb{A},I}^\infty$ étant fixé comme dans la preuve de la proposition précédente, soit $s = (\bar{d}^{\infty,o}, m)$ l'élément de $\mathcal{Y}_{\mathbb{A},I}^\infty$, image du point base s_0 par $(\bar{d}^{\infty,o}, m)$. Soit $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I)$ la déformation universelle, définie sur $S = \text{Spec } D_n^{d,(m)}$ (n est la multiplicité de o dans I), de $(\bar{d}^{\infty,o}, \text{Frob}_o^m)((\bar{\mathcal{E}}_i(s_0), \bar{j}_i(s_0), \bar{t}_i(s_0)), \bar{t}_I(s_0))$. On note $((\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1), \iota_I^1)$ le $\mathcal{D}$ -faisceau elliptique du paragraphe 3.4.2 du deuxième chapitre, image de $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I)$ par g_o^{-1} . Sur le point générique η de S , $(\mathcal{F}_o^1)^* \times_S \eta$ est isomorphe à $\text{Ker}[g_o]^* \times_S \eta \subset \mathcal{F}_o^* \times_S \eta$ (cf. le cas c2) du dit paragraphe) et le $\mathcal{O}_o$ -module formel $Gr_o(\mathcal{F}_o^1) \times_S \eta$ est alors isomorphe au $\mathcal{O}_o$ -module formel $Gr_o(\mathcal{F}_o)_{\text{Ker } g_o} \times_S \eta$ (cf. les notations du paragraphe 3.2.2 du premier chapitre). On a alors, pour tout m , $g_o^{gch}(m) \times_S \eta = g_o^{drt}(m) \times_S \eta$, d'où $g_o^{gch}(m) = g_o^{drt}(m)$. □

5 Calcul des coefficients $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^n)$, pour τ_o cuspidale.

On rappelle que pour tout idéal I de A , on a posé $\mathcal{M}_I = (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}) \times_{X', \text{Spec } \mathcal{O}_o}$. On note encore n la multiplicité de o dans I .

5.1 Les strates ouvertes non supersingulières ne contiennent pas de cuspidale.

On note $\mathcal{M}_{I,o}^{\bar{h}}$ la h -ème strate de $\mathcal{M}_{I,o}$, c'est-à-dire avec les notations du chapitre précédent $\mathcal{M}_{I,o}^{\bar{h}} = (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I,o}^{\bar{h}}/\mathbb{Z})$. D'après la proposition 4.3 du chapitre 3, on a

$$\mathcal{M}_{I,o}^{\bar{h}} = \text{Ind}_{P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)}^{GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)}(\mathcal{M}_{I,o}^{\bar{h}})_{\mathbb{I}},$$

où n est la multiplicité de o dans I . En passant à la limite sur les idéaux I de A , on a

$$\mathcal{M}_o^{\bar{h}} = \text{Ind}_{P_h(F_o)}^{GL_d(F_o)}(\mathcal{M}_o^{\bar{h}})_{\mathbb{I}},$$

où $\mathcal{M}_o := \varprojlim_I \mathcal{M}_{I,o}$.

Proposition 5.1.1 *Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq d-1$, pour toute représentation irréductible admissible τ^∞ de $(D^\infty)^\times$ telle que $(\tau^\infty)_o$ est une représentation cuspidale de $GL_d(F_o)$ et pour toute représentation l -adique irréductible σ_o de Γ_o , les multiplicités*

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o} \left(\varprojlim_I H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{\bar{h}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \right),$$

sont nulles, quels que soient les entiers p et i .

Preuve : Pour tout idéal I de A , le $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel $H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{\bar{h}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l))$ se décompose en une somme directe

$$\bigoplus_{\bar{g} \in GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)} H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{\bar{h}})_{\bar{g}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)),$$

où n est la multiplicité de o dans I . Pour tout élément $g' \in GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$, on a

$$g'(H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{\bar{h}})_{\bar{g}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \subset H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{\bar{h}})_{g'\bar{g}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)).$$

D'après le lemme 4.4 du chapitre précédent, on a alors

$$H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{\bar{h}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)) = \text{Ind}_{P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)}^{GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)} H_c^p((\mathcal{M}_{I,o}^{\bar{h}})_{\mathbb{I}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)).$$

Par passage à la limite sur tous les idéaux I de A , on obtient une bijection $GL_d(\mathcal{O}_o)$ -équivariante

$$\varprojlim_I H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{\bar{h}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)) = \text{Ind}_{P_h(\mathcal{O}_o)}^{GL_d(\mathcal{O}_o)} \varprojlim_I H_c^p((\mathcal{M}_{I,o}^{\bar{h}})_{\mathbb{I}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)).$$

On a de plus une action de $P_h(F_o)$ sur $\varinjlim_I H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}^{-h})_{\bar{1}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}))$. La décomposition d'Iwasawa $GL_d(F_o) = P_h(F_o) \cdot GL_d(\mathcal{O}_o)$ donne alors une bijection $GL_d(F_o)$ -équivariante

$$\varinjlim_I H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}^{-h}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}})) = \text{Ind}_{P_h(F_o)}^{GL_d(F_o)} \varinjlim_I H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}^{-h})_{\bar{1}}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}})).$$

Le lemme 1.7.1 du premier chapitre donne alors la nullité des multiplicités

$$\lambda_{(\tau^\infty)_o \otimes \sigma_o} \left(\varinjlim_I H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}^{-h}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}})) \right)$$

ce qui entraîne la nullité des multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o} \left(\varinjlim_I H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}^{-h}, R^i \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}})) \right)$. $\square$

5.2 Suites spectrales et points supersinguliers.

Pour tout idéal I de A , on a une filtration de $\mathcal{M}_{I,o}$ par des fermés

$$\emptyset \neq \mathcal{M}_{I,o}^{-d} = \mathcal{M}_{I,o}^{\geq d} \subset \mathcal{M}_{I,o}^{\geq d-1} \subset \dots \subset \mathcal{M}_{I,o}^{\geq 1} = \mathcal{M}_{I,o}.$$

A cette filtration est associée la suite spectrale (cf. [29] *Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques*)

$$E_{1,I}^{v;p,q} = H_c^{p+q}(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}^{-p-1}, R^v \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}})) \implies H_c^{p+q}(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}, R^v \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}})).$$

Proposition 5.2.1 *Pour tout entier positif v , pour toute représentation irréductible admissible τ^∞ de $(D^\infty)^\times$ telle que $(\tau^\infty)_o$ est cuspidale et pour toute représentation l -adique irréductible σ_o de Γ_o , les multiplicités*

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o} \left(\varinjlim_I H^n(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}, R^v \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}})) \right)$$

sont nulles pour n strictement positif, et pour $n = 0$, elles sont égales à

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o} \left(\varinjlim_I H^0(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}^{-d}, R^v \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}})) \right).$$

Preuve : D'après la proposition 5.1.1, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{1,I}^{v;p,q})$ sont nulles pour $(p, q) \neq (d+1, -d-1)$. On rappelle que $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}$ est additive sur les suites exactes courtes et est positive sur les représentations effectives de sorte que, si pour un objet V de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$, $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(V)$ est nulle, alors il en est de même pour tout sous-quotient de V . Par récurrence sur r , $E_{r,I}^{v;p,q}$ étant un sous-quotient de

$E_{r-1,I}^{v;p,q}$, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{r,I}^{v;p,q})$ sont nulles pour $(p, q) \neq (d+1, -d-1)$.

La suite $(E_{r,I}^{v;p,q})_r$ étant stationnaire pour r assez grand, on a donc

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{\infty,I}^{v;p,q}) = 0.$$

$E_{\infty,I}^{v;n}$ étant filtré par les $E_{\infty,I}^{v;p,q}$ pour $p+q=n$, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{\infty,I}^{v;n})$ sont alors nulles pour n strictement positif. On a aussi l'égalité

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{1,I}^{v;p,q}) = \sum_n (-1)^n \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{\infty,I}^{v;n}).$$

On en déduit donc que $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{\infty,I}^{v;0})$ est égale à $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{1,I}^{v;d+1,-d-1})$. □

Pour tout idéal I de A , la suite exacte des cycles évanescents (cf. 3.1.2) d'objets de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ (cf. le lemme 3.1.4)

$$E_{2,I}^{u,v} = H_c^u(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}, R^v \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \implies H_{\eta_o,I}^{u+v},$$

permet, compte tenu de la proposition précédente, de prouver la proposition suivante.

Proposition 5.2.2 *Pour toute représentation τ^∞ irréductible de $(D^\infty)^\times$ telle que $(\tau^\infty)_o$ est une représentation cuspidale de $GL_d(F_o)$ et pour toute représentation l -adique irréductible σ_o de Γ_o , les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^n)$ sont, pour tout n , égales à*

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o} \left(H^0(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}^d, R^n \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \right).$$

Preuve : D'après la proposition précédente, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{2,I}^{u,v})$ sont nulles pour $u \neq 0$ et pour $u = 0$, elles sont égales à

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o} \left(\varinjlim_I H_c^0(\mathcal{M}_{I,\bar{\sigma}}^d, R^v \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \right).$$

Par récurrence sur r , $E_{r,I}^{u,v}$ étant isomorphe à $\text{Ker } d_{r,I}^{u,v} / \text{Im } d_{r,I}^{u-r,v-r+1}$, le lemme suivant montre que pour tout u, v , $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{r,I}^{u,v})$ est égale à $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{2,I}^{u,v})$.

La suite $(E_{r,I}^{u,v})_r$ étant stationnaire pour r assez grand, on a donc

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{\infty,I}^{u,v}) = \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{2,I}^{u,v}).$$

Ces multiplicités étant nulles pour $u \neq 0$, et $E_{\infty,I}^n$ étant filtré par les $E_{\infty,I}^{u,v}$ pour $u+v=n$, on a alors

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{\infty,I}^n) = \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\varinjlim_I E_{2,I}^{0,n}),$$

d'où la proposition. □

Lemme 5.2.3 *Soient U, V, W des objets de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ et $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow W$ des flèches de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$. Si dans $K_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(U)$ et $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(W)$ sont nulles, on a alors l'égalité numérique*

$$\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\text{Ker } g / \text{Im } f) = \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(V).$$

Preuve : La multiplicité $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}$ est additive sur les suites exactes courtes et est positive sur les objets effectifs. Ainsi pour tout sous-quotient V' de U ou de W , on a $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(V') = 0$. Comme $V / \text{Ker } g$ est isomorphe à un sous-espace de W , alors $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(V / \text{Ker } g)$ est nulle, soit $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\text{Ker } g) = \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(V)$. On a de plus une surjection de U sur $\text{Im } f$, d'où $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\text{Im } f) = 0$ et finalement l'égalité $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\text{Ker } g / \text{Im } f) = \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(V)$. □

D'après un théorème de Berkovich (cf. [1] et le lemme 3.1.1 de ce texte), on a

$$H^0(\mathcal{M}_{I, \bar{\sigma}}^{\bar{d}}, R^n \Psi_{\eta_o}(\bar{\mathbb{Q}}_l)) = H^n(\widehat{\mathcal{M}_{I, \text{Sing}}}, \bar{\mathbb{Q}}_l)$$

et donc la proposition suivante.

Proposition 5.2.4 *Sous les hypothèse de la proposition précédente, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^n)$ sont, pour tout n , égales à $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o} \left(\varinjlim_I H^n(\widehat{\mathcal{M}_{I, \text{Sing}}}, \bar{\mathbb{Q}}_l) \right)$.*

Remarque : On a des énoncés identiques en considérant les multiplicités $\lambda_{(\tau^\infty)_o \otimes \sigma_o}$.

6 La représentation locale fondamentale revisitée.

On fixe un caractère ξ_o de $F_o^\times$ d'ordre fini et soit ξ'_o la restriction de ξ_o à $\mathcal{O}_o^\times$. Pour un objet V de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$, on a

$$V = \varinjlim_{K \in \mathcal{I}} V^K,$$

où $\mathcal{I}$ est un ensemble de sous-groupes compacts, ouverts de $D_o^\times \simeq GL_d(F_o)$, qui est un système fondamental de voisinages de l'élément neutre. Chaque V^K est alors de dimension finie et est de plus muni d'une action de $GL_d(\mathcal{O}_o)$. On pose alors

$$V(\xi'_o) = \varinjlim_{K \in \mathcal{I}} V^K(\xi'_o),$$

et on définit $V(\xi_o)$ comme le quotient $V(\xi'_o)/(\pi_o - \xi_o(\pi_o).Id)V(\xi'_o)$.

Remarque : Si on écrit l'image $[V]$ de V dans $K_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ sous la forme $\sum \lambda_M[M]$ où la somme porte sur les éléments irréductibles M de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$, alors $[V(\xi_o)]$ est égal à $\sum \lambda_M[M]$ où la somme porte cette fois sur les éléments irréductibles M de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$ tel que le centre de $F_o^\times \subset D_o^\times$ y agit par le caractère ξ_o .

On rappelle que la représentation $\mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)$ du premier chapitre est isomorphe à la somme directe

$$\bigoplus_{m=0}^{d-1} \varinjlim_n H^i(\text{Spec } D_n^{d,(m)} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}} \overline{\hat{F}^{\text{nr}}}, \bar{\mathbb{Q}}_l)(\xi'_o),$$

où l'action de $GL_d(F_o) \times \bar{D}_o^\times \times \Gamma_o$ se décrit comme suit. Pour tout m ,

$$\varinjlim_n H^i(\text{Spec } D_n^{d,(m)} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}} \overline{\hat{F}^{\text{nr}}}, \bar{\mathbb{Q}}_l)(\xi'_o)$$

est muni d'une action du sous-groupe $\mathfrak{P}$ défini comme le noyau de l'application

$$(g_o, \delta_o, \sigma_o) \mapsto \text{val}(\det(g_o^{-1} \text{rn}(\delta_o) cl(\sigma_o)) \bmod d.$$

Soit $\tau_o \in \Gamma_o$ tel que son image dans $F_o^\times$ par le morphisme de la théorie du corps de classe, soit égale à π_o . L'élément τ_o induit, pour $0 \leq m \leq d-2$, des isomorphismes $\text{Spec } D_n^{d,(m)} \xrightarrow{\sim} \text{Spec } D_n^{d,(m+1)}$, de sorte que l'endomorphisme associé à τ_o^d est égal à $\xi_o(\pi_o)^{-1} Id$.

Proposition 6.1 *Pour tout entier i positif, $\left(\varinjlim_{\mathcal{I}} H^i(\widehat{\mathcal{M}}_{I, \text{Sing}}, \bar{\mathbb{Q}}_l) \right)(\xi_o)$ est isomorphe, en tant qu'objet de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$, au quotient*

$$\bar{D}^\times \setminus [(\bar{D}^{\infty, o})^\times / (\mathcal{D}^{\infty, o})^\times \times \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)].$$

Preuve : D'après la proposition 4.4, pour tout idéal I de A , on a

$$\widehat{\mathcal{M}_{I,\text{sing}}} \simeq \bar{D}^\times \setminus \left[(\bar{D}^{\infty,o})^\times / K_I^{\infty,o} \times \coprod_{m \in \mathbb{Z}} \text{Spec } D_n^{d,(m)} \right],$$

où n est la multiplicité de o dans I . Ainsi $H_c^i(\widehat{\mathcal{M}_{I,\text{sing}}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est isomorphe à

$$\bar{D}^\times \setminus \left[(D^{\infty,o})^\times / K_I^{\infty,o} \times \coprod_{m \in \mathbb{Z}} H_c^i(\text{Spec } D_n^{d,(m)} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\text{nr}}} \overline{\hat{F}^{\text{nr}}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \right],$$

d'où la proposition. □

On pose

$$\bar{\mathfrak{C}} := C^\infty(\bar{D}(F)^\times \setminus (\bar{D}^\infty)^\times),$$

et on note $\check{\mathfrak{C}}$ la contragrédiente de $\bar{\mathfrak{C}}$.

Proposition 6.2 *Pour tout entier i , $\left(\varinjlim_I H^i(\widehat{\mathcal{M}_{I,\text{sing}}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \right) (\xi_o)$ est isomorphe, en tant qu'objet de $C_{(D^\infty)^\times, \Gamma_o}$, à*

$$\left[\check{\mathfrak{C}} \otimes \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o) \right]^{\bar{D}_o^\times}.$$

Preuve : Le quotient $\bar{D}^\times \setminus [(\bar{D}^{\infty,o})^\times \times \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)]$ est en bijection avec l'ensemble des fonctions $f' : (\bar{D}^{\infty,o})^\times \longrightarrow \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)$ telles que

$$\forall \gamma \in (\bar{D}^{\infty,o})^\times \text{ et } \forall \delta \in \bar{D}^\times, \quad f'(d\gamma) = d_o f'(\gamma),$$

où d_o désigne l'image de d dans $\bar{D}_o^\times$. Soit donc f' une telle fonction. On définit une fonction $f : (\bar{D}^\infty)^\times \longrightarrow \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)$ par la formule

$$f(\gamma) = \gamma_o^{-1} f'(\gamma_o).$$

On vérifie alors que pour tout élément d de $\bar{D}^\times$ et tout élément δ_o de $\bar{D}_o^\times$, on a

$$f(d\gamma\delta_o) = \delta_o^{-1} \gamma_o^{-1} d_o^{-1} f'((d\gamma)^o) = \delta_o^{-1} \gamma_o^{-1} f'((d\gamma)^o) = \delta_o^{-1} f(\gamma).$$

Ainsi $\bar{D}^\times \setminus [(\bar{D}^{\infty,o})^\times \times \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)]$ est en bijection $(\bar{D}^\infty)^\times \times D_o^\times \times \Gamma_o$ -équivariante avec l'ensemble

$$\{f : (\bar{D}^\infty)^\times \longrightarrow \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o) \mid \forall \delta_o \in \bar{D}_o^\times, \forall d \in \bar{D}^\times \forall \gamma \in (\bar{D}^\infty)^\times f(d\gamma\delta_o) = \delta_o^{-1} f(\gamma)\},$$

d'où la proposition. □

Le $\bar{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel $\bar{\mathfrak{C}}$ se décompose comme la somme directe

$$\bigoplus_{\substack{\bar{\tau} \\ \bar{\tau}_\infty = 1_\infty}} m(\bar{\tau})\bar{\tau},$$

où $m(\bar{\tau})$ est la multiplicité de $\bar{\tau}$ dans $\bar{\mathfrak{C}}$.

Proposition 6.3 *Pour toute représentation τ^∞ irréductible de $(D^\infty)^\times$ telle que $(\tau^\infty)_o$ est une représentation cuspidale de $GL_d(F_o)$ et pour toute représentation l -adique irréductible σ_o de Γ_o , les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^i)$ sont, pour tout n , données par la somme*

$$\sum_{\bar{\tau} \in \mathcal{A}(\tau^\infty, o)} m(\bar{\tau}) \lambda_{\tau_o \otimes \check{\tau}_o \otimes \sigma_o}(\mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)),$$

où $\mathcal{A}(\tau^\infty, o)$ désigne l'ensemble des sous-représentations $\bar{\tau}$ irréductibles de $\check{\mathfrak{C}}$ telles que $\bar{\tau}^o = \tau^{\infty, o} \otimes 1_\infty$.

Preuve : D'après le corollaire 5.2.4 et la proposition précédente, $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^i)$ est égale à $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}([\check{\mathfrak{C}} \otimes \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)]^{\bar{D}_o^\times})$. La proposition découle alors du lemme de Schur. $\square$

Le théorème 4.1 du premier chapitre s'écrit, avec les notations de ce chapitre, comme suit.

Théorème 6.4 *Soient π_o une représentation irréductible admissible cuspidale de $GL_h(F_o)$ de caractère central ξ_o , ρ_o une représentation irréductible admissible de $D_o^\times$ et σ_o une représentation irréductible l -adique de Γ_o . Alors la multiplicité $\lambda_{\pi_o \otimes \rho_o \otimes \sigma_o}(\mathcal{U}^{d,i}(\xi_o))$ de la représentation irréductible $\pi_o \otimes \rho_o \otimes \sigma_o$ de $GL_h(F_o) \times D_o^\times \times \Gamma_o$ dans la représentation $\mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)$, est nulle si $i \neq d-1$ et pour $i = d-1$, elle est donnée par*

$$\lambda_{\pi_o \otimes \rho_o \otimes \sigma_o}(\mathcal{U}_d(\xi_o)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_o = \mathfrak{J}_{F_o}(\check{\pi}_o) \text{ et } \sigma_o = \mathfrak{L}_{d, F_o}(\pi_o) \\ 0 & \text{si } \rho_o \neq \mathfrak{J}_{F_o}(\check{\pi}_o) \text{ ou } \sigma_o \neq \mathfrak{L}_{d, F_o}(\pi_o). \end{cases}$$

Preuve : Soit π_o une représentation irréductible cuspidale de $GL_d(F_o)$ de caractère central ξ_o (d'ordre fini).

- Soit Π une sous-représentation irréductible de $L_{cusp}(GL_d(F)F_\infty^\times \backslash GL_d(\mathbb{A}))$ vérifiant les hypothèse du lemme 2.3 du premier chapitre, c'est-à-dire telle que

$$\Pi_o \simeq \pi_o \quad \Pi_\infty \simeq St_\infty,$$

et Π_{x_i} est cuspidale pour $i = 1, \dots, 4$.

- Soit τ la représentation de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ donnée par la proposition 2.4.

D'après la proposition 2.1.2 du premier chapitre appliquée à $\bar{D}$, l'ensemble $A(\tau^{\infty, o})$ est alors réduit à un seul élément $\bar{\tau}$ tel que $m(\bar{\tau}) = 1$. Pour σ_o une représentation l -adique de Γ_o , la proposition 6.3 s'écrit

$$\lambda_{\pi_o \otimes \bar{\tau}_o \otimes \sigma_o}(\mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)) = \begin{cases} \lambda_{\tau^{\infty} \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^i) & \text{si } \tau_o = \mathfrak{J}_{F_o}(\pi_o) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour $i = d - 1$, le résultat découle du théorème de Laumon, Rapoport et Stuhler (cf. 2.5), qui donne

$$\lambda_{\tau^{\infty} \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^{d-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_o = \mathfrak{L}_{d, F_o}(\tau_o^{\infty}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour $i \neq d - 1$, le résultat découle alors du théorème de Laumon, Rapoport et Stuhler (cf. 2.2), qui donne

$$\lambda_{\tau^{\infty} \otimes \sigma_o}(H_{\eta_o}^i) = 0 \text{ si } i \neq d - 1.$$

□

Bibliographie

- [1] Berkovich, Vladimir G.: Vanishing cycles for formal schemes. *Invent. Math.* **115** No 3, 539-571 (1994)
- [2] Bernstein, I.N.; Deligne, P.; Kazhdan, D.; Vigneras, M.-F.: Représentations des algèbres centrales simples p -adiques. In: *Représentations des Groupes Réductifs sur un Corps Local*, Hermann, Coll. travaux en Cours, Paris (1984)
- [3] Bourbaki, N.: *Eléments de mathématiques: Algèbre*. Hermann.
- [4] Cartier, P.: Representations of $\mathcal{P}$ -adic groups: A survey. In: Borel, A., Casselman, W. (eds) *Corvallis conference on Automorphic forms, Representations and L -functions*. (Proc. Symp. Pure Math. vol XXXIII, part 1, pp 111-156) Providence, RI: Am. Math. Soc. 1979
- [5] Carayol, H.: Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura. *Composition Mathematica* **59**, 151-236 (1986)
- [6] Carayol, H.: Sur les représentations l -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e séries **19**, 409-468 (1986)
- [7] Carayol, H.: Non-abelian Lubin-Tate Theory. In: Clozel, L., Milne, J.S. (eds) *Automorphics Forms, Shimura Varieties and L -Functions, II. Perspect. Math.* **11**, pp 15-39. Boston: Academic Press 1990
- [8] Curtis, C., Reiner, I.: *Methods of representation theory: with applications to finite groups and orders*, vol. 1. New York: Wiley 1981.
- [9] Deligne, P.: Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L . In: Deligne, P., Kuyk, W. (eds) *Modular functions of one variable II*, Antwerpen conference 1972. (Lect. Notes Math., **349**, 501-597) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973
- [10] Deligne, P., Husemoller, D.: Survey of Drinfel'd modules. In: Ribet, K.A. (ed.) *Current trends in arithmetical algebraic geometry*. (Contemp. Math. vol. 67, pp. 25-91) Providence, RI: Am. Math. Soc. 1987

- [11] Drinfel'd, V.G.: Elliptic modules. Math. USSR, Sb. **23**, 561-592 (1974)
- [12] Drinfel'd, V.G.: Elliptic modules. II. Math. USSR, Sb. **31**, 159-170 (1977)
- [13] Drinfel'd, V.G.: Commutative subrings of certain noncommutative rings. Funct. Anal. Appl. **11**, 9-12 (1977)
- [14] Drinfel'd, V.G.: Varieties of modules of F -sheaves. Funct. Anal. Appl. **21**, 107-122 (1987)
- [15] Drinfel'd, V.G.: Letter to H. Carayol (January 12th, 1980)
- [16] Genestier, A.: Espaces symétriques de Drinfel'd, le cas de GL_d sur un corps local d'égale caractéristique. Prépublications Université de Paris-Sud.
- [17] Hazewinkel, M.: Formal groups and applications. In: Pure and applied mathematics, 1978.
- [18] Henniart, G.: On the local Langlands conjecture for $GL(n)$: The cyclic cas. Ann. Math. **123**, 145-203 (1986)
- [19] Henniart, G.: Les conjectures de Langlands locales pour $GL(3)$. Mémoires S.M.F. nouvelle série, **11/12** (1984)
- [20] Henniart, G.: Le point sur la conjecture de Langlands pour $GL(N)$ sur un corps local. In: Goldstein, C. (ed). Séminaire de théorie des nombres de Paris 1983-1984. (prog. Math., vol 59, pp. 115-131) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1985
- [21] Illusie, L.: Complexe cotangent et déformations. I, II. (Lect. Notes Math., vol. 239, 283) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1971, 1973
- [22] Katz, N., Mazur, B.: Arithmetic moduli of elliptic curves. In: Annals of Math. Studies **108**. Princeton University Press
- [23] Laumon, G., Rapoport, M., Stuhler, U.: $\mathcal{D}$ -elliptic sheaves and the Langlands correspondence. Invent. Math. **113**, 217-238 (1993)
- [24] Laumon, G.: Cohomology with compact supports of Drinfel'd modular varieties. In: Garling, Dieck, Walters (eds.) Cambridge Studies in Advanced Mathematics.
- [25] Matsumura: Commutative Algebra.
- [26] Rapoport, M.: On the bad reduction of Shimura varieties. In: Clozel, L., Milne, J.S. (eds.) Automorphic forms, Shimura varieties, and L -functions II. Perspect. Math. **11**, pp 253-321. Boston: Academic Press 1990

- [27] Reiner, I.: Maximal orders. New York London: Academic Press 1975
- [28] SGA 4 tome 3, Deligne, P.: (Lect. Notes Math., vol. 305) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973
- [29] SGA $4\frac{1}{2}$, Deligne, P.: (Lect. Notes Math., vol. 569) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973
- [30] SGA 5, Grothendieck, A.: Cohomologie l -adique et fonctions L . (Lect. Notes Math., vol 589) Berlin Heidelberg New York: Springer 1977
- [31] SGA 7 I, Deligne, P., Katz, N.: Groupes de monodromie en géométrie algébrique. (Lect. Notes Math., vol. 288) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973
- [32] SGA 7 II, Deligne, P., Katz, N.: Groupes de monodromie en géométrie algébrique. (Lect. Notes Math., vol. 340) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973
- [33] Tate, J.: Number theoretic Background. In: Borel, A., Casselman, W. (eds) Corvallis conference on Automorphic forms, Representations and L -functions. (Proc. Symp. Pure Math. vol XXXIII, part 2, pp 111-156) Providence, RI: Am. Math. Soc. 1979